

شبیه‌سازی عددی جریان چگال به روش SPH

سید میثم کیا¹، مهدی شفیعی فر^{2*}، علیرضا ولی‌زاده³

1- دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

2- استاد، مهندسی عمران، دانشگاه تربیت مدرس، تهران

3- همکار تحقیقاتی، مهندسی مکانیک و هوافضا، دانشگاه موناخ، ملبورن استرالیا

* shafiee@modares.ac.ir

چکیده - در این مقاله با توسعه یک مدل هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) دو بعدی تراکم‌پذیر ضعیف، جریان ناشی از شارش تبادلی برای دو سیال با اختلاف چگالی کم شبیه‌سازی شده است. فرایند مدلسازی برای دو سیال با نسبت چگالی‌های بزرگتر از 0/9 و کوچکتر از 1/0 به انجام رسیده است. با توجه به اختلاف چگالی کم، در توسعه مدل دوفازی تغییر قابل توجهی در فرمول‌های کلاسیک SPH داده نشده است. در این حالت کافی است با یکسان گرفتن معادله حالت، چگالی مینا و سرعت صوت را برای هر فاز جداگانه منظور کرد، به گونه‌ای که فشار مینا برای هر دو سیال یکسان شود. همچنین مقداردهی دوباره به چگالی در هر چند گام زمانی برای هر فاز به صورت جدا محاسبه می‌گردد. جریان غیرلزج به وجود آمده دارای مشخصاتی مطابق با نتایج آزمایشگاهی است. مقایسه نتایج بیانگر این است که مدل توسعه یافته با دقت مناسبی قادر به شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی با نسبت چگالی‌های نزدیک به یک می‌باشد. عمق جریان و پیشرفت جبهه جریان به عنوان پارامترهای انتخابی برای صحت‌سنجی انتخاب شده‌اند. تأثیر تغییرات اختلاف چگالی بر پدیده و میزان کارایی روش با انجام یک سلسله شبیه‌سازی با نسبت چگالی و تفکیک‌پذیری مختلف سنجیده شده است.

کلیدواژه‌گان: SPH، جریان چگال، شارش تبادلی، جریان دوفازی

1- مقدمه

آلودگی‌های نفتی در دریا، گسترش آب گرم از نیروگاه‌ها، جریان‌های گل آلود به وجود آمده از رسوبات یا لجن‌های معلق و آلودگی‌های جوی یافت می‌شود.

مهمترین جنبه عملی بررسی جریان‌های چگال، به چگونگی پیشرفت سیال و سرعت آن در مراحل مختلف مربوط می‌شود. رژیم‌های مختلفی برای سرعت و شکل‌گیری سطح مشترک دو سیال گزارش شده است (Simpson, 1997). فاز اولیه، فروریختن³ است که به مرحله‌ای اشاره می‌کند که طی آن نیروهای ناشی از اینرسی غلبه دارند. در این حالت اگر اختلاف چگالی فاحش نباشد (شرایط تقریب بوزینسک⁴ فراهم باشد)، دو سیال با سرعتی تقریباً برابر و ثابت حرکت می‌کنند (Shin

آزمون شارش تبادلی¹ فرایندی بسیار مرسوم در دینامیک سیالات را شبیه‌سازی می‌کند که طی آن، دو سیال با چگالی‌های مختلف به هم می‌رسند و با هم ترکیب می‌شوند. روند فیزیکی این آزمون به این ترتیب است که دو سیال با چگالی نابرابر که در کانال توسط دریچه‌ای از یکدیگر جدا شده‌اند، پس از برداشتن دریچه تحت تأثیر جاذبه، جریانی چگال² در دو سوی کانال ایجاد می‌کنند. نیروی شناوری سبب جریان یافتن سیال سنگین روی دیواره زیرین کانال می‌شود، در حالی که سیال سبک در جهت مخالف جریان سیال سنگین و در بالای آن حرکت می‌کند. نمونه این پدیده در محل تلاقی آب شور و شیرین در اقیانوس‌ها، انتشار

3. Slumping Phase

4. Boussinesq Approximation

1. Lock-Exchange

2. Gravity Current

خصلت لاگرانژی SPH امکان دنبال کردن مسیر ذرات را به راحتی فراهم می‌کند. در شبیه‌سازی‌های دوفازی به کمک SPH سطح مشترک دو سیال به خوبی نمایان است. در سال‌های اخیر تحقیقات گسترده‌ای (Hu and Adams, 2007, 2006) پیرامون امکان‌پذیری، بهبود و افزایش کارایی این روش در شبیه‌سازی‌های دوفازی به انجام رسیده است. (Monaghan (2012) ضمن بررسی کاربردهای SPH، به توانایی آن در مدل‌سازی جریان‌های چگال اشاره کرده است. (Grenier et al. (2009) جریان چگال را بین دو سیال با نسبت چگالی بسیار بیشتر از 1 مورد بررسی قرار دادند. (Firoozabadi et al. (2013) یک روش تراکم‌ناپذیر SPH با تفکیک‌پذیری² بسیار ریز را به کار گرفتند تا به بررسی این نوع جریان بپردازند.

در این مقاله از یک روش SPH تراکم‌پذیر ضعیف برای شبیه‌سازی جریان چگال بهره گرفته شده است. هدف از این مقاله نشان دادن این است که روش کلاسیک SPH تا چه اندازه قادر است جریان دوفازی چگال را با نسبت چگالی نزدیک به 1 مدل کند، به طوری که نیازی به اعمال اصلاحات اضافی برای حالت دوفازی نباشد.

2- روش انجام کار

2-1- جریان چگال ناشی از تبادل دو سیال با اختلاف چگالی کم

آزمون شارش تبدلی روش ساده‌ای است که در آزمایشگاه برای ایجاد جریان‌های ثقلی استفاده می‌شود و روند آن شامل از میان برداشتن ناگهانی مانعی عمودی است که دو سیال را در یک کانال از هم جدا می‌کند. این آزمایش معمولاً در دو حالت با عمق یکسان و عمق متفاوت انجام می‌شود (شکل 1).

کمیت‌های بی بعد توصیف‌کننده وضعیت جریان چگال شامل عدد فرود و رینولدز می‌شوند (Shin et al. 2004).

$$F_D = \frac{U}{\sqrt{g'D}} \quad (1)$$

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (2)$$

که در روابط فوق F_D عدد فرود، Re عدد رینولدز، H

(Benjamin, 1968; et al., 2004) در صورتی که اختلاف چگالی دو سیال زیاد باشد، سرعت دو جریان ثابت، اما متفاوت است (Lowe et al., 2005; Birman et al., 2005).

پس از اینکه جریان انرژی خود را در اثر پخش در طول مسیر از دست داد، عمق جریان و سرعت جبهه آن رفته رفته کاهش می‌یابد و جریانی لایه‌ای تشکیل می‌شود. در این مرحله سرعت جریان به تدریج کاهش می‌یابد و نیروی شناوری سیال مقابل با نیروی اینرسی جریان در حالت تعادل قرار می‌گیرند. در نهایت با نازک شدن عمق جریان، فاز لزوج آغاز می‌شود که طی آن نیروی شناوری با نیروهای لزوج در تعادل قرار می‌گیرد (Huppert and Simpson, 1980).

در این مقاله با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار¹ (SPH) شبیه‌سازی عددی پدیده شارش تبدلی برای سیالاتی با نسبت چگالی نزدیک به یک انجام شده است. با مطرح شدن SPH، که روشی لاگرانژی است و به شبکه نیازی ندارد، امکان مدل‌سازی فرایندهای پیچیده دینامیک سیالات فراهم شده است. این روش در ابتدا توسط Lucy (1997) و به طور جداگانه و همزمان توسط Gingold and Monaghan (1997) توسعه داده شد. کاربرد اولیه این روش به مسائل اخترفیزیک محدود می‌شد، اما در دهه اخیر به طور گسترده‌ای در مکانیک سیالات به کار برده می‌شود.

در مدل‌سازی جریان‌هایی با سطح آزاد بسیار تواناست. (Monaghan (1994) برای اولین بار این روش را برای مدل‌سازی جریان با سطح آزاد به کار گرفت. بعدها کوشش‌های زیادی از سوی دیگر محققان در این زمینه به انجام رسید که از جمله آنها می‌توان به مقالات Morris et al. (1997) در زمینه جریان‌های تراکم‌ناپذیر با رینولدز پایین، (Lo and Shao (2002) در زمینه مدل‌سازی امواج، (Colagrossi and Landrini (2003) پیرامون جریان‌های دوفازی دارای فصل مشترک و ارائه مفهوم فیلترینگ چگالی، (Dalrymple and Rogers (2006) در زمینه پیشروی موج و برخورد آن با موانع اشاره کرد.

2. Resolution

1. Smoothed Particle Hydrodynamics

از ذرات (اگر سیستم خود گسسته نباشد)، فرایند مدل-سازی عددی آغاز می‌شود و تقریب توابع به کمک تابع درونیابی به نام کرنل انجام می‌پذیرد.

معادلات حاکم سیالات در SPH، به تفصیل توسط (Monaghan 2005) ارائه شده است. فرم کلی معادله پیوستگی و مومنت در روش SPH مورد استفاده در این تحقیق به صورت زیر است:

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j (v_i - v_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (3)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} + R_{ij} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_b (f_{ib} - m_b \Pi_{ib} \nabla_i W_{ib}) + F_i \quad (4)$$

در معادلات فوق، i و j اندیس ذره، b ، اندیس ذرات مرزی، ρ چگالی، m جرم، v سرعت، F نیروی خارجی، $r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ کرنل، $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ تابع کرنل، $\nabla_i W_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}$ مشتق آن و p فشار ذرات هستند. اندیس b برای ذرات مرزی به کار می‌رود و j نماینده همه ذرات است. f_{ib} ، Π_{ij} ، R_{ij} در ادامه معرفی خواهند شد.

در مدل‌سازی حاضر برای درونیابی و تخمین نیروهای سیال از کرنل Wendland درجه 4 استفاده شده است:

$$W(q, h) = \alpha \begin{cases} (2-q)^4(1+2q), & 0 \leq q \leq 2, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases}$$

که در آن:

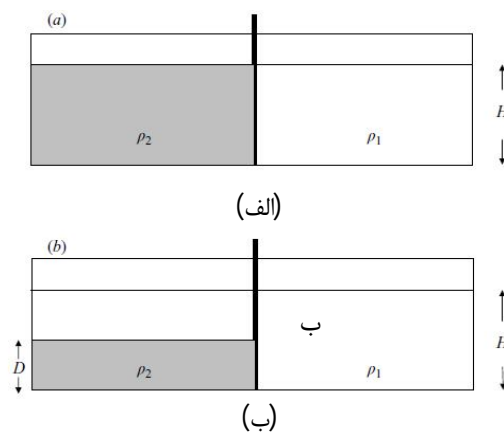
$$q = \frac{r_{ij}}{h} = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{h} \quad (5)$$

h طول هموار کرنل یا همان دامنه ی درونیابی برای هر ذره است. به طور کلی h از آزمون‌های همگرایی به دست می‌آید، به این ترتیب که با تغییر آن دقت و سرعت اجرای مدل سنجدیده می‌شود. استفاده از توابع کرنل مختلف این آزمون را تحت تأثیر قرار می‌دهند. برای مثال مرسوم است که برای تابع وندلند، طول هموار در ابتدا $1/5$ برابر فاصله اولیه ذرات در نظر گرفته شود تا قرارگیری ذرات شکل منظم‌تری به خود گیرد (Monaghan and Kajtar, 2009). لزجت مصنوعی در قالب ترم Π در معادله حرکت SPH ظاهر می‌شود (Monaghan, 2005):

$$\Pi_{ij} = - \frac{\alpha v_{sig} v_{ij} \cdot r_{ij}}{\rho_{ij} |r_{ij}|} \quad (6)$$

در رابطه فوق $v_{ij} = v_i - v_j$ و $\rho_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$

ارتفاع اولیه سیال سبک، D ارتفاع اولیه سیال سنگین، U سرعت جریان و v لزجت سینماتیک هستند. s برابر ρ_1/ρ_2 فرض می‌شود که چگالی سیال سبک‌تر و ρ_2 چگالی سیال سنگین‌تر است. با تعریف $g' = g(1-s)$ عدد فرود به فرم رابطه (1) بیان می‌شود.



شکل 1 شکل شماتیک شرایط اولیه شبیه‌سازی (الف) عمق یکسان (ب) عمق متفاوت

در این تحقیق چگالی دو سیال به گونه‌ای انتخاب می‌شود که شرایط جریان بوزینسک برقرار باشد ($s > 0.9$) (Shin et al, 2004). برای سیالاتی مانند آب و نفت لزجت و اختلاف چگالی سبب می‌شود عدد رینولدز جریان بیش از 2000 باشد. برای این نوع جریان چگال، شرایط جریان غیرلزج برقرار است (Simpson, 1997). در این حالت سرعت تا مسافت زیادی تقریباً ثابت است (بیش از 5 برابر طول ساکن اولیه بسته به نسبت D به H)، و مدت زمان زیادی طول می‌کشد تا جریان چگال به فاز دوم خود برسد (Shin et al, 2004). با توجه به حاکم بودن نیروهای اینرسی و محدودیت محاسباتی (نیاز به طولانی شدن طول تانک و افزایش تفکیک‌پذیری به منظور شبیه‌سازی دقیق جریان در زمانی که نازک می‌شود)، در این تحقیق تنها فاز اولیه مدل شده است. اصطکاک ذرات مرزی بستر صفر در نظر گرفته شده است. در این فاز افت‌های انرژی ناشی از اصطکاک مرز پایین و اختلاط دو سیال تأثیر قابل توجهی در سرعت و ارتفاع جریان نمی‌گذارد.

2-2- معادلات حاکم

در SPH با جایگزین کردن سیستم مورد نظر با مجموعه‌ای

$$W(q) = \begin{cases} w_5 \left(1 + \frac{5}{2}q + 2q^2\right) (2-q)^5, & 0 \leq q \leq 2, \\ 0, & q > 2, \end{cases} \quad (10)$$

w_5 طوری انتخاب می‌شود که انتگرال $W(q)$ روی فاصله مربوطه برابر 1 شود. نیروی وارد بر یک ذره سیال، ناشی از یک ذره مرزی از رابطه (11) به دست می‌آید (Monaghan and Kajtar 2009):

$$f_{ib} = \frac{K}{\beta} \frac{r_{ib}}{\left(|r_{ib}| - \frac{dp}{\beta}\right)^2} W\left(\frac{r_{ib}}{h}\right) \frac{2m_b}{m_i + m_b}, \quad (11)$$

که m_b نشانگر جرم ذره مرزی، m_i جرم ذره سیال و β نسبت فاصله اولیه ذرات سیال به فاصله ذرات مرزی است. K برابر مجذور حداکثر سرعت پیش بینی شده برای سیال است. فشار ذره با توجه به رابطه چگالی محلی ذره و انرژی داخلی آن، از طریق به کار بردن یک معادله حالت² محاسبه می‌شود. از این رو در حل مسائل مربوط به مایعات تراکم ناپذیر، سیال اندکی تراکم پذیر فرض می‌شود. معادله حالتی که برای محاسبه فشار در جریان سطح آزاد آب مطرح شد، به صورت (12) است (Monaghan 2000) و (Valizadeh et al. 2008):

$$p_i = B \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (12)$$

γ ثابتی است که در اغلب تحلیل‌ها برابر 7 در نظر گرفته می‌شود. ρ_0 چگالی مرجع است که برای آب برابر 1000 Kg/m^3 لحاظ می‌شود و $B = \frac{c^2 \rho_0}{\gamma}$ فشار مرجع می‌باشد. برای جلوگیری از نفوذ ذرات در یکدیگر، رابطه حرکت را می‌توان به صورت (13) اصلاح کرد تا ذرات سرعت هموارتری داشته باشند (Monaghan, 2005):

$$\frac{dv_i}{dt} = v_i + \varepsilon \Delta v_i \quad (13)$$

که در آن ε برابر 0/5 است و:

$$\Delta v_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (v_j - v_i) W_{ij} \quad (14)$$

2-3- مقدار دهی دوباره به چگالی

هر چند شبیه‌سازی ویژگی‌های دینامیکی سیال توسط SPH به واقعیت نزدیک است، اما میدان فشار نوساناتی را

سرعت مشخصه v_{sig} از فرمول (7) محاسبه می‌شود:

$$v_{sig} = \frac{1}{2} (c_i + c_j) - 2 \frac{u_{ij} \cdot r_{ij}}{r_{ij}} \quad (7)$$

c_i در رابطه (7) سرعت صوت در ذره i است. سرعت مشخصه را می‌توان این چنین تفسیر کرد: سرعتی که یک موج صوتی با آن از ذره i به موجی صوتی از ذره j نزدیک می‌شود. ترم دوم حرکت نسبی دو ذره است که در مقابل سرعت صوت ناچیز است و از معادله خارج می‌شود. با بی‌نهایت فرض کردن تعداد ذرات و ثابت نگاه داشتن h می‌توان محیط پیوسته را شبیه‌سازی کرد و لزجت را بر حسب α به دست آورد. با انجام محاسباتی شبیه به آنچه Monaghan (2005) انجام داده است، لزجت به دست می‌آید:

$$\nu = \frac{1}{8} \alpha h v_{sig} \quad (8)$$

رابطه (8) برای حالتی است که از وندلند به عنوان تابع کرنل استفاده شود.

در روش SPH در صورت منفی شدن فشار، ذرات به هم می‌چسبند¹. برای جلوگیری از این پدیده غیر فیزیکی، ترم R_{ij} به معادله مومنتم اضافه می‌شود (Monaghan, 2000):

$$R_{ij} = 0.01 \left| \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right| \left(\frac{W_{ij}}{W(dp)} \right)^4 \quad (9)$$

که $W(dp)$ در آن کرنلی است که بر اساس فاصله اولیه ذرات (dp) به دست می‌آید. با استفاده از کرنل درجه چهار لزومی برای اعمال ترم اصلاحی برای ناپایداری کششی مانند ترم فوق وجود ندارد (Monaghan, 2000).

نیروی دافعه بین ذرات مرزی و سیال است. (Monaghan and Kajtar 2009) روشی برای تخمین نیروهای ذرات مرزی ارائه کردند که در این تحقیق از آن استفاده شده است. این نیرو در جهت شعاعی بین ذره مرزی و سیال اعمال می‌شود. برآیند نیروهای اعمال شده از طرف ذرات مرزی به ذره سیال مستقل از پیچیدگی‌های هندسی مرز بوده و با دقت مناسبی عمود بر مرز اعمال می‌شود. شکل این نیروی شعاعی $W(r)/r$ است و W می‌تواند هر نوع تابع همواری باشد. تابعی که در این شبیه‌سازی از آن استفاده شده است، وندلند یک بعدی درجه 5 است (Monaghan and Kajtar 2009):

$$+ \sum_b (f_{ib} - m_b \Pi_{ib} \nabla_i W_{ib}) + f_i \quad (19)$$

$$D_i = \sum_j m_j v_{ij} \cdot \nabla W_{ij} \quad (20)$$

در مرحله اول مقادیر میانی برای r_i ، ρ_i و h_i برای ذرات سیال محاسبه می‌شود (Kajtar & Monaghan, 2008):

$$r_i^{1/2} = r_i^0 + \frac{1}{2} \delta t v_i^0 \quad (21)$$

$$\rho_i^{1/2} = \rho_i^0 + \frac{1}{2} \delta t D_i^0 \quad (22)$$

$$h_i^{1/2} = h_i^0 \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\delta t D_i^0}{\rho_i^0}\right) \quad (23)$$

با داشتن این مقادیر می‌توان نیروهای $\mathcal{F}_i^{1/2}$ و نرخ تغییرات چگالی $D_i^{1/2}$ را در گام میانی به دست آورد. در مرحله دوم با محاسبه مقادیر نهایی سرعت و موقعیت ذرات D_i^1 نیز به دست می‌آید و محاسبات برای یک گام زمانی پایان می‌پذیرد (Kajtar & Monaghan, 2008):

$$v_i^1 = v_i^0 + \delta t \mathcal{F}_i^{1/2} \quad (24)$$

$$r_i^1 = r_i^{1/2} + \frac{1}{2} \delta t v_i^1 \quad (25)$$

$$\rho_i^1 = \rho_i^{1/2} + \frac{1}{2} \delta t D_i^1 \quad (26)$$

$$h_i^1 = \frac{h_i^{1/2}}{1 + \frac{1}{4} \delta t \left(\frac{D_i^1}{\rho_i^1}\right)} \quad (27)$$

کنترل طول گام زمانی توسط شرط کورانت⁴ تعیین می‌شود. در این تحقیق این مقدار برابر حداقل $h/(2c)$ بین همه ذرات در نظر گرفته شده است.

5-2- SPH در حالت چند فازی

مسائل مختلف زیادی وجود دارند که در آنها دو یا چند سیال با یکدیگر در ارتباط هستند. توسعه مدل‌های چندفازی و نحوه شبیه‌سازی دقیق این جریان‌ها به روش SPH از جمله موضوعات و چالش‌های مهم پیش روی محققان در حال حاضر است

(Grenier et al., 2009, Hu and Adams, 2007, 2006). در مورد جریان‌های چگال که در آنها سیال توسط نیروی ناشی از اختلاف چگالی رانده می‌شود، نسبت دو چگالی می‌تواند متغیر باشد. در مورد

تجربه می‌کند که مطلوب نیست. تلاش‌های مختلفی برای غلبه بر این مشکل و یکنواخت و هموار شدن میدان فشار به ویژه در نزدیکی مرزهای آزاد و بسته، که درون‌یابی کرنل نیز دچار ناپیوستگی می‌شود، صورت گرفته است. یکی از روش‌های ساده و کم‌هزینه از نظر محاسباتی اجرای فیلترینگ روی ذرات و مقداردهی دوباره به چگالی در روند شبیه‌سازی است. در این تحقیق از یک روش ساده مرتبه صفر برای این منظور استفاده می‌شود (Bonet and Kulasegaram, 2000):

$$\rho_i = \frac{\sum_j \rho_j W_{ij} V_j}{\sum_j W_{ij} V_j} \quad (15)$$

V_j در رابطه فوق برابر تقسیم جرم ذره j بر چگالی آن است. در هر 40 گام زمانی چگالی ذرات طبق رابطه ی بالا اصلاح می‌شوند.

2-4- پیش روی زمانی

روش‌های مختلفی برای یافتن حل مسأله در زمان برای SPH وجود دارند. بهتر است الگوریتمی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، حداقل دقت مرتبه دوم را داشته باشد. الگوریتم پیش‌بینی-تصحیح¹، ورلت² و لیپ-فراگ³ از جمله روش‌هایی هستند که در SPH به کار برده شده‌اند. در این تحقیق از روش ورلت استفاده شده است. به طور خلاصه این روش برای هر گام زمانی دو مرحله تعیین می‌کند. در مرحله اول مقادیر میانی محاسبه می‌شوند، و در مرحله دوم، بعد از این که نیروها به دست آمدند، گام زمانی پایان می‌یابد.

برای ساده شدن کار معادلات SPH سیال به فرم زیر بیان می‌شود (Kajtar & Monaghan, 2008):

$$\frac{dr_i}{dt} = v_i \quad (16)$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \mathcal{F}_i \quad (17)$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = D_i \quad (18)$$

و

$$\mathcal{F}_i = - \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} + R_{ij} \right) \nabla_i W_{ij}$$

1. Predictor-Corrector

2. Verlet

3. Leap-Frog

4. Courant

رابطه (8) می‌توان α را به دست آورد.

سرعت بیشینه برابر $\sqrt{2gH}$ فرض می‌شود. چگالی مینا برای هر فاز جداگانه انتخاب می‌شود، اما فشار مینا یکسان منظور می‌گردد. از این رو بر اساس معادله حالت، سرعت صوت برای هر فاز جداگانه حساب می‌شود. برای محاسبه نیروی ذرات مرزی از تابع وندلند یک بعدی درجه 5 و برای ذرات سیال نیز از تابع وندلند درجه چهار بهره گرفته می‌شود.

آزمون برای سه نسبت چگالی مختلف و در حالت عمق یکسان انجام می‌شود (جدول 1). در هر حالت آزمون همگرایی انجام می‌گیرد تا تأثیر تأثیر نسبت چگالی دو فاز مختلف بر عملکرد روش SPH در حالت دوفازی سنجیده شود.

آزمون	ρ_1	ρ_2	ρ_1/ρ_2
1	1000	1025	0/976
2	950	1000	0/95
3	910	1000	0/91

پس از اعمال میرایی به میزان 10000 گام زمانی، دریچه برداشته می‌شود. با اعمال میرایی انرژی جنبشی اولیه ذرات به تدریج کم می‌شود تا ذرات داخل مخزن حالتی پایدار پیدا کنند و بین آنها و نیروهای ناشی از ذرات مرزی تعادل برقرار شود. بدین گونه شرایط اولیه مهیا می‌شود.

شکل 3- الف نمایی از نتیجه شبیه‌سازی را در زمان $t^* = t\sqrt{g/H} = 5.7$ برای آزمون 3 نشان می‌دهد، در حالی که فاصله اولیه بین ذرات 0/00667 متر است. شکل 3-ب نتیجه آزمایش (Shin et al., 2004) را در شرایطی مشابه نمایش می‌دهد. سیال سنگین‌تر سمت چپ و سیال سبک‌تر در سمت راست قرار دارند.

آزمون شماره 3 برای حالتی که نصف مخزن سمت چپ از سیال سنگین و نصف دیگر آن از سیال سبک پر شده باشد، نیز انجام می‌گیرد (شکل 4). در این حالت ارتفاع اولیه سیال سنگین‌تر و برابر $H/2$ است. به همین ترتیب این آزمون برای دو حالت $D/H = 0.35, 0.7$ نیز انجام می‌پذیرد.

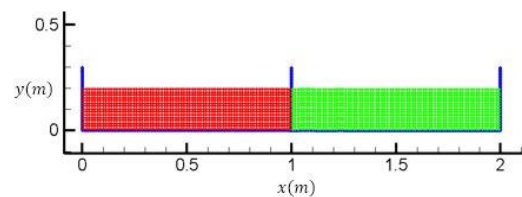
آب شور و شیرین یا نفت و آب این نسبت تقریباً برابر و یا نزدیک به 1 است. زمانی که نسبت چگالی کوچک تر از 2 باشد، روابط ارائه شده در قسمت‌های قبل می‌تواند با دقت خوبی به کار گرفته شود. در این حالت کافی است چگالی مینا و سرعت صوت را برای هر فاز جداگانه منظور کرد تا فشار مینا برای هر دو سیال یکسان شود. همچنین مقادیر دومی دوباره به چگالی در هر چند گام زمانی برای هر فاز به صورت جدا انجام می‌شود (Monaghan, 2012).

3- توسعه مدل

مدل توسعه داده شده به زبان فرترن نوشته شده است و ضمن به کارگیری مشخصات اشاره شده در بندهای فوق، قادر به شبیه‌سازی انواع جریان سطح آزاد، شبیه‌سازی امواج و اجسام شناور نیز می‌باشد.

4- اجرای آزمون و صحت سنجی

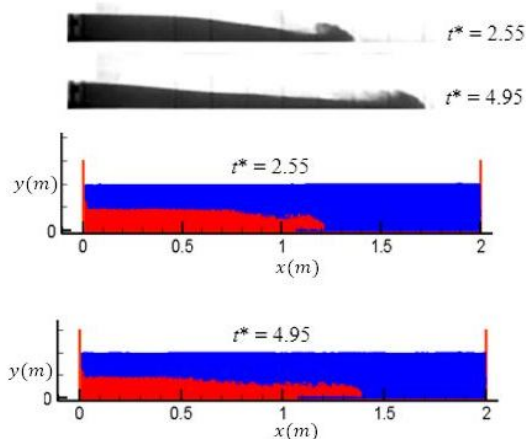
برای انجام آزمون شارش تبدالی یک مخزن 2 متری در نظر گرفته می‌شود که نصف آن را سیالی با چگالی سنگین، و نصف دیگر آن را سیالی با چگالی سبک‌تر، اشغال می‌کنند (شکل 2). لزجت دو سیال، یکسان و برابر لزجت آب در نظر گرفته می‌شود. در ابتدای شبیه‌سازی، دو سیال توسط یک دریچه از هم جدا می‌شوند. ارتفاع هر دو سیال در ابتدا برابر 0/2 متر است.



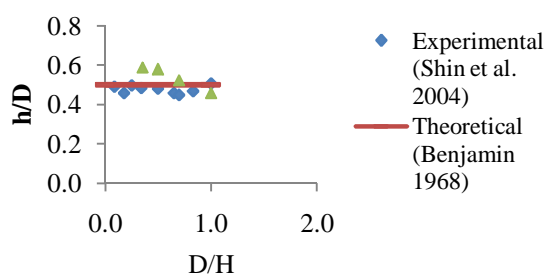
شکل 2 شرایط اولیه مدل در SPH

با فرض $F_D = 0.5$ که با مطالعات انجام شده سازگار است (Shin et al., 2004 ; Benjamin, 1968)، سرعت پیش‌بینی شده برای جریان به دست می‌آید (رابطه 1). با استفاده از این سرعت و با فرض اینکه لزجت سینماتیک آب برابر با $10^{-6} \text{Pa}\cdot\text{s}$ باشد، عدد رینولدز جریان حاصل می‌شود (رابطه 2). با داشتن عدد رینولدز و با به کارگیری

در شکل 5 نتایج آزمون در حالتی که $\frac{D}{H} = 0.5$ می‌باشد، به صورت کیفی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. فاصله‌ای که جریان در t^* طی می‌کند تطابق خوبی با هم دارند. در $t^* = 2.55$ مسافت طی شده توسط سیال سنگین در مدل آزمایشگاهی برابر 0.220m و در مدل SPH برابر 0.211m متر است. در $t^* = 4.95$ این دو مقدار به ترتیب برابر 0.400m و 0.388m می‌باشد. شکل 6 عمق جریان حاصل در مدل حاضر را برای همه حالات شبیه‌سازی شده با دو تحقیق دیگر مقایسه می‌کند.

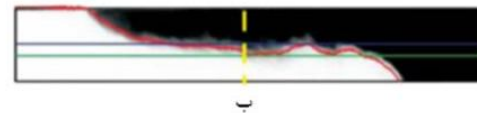
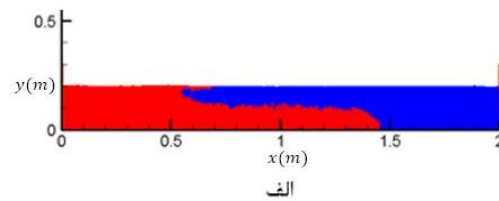


شکل 5 نتیجه مدل شارش تبادلی در دو زمان برای حالت عمق متفاوت. دو شکل اول مدل آزمایشگاهی Shin et al. (2004) و شکل‌های بعدی نتایج مدل SPH را نشان می‌دهند.

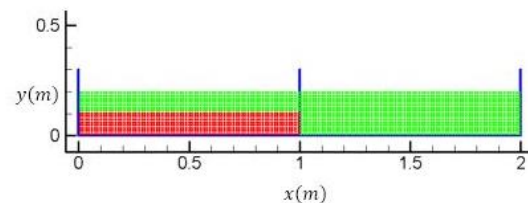


شکل 6 مقایسه عمق جریان حاصل در آزمون شارش تبادلی برای سه روش تحلیلی، آزمایشگاهی و SPH (h عمق جریان)

برای محاسبه سرعت جریان موقعیت پیشانی جریان در چندین زمان ثبت می‌شود و با تقسیم مسافت طی شده بر زمان، سرعت متوسط جریان به دست می‌آید. سرعت به دست آمده برای حالتی که عمق دو سیال یکسان است برابر 0.164 m/s و برای حالتی که سیال سنگین‌تر نصف



شکل 3 نتیجه مدل شارش تبادلی در زمان $t^* = 5.7$ برای آزمون 3 الف) مدل SPH (ب) مدل آزمایشگاهی Shin et al. (2004). خط افقی بالایی نشان دهنده نصف عمق اولیه (عدم اتلاف انرژی) و خط پایینی معرف 0.37 عمق اولیه (حداکثر اتلاف انرژی) بر اساس تئوری Benjamin (1968) هستند



شکل 4 شرایط اولیه مدل در SPH برای حالت $D/H = 0.5$

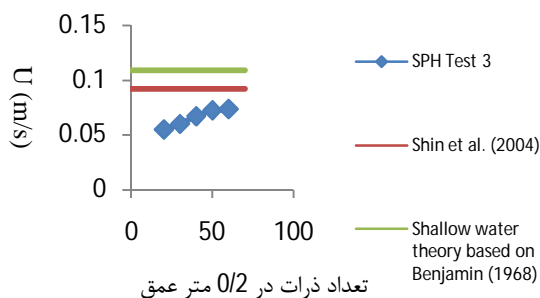
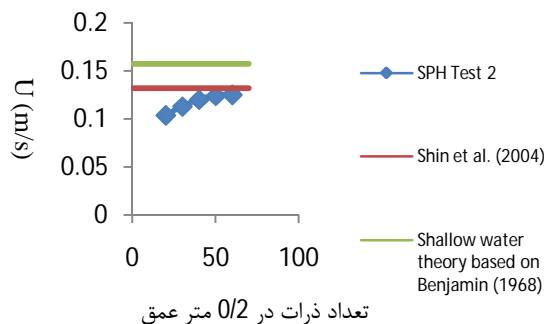
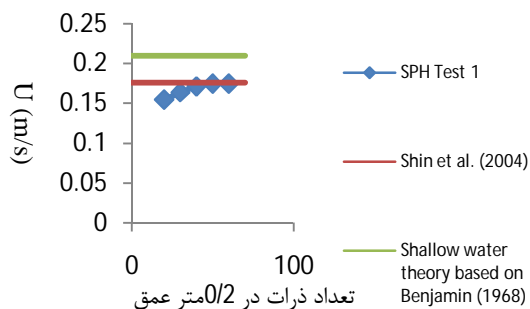
بلافاصله پس از برداشتن دریچه جریان چگال شکل می‌گیرد. انحنای جبهه جریان در هر دو سمت تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارند. بر اساس Benjamin (1968) جریان حاصل بلافاصله پس از برداشتن مانع تشکیل می‌شود و نصف عمق اولیه خود را داراست. Shin et al. (2004) با در نظر گرفتن حجم کنترلی که شامل دو سیال می‌شود، و انجام مطالعات آزمایشگاهی این ادعا را تصدیق کرده‌اند.

همان‌طور که در شکل 4 پیداست، ارتفاع میانگینی را می‌توان برای سیال سنگین‌تر تخمین زد. در این آزمون این ارتفاع برای حالت عمق یکسان، حدود 0/092 متر، و برای حالت $\frac{D}{H} = 0.5$ برابر 0/058 دست آمده است. بر اساس تئوری Benjamin (1968) عمق جریان سیال پایینی باید نصف ارتفاع اولیه باشد. Shin et al. (2004) نیز نتیجه‌ای مشابه می‌گیرند که با نتیجه حاصل از مدل SPH تطابق خوبی دارد.

نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل‌های 9 و 10 پیداست، با نزدیک شدن چگالی دو سیال دقت مدل کاهش می‌یابد.

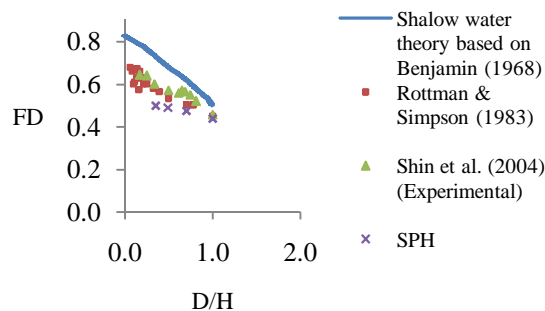
جدول 2 تفکیک‌پذیری انتخابی

تفکیک‌پذیری ذرات در مخزن 2×0/2 متری	آزمون
200×20	الف
300×30	ب
400×40	پ
500×50	ت
600×60	ث



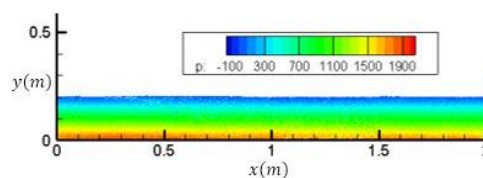
شکل 9 نمودار همگرایی آزمون (از شکل اول تا سوم چگالی دو سیال به هم نزدیک می‌شوند)

سیال سبک است، 0.146 m/s است. در شکل 7 نتایج سرعت تشکیل شده در مدل حاضر برای همه حالات شبیه‌سازی شده با سایر تحقیقات مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل 7 سرعت جریان در آزمون شارش تبدلی که به صورت بی بعد در قالب عدد فرود بیان شده است

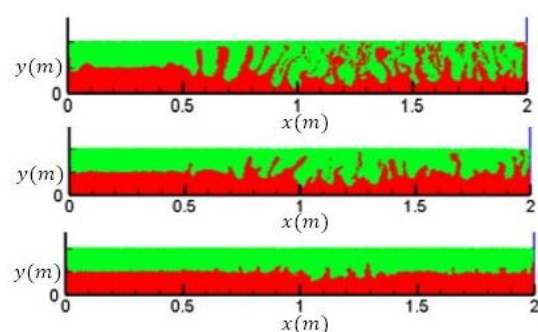
توزیع فشار در آزمون شارش تبدلی در لحظه $t^* = 5.7$ در شکل 8 نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این توزیع با تقریب خوبی هیدرواستاتیک است. جریان چگال در راستای افق شکل می‌گیرد و همان‌گونه که در مطالعات تحلیلی فرض می‌شود تغییرات فشار در افق ناچیز است.



شکل 8 میدان فشار در لحظه $t^* = 5.7$

شبیه‌سازی جریان چگال با نسبت چگالی دو سیال برابر با 0/91 با تفکیک‌پذیری انتخابی (300×30) به روش SPH نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد. اما وقتی نسبت چگالی دو سیال به هم نزدیک‌تر شود، نتایج مطلوبی ملاحظه نمی‌شود. بدین منظور سلسله آزمون‌هایی با تفکیک‌پذیری‌های مختلف انجام شده است که به وسیله آن بتوان دقت روش را در شبیه‌سازی جریان‌های دوفازی بیشتر سنجد. جدول 2 تفکیک‌پذیری‌های انتخابی برای آزمون‌های جدول 1 را نمایش می‌دهد. در شکل 10 نتایج همگرایی برای نسبت چگالی‌های مختلف در $t^* = 5.7$

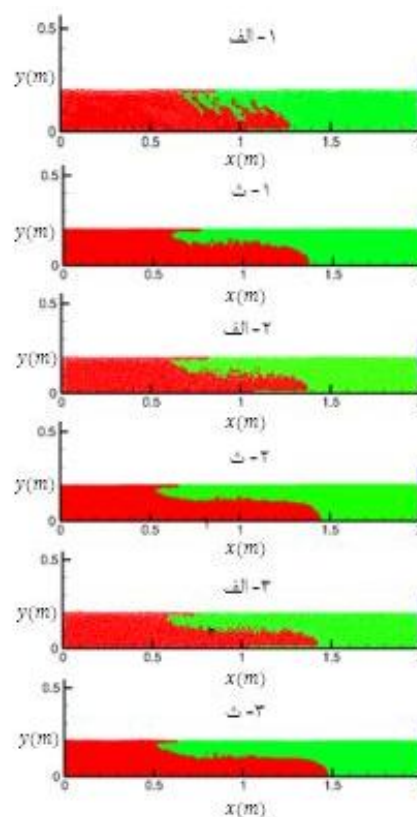
سرعت بیشتری اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر نیروهای ناشی از شناوری هر چه بیشتر باشند، ناپایداری ضعیف‌تر می‌شود. از این رو به نظر می‌رسد ناپایداری، ناشی از غلبه نوسانات ناشی از نیروهای وارد به سیال از طرف ذرات مرزی بر سایر نیروها از جمله اینرسی و شناوری است. برای بررسی صحت این موضوع لازم است تحقیقات تکمیل‌کننده‌ای با تغییر مدل مرزی انجام شود.



شکل 11 ناپایداری سطح مشترک دو فاز در $t = 12.2 \text{ sec}$ چگالی دو سیال در هر شکل متناظر با شماره آزمونی است که بالای آن نوشته شده است.

بر اساس شبیه‌سازی‌های انجام شده، بالا بردن رزولوشن کمکی به افزایش پایداری در حالت سکون نمی‌کند، در صورتی که در آزمون جریان چگال نتیجه کاملاً متفاوت است. هر چه تفکیک‌پذیری سیال بالاتر باشد جریان چگال دقت بهتری از خود نشان می‌دهد، به طوری که ناپایداری سطح مشترک را به تاخیر می‌اندازد. اگر شرایط شبیه‌سازی جریان چگال مناسب باشد، یعنی تفکیک‌پذیری مناسبی با توجه به نسبت دو چگالی انتخاب شده باشد، سرعت جریان مدل شده، به سرعت به دست آمده از نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر است (شکل‌های 9 و 10). وقتی تفکیک‌پذیری مناسب نباشد، به دلیل پخش شدن بیشتر ذرات سیال در یکدیگر سرعت جریان کاهش می‌یابد. کاهش جریان خود به مثابه کاهش نیروی اینرسی در برابر عوامل ناپایدار کننده سطح مشترک، به کاهش دقت و افزایش ناپایداری کمک می‌کند. آزمون 1-الف در شکل 10 و شکل 12 نشان می‌دهد که چگونه انتخاب تفکیک‌پذیری نامناسب پس از مدت زمانی به ناپایداری آزمون 1-الف، 1-ب و 2-الف می‌انجامد.

کاهش دقت، به شکل در هم آمیختگی و نفوذ ذرات دو فاز در یکدیگر، کاهش سرعت، و در نتیجه ناپایداری سطح مشترک خود را نشان می‌دهد. برای یافتن علت تأثیر کاهش اختلاف چگالی در دقت شبیه‌سازی، در این مرتبه، دو سیال به گونه‌ای در یک مخزن مدل می‌شوند که نیمه پایین فضای مخزن را سیال سنگین و نیمه بالای آن را سیال سبک پر کرده باشند. شبیه‌سازی در حالت سکون انجام می‌شود و دقت و پایداری مدل وقتی دو سیال ساکن هستند، مورد بررسی قرار می‌گیرد.



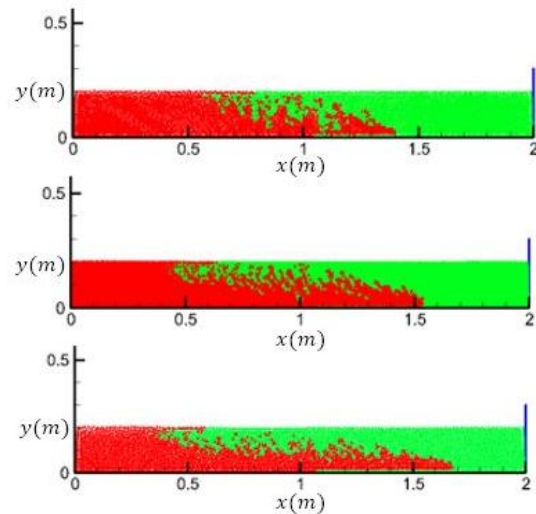
شکل 10 نتیجه شبیه‌سازی در $t^* = 5.7$ برای نسبت چگالی‌های جدول 1 و تفکیک‌پذیری‌های جدول 2 (اعداد 1، 2 و 3 شماره آزمون را طبق جدول 1 و حروف الف، ب و ... تفکیک‌پذیری آزمون را طبق جدول 2 نشان می‌دهد)

نتایج حاصل از شبیه‌سازی حالت ساکن دو سیال روی هم نشان می‌دهد که سطح مشترک دو فاز در روش مورد استفاده پس از مدتی دچار ناپایداری می‌شود (شکل 11). ناپایداری برای چگالی‌های نزدیک‌تر به هم سریع‌تر و با

پارامترهای صحت‌سنجی مدل انتخاب شده‌اند و نتایج حاصل تطابق خوبی با روش‌های آزمایشگاهی و تحلیلی دارد. در نتیجه این شبیه‌سازی‌ها مشاهده می‌شود که با کاهش اختلاف چگالی، سرعت جریان چگال کم می‌شود. کاهش سرعت سبب می‌شود نیروهای ناپایدار کننده سطح مشترک دو سیال فرصت غلبه بر نیروهای اینرسی را پیدا کنند. عوامل ناپایدارکننده سطح مشترک می‌تواند به نوسانات ناشی از نیروهای ذرات مرزی در طول شبیه‌سازی مربوط باشد که صحت این ادعا تحقیقات بیشتری را در این زمینه می‌طلبد. به دلیل تمایل بیشتر دو سیال به نفوذ در یکدیگر در سرعت‌های کمتر، سرعت جبهه جریان رفته رفته کاهش بیشتری پیدا می‌کند. کاهش بیشتر نیروهای اینرسی به معنای ناپایداری بیشتر سطح مشترک و به هم ریختن دو فاز در انتهاست. نتایج ناشی از شبیه‌سازی‌های مختلف نشان می‌دهد که افزایش تفکیک‌پذیری به افزایش دقت مدل و به تاخیر انداختن ناپایداری کمک می‌کند.

6- فهرست علائم

B	فشار مرجع
c	سرعت صوت
D	ارتفاع اولیه سیال سنگین / نرخ تغییرات چگالی
dp	فاصله بین دو ذره
f	بردار نیروی بین دو ذره
F	بردار نیروی خارجی
F_D	عدد فرود
g	شتاب جاذبه
g'	شتاب جاذبه نسبی
h	طول هموار
H	ارتفاع اولیه سیال سبک
m	جرم
p	فشار
q	فاصله نسبی
R	ترم اصلاح ناپایداری کششی
r	بردار فاصله بین دو ذره
Re	عدد رینولدز
s	چگالی نسبی
t	زمان
t^*	زمان بی بعد



شکل 12 ناپایداری در آزمون‌های 1- الف، 1- ب و 2- الف از بالا به پایین (اعداد 1، 2 و 3 شماره آزمون را طبق جدول 1 و حروف الف، ب تفکیک‌پذیری آزمون را طبق جدول 2 نشان می‌دهند)

با فرض اینکه همگرایی سرعت نشان دهنده دقت کافی شبیه‌سازی باشد، نتایج ارائه شده در نمودارهای شکل 9 نشان می‌دهد که کاهش سرعت کمک می‌کند نیروهای ناپایدار کننده سطح مشترک دو سیال غلبه پیدا کرده و ذرات دو فاز در هم فرو روند. در آمیختگی دو سیال باعث کاهش سرعت جریان چگال و جبهه آن می‌شود که خود دوباره سطح مشترک را بیشتر در معرض ناپایداری قرار می‌دهد. برای اینکه حدود هزینه‌های محاسباتی مشخص شود ذکر این نکته کافی است که برای آزمون ت، تعداد 28200 ذره شبیه‌سازی شده، که برای هر 1 ثانیه پیشروی زمانی، حدود 31 دقیقه محاسبات به کمک یک CPU با سرعت 2 گیگاهرتز مورد نیاز بوده است.

5- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، از یک روش لاگرانژی بدون شبکه (SPH) برای شبیه‌سازی شارش تبادلی و ایجاد جریان چگال و بررسی برخی از ویژگی‌های آن در نسبت‌های چگالی کم استفاده شده است. برای توسعه مدل دوفازی تغییر چندانی در متدولوژی کلاسیک روش SPH داده نشده است. سرعت جریان چگال، عمق و میدان فشار به عنوان

D. and Alessandrini, B. (2009), "An Hamiltonian interface SPH formulation for multi-fluid and free surface flow", *Journal of Computational Physics*. Vol. 228, 8380-8393.

Hu, X.Y. and Adams, N.A. (2007). "An incompressible multi-phase SPH method", *Journal of Computational Physics*. Vol. 227: 264-278.

Hu, X.Y. and Adams, N.A. (2006). "A multi-phase SPH method for macroscopic and mesoscopic flows", *Journal of Computational Physics*. Vol. 213: 844-861.

Huppert, H. E. and Simpson, J. E. (1980), "The slumping of gravity currents". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 99, 785-799.

Kajtar, J. and Monaghan, J. J. (2008). SPH simulations of swimming linked bodies. *Journal of Computational Physics*, 227(19), 8568-8587.

Lo, E. Y., and Shao, S. (2002). "Simulation of near-shore solitary wave mechanics by an incompressible SPH method". *Applied Ocean Research*, 24(5), 275-286.

Lowe, R. J., Rottman, J. W. and Linden, P. F. (2005), "The non-Boussinesq lock-exchange problem. Part 1. Theory and experiments". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 537, 101-124.

Lucy, L. (1977). "A numerical approach to the testing of fusion process". *Journal Astronomical*. 82, 1013-1024.

Monaghan, J. J. (2012), "Smoothed Particle Hydrodynamics and its diverse applications", *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 44, 323-346.

Monaghan, J. J. (2005). "Smoothed Particle Hydrodynamics". *Reports on Progress in Physics*, Vol. 68: 1703-1759.

Monaghan, J. J. and Kajtar, J. B. (2009), "SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries", *Computer Physics Communications*, Vol. 180, 1811-1820.

Monaghan, J. J. (2000). "SPH without tensile instability". *Journal Computational Physics*, 159: 290-311.

Monaghan, J.J. (1994). "Simulating free surface flows with SPH". *Journal of Computational Physics*. Vol. 110, 399-406.

Morris, J.P., Fox, P.J. and Shu, Y. (1997). "Modeling lower Reynolds number incompressible flows using SPH". *Journal of Computational Physics*. Vol. 136, 214-226.

U	سرعت جریان
V	حجم معادل ذره
W	تابع کرنل
x	بردار موقعیت ذره
α	ضریب لزجت
β	نسبت فاصله اولیه ذرات سیال به فاصله ذرات مرزی
ε	ضریب XSPH
ν	لزجت سینماتیک
v	بردار سرعت
	زیر نویس ها:
i	شماره ذره
j	شماره ذره
b	ذره مرزی
sig	مقدار مشخصه

7- منابع

Benjamin, T. B (1968), "Gravity currents and relative phenomena". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 31, 209-248

Birman, V. K., Martin, J. E. and Meiburg, E. (2005), "The non-Boussinesq lock-exchange problem. Part 2. High-resolution simulations". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 537, 125-144.

Bonet, J. and Kulasegaram, S., (2000), "Corrections and stabilization of smoothed particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 47, 1189-1214.

Colagrossi, A., and Landrini, M. (2003). "Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics". *Journal of Computational Physics*, 191(2), 448-475.

Dalrymple, R. A., and Rogers, B. D. (2006). "Numerical modeling of water waves with the SPH method". *Coastal Engineering*, 53(2), 141-147.

Firoozabadi, B., and Mahdinia, M. (2013). "2D numerical simulation of density currents using the SPH projection method". *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 38, 38-46.

Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. (1977), "Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 181, 375-389

Grenier, N., Antuono, M., Colagrossi, A. Le Touze,

Simpson, J. E. (1997), *Gravity currents: In the environment and laboratory*. 2nd Ed., Cambridge University Press.

Valizadeh, A., M. Shafieefar, J.J. Monaghan and S.A.A. Salehi-Neyshaboori, (2008). "Modeling two-phase flows using SPH method". *Journal of Applied Science*, 8, 3817-3826.

Rottman, J.W. and Simpson, J.E. (1983). "Gravity currents produced by instantaneous releases of a heavy fluid in a rectangular channel". *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 135, 95-110.

Shin, J.O., Dalziel, S.B. and Linden, P.F. (2004), "Gravity currents produced by lock exchange". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 521, 1-34.