




## Reliability Estimation in a Multicomponent $n_1$ Stress- $n_2$ Strength Model in the Inverse Exponential Distribution

Rostami, A. , Khanjari Sadegh, M. , Khorashadizadeh, M.   
Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

**Corresponding author:** M. Khanjari, mkhanjari@birjand.ac.ir

Received: 6/3/2022 Revised: 10/9/2022 Accepted and Published Online: 17/9/2022.

### Introduction

In this paper, the reliability of the multicomponent stress-strength model is studied. The system components may experience the same or different stress levels. In some cases, several stresses are imposed on a system simultaneously, and if the system's strength is greater than the stresses, the system remains intact. This article considers a multicomponent system with  $n_2$  components when  $n_1$  stresses are imposed on each component simultaneously, and all stresses and strengths are independent. The main subject of this model is the study of  $R_{r,k} = P(X_{r:n_1} < Y_{k:n_2})$ , where  $X_{r:n_1}$  is the  $r$ th ordered stress variable and  $Y_{k:n_2}$  is the  $k$ th ordered strength variable. The stress and strength variables distributions are considered the inverse Exponential with unknown scale parameters. Based on the inverse Exponential distribution,  $R_{r,k}$  is obtained. The  $k$ -out-of- $n_2$ :F system and its exceptional cases, series and parallel systems are studied. In a  $k$ -out-of- $n_2$ :F system, the system is failed if at least  $k$  components fail. Therefore, the reliability of the system is  $R_{n_1,k} = P(\text{at least } n_2 - k + 1 \text{ of the } Y_i\text{s exceed } X_{n_1:n_1})$ . The special cases of this system are series and parallel systems, whose the stress-strength reliabilities are  $R_{n_1,1}$  and  $R_{n_1,n_2}$ , respectively.  $R_{n_1,k}$  is the probability that the maximum of stresses is less than the  $k$ th strength,  $R_{n_1,1}$  is the probability that the maximum of stresses is less than the minimum of strengths and  $R_{n_1,n_2}$  is the probability that the maximum of stresses is less than the maximum of strengths.

### Material and Methods

One of the most important topics in stress-strength models is the estimation

of the reliability parameter. We take a random sample from each distribution of stress and strength variables. The scale parameters are estimated by the maximum likelihood method, and according to the invariance property of this estimator,  $R_{r,k}$  is estimated. Also, the maximum likelihood estimators of  $R_{n_1,k}$ ,  $R_{n_1,1}$  and  $R_{n_1,n_2}$  are provided. Using the Delta method, the asymptotic distribution of the estimation of  $R_{r,k}$  and the asymptotic confidence interval for  $R_{r,k}$  have been obtained.

### Results and Discussion

Simulation study for the  $n_1 = 5$  stress and  $n_2 = 7$  strength model is performed. The stress-strength reliability of the 3-out-of-7:F system and that of the series and parallel systems are estimated. Simulation results show that if the sample size increases, the absolute value of the bias of the maximum likelihood estimator and the mean square error always decreases. Also, two real data sets are considered. The Exponential and inverse Exponential distributions were fitted to both data sets. In the  $n_1 = 5$  stress and  $n_2 = 7$  strength model, it is observed that when  $r = 5$  and  $k = 3, 7$ , the inverse Exponential distribution is better than the Exponential distribution and for  $r = 5$  and  $k = 1$ , the Exponential distribution is better than the inverse Exponential distribution.

### Conclusion

In this article, we considered the  $n_1$  stress- $n_2$  strength model if the distributions of stress and strength variables are inverse Exponential with different parameters. Using the maximum likelihood method,  $R_{r,k}$  is estimated, and its asymptotic confidence interval is derived. The simulation results show that for  $R_{n_1,k}$ , the absolute values of its biases are small. If the sample size increases, the trend of the biases' absolute values decreases and the mean square error is constantly decreasing. The paper's results can be used for the stress-strength model when several stresses are applied to the system components simultaneously, and each component has its strength. Further research in this model can be done with other probability distributions.

**Keywords:** Reliability, Stress-Strength Model, Maximum Likelihood Estimation, Asymptotic Confidence Interval.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62N05, 62N02.



©The Author(s). The Publisher is Iranian Statistical Society.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of [\(CC BY-NC 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)



## برآورد قابلیت اعتماد در مدل $n_1$ تنش- $n_2$ مقاومت در توزیع نمایی معکوس

علی رستمی، محمد خنجری صادق، محمد خراشادی زاده

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

نویسنده مسئول: محمد خنجری صادق، mkhanjari@birjand.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۶/۱۹ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۶/۲۶

**چکیده:** در این مقاله برآورد  $R_{r,k} = P(X_{r:n_1} < Y_{k:n_2})$ ، در صورتی که تنش  $X$  و مقاومت  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی معکوس با پارامترهای مقیاس مجهول هستند در نظر گرفته شده است. برآورد ماکسیمم درستنمایی  $R_{r,k}$  و بازه اطمینان مجانبی برای آن بدست آورده شده است. مطالعات شبیه‌سازی و عملکرد این مدل برای دو مجموعه داده واقعی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. واژه‌های کلیدی: قابلیت اعتماد، مدل تنش-مقاومت، برآورد ماکسیمم درستنمایی، بازه اطمینان مجانبی. کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N02, 62N05.

## ۱ مقدمه

اگر در یک سیستم مقاومت آن کمتر از تنش وارد شده باشد، سیستم خراب است. اگر متغیر تصادفی  $X$  تنش و متغیر تصادفی  $Y$  مقاومت باشند، پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت  $R = P(X < Y)$  است. استنباط آماری در باره  $R$  توسط **بیرنجام** (۱۹۵۶) آغاز شد و **بیرنجام و مک‌کارتی** (۱۹۵۸) آنرا توسعه دادند. **سنجری و ریاحی** (۱۳۹۲) استنباط درستنمایی و بیزی  $R$  بر اساس داده‌های رکوردی پایین در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب و همچنین بر اساس داده‌های رکوردی بالا در خانواده نرخ خطر متناسب را مطالعه کرده‌اند. **کهن‌سال و همکاران** (۱۳۹۹) برآوردگر بیزی  $R$  در توزیع لوماکس، تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی را در سه حالت پارامترهای مقیاس و شکل متفاوت، پارامتر مقیاس مشترک معلوم و همه پارامترها متفاوت مطالعه کرده‌اند. سایر نویسندگان، استنباط آماری در باره  $R$  برای توزیع‌ها و روش‌های نمونه‌گیری مختلف را مطالعه کرده‌اند (**کاتس و همکاران**، ۲۰۰۳). برای اولین بار قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت سیستم چندمولفه‌ای توسط **باتاچاریا و جانسون** (۱۹۷۴) معرفی شد.



©نویسندگان). ناشر انجمن آمار ایران است.

این مقاله با دسترسی آزاد تحت شرایط و ضوابط (CC BY-NC 4.0) توزیع شده است.

۴۰۰ ..... برآورد قابلیت اعتماد در مدل  $n_1$  تنش- $n_2$  مقاومت

در این مدل یک تنش مشترک به  $n$  متغیر مقاومت مستقل وارد می‌شود به طوری که تنش از مقاومت‌ها مستقل است و در صورتی که حداقل  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) مولفه سالم باشند سیستم سالم است. بعبارت دیگر اگر  $X$  متغیر تنش و  $Y_1, \dots, Y_n$  متغیرهای مقاومت باشند قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای عبارت است از (حداقل  $k$  تا از  $Y_i$ ‌ها بیشتر از  $X$  باشند)  $R_{k,n} = P(X < Y_{n-k+1:n})$  یا  $R_{k,n} = P(X < Y_{n-k+1:n})$ ، که در آن  $Y_{n-k+1:n}$  عبارت است از  $(n - k + 1)$  امین متغیر مقاومت مرتب‌شده. به این مدل، سیستم  $k$  از  $n$  از نوع سالم می‌گویند. فالمنت و همکاران (۲۰۱۷) قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای را در توزیع داگوم مطالعه کردند و برآورد ماکسیمم درست‌نمایی<sup>۱</sup> (MLE) و بازه اطمینان مجانبی<sup>۲</sup> (ACI) را برای آن بدست آوردند. رائو (۲۰۱۳) قابلیت اعتماد مدل یک تنش و  $n$  مقاومت چندمولفه‌ای در صورتی که متغیرهای تنش و مقاومت توزیع نمایی معکوس داشته باشند را با استفاده از MLE و ACI مطالعه کرد. جوشی و پاندیت (۲۰۱۸) قابلیت اعتماد یک سیستم  $k$  از  $n$  از نوع سالم با فرض اینکه متغیرهای تنش و مقاومت از توزیع چن معکوس پیروی می‌کنند را مطالعه کردند و MLE و تقریب لیندلی برای برآوردگر بیز را بدست آوردند.

**ماهتو و تریپاتی (۲۰۲۰)** برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای را با فرض اینکه متغیرهای تنش و مقاومت توزیع رایلی نمای‌شده معکوس دارند و بر اساس نمونه‌های سانسور شده فزاینده نوع II در نظر گرفتند. **ماهتو و کیزیلاسلان (۲۰۲۰)** برآورد قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای تحت سانسور فزاینده نوع II در صورتی که مولفه‌های تنش و مقاومت از یک خانواده از توزیع‌های نمای‌شده معکوس با پارامتر مقیاس مشترک پیروی می‌کنند را در دو حالت که پارامتر مقیاس معلوم و مجهول است در نظر گرفتند. این خانواده شامل توزیع‌های نمای‌شده معکوس، رایلی نمای‌شده معکوس و پارتو نمای‌شده معکوس است. **زارعی و یعقوب‌زاده شهرستانی (۱۳۹۹)** برآوردگرهای بیز و بیز تجربی قابلیت اعتماد مدل تنش-مقاومت چندمولفه‌ای بر اساس توزیع رایلی تعمیم‌یافته در صورتیکه پارامترهای شکل متفاوت باشند را در دو حالت پارامتر مقیاس یکسان معلوم و مجهول بدست آورده‌اند.

در بعضی موارد چند تنش به‌طور همزمان به یک سیستم وارد می‌شوند و در صورتی که مقاومت سیستم بیشتر از تنش‌ها باشد سیستم سالم باقی می‌ماند. مثلاً سه تنش کشش، فشار و برش که در یک زمان بر یک قطعه وارد می‌شوند و مقاومت قطعه باید بزرگتر از این تنش‌ها باشد تا شکل آن تغییر نکند، پنج تنش کششی، درهم‌فشرده‌گی، خمشی، برشی و پیچشی که در یک زمان بر یک هواپیمای در حال پرواز وارد می‌شوند و هواپیما باید بر این تنش‌ها غلبه کند تا به پروازش ادامه دهد یا دو تنش کمبود منابع انسانی و کمبود منابع مالی که به‌طور همزمان یک سازمان را تحت تاثیر قرار می‌دهند. یک سیستم چندمولفه‌ای با  $n_2$  مولفه که به‌طور همزمان  $n_1$  تنش به هر مولفه وارد می‌شوند و همه تنش‌ها و مقاومت‌ها مستقل از هم هستند را در نظر بگیرید. این مدل یک مدل  $n_1$  تنش- $n_2$  مقاومت نامیده می‌شود و موضوع آن مطالعه  $R_{r,k} = P(X_{r:n_1} < Y_{k:n_2})$  است، که در آن  $X_{r:n_1}$   $r$  امین متغیر تنش مرتب‌شده و  $Y_{k:n_2}$   $k$  امین متغیر مقاومت مرتب‌شده هستند. در عمل بسته به نوع سیستم مورد بررسی، آماره‌های

<sup>1</sup>Maximum likelihood estimation

<sup>2</sup>Asymptotic confidence interval

مرتب فوق مشخص می‌شوند به طوری که طراحان و مهندسين سیستم مربوطه بر اساس تجربه و بر اساس معیارهای مختلف اهمیت مولفه‌ها می‌توانند مولفه‌ها را بر حسب مقاومت مرتب کنند و همچنین اینکه مشخص کنند تاثیر منفی کدام تنش بیشتر است. در مثال هواپیما، تنش کششی باعث ایجاد کشش در بعضی از قسمت‌های سازه هواپیما می‌شود. تنش درهم‌فشرده‌گی مخالف جهت کشش بوجود می‌آید که ارباهای فرود هواپیما معمولاً تحت تاثیر این نوع تنش هستند. در حین پرواز نیروی بالا برنده باعث خم شدن بال‌های هواپیما به سمت بالا می‌شود که در این شرایط پوسته فوقانی بال تحت تاثیر نیروی درهم‌فشرده‌گی و در همین حال پوسته تحتانی نیز تحت تاثیر نیروی کششی واقع می‌گردد. تنش پیچشی باعث ایجاد لغزش یا سرش بعضی اجزا در یکدیگر می‌گردد که در نتیجه ممکن است باعث جدا شدن آنها شود بعنوان مثال پرچ‌های بکار برده شده در هواپیما تحت تاثیر این نوع تنش قرار دارند و تنش پیچشی باعث ایجاد تابیدگی در اجزا می‌گردد بعنوان مثال نیروی پیچشی تولید شده توسط موتور هواپیما بر روی شفت اصلی موتور یا محور توربین وارد می‌شود. در مثال سازمان، هر کدام از معاونت‌های سازمان توان مالی محدودی بر حسب یک میلیون تومان در برابر دو تنش وارد شده به آن معاونت که بصورت ضرر مالی بر حسب یک میلیون تومان است، دارند. در هر کدام از این مثال‌ها تنش‌ها و مقاومت‌ها واحد اندازه‌گیری یکسان دارند. تنش‌ها و مقاومت‌ها به‌طور مجزا مرتب شده و در مقاله حاضر  $n$  امین تنش مرتب شده با  $k$  امین مقاومت مرتب شده مقایسه می‌شود. لازم به ذکر است که برای مقایسه  $X$  و  $Y$  در مدل تنش-مقاومت باید مقیاس و واحد اندازه‌گیری هر دوی  $X$  و  $Y$  یکسان باشد. در عمل به شکل طبیعی ممکن است تنش و مقاومت (مخصوصاً وقتی تنش‌های مختلف از انواع متفاوت بر یک قطعه یا سیستم وارد می‌شوند) واحد اندازه‌گیری یکسان نداشته باشند اما معمولاً بسته به نوع مقاومت قطعه یا سیستم همواره یک مقیاس و واحد اندازه‌گیری مشترک وجود دارد که همه تنش‌ها و مقاومت‌ها را می‌توان بر حسب آن مقیاس اندازه‌گیری کرد. بر این اساس مرتب کردن آنها نیز انجام می‌شود. **پاکدامن و احمدی (۲۰۱۳)** مدل  $n_1$  تنش-مقاومت را برای توزیع نمایی در نظر گرفته‌اند و  $R_{r,k}$  را بوسیله MLE و روش‌های نارایب به‌طور یکنواخت دارای کمترین واریانس و بیز برآورد کرده‌اند و تقریب لیندلی برای برآورد بیز را بدست آورده‌اند. **مروا (۲۰۱۷)** قابلیت اعتماد مدل  $n_1$  تنش-مقاومت را در صورتی که متغیرهای تنش و مقاومت توزیع لیندلی دارند را با روش MLE و روش نارایب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم و روش بیز برآورد کرد. **مهدی زاده (۲۰۱۸)** در مدل  $n_1$  تنش-مقاومت برآوردهای ناپارامتری  $R_{r,k}$  را در صورتی که نمونه‌ها بوسیله نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار و نمونه‌گیری مجموعه رتبه‌دار فرین بدست آمده باشند را مطالعه کرد. توزیع طول عمر نمایی توصیف خوبی از طول عمر یک واحد ارابه می‌دهد که با گذشت زمان پیر نمی‌شود. تابع نرخ شکست توزیع نمایی ثابت است. از آنجا که برخی داده‌های طول عمر دارای نرخ شکست وانی شکل معکوس هستند لذا توزیع نمایی معکوس که دارای این ویژگی است برازش بهتری به داده‌ها نسبت به توزیع نمایی که از نرخ شکست ثابت برخوردار است، ارائه می‌دهد.

در این مقاله برای داده‌هایی با نرخ شکست وانی شکل معکوس، مدل  $n_1$  تنش-مقاومت بر اساس توزیع نمایی معکوس در نظر گرفته شده است. فرض کنید متغیر  $X$  توزیع نمایی معکوس با پارامتر مقیاس  $\alpha$  دارد که با

۴۰۲ ..... برآورد قابلیت اعتماد در مدل  $n_1$ -تنش  $n_2$ -مقاومت

نماد  $X \sim IE(\alpha)$  نشان داده می‌شود. تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و تابع نرخ شکست  $X$  بصورت

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{x^2} e^{-\frac{\alpha}{x}}, \quad F_X(x) = e^{-\frac{\alpha}{x}}, \quad r_X(x) = \frac{\alpha}{x^2} \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{x}} - 1}, \quad \alpha > 0, x > 0,$$

هستند. در بخش ۲ تحت توزیع نمایی معکوس مقدار  $R_{r,k}$  بدست آمده است و سیستم  $k$  از  $n_2$  از نوع خرابی و حالت‌های خاص آن، سیستم‌های سری و موازی مطالعه شده‌اند. در یک سیستم  $k$  از  $n_2$  از نوع خرابی، سیستم سالم است اگر و فقط اگر حداقل به ترتیب  $n_2 - k + 1$  مولفه‌اش سالم باشند. بنابراین قابلیت اعتماد سیستم بصورت  $R_{n_1,k} = P(X_{n_1:n_1} < Y_{k:n_2})$  است. حالت‌های خاص، سیستم‌های سری و موازی هستند که قابلیت اعتماد تنش-مقاومت آنها به ترتیب  $R_{n_1,n_2}$  و  $R_{n_1,1}$  هستند.  $R_{n_1,k}$  احتمال اینکه ماکسیم تنش‌ها کمتر از مقاومت  $k$  ام باشد،  $R_{n_1,1}$  احتمال اینکه ماکسیم تنش‌ها کمتر از همه مقاومت‌ها باشد و  $R_{n_1,n_2}$  احتمال اینکه ماکسیم تنش‌ها کمتر از حداقل یکی از مقاومت‌ها باشد یا بعبارت دیگر ماکسیم تنش‌ها کمتر از ماکسیم مقاومت‌ها باشد، هستند. در بخش‌های ۳ و ۴، MLE و ACI برای  $R_{r,k}$ ، به‌دست آورد شده است. در بخش ۵ مطالعه شبیه‌سازی انجام شده و در بخش ۶ از دو مجموعه داده واقعی برای نشان دادن عملکرد MLE استفاده شده است.

## ۲ $R_{r,k}$ در توزیع نمایی معکوس

لم ۱. در مدل  $n_1$ -تنش  $n_2$ -مقاومت اگر  $X$  دارای توزیع  $F_X$  و  $Y$  دارای توزیع  $F_Y$  باشد، آنگاه

$$R_{r,k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \binom{n_1}{j} \int F_X^j(y) [1 - F_X(y)]^{n_1-j} F_Y^{k-1}(y) [1 - F_Y(y)]^{n_2-k} f_Y(y) dy. \quad (1)$$

برهان: با استفاده از قانون احتمال کل، شرطی کردن روی  $Y_{k:n_2}$ ، و استقلال متغیرهای تنش و مقاومت داریم  $R_{r,k} = \int F_{X_{r:n_1}}(y) f_{Y_{k:n_2}}(y) dy$ . با استفاده از تابع چگالی احتمال و تابع توزیع آماره‌های مرتب اثبات کامل می‌شود.

اگر سیستم  $k$  از  $n_2$  از نوع خرابی باشد، آنگاه  $r = n_1$  و قابلیت اعتماد مدل  $n_1$ -تنش  $n_2$ -مقاومت بصورت

$$R_{n_1,k} = k \binom{n_2}{k} \int F_X^{n_1}(y) F_Y^{k-1}(y) [1 - F_Y(y)]^{n_2-k} f_Y(y) dy,$$

است. در حالت خاص سیستم سری که  $k = 1$  است داریم

$$R_{n_1,1} = n_2 \int F_X^{n_1}(y) [1 - F_Y(y)]^{n_2-1} f_Y(y) dy,$$

و در حالت خاص سیستم موازی که  $k = n_2$  است داریم

$$R_{n_1, n_2} = n_2 \int F_X^{n_1}(y) F_Y(y)^{n_2-1} f_Y(y) dy.$$

فرض کنید متغیر تنش  $X$  و متغیر مقاومت  $Y$  به ترتیب توزیع‌های نمایی معکوس  $IE(\alpha)$  و  $IE(\beta)$  داشته باشند. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع آنها به ترتیب عبارتند از

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{x^\alpha} e^{-\frac{\alpha}{x}}, \quad F_X(x) = e^{-\frac{\alpha}{x}}, \quad \alpha > 0, x > 0, \quad (2)$$

$$f_Y(y) = \frac{\beta}{y^\beta} e^{-\frac{\beta}{y}}, \quad F_Y(y) = e^{-\frac{\beta}{y}}, \quad \beta > 0, y > 0. \quad (3)$$

قضیه ۱.  $R_{r,k}$  در مدل  $n_1$ -تنش  $n_2$ -مقاومت بر اساس توزیع نمایی معکوس بصورت

$$R_{r,k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{n_1-j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell} \frac{\beta}{A\alpha + B\beta},$$

است، که در آن  $A = j + i$  و  $B = k + \ell$ .

برهان: با جایگذاری تابع توزیع  $X$  از (۲) و تابع توزیع و تابع چگالی احتمال  $Y$  از (۳) در (۱) داریم

$$R_{r,k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \binom{n_1}{j} \int_0^\infty (e^{-\frac{\alpha}{y}})^j [1 - e^{-\frac{\alpha}{y}}]^{n_1-j} (e^{-\frac{\beta}{y}})^{k-1} [1 - e^{-\frac{\beta}{y}}]^{n_2-k} \frac{\beta}{y^\beta} e^{-\frac{\beta}{y}} dy,$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} R_{r,k} &= k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \binom{n_1}{j} \int_0^\infty \frac{\beta}{y^\beta} e^{-\frac{\alpha j + \beta k}{y}} \sum_{i=0}^{n_1-j} \binom{n_1-j}{i} (-e^{-\frac{\alpha}{y}})^i \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_2-k}{\ell} (-e^{-\frac{\beta}{y}})^\ell dy \\ &= k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{n_1-j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell} \int_0^\infty \frac{\beta}{y^\beta} e^{-\frac{\alpha(j+i) + \beta(k+\ell)}{y}} dy \\ &= k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{n_1-j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell} \frac{\beta}{A\alpha + B\beta}. \end{aligned}$$

اگر سیستم  $k$  از نوع  $n_2$  از نوع خرابی باشد، آنگاه  $A = n_1$  و  $r = n_1, j = n_1, i = 0$  است و قابلیت اعتماد مدل

۴۰۴ ..... برآورد قابلیت اعتماد در مدل  $n_1$ -تنش- $n_2$  مقاومت

$n_1$ -تنش- $n_2$  مقاومت بصورت

$$R_{n_1, k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^\ell \frac{\beta}{n_1\alpha + B\beta}. \quad (4)$$

است. در حالت خاص سیستم سری که  $k = 1$  و  $B = 1 + \ell$  است داریم

$$R_{n_1, 1} = n_2 \sum_{\ell=0}^{n_2-1} \binom{n_2-1}{\ell} (-1)^\ell \frac{\beta}{n_1\alpha + (1+\ell)\beta}, \quad (5)$$

و در حالت خاص سیستم موازی که  $k = n_2, \ell = 0$  و  $B = n_2$  است داریم

$$R_{n_1, n_2} = \frac{n_2\beta}{n_1\alpha + n_2\beta}. \quad (6)$$

### ۳ برآورد ماکسیم درستنمایی $R_{r, k}$

اگر  $X_1, \dots, X_{m_1}$  یک نمونه تصادفی از  $IE(\alpha)$  و  $Y_1, \dots, Y_{m_2}$  یک نمونه تصادفی از  $IE(\beta)$  باشند لگاریتم تابع درستنمایی بصورت

$$\ell(\alpha, \beta) \propto m_1 \log \alpha - \log \prod_{i=1}^{m_1} x_i - \alpha \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i} + m_2 \log \beta - \log \prod_{i=1}^{m_2} y_i - \beta \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{y_i}.$$

است و از مشتق‌های مرتبه اول آن برآوردهای ماکسیم درستنمایی

$$\hat{\alpha} = \frac{m_1}{\sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}, \quad \hat{\beta} = \frac{m_2}{\sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{y_i}}. \quad (7)$$

حاصل می‌شوند. بنا بر ویژگی پایایی MLE، برآورد ماکسیم درستنمایی  $R_{r, k}$  در مدل  $n_1$ -تنش- $n_2$  مقاومت با توزیع نمایی معکوس بصورت

$$\begin{aligned} \hat{R}_{r, k} &= k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{n_1-j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell} \\ &\times \frac{m_2 \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{y_i}}{Am_1 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{y_i} + Bm_2 \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{x_i}}. \end{aligned} \quad (8)$$



است. در سیستم  $k$  از نوع خرابی داریم

$$\hat{R}_{n_1, k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^\ell \frac{m_2 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}{n_1 m_1 \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{y_i} + B m_2 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}. \quad (9)$$

برای سیستم سری نتیجه می‌شود

$$\hat{R}_{n_1, 1} = n_2 \sum_{\ell=0}^{n_2-1} \binom{n_2-1}{\ell} (-1)^\ell \frac{m_2 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}{n_1 m_1 \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{y_i} + (\ell+1) m_2 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}, \quad (10)$$

و برای سیستم موازی داریم

$$\hat{R}_{n_1, n_2} = \frac{n_2 m_2 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}{n_1 m_1 \sum_{i=1}^{m_2} \frac{1}{y_i} + n_2 m_2 \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1}{x_i}}. \quad (11)$$

#### ۴ توزیع و بازه‌های اطمینان مجانبی برای $R_{r, k}$

قضیه ۲. اگر  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  به ترتیب MLE های  $\alpha$  و  $\beta$  باشند و  $m_1 \rightarrow \infty$  و  $m_2 \rightarrow \infty$  آنگاه

$$\begin{bmatrix} \sqrt{m_1}(\hat{\alpha} - \alpha) \\ \sqrt{m_2}(\hat{\beta} - \beta) \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N_2 \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{bmatrix} \right).$$

برهان: ماتریس اطلاع فیشر بصورت

$$I = - \begin{bmatrix} E(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ell(\alpha, \beta)) & E(\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \ell(\alpha, \beta)) \\ E(\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} \ell(\alpha, \beta)) & E(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ell(\alpha, \beta)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{\beta^2} \end{bmatrix},$$

است. چون ماتریس کواریانس معکوس ماتریس اطلاع فیشر است، بنابراین

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} \xrightarrow{d} N_2 \left( \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{m_2} \end{bmatrix} \right).$$

بر اساس قضیه ۲ بازه‌های اطمینان مجانبی  $\alpha$  و  $\beta$  به ترتیب  $\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{m_1}}$  و  $\hat{\beta} \pm z_{\frac{\beta}{2}} \frac{\hat{\beta}}{\sqrt{m_2}}$  هستند.

۴۰۶ ..... برآورد قابلیت اعتماد در مدل  $n_1$ -تنش  $n_2$ -مقاومت

قضیه ۳. اگر  $m_1 \rightarrow \infty$  و  $m_2 \rightarrow \infty$  آنگاه  $\hat{R}_{r,k} - R_{r,k} \xrightarrow{d} N(0, \text{Var}(\hat{R}_{r,k}))$  که در آن  $\text{Var}(\hat{R}_{r,k}) = [C_{m_1}(\alpha, \beta)]^2 + [C_{m_2}(\alpha, \beta)]^2$  و برای  $s = 1, 2$

$$C_{m_s}(c, d) = k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{n_1-j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell+s} \frac{Ac d}{\sqrt{m_s}(Ac + Bd)^2}$$

برهان: بر اساس روش دلتا (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) چون  $R_{r,k}$  تابعی از  $\alpha$  و  $\beta$  است، واریانس مجانبی  $\hat{R}_{r,k}$  بصورت  $\text{Var}(\hat{R}_{r,k}) = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} R_{r,k}\right)^2 \frac{\alpha^2}{m_1} + \left(\frac{\partial}{\partial \beta} R_{r,k}\right)^2 \frac{\beta^2}{m_2}$  است، که در آن

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} R_{r,k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell} \frac{-A\beta}{(A\alpha + B\beta)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} R_{r,k} = k \binom{n_2}{k} \sum_{j=r}^{n_1} \sum_{i=0}^{n_1-j} \sum_{\ell=0}^{n_2-k} \binom{n_1}{j} \binom{j}{i} \binom{n_2-k}{\ell} (-1)^{i+\ell} \frac{A\alpha}{(A\alpha + B\beta)^2}$$

بنابراین  $\hat{R}_{r,k} \xrightarrow{d} N(R_{r,k}, \text{Var}(\hat{R}_{r,k}))$  و  $\text{Var}(\hat{R}_{r,k}) = [C_{m_1}(\alpha, \beta)]^2 + [C_{m_2}(\alpha, \beta)]^2$

فرع ۱. با استفاده از  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  در (۷) و قضیه ۳، ACI برای  $R_{r,k}$  بصورت  $\hat{R}_{r,k} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\hat{\text{Var}}(\hat{R}_{r,k})}$  است، که در آن  $\hat{\text{Var}}(\hat{R}_{r,k}) = [C_{m_1}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})]^2 + [C_{m_2}(\hat{\alpha}, \hat{\beta})]^2$

## ۵ مطالعه شبیه‌سازی

برای بررسی عملکرد MLE، شبیه‌سازی در مدل  $n_1 = 5$  تنش و  $n_2 = 7$  مقاومت برای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم  $k = 3$  از نوع خرابی یعنی  $R_{5,3}$  و قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم‌های سری  $R_{5,1}$  و موازی  $R_{5,7}$  انجام شده است. برای حجم نمونه‌های  $m_1 = m_2 = m$  مقادیر ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۰۰۰، ۵۰۰۰ و برای  $(\alpha, \beta)$  مقادیر  $(0.5, 11)$ ،  $(0.6, 11)$ ،  $(0.5, 12)$ ،  $(1.2, 5)$ ،  $(1.1, 6)$ ،  $(1.1, 7)$ ،  $(1, 7)$ ،  $(0.8, 8)$ ،  $(0.8, 9)$ ،  $(0.7, 10)$  اختیار شده‌اند. از روابط (۴) تا (۶) مقادیر  $R_{5,1}$ ،  $R_{5,3}$  و  $R_{5,7}$  و از روابط (۹) تا (۱۱) مقادیر MLE، بدست آمد و اریبی و میانگین مربع خطا (MSE) برای  $\hat{R}_{5,1}$ ،  $\hat{R}_{5,3}$  و  $\hat{R}_{5,7}$  محاسبه شد. نتایج شبیه‌سازی با ۱۰۰۰۰ بار تکرار، در جدول‌های ۱ تا ۶، نشان می‌دهند که با افزایش  $\alpha$  و کاهش  $\beta$ ، مقادیر  $R_{5,1}$ ،  $R_{5,3}$  و  $R_{5,7}$  کاهش پیدا می‌کنند. با افزایش حجم نمونه  $m$  روند قدرمطلق اریبی MLE و مقدار MSE کاهشی هستند. چون  $Y_{k:n_2}$  بر حسب  $k$  بصورت احتمالی صعودی است، پس  $R_{n_1,k}$  نیز تابعی صعودی از  $k$  است.

جدول ۱. MLE برای  $R_{\delta, r}$ ، اریبی و MSE

MSE( $\hat{R}_{\delta, r}$ )	Bias( $\hat{R}_{\delta, r}$ )	$\hat{R}_{\delta, r}$	$R_{\delta, r}$	$m$	$(\alpha, \beta)$
۰/۰۰۷۰۸	-۰/۰۱۲۷۰	۰/۷۸۸۰۶	۰/۸۰۰۷۶	۱۰	(۰/۵، ۱۲)
۰/۰۰۳۲۶	-۰/۰۰۵۸۱	۰/۷۹۴۹۵	۰/۸۰۰۷۶	۲۰	
۰/۰۰۲۱۶	-۰/۰۰۴۶۴	۰/۷۹۶۱۲	۰/۸۰۰۷۶	۳۰	
۰/۰۰۱۲۵	-۰/۰۰۲۵۳	۰/۷۹۸۲۳	۰/۸۰۰۷۶	۵۰	
۰/۰۰۰۶۱	-۰/۰۰۱۳۱	۰/۷۹۹۴۵	۰/۸۰۰۷۶	۱۰۰	
۰/۰۰۰۳۱	-۰/۰۰۰۷۷	۰/۷۹۹۹۹	۰/۸۰۰۷۶	۲۰۰	
۰/۰۰۰۲۰	-۰/۰۰۰۵۹	۰/۸۰۰۱۷	۰/۸۰۰۷۶	۳۰۰	
۰/۰۰۰۱۲	-۰/۰۰۰۴۸	۰/۸۰۰۲۸	۰/۸۰۰۷۶	۵۰۰	
۰/۰۰۹۷۹	-۰/۰۱۳۴۱	۰/۷۳۵۷۹	۰/۷۴۹۲۰	۱۰	(۰/۶، ۱۱)
۰/۰۰۴۶۳	-۰/۰۰۶۱۴	۰/۷۴۳۰۵	۰/۷۴۹۲۰	۲۰	
۰/۰۰۳۰۹	-۰/۰۰۵۰۲	۰/۷۴۴۱۸	۰/۷۴۹۲۰	۳۰	
۰/۰۰۱۸۱	-۰/۰۰۲۷۲	۰/۷۴۶۴۸	۰/۷۴۹۲۰	۵۰	
۰/۰۰۰۸۹	-۰/۰۰۱۴۱	۰/۷۴۷۷۸	۰/۷۴۹۲۰	۱۰۰	
۰/۰۰۰۴۵	-۰/۰۰۰۸۴	۰/۷۴۸۳۶	۰/۷۴۹۲۰	۲۰۰	
۰/۰۰۰۲۹	-۰/۰۰۰۶۶	۰/۷۴۸۵۴	۰/۷۴۹۲۰	۳۰۰	
۰/۰۰۰۱۸	-۰/۰۰۰۵۵	۰/۷۴۸۶۵	۰/۷۴۹۲۰	۵۰۰	
۰/۰۱۲۶۴	-۰/۰۱۳۱۶	۰/۶۷۹۳۹	۰/۶۹۲۵۵	۱۰	(۰/۷، ۱۰)
۰/۰۰۶۱۴	-۰/۰۰۶۰۱	۰/۶۸۶۵۴	۰/۶۹۲۵۵	۲۰	
۰/۰۰۴۱۲	-۰/۰۰۵۰۹	۰/۶۸۷۴۶	۰/۶۹۲۵۵	۳۰	
۰/۰۰۲۴۴	-۰/۰۰۲۷۲	۰/۶۸۹۸۳	۰/۶۹۲۵۵	۵۰	
۰/۰۰۱۲۰	-۰/۰۰۱۴۳	۰/۶۹۱۱۲	۰/۶۹۲۵۵	۱۰۰	
۰/۰۰۰۶۱	-۰/۰۰۰۸۷	۰/۶۹۱۶۸	۰/۶۹۲۵۵	۲۰۰	
۰/۰۰۰۴۰	-۰/۰۰۰۷۰	۰/۶۹۱۸۵	۰/۶۹۲۵۵	۳۰۰	
۰/۰۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۶۰	۰/۶۹۱۹۵	۰/۶۹۲۵۵	۵۰۰	
۰/۰۱۵۳۹	-۰/۰۱۱۷۴	۰/۶۱۸۴۸	۰/۶۳۰۲۲	۱۰	(۰/۸، ۹)
۰/۰۰۷۶۷	-۰/۰۰۵۲۹	۰/۶۲۴۹۳	۰/۶۳۰۲۲	۲۰	
۰/۰۰۵۱۹	-۰/۰۰۴۷۵	۰/۶۲۵۴۷	۰/۶۳۰۲۲	۳۰	
۰/۰۰۳۰۹	-۰/۰۰۲۴۸	۰/۶۲۷۷۴	۰/۶۳۰۲۲	۵۰	
۰/۰۰۱۵۳	-۰/۰۰۱۳۳	۰/۶۲۸۸۹	۰/۶۳۰۲۲	۱۰۰	
۰/۰۰۰۷۸	-۰/۰۰۰۸۴	۰/۶۲۹۳۸	۰/۶۳۰۲۲	۲۰۰	
۰/۰۰۰۵۱	-۰/۰۰۰۷۰	۰/۶۲۹۵۳	۰/۶۳۰۲۲	۳۰۰	
۰/۰۰۰۳۱	-۰/۰۰۰۶۲	۰/۶۲۹۶۰	۰/۶۳۰۲۲	۵۰۰	

جدول ۲. MLE برای  $R_{\delta, r}$ ، آریبی و MSE

$MSE(\hat{R}_{\delta, r})$	$Bias(\hat{R}_{\delta, r})$	$\hat{R}_{\delta, r}$	$R_{\delta, r}$	$m$	$(\alpha, \beta)$
۰/۰۱۷۷۶	-۰/۰۰۰۸۹۷	۰/۵۵۲۶۴	۰/۵۶۱۶۱	۱۰	(۰/۹,۸)
۰/۰۰۹۰۶	-۰/۰۰۰۳۸۹	۰/۵۵۷۷۲	۰/۵۶۱۶۱	۲۰	
۰/۰۰۶۱۷	-۰/۰۰۰۳۹۲	۰/۵۵۷۶۹	۰/۵۶۱۶۱	۳۰	
۰/۰۰۳۷۰	-۰/۰۰۰۱۹۶	۰/۵۵۹۶۵	۰/۵۶۱۶۱	۵۰	
۰/۰۰۱۸۴	-۰/۰۰۰۱۰۸	۰/۵۶۰۵۳	۰/۵۶۱۶۱	۱۰۰	
۰/۰۰۰۹۴	-۰/۰۰۰۰۷۳	۰/۵۶۰۸۹	۰/۵۶۱۶۱	۲۰۰	
۰/۰۰۰۶۱	-۰/۰۰۰۰۶۴	۰/۵۶۰۹۸	۰/۵۶۱۶۱	۳۰۰	
۰/۰۰۰۳۷	-۰/۰۰۰۰۶۰	۰/۵۶۱۰۱	۰/۵۶۱۶۱	۵۰۰	
۰/۰۱۹۳۸	-۰/۰۰۰۴۷۰	۰/۴۸۱۵۴	۰/۴۸۶۲۴	۱۰	(۱,۷)
۰/۰۱۰۰۸	-۰/۰۰۰۱۷۰	۰/۴۸۴۵۴	۰/۴۸۶۲۴	۲۰	
۰/۰۰۶۹۰	-۰/۰۰۰۲۵۲	۰/۴۸۳۷۲	۰/۴۸۶۲۴	۳۰	
۰/۰۰۴۱۷	-۰/۰۰۰۱۱۰	۰/۴۸۵۱۴	۰/۴۸۶۲۴	۵۰	
۰/۰۰۲۰۸	-۰/۰۰۰۰۶۶	۰/۴۸۵۵۸	۰/۴۸۶۲۴	۱۰۰	
۰/۰۰۱۰۷	-۰/۰۰۰۰۵۲	۰/۴۸۵۷۲	۰/۴۸۶۲۴	۲۰۰	
۰/۰۰۰۶۹	-۰/۰۰۰۰۵۲	۰/۴۸۵۷۲	۰/۴۸۶۲۴	۳۰۰	
۰/۰۰۰۴۲	-۰/۰۰۰۰۵۴	۰/۴۸۵۷۰	۰/۴۸۶۲۴	۵۰۰	
۰/۰۱۹۸۲	۰/۰۰۰۱۱۱	۰/۴۰۵۰۳	۰/۴۰۳۹۲	۱۰	(۱/۱,۶)
۰/۰۱۰۴۳	۰/۰۰۰۱۲۹	۰/۴۰۵۲۱	۰/۴۰۳۹۲	۲۰	
۰/۰۰۷۱۶	-۰/۰۰۰۰۵۱	۰/۴۰۳۴۱	۰/۴۰۳۹۲	۳۰	
۰/۰۰۴۳۴	۰/۰۰۰۰۱۲	۰/۴۰۴۰۴	۰/۴۰۳۹۲	۵۰	
۰/۰۰۲۱۸	-۰/۰۰۰۰۰۶	۰/۴۰۳۸۶	۰/۴۰۳۹۲	۱۰۰	
۰/۰۰۱۱۲	-۰/۰۰۰۰۲۲	۰/۴۰۳۷۰	۰/۴۰۳۹۲	۲۰۰	
۰/۰۰۰۷۳	-۰/۰۰۰۰۳۲	۰/۴۰۳۶۰	۰/۴۰۳۹۲	۳۰۰	
۰/۰۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۰۴۳	۰/۴۰۳۴۹	۰/۴۰۳۹۲	۵۰۰	
۰/۰۱۸۶۴	۰/۰۰۰۸۱۴	۰/۳۲۳۳۵	۰/۳۱۵۲۲	۱۰	(۱/۲,۵)
۰/۰۰۹۸۰	۰/۰۰۰۴۹۴	۰/۳۲۰۱۶	۰/۳۱۵۲۲	۲۰	
۰/۰۰۶۷۲	۰/۰۰۰۲۰۳	۰/۳۱۷۲۵	۰/۳۱۵۲۲	۳۰	
۰/۰۰۴۰۸	۰/۰۰۰۱۶۴	۰/۳۱۶۸۶	۰/۳۱۵۲۲	۵۰	
۰/۰۰۲۰۴	۰/۰۰۰۰۷۱	۰/۳۱۵۹۲	۰/۳۱۵۲۲	۱۰۰	
۰/۰۰۱۰۵	۰/۰۰۰۰۱۸	۰/۳۱۵۴۰	۰/۳۱۵۲۲	۲۰۰	
۰/۰۰۰۶۸	-۰/۰۰۰۰۰۶	۰/۳۱۵۱۶	۰/۳۱۵۲۲	۳۰۰	
۰/۰۰۰۴۲	-۰/۰۰۰۰۲۶	۰/۳۱۴۹۶	۰/۳۱۵۲۲	۵۰۰	

جدول ۳. MLE برای  $R_{\delta,1}$ ، اریبی و MSE

MSE( $\hat{R}_{\delta,1}$ )	Bias( $\hat{R}_{\delta,1}$ )	$\hat{R}_{\delta,1}$	$R_{\delta,1}$	$m$	$(\alpha, \beta)$
۰/۰۱۶۵۸	-۰/۰۱۰۷۸	۰/۵۸۹۴۰	۰/۶۰۰۱۸	۱۰	(۰/۵، ۱۲)
۰/۰۰۸۳۴	-۰/۰۰۴۸۰	۰/۵۹۵۳۸	۰/۶۰۰۱۸	۲۰	
۰/۰۰۵۶۶	-۰/۰۰۴۴۸	۰/۵۹۵۷۰	۰/۶۰۰۱۸	۳۰	
۰/۰۰۳۳۸	-۰/۰۰۲۳۱	۰/۵۹۷۸۷	۰/۶۰۰۱۸	۵۰	
۰/۰۰۱۶۸	-۰/۰۰۱۲۵	۰/۵۹۸۹۳	۰/۶۰۰۱۸	۱۰۰	
۰/۰۰۰۸۶	-۰/۰۰۰۸۰	۰/۵۹۹۳۸	۰/۶۰۰۱۸	۲۰۰	
۰/۰۰۰۵۶	-۰/۰۰۰۶۸	۰/۵۹۹۵۰	۰/۶۰۰۱۸	۳۰۰	
۰/۰۰۰۳۴	-۰/۰۰۰۶۲	۰/۵۹۹۵۶	۰/۶۰۰۱۸	۵۰۰	
۰/۰۱۸۹۲	-۰/۰۰۰۶۸۰	۰/۵۱۱۲۲	۰/۵۱۸۰۲	۱۰	(۰/۶، ۱۱)
۰/۰۰۹۷۶	-۰/۰۰۲۷۸	۰/۵۱۵۲۴	۰/۵۱۸۰۲	۲۰	
۰/۰۰۶۶۷	-۰/۰۰۳۲۳	۰/۵۱۴۷۹	۰/۵۱۸۰۲	۳۰	
۰/۰۰۴۰۱	-۰/۰۰۱۵۳	۰/۵۱۶۴۹	۰/۵۱۸۰۲	۵۰	
۰/۰۰۲۰۰	-۰/۰۰۰۸۷	۰/۵۱۷۱۴	۰/۵۱۸۰۲	۱۰۰	
۰/۰۰۱۰۳	-۰/۰۰۰۶۳	۰/۵۱۷۳۹	۰/۵۱۸۰۲	۲۰۰	
۰/۰۰۰۶۷	-۰/۰۰۰۵۸	۰/۵۱۷۴۳	۰/۵۱۸۰۲	۳۰۰	
۰/۰۰۰۴۱	-۰/۰۰۰۵۸	۰/۵۱۷۴۴	۰/۵۱۸۰۲	۵۰۰	
۰/۰۱۹۹۵	-۰/۰۰۱۵۲	۰/۴۳۵۰۸	۰/۴۳۶۶۰	۱۰	(۰/۷، ۱۰)
۰/۰۱۰۴۶	-۰/۰۰۰۰۷	۰/۴۳۶۵۳	۰/۴۳۶۶۰	۲۰	
۰/۰۰۷۱۸	-۰/۰۰۱۴۴	۰/۴۳۵۱۶	۰/۴۳۶۶۰	۳۰	
۰/۰۰۴۳۵	-۰/۰۰۰۴۴	۰/۴۳۶۱۵	۰/۴۳۶۶۰	۵۰	
۰/۰۰۲۱۷	-۰/۰۰۰۳۴	۰/۴۳۶۲۶	۰/۴۳۶۶۰	۱۰۰	
۰/۰۰۱۱۲	-۰/۰۰۰۳۶	۰/۴۳۶۲۴	۰/۴۳۶۶۰	۲۰۰	
۰/۰۰۰۷۳	-۰/۰۰۰۴۲	۰/۴۳۶۱۸	۰/۴۳۶۶۰	۳۰۰	
۰/۰۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۴۹	۰/۴۳۶۱۱	۰/۴۳۶۶۰	۵۰۰	
۰/۰۱۹۶۰	۰/۰۰۴۵۴	۰/۳۶۱۵۲	۰/۳۵۶۹۸	۱۰	(۰/۸، ۹)
۰/۰۱۰۳۳	۰/۰۰۳۰۷	۰/۳۶۰۰۵	۰/۳۵۶۹۸	۲۰	
۰/۰۰۷۰۹	۰/۰۰۰۷۱	۰/۳۵۷۶۹	۰/۳۵۶۹۸	۳۰	
۰/۰۰۴۳۱	۰/۰۰۰۸۵	۰/۳۵۷۸۳	۰/۳۵۶۹۸	۵۰	
۰/۰۰۲۱۶	۰/۰۰۰۳۱	۰/۳۵۷۲۹	۰/۳۵۶۹۸	۱۰۰	
۰/۰۰۱۱۱	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۳۵۶۹۵	۰/۳۵۶۹۸	۲۰۰	
۰/۰۰۰۷۲	-۰/۰۰۰۰۲۰	۰/۳۵۶۷۸	۰/۳۵۶۹۸	۳۰۰	
۰/۰۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۰۳۵	۰/۳۵۶۶۳	۰/۳۵۶۹۸	۵۰۰	

جدول ۴. MLE برای  $R_{\delta,1}$ ، آریبی و MSE

$MSE(\hat{R}_{\delta,1})$	$Bias(\hat{R}_{\delta,1})$	$\hat{R}_{\delta,1}$	$R_{\delta,1}$	$m$	$(\alpha, \beta)$
۰/۰۱۷۹۲	۰/۰۱۰۷۳	۰/۲۹۱۲۶	۰/۲۸۰۵۳	۱۰	(۰/۹,۸)
۰/۰۰۹۳۸	۰/۰۰۶۲۸	۰/۲۸۶۸۱	۰/۲۸۰۵۳	۲۰	
۰/۰۰۶۴۲	۰/۰۰۲۹۸	۰/۲۸۳۵۱	۰/۲۸۰۵۳	۳۰	
۰/۰۰۳۸۹	۰/۰۰۰۲۲۰	۰/۲۸۲۷۴	۰/۲۸۰۵۳	۵۰	
۰/۰۰۱۹۵	۰/۰۰۰۰۹۹	۰/۲۸۱۵۲	۰/۲۸۰۵۳	۱۰۰	
۰/۰۰۱۰۰	۰/۰۰۰۰۳۳	۰/۲۸۰۸۶	۰/۲۸۰۵۳	۲۰۰	
۰/۰۰۰۶۵	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۲۸۰۵۸	۰/۲۸۰۵۳	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۴۰	-۰/۰۰۰۰۱۹	۰/۲۸۰۳۴	۰/۲۸۰۵۳	۵۰۰	
۰/۰۱۵۱۴	۰/۰۱۶۲۱	۰/۲۲۵۲۱	۰/۲۰۹۰۰	۱۰	(۱,۷)
۰/۰۰۷۷۴	۰/۰۰۰۹۰۹	۰/۲۱۸۰۹	۰/۲۰۹۰۰	۲۰	
۰/۰۰۵۲۴	۰/۰۰۰۵۰۵	۰/۲۱۴۰۵	۰/۲۰۹۰۰	۳۰	
۰/۰۰۳۱۶	۰/۰۰۰۳۴۲	۰/۲۱۲۴۲	۰/۲۰۹۰۰	۵۰	
۰/۰۰۱۵۷	۰/۰۰۰۱۶۱	۰/۲۱۰۶۱	۰/۲۰۹۰۰	۱۰۰	
۰/۰۰۰۸۰	۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۲۰۹۶۷	۰/۲۰۹۰۰	۲۰۰	
۰/۰۰۰۵۲	۰/۰۰۰۰۲۸	۰/۲۰۹۲۸	۰/۲۰۹۰۰	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۳۲	-۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۲۰۸۹۷	۰/۲۰۹۰۰	۵۰۰	
۰/۰۱۱۵۹	۰/۰۲۰۰۴	۰/۱۶۴۵۵	۰/۱۴۴۵۱	۱۰	(۱/۱,۶)
۰/۰۰۵۶۶	۰/۰۱۰۹۸	۰/۱۵۵۴۹	۰/۱۴۴۵۱	۲۰	
۰/۰۰۳۷۶	۰/۰۰۶۵۴	۰/۱۵۱۰۵	۰/۱۴۴۵۱	۳۰	
۰/۰۰۲۲۳	۰/۰۰۰۴۲۶	۰/۱۴۸۱۷۷	۰/۱۴۴۵۱	۵۰	
۰/۰۰۱۰۹	۰/۰۰۰۲۰۵	۰/۱۴۶۵۶	۰/۱۴۴۵۱	۱۰۰	
۰/۰۰۰۵۶	۰/۰۰۰۰۹۲	۰/۱۴۵۴۳	۰/۱۴۴۵۱	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۳۶	۰/۰۰۰۰۴۷	۰/۱۴۴۹۸	۰/۱۴۴۵۱	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰۱۳	۰/۱۴۴۶۳	۰/۱۴۴۵۱	۵۰۰	
۰/۰۰۷۷۵	۰/۰۲۱۲۰	۰/۱۱۰۷۵	۰/۰۸۹۵۵	۱۰	(۱/۲,۵)
۰/۰۰۳۵۱	۰/۰۱۱۳۸	۰/۱۰۰۹۳	۰/۰۸۹۵۵	۲۰	
۰/۰۰۲۲۶	۰/۰۰۰۷۰۳	۰/۰۹۶۵۸	۰/۰۸۹۵۵	۳۰	
۰/۰۰۱۳۰	۰/۰۰۰۴۴۷	۰/۰۹۴۰۲	۰/۰۸۹۵۵	۵۰	
۰/۰۰۰۶۲	۰/۰۰۰۲۱۷	۰/۰۹۱۷۲	۰/۰۸۹۵۵	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۳۱	۰/۰۰۰۱۰۲	۰/۰۹۰۵۷	۰/۰۸۹۵۵	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۲۰	۰/۰۰۰۰۵۶	۰/۰۹۰۱۱	۰/۰۸۹۵۵	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۱۲	۰/۰۰۰۰۲۲	۰/۰۸۹۷۷	۰/۰۸۹۵۵	۵۰۰	

جدول ۵. MLE برای  $R_{\delta, \gamma}$ ، اریبی و MSE

MSE( $\hat{R}_{\delta, \gamma}$ )	Bias( $\hat{R}_{\delta, \gamma}$ )	$\hat{R}_{\delta, \gamma}$	$R_{\delta, \gamma}$	$m$	$(\alpha, \beta)$
۰/۰۰۰۰۲۲	-۰/۰۰۰۲۸۲	۰/۹۶۸۲۸	۰/۹۷۱۱۰	۱۰	(۰/۵، ۱۲)
۰/۰۰۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۱۲۷	۰/۹۶۹۸۳	۰/۹۷۱۱۰	۲۰	
۰/۰۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۰۹۶	۰/۹۷۰۱۳	۰/۹۷۱۱۰	۳۰	
۰/۰۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۹۷۰۵۷	۰/۹۷۱۱۰	۵۰	
۰/۰۰۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۰۲۷	۰/۹۷۰۸۳	۰/۹۷۱۱۰	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۵	۰/۹۷۰۹۴	۰/۹۷۱۱۰	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۲	۰/۹۷۰۹۸	۰/۹۷۱۱۰	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۹	۰/۹۷۱۰۱	۰/۹۷۱۱۰	۵۰۰	
۰/۰۰۰۰۳۶	-۰/۰۰۰۳۵۴	۰/۹۵۸۹۶	۰/۹۶۲۵۰	۱۰	(۰/۶، ۱۱)
۰/۰۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۱۶۰	۰/۹۶۰۹۰	۰/۹۶۲۵۰	۲۰	
۰/۰۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۱۲۲	۰/۹۶۱۲۸	۰/۹۶۲۵۰	۳۰	
۰/۰۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۰۶۷	۰/۹۶۱۸۳	۰/۹۶۲۵۰	۵۰	
۰/۰۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۳۴	۰/۹۶۲۱۶	۰/۹۶۲۵۰	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۹	۰/۹۶۲۳۱	۰/۹۶۲۵۰	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۵	۰/۹۶۲۳۵	۰/۹۶۲۵۰	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۱	۰/۹۶۲۳۹	۰/۹۶۲۵۰	۵۰۰	
۰/۰۰۰۰۵۶	-۰/۰۰۰۴۳۲	۰/۹۴۸۰۶	۰/۹۵۲۳۸	۱۰	(۰/۷، ۱۰)
۰/۰۰۰۰۲۴	-۰/۰۰۰۱۹۵	۰/۹۵۰۴۳	۰/۹۵۲۳۸	۲۰	
۰/۰۰۰۰۱۵	-۰/۰۰۰۱۴۹	۰/۹۵۰۸۹	۰/۹۵۲۳۸	۳۰	
۰/۰۰۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۰۸۲	۰/۹۵۱۵۶	۰/۹۵۲۳۸	۵۰	
۰/۰۰۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۰۴۲	۰/۹۵۱۹۶	۰/۹۵۲۳۸	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۰۲۴	۰/۹۵۲۱۴	۰/۹۵۲۳۸	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۸	۰/۹۵۲۲۰	۰/۹۵۲۳۸	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۴	۰/۹۵۲۲۴	۰/۹۵۲۳۸	۵۰۰	
۰/۰۰۰۰۸۴	-۰/۰۰۰۵۱۶	۰/۹۳۵۱۳	۰/۹۴۰۳۰	۱۰	(۰/۸، ۹)
۰/۰۰۰۰۳۶	-۰/۰۰۰۲۳۴	۰/۹۳۷۹۶	۰/۹۴۰۳۰	۲۰	
۰/۰۰۰۰۲۳	-۰/۰۰۰۱۸۰	۰/۹۳۸۵۰	۰/۹۴۰۳۰	۳۰	
۰/۰۰۰۰۱۳	-۰/۰۰۰۰۹۹	۰/۹۳۹۳۱	۰/۹۴۰۳۰	۵۰	
۰/۰۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۰۵۱	۰/۹۳۹۷۹	۰/۹۴۰۳۰	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۲۹	۰/۹۴۰۰۱	۰/۹۴۰۳۰	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۰۲۲	۰/۹۴۰۰۸	۰/۹۴۰۳۰	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۰۱	-۰/۰۰۰۰۱۷	۰/۹۴۰۱۳	۰/۹۴۰۳۰	۵۰۰	

جدول ۶. MLE برای  $R_{\delta, \gamma}$ ، آریبی و MSE

$MSE(\hat{R}_{\delta, \gamma})$	$Bias(\hat{R}_{\delta, \gamma})$	$\hat{R}_{\delta, \gamma}$	$R_{\delta, \gamma}$	$m$	$(\alpha, \beta)$
۰/۰۰۱۲۳	-۰/۰۰۰۶۰۷	۰/۹۱۹۵۵	۰/۹۲۵۶۲	۱۰	(۰/۹,۸)
۰/۰۰۰۵۳	-۰/۰۰۰۲۷۵	۰/۹۲۲۸۷	۰/۹۲۵۶۲	۲۰	
۰/۰۰۰۳۵	-۰/۰۰۰۲۱۳	۰/۹۲۳۴۹	۰/۹۲۵۶۲	۳۰	
۰/۰۰۰۲۰	-۰/۰۰۰۱۱۷	۰/۹۲۴۴۵	۰/۹۲۵۶۲	۵۰	
۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۰۶۰	۰/۹۲۵۰۲	۰/۹۲۵۶۲	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۳۴	۰/۹۲۵۲۸	۰/۹۲۵۶۲	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۲۶	۰/۹۲۵۳۶	۰/۹۲۵۶۲	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۲	-۰/۰۰۰۰۲۱	۰/۹۲۵۴۱	۰/۹۲۵۶۲	۵۰۰	
۰/۰۰۱۷۸	-۰/۰۰۰۷۰۱	۰/۹۰۰۳۹	۰/۹۰۷۴۱	۱۰	(۱,۷)
۰/۰۰۰۷۹	-۰/۰۰۰۳۱۹	۰/۹۰۴۲۲	۰/۹۰۷۴۱	۲۰	
۰/۰۰۰۵۲	-۰/۰۰۰۲۴۹	۰/۹۰۴۹۲	۰/۹۰۷۴۱	۳۰	
۰/۰۰۰۳۰	-۰/۰۰۰۱۳۶	۰/۹۰۶۰۴	۰/۹۰۷۴۱	۵۰	
۰/۰۰۰۱۴	-۰/۰۰۰۰۷۰	۰/۹۰۶۷۱	۰/۹۰۷۴۱	۱۰۰	
۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۰۴۰	۰/۹۰۷۰۰	۰/۹۰۷۴۱	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۵	-۰/۰۰۰۰۳۱	۰/۹۰۷۱۰	۰/۹۰۷۴۱	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۲۵	۰/۹۰۷۱۶	۰/۹۰۷۴۱	۵۰۰	
۰/۰۰۲۵۵	-۰/۰۰۰۷۹۶	۰/۸۷۶۲۵	۰/۸۸۴۲۱	۱۰	(۱/۱,۶)
۰/۰۰۱۱۵	-۰/۰۰۰۳۶۲	۰/۸۸۰۵۹	۰/۸۸۴۲۱	۲۰	
۰/۰۰۰۷۶	-۰/۰۰۰۲۸۶	۰/۸۸۱۳۵	۰/۸۸۴۲۱	۳۰	
۰/۰۰۰۴۴	-۰/۰۰۰۱۵۶	۰/۸۸۲۶۵	۰/۸۸۴۲۱	۵۰	
۰/۰۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۰۸۰	۰/۸۸۳۴۱	۰/۸۸۴۲۱	۱۰۰	
۰/۰۰۰۱۱	-۰/۰۰۰۰۴۷	۰/۸۸۳۷۴	۰/۸۸۴۲۱	۲۰۰	
۰/۰۰۰۰۷	-۰/۰۰۰۰۳۶	۰/۸۸۳۸۵	۰/۸۸۴۲۱	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۰۲۹	۰/۸۸۳۹۲	۰/۸۸۴۲۱	۵۰۰	
۰/۰۰۳۶۳	-۰/۰۰۰۸۸۱	۰/۸۴۴۸۵	۰/۸۵۳۶۶	۱۰	(۱/۲,۵)
۰/۰۰۱۶۸	-۰/۰۰۰۴۰۱	۰/۸۴۹۶۵	۰/۸۵۳۶۶	۲۰	
۰/۰۰۱۱۱	-۰/۰۰۰۳۲۲	۰/۸۵۰۴۴	۰/۸۵۳۶۶	۳۰	
۰/۰۰۰۶۵	-۰/۰۰۰۱۷۵	۰/۸۵۱۹۱	۰/۸۵۳۶۶	۵۰	
۰/۰۰۰۳۲	-۰/۰۰۰۰۹۰	۰/۸۵۲۷۵	۰/۸۵۳۶۶	۱۰۰	
۰/۰۰۰۱۶	-۰/۰۰۰۰۵۳	۰/۸۵۳۱۳	۰/۸۵۳۶۶	۲۰۰	
۰/۰۰۰۱۰	-۰/۰۰۰۰۴۱	۰/۸۵۳۲۴	۰/۸۵۳۶۶	۳۰۰	
۰/۰۰۰۰۶	-۰/۰۰۰۰۳۴	۰/۸۵۳۳۲	۰/۸۵۳۶۶	۵۰۰	



## ۶ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش دو مجموعه داده واقعی برگرفته از راتو (۲۰۱۳) تحلیل می‌شوند. مجموعه داده اول طول عمر ترانزیستورها بر حسب هفته در یک آزمایش طول عمر تسریع یافته است و مجموعه داده دوم زمان بین خرابی‌های متوالی تجهیزات تهویه مطبوع در هواپیمای بویینگ ۷۲۰ است.

مجموعه داده اول ( $X$ ):  $\{3, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 11, 13, 13, 13, 13, 13, 17, 17, 17, 19, 19, 25, 29, 33, 42, 42, 52, 52, 52, 52\}$   
 مجموعه داده دوم ( $Y$ ):  $\{12, 21, 26, 26, 27, 29, 29, 48, 57, 59, 70, 74, 153, 326, 386\}$

برای هر مجموعه داده اعتبار توزیع‌های نمایی معکوس و نمایی با استفاده از آزمون کولموگروف-اسمیرن (K-S) و معیار اطلاع آکاییکی (AIC) بررسی شدند. در هر کدام از مجموعه داده‌ها و برای هر کدام از دو توزیع مقدار برآورد پارامتر، فاصله K-S بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع برازش داده شده (D)،  $p$ -مقدار و مقدار AIC بصورت جدول ۷ بدست آمدند. در هر کدام از مجموعه داده‌ها، با توجه به  $p$ -مقدارها، هم توزیع نمایی معکوس و هم

جدول ۷. برآورد پارامترها و مقادیر AIC

مجموعه داده	توزیع	برآورد پارامتر	D	$p$ -مقدار	AIC
اول	نمایی معکوس	۱۰/۷۸۵۳	۰/۱۸۷۳	۰/۱۸۳۹	۲۶۷/۹۴۸۴
	نمایی	۰/۰۵۲۹	۰/۱۸۳۶	۰/۲۰۱۸	۲۶۹/۹۰۵۳
دوم	نمایی معکوس	۳۷/۷۶۲۷	۰/۱۸۵۴	۰/۷۲۱۷	۱۵۲/۸۶۴۹
	نمایی	۰/۱۰۶۳	۰/۲۴۱۱	۰/۳۸۹۹	۱۵۷/۲۳۳۵

توزیع نمایی برازش داده می‌شوند. مانند بخش شبیه‌سازی، مدل  $n_1 = 5$  تنش و  $n_2 = 7$  مقاومت در نظر گرفته شد. قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم ۳ از  $k$  از  $n_2 = 7$  از نوع خرابی با استفاده از رابطه (۹) و قابلیت اعتماد تنش-مقاومت سیستم‌های سری و موازی با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) برآورد شدند. همچنین برای داده‌های فوق در توزیع نمایی مقادیر  $\hat{R}_{n_1, n_2} = \hat{R}_{5, 7}$  و  $\hat{R}_{n_1, 1} = \hat{R}_{5, 1}$ ،  $\hat{R}_{n_1, 3} = \hat{R}_{5, 3}$  بدست آمدند. با استفاده از نمونه‌گیری به روش بوت استرپ، از هر کدام از مجموعه داده‌های اول و دوم ۱۰۰۰۰ بار نمونه‌گیری با جایگذاری به ترتیب با حجم نمونه‌های  $m_1 = 34$  و  $m_2 = 14$  انجام شدند و ارزیابی و MSE در توزیع نمایی معکوس و توزیع نمایی محاسبه شدند. نتایج در جدول ۸ آمده است. همچنین به‌طور جداگانه و به روش بوت استرپ، از هر کدام از مجموعه داده‌های اول و دوم ۱۰۰۰۰ بار نمونه‌گیری با جایگذاری با حجم نمونه‌های برابر  $m_1 = m_2 = 25$  انجام شدند که نتایج در جدول ۹ آمده است.

در مدل  $n_1 = 5$  تنش و  $n_2 = 7$  مقاومت،  $\hat{R}_{n_1, 3} = \hat{R}_{5, 3} = 0/2605$  یعنی برآورد احتمال اینکه پنجمین تنش مرتب‌شده کوچکتر از سومین مقاومت مرتب‌شده باشد  $0/2605$  است. همانگونه که در بخش شبیه‌سازی بیان

جدول ۸. برآورد  $R_{\Delta,k}$ ، اریبی و MSE

$k$	توزیع	$\hat{R}_{\Delta,k}$	$Bias(\hat{R}_{\Delta,k})$	$MSE(\hat{R}_{\Delta,k})$
۱	نمایی معکوس	۰/۰۶۲۶	-۰/۰۵۶۵	۰/۰۰۳۲
	نمایی	۰/۰۹۵۸	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۱۹
۳	نمایی معکوس	۰/۲۶۰۵	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۳۱
	نمایی	۰/۵۴۲۲	-۰/۰۰۷۴	۰/۰۱۴۲
۷	نمایی معکوس	۰/۸۳۰۶	۰/۱۶۲۷	۰/۰۲۸۱
	نمایی	۰/۵۸۳۳	۰/۴۰۷۲	۰/۱۶۵۹

جدول ۹. برآورد  $R_{\Delta,k}$ ، اریبی و MSE

$k$	توزیع	$\hat{R}_{\Delta,k}$	$Bias(\hat{R}_{\Delta,k})$	$MSE(\hat{R}_{\Delta,k})$
۱	نمایی معکوس	۰/۰۶۲۶	-۰/۰۵۶۰	۰/۰۰۳۲
	نمایی	۰/۰۹۵۸	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۲۷
۳	نمایی معکوس	۰/۲۶۰۵	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۴۴
	نمایی	۰/۵۴۲۲	-۰/۰۱۰۳	۰/۰۱۹۱
۷	نمایی معکوس	۰/۸۳۰۶	-۰/۱۶۲۹	۰/۰۲۸۸
	نمایی	۰/۵۸۳۳	۰/۴۰۵۶	۰/۱۶۴۷

شد، مشاهده می‌شود که با افزایش  $k$  مقدار برآورد  $R_{\Delta,k} = R_{n_1,k}$  افزایش می‌یابد. برای  $R_{\Delta,3}$  و  $R_{\Delta,7}$  مشاهده می‌شود که قدرمطلق اریبی و MSE در توزیع نمایی معکوس کمتر از توزیع نمایی است و بنابراین توزیع نمایی معکوس بهتر از توزیع نمایی عمل می‌کند. همچنین برای  $R_{\Delta,1}$  توزیع نمایی بهتر از توزیع نمایی معکوس عمل می‌کند.

## ۷ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل  $n_1$ -تنش  $n_2$ -مقاومت در صورتی که توزیع‌های متغیرهای تنش و مقاومت نمایی معکوس با پارامترهای متفاوت هستند را در نظر گرفتیم. قابلیت اعتماد تنش-مقاومت  $R_{T,k}$  را از روش MLE برآورد کردیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که برای  $R_{n_1,k}$  اعداد قدرمطلق اریبی اعداد کوچکی هستند و با افزایش حجم نمونه روند قدرمطلق اریبی کاهشی و MSE نیز همواره کاهشی است. این کار می‌تواند در مدل تنش-مقاومت که چند تنش به‌طور همزمان به مولفه‌های سیستم وارد می‌شوند و هر مولفه مقاومت خود را دارد استفاده شود. تحقیقات بیشتر در این مدل را می‌توان با توزیع‌های احتمالی دیگر انجام داد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات داوران محترم، رهنمودهای ارزنده سردبیر، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که باعث ارتقا کیفی و ارائه بهتر مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

## مراجع

سنجری فارسی‌پور، ن. و ریاحی، ه. (۱۳۹۲)، استنباط درست‌نمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده‌های رکوردی در خانواده‌های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب، مجله علوم آماری، ۷، ۲، ۲۳۲-۲۰۷.

زارعی، ر. و یعقوب‌زاده شهرستانی، ش. (۱۳۹۹)، برآوردگر بیزی و بیز تجربی تابع قابلیت اعتماد در سیستم تنش-مقاومت چندمولفه‌ای براساس توزیع رایلی تعمیم یافته، مجله علوم آماری، ۱۴، ۲، ۴۴۸-۴۲۹.

کهن‌سال، ا.، آل محمد، ن. و عزیززاده، ف. (۱۳۹۹)، برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی در توزیع لوماکس، مجله علوم آماری، ۱۴، ۲، ۵۳۴-۵۰۵.

Bhattacharyya, G. K. and Johnson, R. A. (1974), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 966-970.

Birnbaum, Z. W. (1956), On a Use of Mann-Whitney Statistics, *Proceedings of the 3rd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 13-17.

Birnbaum, Z. W. and McCarty, B. C. (1958), A Distribution-Free Upper Confidence Bound for  $\Pr(Y < X)$  Based on Independent Samples of X and Y, *The Annals of Mathematical Statistics*, **29**(2), 558-562.

Fulment, A. K., Josephat, P. K. and Rao, G. S. (2017), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Based on Dagum Distribution, *Stochastics and Quality Control*, **32**(2), 77-85.

Joshi, S. and Pandit, P. V. (2018), Estimation of Stress-Strength Reliability in s-out-of-k System for a Two Parameter Inverse Chen Distribution, *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, **9**(12), 1898-1906.

Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), The Stress-Strength Model and its Generalizations, *World Scientific, Singapore*.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), Theory of Point Estimation, *Springer-Verlag, NY*.

Lin, C. Y., Duran, B. S. and Lewis, T. S. (1989), Inverted Gamma as a Life Distribution, *Microelectronics Reliability*, **29**(4), 619-626.

Mahdizadeh, M. (2018), On Estimating a Stress-Strength Type Reliability, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **47**(1), 243-253.

Mahto, A. K. and Kizilaslan, F. (2020), Estimation of Reliability in a Multicomponent Stress-Strength Model for a General Class of Inverted Exponentiated Distributions Under Progressive Censoring, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **58**, 1-35.

Mahto, A. K. and Tripathi, Y. M. (2020), Multicomponent Stress-Strength Model for Inverted Exponentiated Rayleigh Distribution Under Progressive Censoring, *Operational Research Society of India*, **57**, 1043–1069.

Marwa, KH. H. (2017), Estimation a Stress-Strength Model for  $P(Y_{r:n1} < X_{k:n2})$  Using the Lindley Distribution, *Revista Colombiana de Estadística*, **40**(1), 105-121.

Oguntunde, P. E., Adejumo, A. O. and Balogun, O. S. (2014), Statistical Properties of the Exponentiated Generalized Inverted Exponential Distribution, *Applied Mathematics*, **4**(2), 47-55.

Pakdaman, Z. and Ahmadi, J. (2013), Stress-Strength Reliability for  $P(X_{r:n1} < Y_{k:n2})$  in the Exponential Case, *Istatistik Journal of The Turkish Statistical Association*, **6**(3), 92-102.

Rao, G. S. (2013), Estimation of Reliability in Multicomponent Stress-Strength Based on Inverse Exponential Distribution, *International Journal of Statistics and Economics*, **10**(1), 28-37.