

بررسی مسائل دارای دو سطح آزاد بر اساس روش گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی

سیدعبدالصمد جوانمرد

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران

ajavanmard@miau.ac.ir

(دریافت مقاله: 96/12/14؛ پذیرش مقاله: 97/6/7)

چکیده - گالرکین بدون المان (EFG) و درون‌یاب نقطه‌ای شعاعی (RPIM) از روش‌های بدون المان در زمینه مکانیک محاسباتی می‌باشند. در این مقاله یک روش محاسباتی با در نظر گرفتن یک ناحیه ثابت و یک ناحیه متغیر بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی جهت بررسی مسائل سطح آزاد دو بعدی دارای دو سطح آزاد زیر دریچه شعاعی جهت محاسبه پروفیل سطوح آزاد، توزیع سرعت، فشار درون کانال و دبی آب خروجی از مجرای خروجی ارائه شده است. در روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی، توابع شکل بدست آمده از روش درون یاب نقطه‌ای شعاعی به‌عنوان توابع وزن در روش گالرکین بدون المان مورد استفاده قرار می‌گیرند که باعث ایجاد خاصیت دلتای کرانیکر در توابع شکل می‌گردد. در این روش بر خلاف روش گالرکین بدون المان، اعمال شرایط مرزی اساسی به راحتی صورت گرفته و توابع شکل دارای خاصیت دلتای کرانیکر می‌باشد. در این مطالعه، سیال عبوری، تراکم ناپذیر و غیر لزج فرض شده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نتایج عملی بدست آمده از آزمون مدل هیدرولیکی مقایسه شده است که نتایج بدست آمده دارای هم‌خوانی جهت پروفیل سطح آزاد و توزیع فشار می‌باشد.

کلیدواژگان: روش‌های بدون المان، دو سطح آزاد، روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی، دریچه شعاعی.

1- مقدمه

موقعیت سطح آزاد و ارضاء شرط مرزی بر روی آن به صورت هم‌زمان انجام می‌گیرد. یکی از موفقیت‌های عمده در هیدرودینامیک کلاسیک، استفاده از آنالیز مختلط و تبدیل همدیس³ در حل مسائل جریان‌های سطح آزاد می‌باشد. در این روش ناحیه جریان⁴ به یک صفحه کمکی نگاشت می‌شود. Fangmeier and Strelkoff (1968) بوسیله روابط نگاشت این مسائل را مورد بررسی قرار دادند.

آنالیز دو بعدی جریان‌هایی که تحت تأثیر وزن خود جاری می‌شوند که شامل سطح آزاد¹ می‌باشند از موضوعات مورد علاقه محققان در شاخه مهندسی هیدرولیک است. پارامترهای جریان شامل سرعت، توزیع فشار و پروفیل سطح آزاد می‌باشد. معادله لاپلاس، معادله حاکمه بر مسائل سطح آزاد در حالت پایدار² می‌باشد. مسائل سطح آزاد مسائلی ذاتاً غیر خطی می‌باشند که بر اساس یافتن

³ Conformal Transformation

⁴ Flow Domain

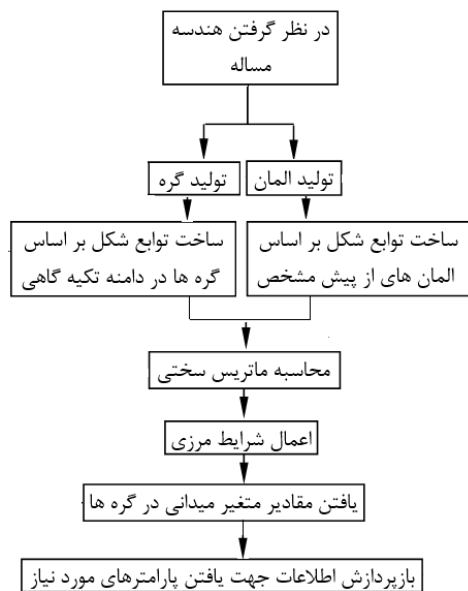
¹ Free Surface

² Steady State

می‌باشد.

هر چند که روش المان محدود در حل مسائل سطح آزاد توانمند می‌باشد و در این زمینه توسعه یافته است ولی با توجه به تغییر ایجاد شده در دامنه حل مسأله نیاز به تولید المان در هر مرحله حل می‌باشد که معمولاً توسط کاربر انجام می‌گیرد و فرایندی زمان گیر در فرایند حل می‌باشد. در این خصوص استفاده از روش‌های بدون المان باعث حل مشکلات مربوط به تولید المان و عدم نیاز به دخالت کاربر در فرایند حل می‌گردد.

در اکثر تحقیقات انجام شده در زمینه مسائل سطح آزاد، مسأله انتخاب شده دارای یک سطح آزاد می‌باشد که سطح آزاد در این گونه مسائل در ناحیه‌ای کوچک نزدیک به دریچه خروجی به صورت منحنی بوده و در ادامه سطح آزاد حالت پایدار به خود می‌گیرد در صورتی که در مسائل دارای دو سطح آزاد، دو سطح از سیال مجهول بوده و سطوح مجهول ذکر شده دارای شکل منحنی در ناحیه‌ای بزرگتر نسبت به مسائل دارای یک سطح آزاد می‌باشند. از این رو حل این گونه مسائل پیچیده تر و نیازمند صرف زمان بیشتر جهت یافتن منحنی سطح آزاد می‌باشد. برای مقایسه روند کلی حل در روش‌های بدون شبکه با روش المان محدود می‌توان به شکل 1 مراجعه نمود.



شکل 1 مقایسه بین روش المان محدود و روش‌های بدون المان

از دیگر روش‌های مورد استفاده در این قبیل مسائل می‌توان به روش تحلیلی متغیرهای مختلط (Larock, 1975)، روش تفاضل محدود (Masliah et al., 1985)، روش المان‌های مرزی (Cheng et al., 1981)، روش‌های ردیابی حجم (J I Chun-ning et al., 2005) و ردیابی ذرات (Sokoray-Varga and Józsa, 2008) اشاره نمود. از میان روش‌های ذکر شده در بالا، روش تحلیلی متغیرهای مختلط به دلیل محدودیت‌های زیاد آن در برخورد با هندسه‌های پیچیده به ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین روش تفاضل محدود به دلیل نیاز آن به شبکه‌های باسازمان جهت ساختن معادلات تفاضلی چندان مورد توجه نیست و روش المان مرزی علیرغم قابلیت‌های آن، بدلیل پیچیدگی‌های ریاضی آن کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در روش ردیابی حجمی، اطلاعات در مورد سطح واسطه ذخیره شده و این سطح در هنگام نیاز بازسازی می‌گردد که این بازسازی به صورت سلول به سلول و بر اساس یک کمیت نشانگر انجام می‌شود. این کمیت نشانگر می‌تواند نسبت حجم اشغالی توسط یکی از سیال‌ها در یک سلول به حجم کل سلول باشد.

در میان روش‌های عددی، روش المان محدود دارای محبوبیت بیشتری نسبت به بقیه روش‌ها می‌باشد. استفاده از روش المان محدود در حل مسائل سطح آزاد، ابتدا توسط (McCorquodale and Li 1971) برای بررسی جریان زیر دریچه تخت مورد استفاده قرار گرفت. تعداد دیگری از محققان که در این زمینه فعالیت داشته‌اند شامل (Cheng et al., Ikegawa and Washizu 1973)، (Li et al. 1981)، (Issacs 1977)، (Vanden-Broek, Sankaranarayanan and Rao 1996) (1997)، (سلیمان بیگی 1392) و (فرزین و همکاران 1393) می‌باشد. (Daneshmand et al. 1999, 2000, 2010, 2012) و (Daneshmand and Kazemzadeh Parsi 2004) سطح آزاد را برای جریان جاری شده زیر دریچه شعاعی و ترکیب دامنه متغیر و دامنه ثابت را بر اساس روش‌های المان محدود و المان طبیعی بدست آوردند. همچنین جوانمرد (1395) مسائل سریز را بر اساس روشی بدون المان شبیه سازی نمود. مزیت این روش‌ها، سرعت همگرایی بیشتر در حل مسأله و یافتن موقعیت سطح آزاد

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) p(x_i) p^T(x_i),$$

$$B(x) = [w_1(x)p(x_1), \dots, w_n(x)p(x_n)],$$

$$\bar{u} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n]^T$$

اگر طرفین رابطه (5) در معکوس ماتریس A ضرب شود، بردار ضرایب به صورت رابطه (7) بدست می آید:

$$\alpha(x) = A^{-1}(x)B(x)\bar{u} \quad (7)$$

چنانچه رابطه (6) در رابطه (7) جایگذاری شود، می توان توابع شکل را به صورت روابط (8) و (9) معرفی نمود:

$$u(x) = \hat{u}(x) = \varphi^T(x)\bar{u}$$

$$= \sum_{j=1}^n \varphi_j(x)\bar{u}_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

$$\varphi(x) = p^T(x)A^{-1}(x)B(x) \quad or$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)[A^{-1}(x)B(x)]$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$\varphi_j(x)$ را تابع شکل متعلق به گره λ_m در نقطه x می نامیم. در اینجا α و ماتریس های A و B ثابت نبوده و تابعی از x می باشند. برای محاسبه مشتق مرتبه اول و دوم بر اساس روابط (2) و (7) می توان از رابطه (10) استفاده کرد:

$$u(x) = p^T(x)A^{-1}(x)B(x)\bar{u} \quad (10)$$

در اینصورت لازم است مشتق به صورت زنجیره ای از A و B نسبت به x گرفته شود:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = p_{,x}(x) \quad \frac{\partial A(x)}{\partial x} = A_{,x}(x)$$

$$\frac{\partial B(x)}{\partial x} = B_{,x}(x)$$

$$\frac{\partial A^{-1}(x)}{\partial x} = -A^{-1}(x)A_{,x}(x)A^{-1}(x) \quad (11)$$

با استفاده از رابطه (10)، مشتق مرتبه اول به صورت رابطه (12) قابل بیان می باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x}$$

$$= p_{,x}^T A^{-1} B \bar{u} - p^T A^{-1} A_{,x} A^{-1} B \bar{u} + p^T A^{-1} B_{,x} \bar{u} \quad (12)$$

2-1-1-2- توابع وزن مورد استفاده در روش گالرکین بدون

المان

تابع وزن برای تمامی گره ها و روی تمامی دامنه مسأله

در روش های بدون المان، تابع تقریب فقط بر اساس مجموعه ای از گره ها تشکیل می شود و برای تشکیل تابع تقریب نیازی به المان نیست. برخلاف روش اجزا محدود که برای تشکیل درون یابها نیازمند ساختار المانی می باشد.

2- مواد و روش تحقیق

2-1- روش ترکیبی گالرکین بدون المان و درون یاب

نقطه ای شعاعی

روش گالرکین بدون المان از جمله روش های معروف بدون المان است. در این روش، توابع تقریب با استفاده از روش کمترین مربعات متحرک ساخته می شوند. تقریب کمترین مربعات متحرک روشی برای بدست آوردن تقریبی از یک تابع مجهول با داشتن مقدار آن در تعدادی نقاط مجزا می باشد. اگر x نقطه ای درون ناحیه مسأله باشد تقریب کمترین مربعات متحرک در آن نقطه به صورت رابطه (1) خواهد بود:

$$u(x) = \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)\alpha_i \quad (1)$$

که $p(x)$ به عنوان بردار توابع پایه و α به عنوان بردار ضرایب شناخته می شود. معمولاً تعداد نقاط n باید از تعداد توابع پایه m بیشتر باشد. رابطه (1) را می توان به صورت رابطه (2) نیز بیان نمود:

$$u(x) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots] [\alpha_1 \dots \alpha_m]^T$$

$$= p^T(x)\alpha \quad (2)$$

لذا می توان خطای ناشی از تقریب را به صورت رابطه (3) محاسبه نمود:

$$J = \sum_{j=1}^n w_j(x) [\bar{u}_j - \hat{u}_j]^2 = \sum_{j=1}^n w_j(x) [\bar{u}_j - p^T(x_j)\alpha(x)]^2 \quad (3)$$

که $w_j(x)$ تابع وزن متناسب با گره λ_m می باشد که در نقطه x محاسبه شده است. اکنون با حداقل کردن مقدار خطا می توان ضرایب مجهول (بردار α) را محاسبه کرد. جهت حداقل کردن خطا لازم است که:

$$\partial J / \partial \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

این رابطه منجر به رابطه (5) خواهد شد:

$$A(x)\alpha(x) = B(x)\bar{u} \quad (5)$$

که:

که $R_i(x)$ تک جمله‌ای تابع اساسی شعاعی می‌باشد. در تابع شعاعی $R_i(x)$ تنها متغیر فاصله r_i (فاصله بین دو مختصات فضائی x_i و x) می‌باشد بطوریکه در مسائل دو بعدی می‌توان رابطه (15) را نوشت:

$$r = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

برای انجام تحلیل، توابع شعاعی مختلفی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که در جدول 1 به تعدادی از آنها اشاره شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تشکیل این توابع نیازمند تعیین پارامترهای مجهولی تحت عنوان پارامترهای شکل می‌باشد. بهترین مقدار برای این پارامترها بر اساس نوع مسأله تعیین می‌شود و نیازمند انجام آزمون‌های عددی می‌باشد که در این تحقیق از حالت $R_i(x, y) = r_i^\eta$ استفاده شده است.

با توجه به رابطه (14)، برای بردار $R(x)$ رابطه (16) بدست می‌آید:

$$R^T(x) = [R_1(x) \quad R_2(x) \quad \dots \quad R_n(x)] \quad (16)$$

می‌توان بوسیله ارضا رابطه (14) در n گره‌ای که در دامنه تکیه گاهی نقطه x قرار گرفته‌اند، ضرایب مجهول a_i را تعیین نمود. در این صورت می‌توان رابطه (17) را نوشت:

$$u_k = u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n a_i R_i(x_k, y_k) \\ = \sum_{i=1}^n a_i R_i(r_k) \quad (17)$$

که در آن:

$$r_k = \left[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 \right]^{1/2} \quad (18)$$

با توجه به اینکه فاصله بین دو نقطه به جهت حرکت وابسته نیست، می‌توان رابطه (19) را نوشت:

تعریف می‌گردد به طوری که تابع وزن بر روی تمامی نقاط دامنه مثبت یا صفر می‌باشد و مقدار آن در x حد اکثر بوده و با دور شدن از نقطه x مقدار آن کاهش می‌یابد و در فاصله‌ای از گره مورد نظر که آن را شعاع اثر تابع وزن می‌نامند، مقدار آن برابر صفر می‌گردد به عبارت دیگر شعاع اثر تابع وزن بیان کننده ناحیه‌ای است که آن گره خاص می‌تواند روی جواب تأثیر بگذارد. از جمله توابع وزن می‌توان به معروفترین آنها Cubic Spline و Gaussian اشاره نمود (Most, 2007).

2-2- درون یاب نقطه‌ای شعاعی جهت دستیابی به

توابع وزن

2-2-1- روش درون یابی نقطه‌ای با استفاده از توابع

اساسی شعاعی

روش درون یابی نقطه‌ای از جمله روش‌های بدون شبکه می‌باشد که در آن برای نمایش تابع تقریب از فرم سری محدود استفاده می‌گردد. تابع اسکالر $u(x)$ را در دامنه Ω که توسط دسته‌ای از گره‌های پراکنده ایجاد شده است، در نظر می‌گیریم. روش درون یابی نقطه‌ای، تابع $u(x)$ در نقطه مورد نظر را به صورت زیر تقریب می‌زند:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m B_i(x) a_i \quad (13)$$

که در این رابطه $u^h(x)$ تابع تقریب برای $u(x)$ تابع اساسی در مختصات دو بعدی، m تعداد توابع اساسی و a_i ضریب مرتبط با تابع اساسی می‌باشند. در روش درون‌یابی نقطه‌ای با استفاده از توابع اساسی شعاعی، رابطه (13) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i = R^T(x) a \quad (14)$$

جدول 1 نمونه‌ای از توابع شعاعی مختلف

نام	توصیف ریاضی	پارامترهای شکل
Multiquadrics (MQ)	$R_i(x, y) = (r_i^2 + C^2)^q = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + C^2 \right]^q$	q, C
Gaussian (EXP)	$R_i(x, y) = \exp(-Cr_i^2) = \exp\left\{-C \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]\right\}$	C
Thin plate spline (TPS)	$R_i(x, y) = r_i^\eta = \left[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \right]^{\frac{\eta}{2}}$	η
Logarithmic RBF	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	η

می باشد ساده تر است. (Liu, 2003).

2-3- فرمول بندی مسأله

طرح شماتیکی از جریان دو بعدی دارای دو سطح آزاد عبوری از زیر دریچه شعاعی در شکل 2 نشان داده شده است. سیال عبوری، تراکم ناپذیر، غیر لزج و غیر چرخشی فرض گردیده است.

معادله حاکم، معادله لاپلاس می باشد که به صورت زیر بر حسب تابع جریان $\psi(x,y)$ بیان می گردد:

$$\psi_{,xx} + \psi_{,yy} = 0 \quad (26)$$

همچنین شکل 2 بیان کننده شرایط مرزی مسأله می باشد. با توجه به شکل 2، سطوح S_2 و S_7 به ترتیب بیان کننده مجرای پایین و بالا، سطوح S_1 و S_4 به ترتیب بیان کننده جریان ورودی و خروجی می باشد که دارای فاصله مناسب از دریچه بوده به صورتی که خطوط جریان بر این سطوح عمود می باشند. سطح S_6 بیان کننده سطح دریچه شعاعی می باشد. سطوح S_3 و S_5 بیان کننده سطوح جریان آزاد بوده که موقعیت آنها در مسأله مجهول می باشد. در این تحقیق، ارتفاع آب پشت دریچه شعاعی (H_E) جزء معلومات و شدت جریان (Q) جزء مجهولات مسأله می باشد که در روند حل مسأله به همراه موقعیت سطوح آزاد محاسبه می گردد. در مجموع شرایط مرزی مسأله را می توان به صورت رابطه (27) بیان نمود:

$$\begin{aligned} \psi &= 0 && \text{on } S_2 \text{ and } S_3 \\ \psi &= Q && \text{on } S_5, S_6 \text{ and } S_7 \\ \psi_{,n} &= -\sqrt{2g(B-y)} && \text{on } S_3 \text{ and } S_5 \\ \psi_{,n} &= 0 && \text{on } S_1 \text{ and } S_4 \end{aligned} \quad (27)$$

هدف از حل مسأله را می توان یافتن موقعیت سطوح آزاد پایینی و بالائی، شدت جریان خروجی، میدان سرعت و نحوه توزیع فشار بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه ای شعاعی بیان نمود.

2-4- اصلاح سطوح آزاد

با توجه به ماهیت غیر خطی مسأله، حل آن یک فرایند تکراری می باشد به این صورت که در ابتدا یک حدس و در هر مرحله موقعیت سطوح آزاد اصلاح می گردد تا همگرایی به جواب حاصل شود.

$$R_i(r_j) = R_j(r_i) \quad (19)$$

رابطه (17) را می توان در فرم ماتریسی به صورت رابطه (20) بیان نمود:

$$U_s = R_Q a \quad (20)$$

که U_s بردار مقادیر گره ای و R_Q به صورت رابطه (21) تعریف می شود:

$$R_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix} \quad (21)$$

با توجه به رابطه (19)، ماتریس R_Q ماتریسی متقارن است. با توجه به رابطه (20)، رابطه (22) بدست می آید:

$$a = R_Q^{-1} U_s \quad (22)$$

از جایگذاری رابطه (22) در رابطه (14)، رابطه (23) بدست می آید:

$$u^h(x) = R^T(x) R_Q^{-1} U_s \quad (23)$$

و به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= [R_1(x) \quad R_2(x) \quad \dots \quad R_k(x) \quad \dots \quad R_n(x)] R_Q^{-1} \\ &= [\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \dots \quad \varphi_k(x) \quad \dots \quad \varphi_n(x)] \end{aligned} \quad (24)$$

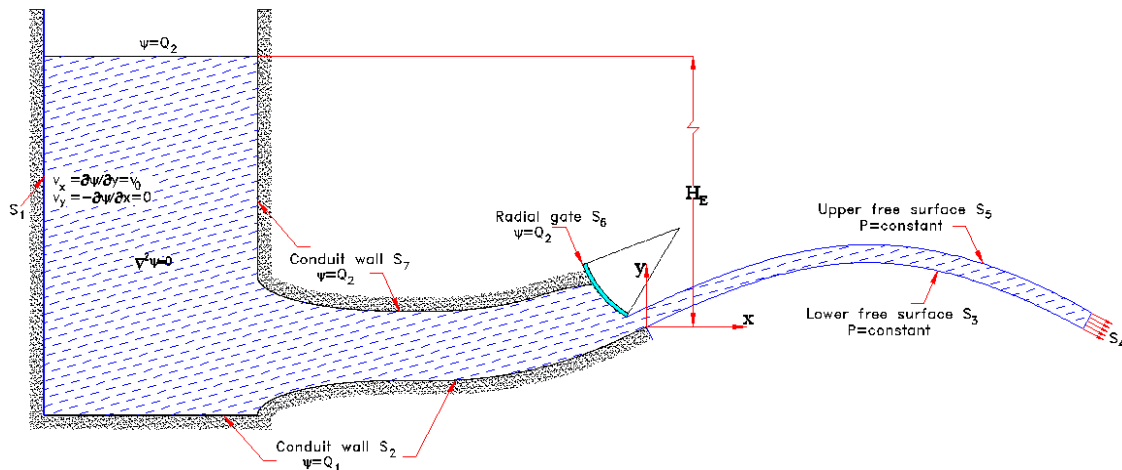
و یا می توان نوشت:

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x) S_{ik}^a \quad (25)$$

که S_{ik}^a المان (i,k) در ماتریس R_Q^{-1} می باشد که برای n گره موجود در دامنه تکیه گاهی نقطه x ، ماتریسی با مقادیر ثابت است.

ماتریس گشتاور بدست آمده از روش درون یابی نقطه ای با استفاده از توابع اساسی شعاعی مشروط به محدوده های خاص از ضرایب شکل تابع R وارون پذیر می باشد که مهمترین مزیت استفاده از توابع شعاعی بجای کثیرال جمله ای ها می باشد. همچنین توابع شکل بدست آمده از این روش دارای خاصیت دلتای کرانیکر می باشند

استفاده از توابع اساسی شعاعی مشکل وارون پذیر نبودن ماتریس گشتاور را حل می کند و روشی پایدار و انعطاف پذیر را برای هر گونه آرایش گره ای پدید می آورد. همچنین گسترش این روش برای مسائل سه بعدی با توجه به اینکه صرفاً، تابع اساسی یک متغیر شعاعی (r)



شکل 2 نمای هندسی و شرایط مرزی جریان دارای دو سطح آزاد زیر دریچه شعاعی

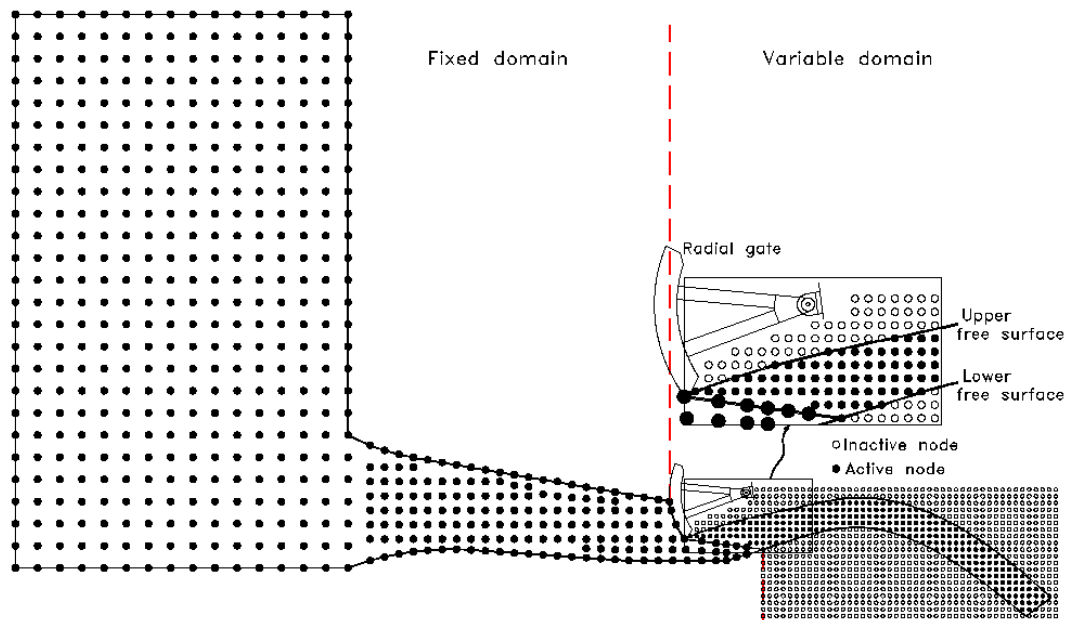
سطوح آزاد، گره‌های فعال انتخاب می‌شوند. (ب) حدس اولیه جهت شکل سطوح آزاد پایین و بالا انتخاب می‌شوند. در اینجا از منحنی سهمی به‌عنوان حدس اولیه جهت سطوح آزاد استفاده شده است. (ج) با توجه به موقعیت سطوح آزاد، گره‌های فعال در ناحیه متغیر انتخاب می‌شوند. (د) سطح آزاد پایین ثابت فرض می‌شود بنابراین جهت گره‌های قرار گرفته بر روی آن، شرط مرزی Dirichlet و جهت گره‌های قرار گرفته بر سطح آزاد بالائی شرط مرزی Neumann اعمال می‌شود. (ه) با توجه به اعمال شرایط مرزی، مسأله بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی حل شده و تابع جریان (ψ) جهت کلیه گره‌ها با توجه به موقعیت سطوح آزاد محاسبه می‌شود. در ادامه Q_{upper}^{k+1} با توجه به ψ محاسبه شده جهت اولین گره قرار گرفته بر سطح آزاد بالا محاسبه شده و موقعیت سطح آزاد بالا اصلاح می‌گردد. فرایند حل تا رسیدن مقدار حداکثر معیار همگرایی به دقت تعریف شده جهت حل ادامه می‌یابد. معیار همگرایی جهت گره‌های قرار گرفته بر روی سطح آزاد بالا به صورت $|Q_i^{k+1} - \psi_i^k| / Q^{k+1}$ تعریف می‌شود. (ز) سطح آزاد بالا ثابت فرض شده و شرط مرزی Dirichlet به گره‌های قرار گرفته بر سطح آزاد بالا و شرط مرزی Neumann به گره‌های قرار گرفته بر روی سطح آزاد پایین اعمال می‌گردد.

در ابتدا یکی از سطوح آزاد به صورت ثابت در نظر گرفته می‌شود و شرط مرزی Dirichlet جهت گره‌های مربوط به این سطح آزاد اعمال می‌گردد. در این مرحله، جهت سطح آزاد دیگر شرط مرزی فشار ثابت یا Neumann اعمال می‌گردد و موقعیت گره‌های موجود بر روی این سطح آزاد اصلاح می‌گردد و این روند تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد. در فرایند حل، اصلاح دبی با استفاده از رابطه $Q^{k+1} = \psi^k$ انجام می‌شود که ψ^k تابع جریان محاسبه شده در گره ابتدائی سطح آزاد مورد نظر در مرحله k ام می‌باشد. در ادامه فرایند حل، نحوه اعمال شرایط مرزی به سطوح آزاد جریان معکوس می‌گردد و سطح آزادی که موقعیت گره‌های آن اصلاح شده است به صورت ثابت در نظر گرفته شده و موقعیت گره‌های موجود بر سطح آزاد دیگر اصلاح می‌شود و این فرایند تا رسیدن به دقت مورد نظر در خصوص شدت جریان محاسبه شده بر روی سطوح آزاد ادامه می‌یابد.

2-5- الگوریتم حل مسأله

در این مقاله با فرض مشخص بودن ارتفاع آب پشت سد و میزان باز شدگی دریچه شعاعی، مقدار دبی، موقعیت سطوح آزاد سیال و توزیع فشار در کانال محاسبه می‌گردد. الگوریتم حل را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

(الف) با توجه به شکل 3، ناحیه حل مسأله به دو ناحیه ثابت و ناحیه متغیر تقسیم می‌شود. در ناحیه ثابت، کلیه گره‌ها در فرایند حل مسأله دارای موقعیت ثابت بوده و فعال می‌باشند ولی در ناحیه متغیر، با توجه به موقعیت



شکل 3 گره‌های فعال و غیر فعال در ناحیه ثابت و متغیر

3- نتایج و بحث

برای بررسی توانائی روش ترکیبی گالرکین بدون المان- درون یاب نقطه‌ای شعاعی، ابتدا جهت بررسی تأثیر پارامتر شکل و اثر تعداد همسایگی انتخاب شده جهت نقاط گوسی، حل صفحه سوراخ دار مورد توجه قرار گرفت. در ادامه دو مثال متفاوت از مسائل سطح آزاد مورد بررسی قرار گرفت. مثال‌های انتخاب شده بصورتی است که نتایج عددی حاصل از شبیه‌سازی با نتایج عملی مورد مقایسه قرار گیرد.

3-1- مثال 1 (صفحه سوراخ دار)

با توجه به وابستگی روش درون یاب نقطه‌ای به پارامتر شکل مورد استفاده در آن (η)، حل مسأله صفحه سوراخ‌دار جهت بدست آوردن مقدار بهینه پارامتر شکل مورد توجه قرار گرفت. بدین منظور صفحه فولادی به ابعاد $40\text{cm} \times 40\text{cm} \times 2\text{mm}$ شعاع سوراخ 4cm می‌باشد. صفحه فوق تحت اعمال تنش نرمال در امتداد افق برابر با $\sigma=150\text{MPa}$ قرار گرفت. با توجه به وجود دو محور تقارن در صفحه سوراخ دار، جهت شبیه‌سازی یک چهارم مسأله در نظر گرفته شده است (شکل 4).

ح) با توجه به اعمال شرایط مرزی، مسأله بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان- درون یاب نقطه‌ای شعاعی حل شده و تابع جریان (ψ) جهت کلیه گره‌ها با توجه به موقعیت سطوح آزاد محاسبه می‌شود. در ادامه Q_{lower}^{k+1} با توجه به ψ محاسبه شده جهت اولین گره قرار گرفته بر سطح آزاد بالا محاسبه شده و موقعیت سطح آزاد بالا با استفاده از رابطه (28) اصلاح می‌گردد. فرایند حل تا رسیدن مقدار حداکثر معیار همگرایی به دقت تعریف شده جهت حل ادامه می‌یابد. معیار همگرایی جهت گره‌های قرار گرفته بر روی سطح آزاد پایین به صورت $|Q_i^{k+1} - \psi_i^k| / Q_i^{k+1}$ تعریف می‌شود.

ط) مراحل د الی ح تا زمان ارضای معیار خطا که جهت گره‌های قرار گرفته بر روی سطوح آزاد به صورت رابطه (28) تعریف می‌گردد، ادامه می‌یابد.

$$|y_i^r - y_i^{r-1}| \leq \delta \quad \text{for } i=1, \dots, N_s \quad (28)$$

که در آن y_i^r و y_i^{r-1} موقعیت گره i قرار گرفته بر سطوح آزاد در مراحل r و $r-1$ ، تعداد گره‌های قرار گرفته بر روی سطح آزاد و δ مقدار خطای مجاز یا دقت تعریف شده جهت موقعیت گره‌ها می‌باشد.

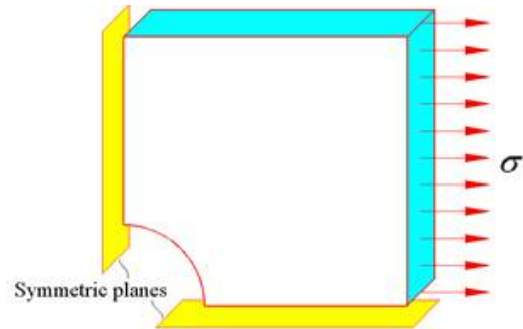
جهت $\eta=0.75$ جهت تعداد همسایگی برابر با 4 گره بدست آمده است.

در ادامه برای بررسی اثر تعداد همسایگی، شعاع دامنه حامی به صورتی انتخاب گردید که هر نقطه گوسی دارای 15 همسایگی باشد. نتایج حاصل از شبیه سازی جهت گره های قرار گرفته بر روی خط $y=0$ در شکل 6 آمده است. با توجه به نتایج ارائه شده می توان نتیجه گیری کرد که با افزایش تعداد همسایگی جهت نقاط گوسی، همزمان با افزایش دقت حل مسأله حساسیت جواب ها به پارامتر شکل کاهش می یابد.

3-2- مثال 2 (سد کارون 3)

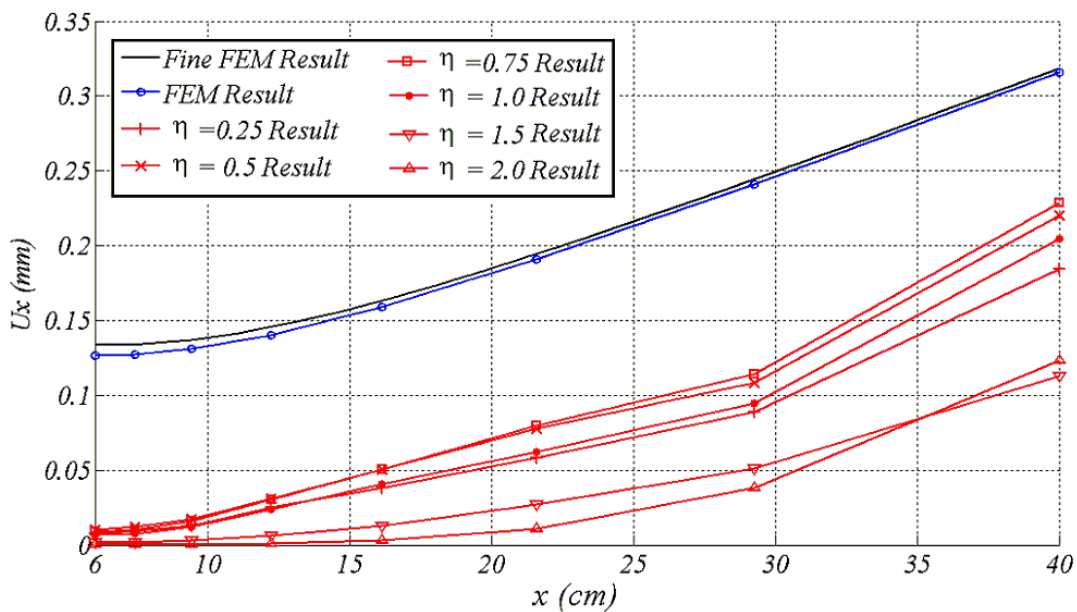
سد کارون 3 بر روی رودخانه کارون در استان خوزستان احداث شده است که مشخصات آن در جدول 2 آمده است. مشخصات هندسی و فنی این سد در شکل 7 و جدول 3 ذکر شده است.

در ادامه سد کارون 3 بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه ای شعاعی شبیه سازی گردید که با توجه به شکل 3، دو ناحیه ثابت و ناحیه متغیر در نظر گرفته شد.

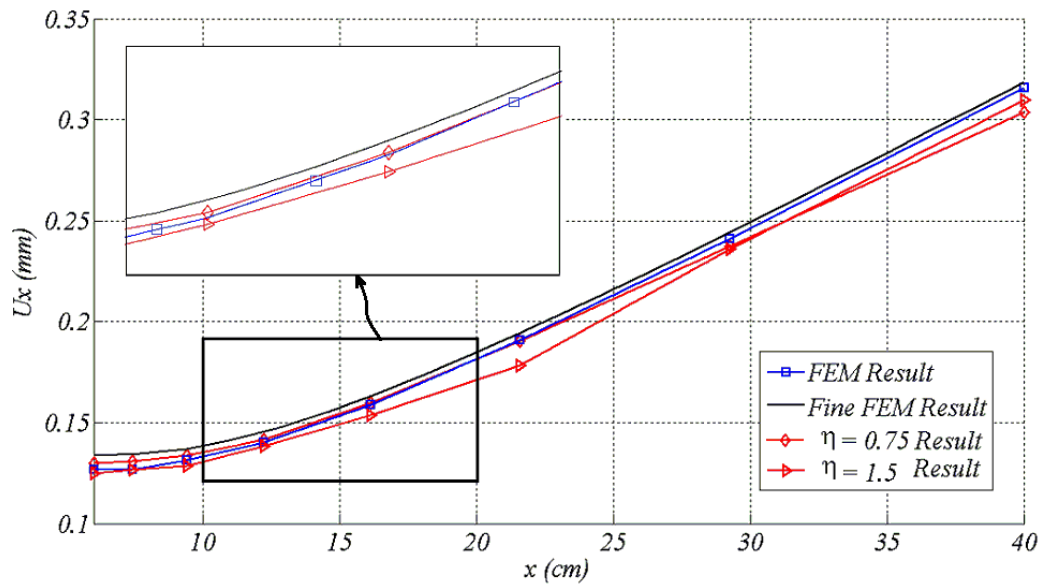


شکل 4 یک چهارم انتخاب شده جهت شبیه سازی

در فرآیند حل مسأله از گوس 7 نقطه ای جهت انتگرال گیری استفاده شد. تابع شعاعی انتخاب شده در روش گالرکین با درون یاب نقطه ای شعاعی $R_i(x, y) = r_i^\eta$ می باشد. جهت بررسی حساسیت جواب های بدست آمده به پارامتر شکل (η) در تابع شعاعی انتخاب شده $(R_i(x, y) = r_i^\eta)$ ، مقادیر مختلف 0.5، 0.75، 1.0، 1.5 و 2 جهت η انتخاب گردید همچنین شعاع دامنه حامی به صورتی انتخاب شد که هر نقطه گوسی دارای 4 همسایگی باشد. نتایج حاصل از شبیه سازی جهت گره های قرار گرفته بر روی خط $y=0$ در شکل 5 آمده است. با توجه به نتایج ارائه شده می توان نتیجه گیری کرد که بهترین نتیجه



شکل 5 نمودار جابجائی در راستای افقی جهت گره های قرار گرفته بر روی خط $y=0$ برای مقادیر مختلف η برای تعداد همسایگی برابر با 4 گره



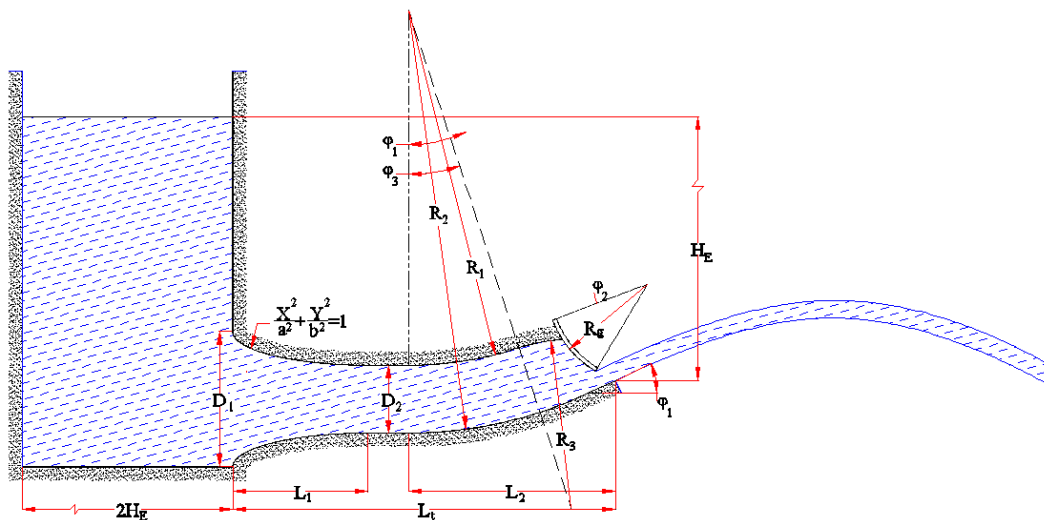
شکل 6 نمودار جابجائی در راستای افقی جهت گره‌های قرار گرفته بر روی خط $y=0$ برای تعداد همسایگی برابر با 15 گره

جدول 2 مشخصات سد کارون 3 (مثال 2)

ظرفیت ذخیره آب	29/5 m	پهنای پایه	205 m	ارتفاع (از بستر رودخانه)
$۲,۹۷۰,۰۰۰,۰۰۰ \text{ m}^3$				
مساحت سطح	$۱۵,۰۰۰ \text{ m}^3/\text{sec}$	ظرفیت سرریز	462 m	طول
48 km^2				

جدول 3 مشخصات فنی سد کارون 3 (مثال 2)

$R_1 = 1/680 \text{ m}$	$R_2 = ۲,۰۰۰ \text{ m}$	$R_3 = 0/800 \text{ m}$	$R_g = 0/480 \text{ m}$
$L_1 = 0/640 \text{ m}$	$L_2 = 0/977 \text{ m}$	$L_t = 1/8084 \text{ m}$	$H_E = 3/480 \text{ m}$
$\phi_1 = 25^\circ$	$\phi_2 = 38/5^\circ$	$\phi_3 = 18/0^\circ$	$a = 16$
$D_1 = 0/640 \text{ m}$	$D_2 = 0/320 \text{ m}$	$b = 4$	



شکل 7 مشخصات هندسی سد کارون 3 (مثال 2)

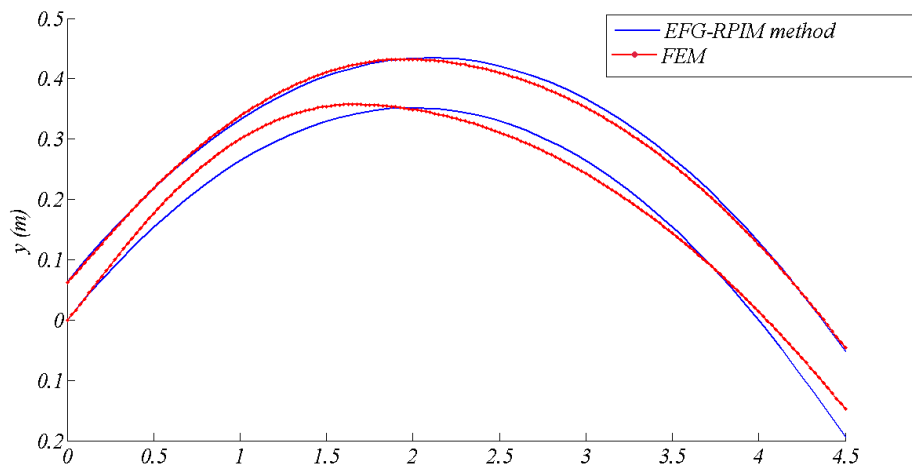
درون یاب نقطه‌ای شعاعی و روش المان محدود می‌باشد. در ادامه جهت بررسی تاثیر ابعاد شبکه بر میزان دبی خروجی، حل مسأله با تعداد متفاوت گره و المان انجام شد که نتایج آن در جدول 4 ذکر شده است. با توجه به نتایج ذکر شده در جدول 4، افزایش تعداد گره‌های مورد استفاده در شبیه سازی منجر به همگرایی جواب‌ها می‌گردد و جواب دقیقتری حاصل می‌شود.

3-3- مثال 3 (سد شهریار)

در مثال دوم، جریان دو بعدی عبور کرده از یک کانال و زیر دریچه شعاعی که دارای دو سطح آزاد می‌باشد مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول 5 بیان کننده مشخصات سد شهریار می‌باشد و شکل 9 سد شهریار را به صورت شماتیک نشان می‌دهد. جدول 6 در بر گیرنده پارامترهای ارائه شده در شکل 9 می‌باشد. سد شهریار بر روی رودخانه قزل اوزن قرار داشته که نزدیک به شهر میانه است (Shiraz University, 2007).

برای بررسی جریان سیال در هنگام عبور از زیر دریچه شعاعی، مدل سد شهریار با مقیاس 1:15 ساخته شد و داده‌ها و نتایج عملی ذکر شده در این قسمت بر اساس مدل ساخته شده در دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز می‌باشد که نمای کلی این مجموعه در شکل 10 آمده است (Shiraz University, 2007).

با توجه به ثابت بودن تعداد و موقعیت گره‌های بکار رفته در ناحیه ثابت در طی مراحل مختلف شبیه‌سازی، انجام یکبار محاسبه ماتریس سختی جهت این ناحیه کافی است و لزومی به محاسبه ماتریس سختی جهت ناحیه ثابت در مراحل مختلف حل نمی‌باشد. در خصوص ناحیه متغیر، لازم است که با توجه به تعداد و موقعیت گره‌های فعال در هر مرحله از حل، ماتریس سختی محاسبه گردد. برای شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی، در مرحله اول، 591 گره و 952 المان در نظر گرفته شد. در این مثال همگرایی حل پس از 3 مرحله کلی و 6 الی 15 زیر مرحله جهت هر یک از سطوح آزاد برای $\alpha_U = 1.5$, $\alpha_L = 1.20$, $\varepsilon = 0.005$ بدست آمد و میزان دبی خروجی برابر با $Q_{EFG-RPIM} = 0.508 m^3/s.m$ در حالی که میزان دبی خروجی حاصل از آزمون عملی برابر با $Q_{experimental} = 0.485 m^3/s.m$ از شبیه‌سازی بر اساس روش المان محدود برابر با $Q_{FEM} = 0.475 m^3/s.m$ می‌باشد (دانشمند و همکاران، 2000). نتایج حاصل از شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی دارای همخوانی خوبی با نتایج عملی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی بر اساس روش المان محدود (دانشمند و همکاران، 2000) دارد. شکل 8 نشان دهنده پروفیل سطوح آزاد حاصل از روش ترکیبی گالرکین بدون المان -



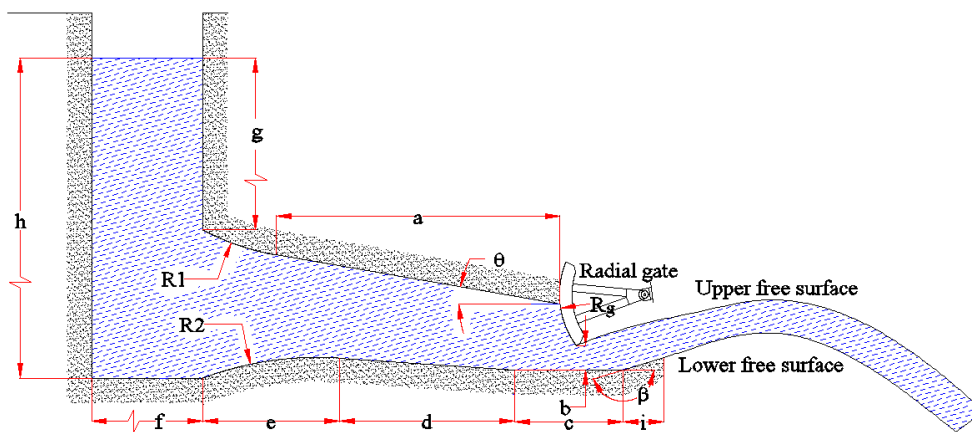
شکل 8 پروفیل سطوح آزاد (مثال 2-کارون 3)

جدول 4 نتایج بدست آمده جهت دبی خروجی بر اساس شبکه بندی‌های متفاوت (سد کارون 3- مثال 2)

ردیف	تعداد گره (مرحله اول)	تعداد المان (مرحله اول)	دبی خروجی (m ³ /m.s)
1	219	245	0/5438
2	226	253	0/5301
3	257	305	0/5229
4	300	364	0/5222
5	335	425	0/5134
6	433	604	0/5152
7	567	856	0/5090
8	591	952	0/5084
9	708	1125	0/5082
10	990	1656	0/5081

جدول 5 مشخصات سد شهریار (واحد SI)

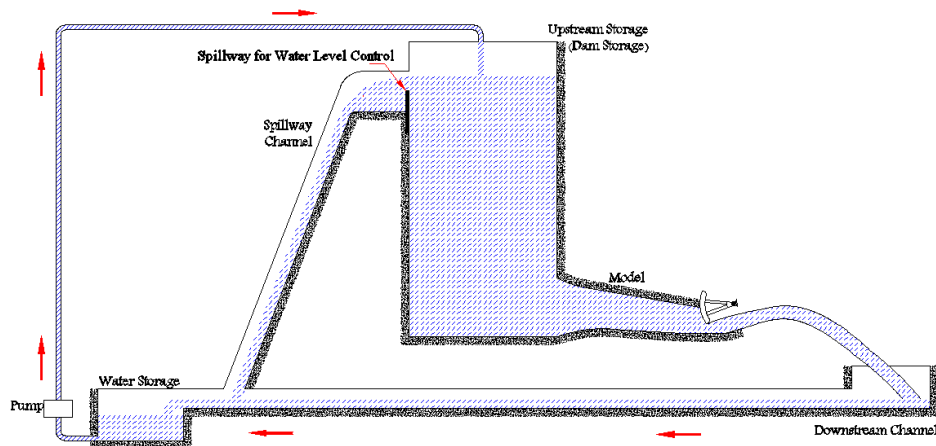
پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
ارتفاع (زبستر رودخانه)	135	سطح نرمال آب	1035
ظرفیت نهائی	700 MCM	حداکثر سطح آب	1041



شکل 9 نمای شماتیک سد شهریار (مثال 3)

جدول 6 مشخصات فنی سد شهریار (مثال 3)

Parameter Value	a 1/15 m	b 0/08 m	c 0/44 m	d 0/71 m	e 0/55 m	f 1/5 m	g 2/4 m
Parameter Value	h 2/5 m	i 0/167 m	R_1 1 m	R_2 1/33 m	R_g 0/347 m	θ 10°	β 163°



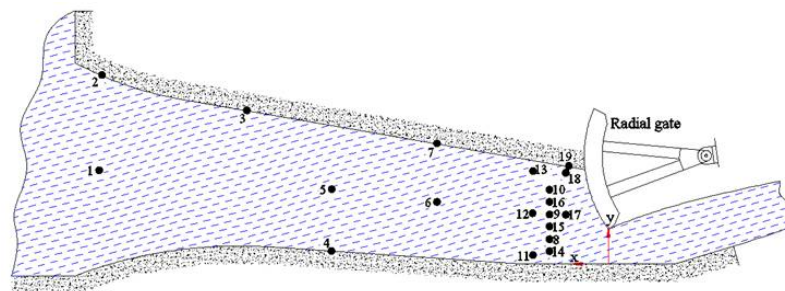
شکل 10 مدل ساخته شده از سد شهریار با مقیاس 1:15 (Shiraz University, 2007)

مدل محاسبه گردید که نتایج حاصل از شبیه‌سازی و مقایسه آن با نتایج عملی در جدول 7 آمده است. نتایج ارائه شده در این جدول نشان می‌دهد که درصد خطای موجود بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نتایج عملی کمتر از 5.5% می‌باشد و در مجموع نتایج حاصل از شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان- درون یاب نقطه‌ای شعاعی دارای همخوانی خوبی با نتایج عملی است. همچنین شکل 12 بیان کننده سطوح آزاد محاسبه شده و شکل‌های 13 و 14 بترتیب بیان کننده کانتور تابع جریان و سرعت می‌باشند.

در ادامه جهت بررسی تاثیر ابعاد شبکه بر میزان دبی خروجی، حل مسأله با تعداد متفاوت گره و المان انجام شد که نتایج آن در جدول 8 ذکر شده است. با توجه به نتایج ذکر شده در جدول 8، افزایش تعداد گره‌های مورد استفاده در شبیه‌سازی منجر به همگرایی جواب‌ها می‌گردد و جواب دقیقتری حاصل می‌شود.

برای اندازه‌گیری فشار، در نقاط مختلف دیواره مدل از مانومتر استفاده شده است که موقعیت مانومترها در شکل 11 مشاهده می‌شود. موقعیت افقی و عمودی این مانومترها در جدول 6 آمده است. جهت اندازه‌گیری شدت جریان خروجی از *area-velocity flow meter* مشخصه *Greyline AVFM-II* استفاده شده است. میزان باز شدگی دریچه شعاعی برابر با 30% ارتفاع در زمان باز شدگی کامل دریچه شعاعی می‌باشد. جهت شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان- درون یاب نقطه‌ای شعاعی 632 گره در مرحله اول حل در نظر گرفته شد و سطوح آزاد جریان با فرض $\varepsilon = 0.005$, $\alpha_L = 1.20$, $\alpha_U = 1.5$ بدست آمد.

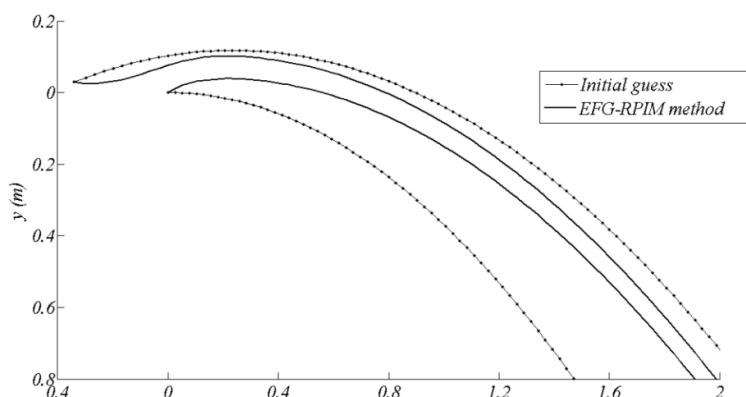
میزان دبی خروجی برابر با $Q_{EFG-RPIM} = 0.427 m^3/s.m$ بدست آمد که میزان دبی خروجی حاصل از آزمون عملی برابر با $Q_{experimental} = 0.399 m^3/s.m$ می‌باشد (Shiraz University, 2007). در ادامه فشار در نقاط مختلف دیواره



شکل 11 موقعیت فشار سنج‌های نصب شده در دیواره مدل سد شهریار (مثال 3)

جدول 7 مقایسه بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی و نتایج عملی

Mano. No.	x (m)	y (m)	p (mH ₂ O) Model test	P (mH ₂ O) EFG-RPIM	Error (%)	Ψ (m ³ /sec) EFG-RPIM	v (m/sec) EFG-RPIM
1	1/4481	0/2643	2/2033	2/1504	2/4	0/1986	0/7916
2	1/4400	0/5250	2/9060	1/8208	4/47	0/4202	0/9990
3	1/2080	0/4332	2/0033	1/9448	2/92	0/4185	1/0723
4	0/7870	0/0364	2/3660	2/3205	1/92	0/0016	1/1695
5	0/7875	0/2107	2/2080	2/1825	1/15	0/2039	1/1589
6	0/4875	0/1752	2/2147	2/2428	1/27	0/2006	1/2426
7	0/4875	0/3401	2/0593	2/0411	0/88	0/4010	1/2169
8	0/1675	0/0697	2/2513	2/2084	1/90	0/1354	1/8699
9	0/1675	0/1397	2/1620	2/1987	1/69	0/2477	1/5815
10	0/1675	0/2093	2/1373	2/1931	2/61	0/3319	1/2021
11	0/2146	0/0250	2/3420	2/2864	2/37	0/0419	1/6877
12	0/2159	0/1430	2/2293	2/2101	0/86	0/2243	1/4243
13	0/2146	0/2620	2/1013	2/1642	2/99	0/3648	1/0883
14	0/1675	0/0360	2/2973	2/2131	3/66	0/0713	1/9643
15	0/1675	0/1058	2/1880	2/3080	5/48	0/1959	1/7274
16	0/1675	0/1750	2/1473	2/1843	1/72	0/2928	1/3740
17	0/1211	0/1390	2/2173	2/1507	3/00	0/2850	1/7980
18	0/1211	0/2570	2/1893	2/1510	1/75	0/3963	0/7482
19	0/1125	0/2768	2/1740	2/1235	2/32	0/4102	0/5555

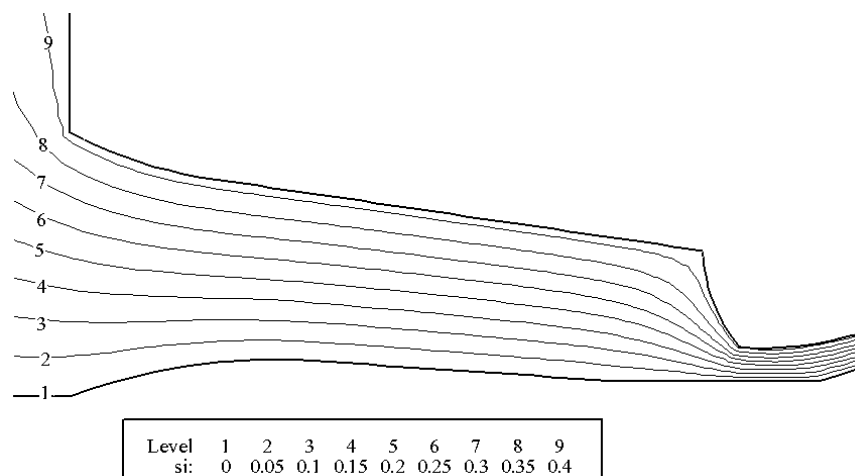


شکل 12 سطوح آزاد محاسبه شده بر اساس روش EFG-RPIM (سد شهپریار - مثال 3)

4- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر روشی جدید بر پایه روش ترکیبی گالرکین بدون المان (EFG) و درون یاب نقطه‌ای شعاعی (RPIM) جهت بررسی مسائل دو بعدی دارای دو سطح آزاد که بر اثر وزن خود جاری می‌شوند ارائه شده است. در روش ترکیبی گالرکین بدون المان - درون یاب نقطه‌ای شعاعی، توابع شکل بدست آمده از روش درون

یاب نقطه‌ای شعاعی به‌عنوان توابع وزن در روش گالرکین بدون المان مورد استفاده قرار می‌گیرند که باعث ایجاد خاصیت دلتای کرانیکر در توابع شکل می‌گردد و اعمال شرایط مرزی را ساده می‌کند. در حالت عادی توابع شکل حاصل از روش گالرکین بدون المان دارای خاصیت دلتای کرانیکر نمی‌باشند که جهت اعمال شرایط مرزی اساسی، نیاز به استفاده از روش‌های خاص می‌باشد.



شکل 13 کانتور شدت جریان محاسبه شده بر اساس روش EFG-RPIM (سد شهریار - مثال 3)



شکل 14 کانتور سرعت محاسبه شده بر اساس روش EFG-RPIM (سد شهریار - مثال 3)

جدول 8 نتایج بدست آمده جهت دبی خروجی بر اساس شبکه بندی‌های متفاوت (سد شهریار - مثال 3)

ردیف	تعداد گره (مرحله اول)	تعداد المان (مرحله اول)	دبی خروجی (m ³ /m.s)
1	175	228	0/4025
2	181	237	0/4561
3	192	253	0/4210
4	209	280	0/4450
5	232	317	0/4250
6	326	483	0/4257
7	442	697	0/4265
8	568	933	0/4274
9	632	1153	0/4271
10	767	1305	0/4269

بر اساس روش گالرکین بدون المان-المان طبیعی"، مهندسی منابع آب، دوره 9، شماره 31، ص.ص. 61-72.

سلیمان بیگی ن، حکیم زاده ح. و چناقلو م. (1392). "ترکیب روش VOF و هوش مصنوعی برای شبیه‌سازی سطح آزاد جریان سیال"، روش‌های عددی در مهندسی (استقلال)، دوره 32، شماره 2، ص.ص. 15-32.

فرزین س، حسن زاده ی، اعلمی م. و فاتحی ر. (1393). "یک روش SPH تراکم ناپذیر ضمنی برای مسائل جریان سطح آزاد"، مهندسی مکانیک مدرس، دوره 14، شماره 4، ص.ص. 99-110.

Cheng, A. H-D, Liggett, J. A., and Liu, P. L-F. (1981). "Boundary calculations of sluice and spillway flows". Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 107: 1163-1178.

Daneshmand, F., and Kazemzadeh Parsi, M. J. (2004). "A meshless method for free surface flow through sluice gates". 6th International Conference on Hydroinformatics, Singapur.

Daneshmand, F., Javanmard, S.A.S., Adamowski, Jan F., Liaghat, T., Moshksar, M. M. (2012). "Two-dimensional natural element analysis of double-free surface flow under a radial gate". Canadian Journal of Civil Engineering. 39: 643-653.

Daneshmand, F., Javanmard, S.A.S., Liaghat, T., Moshksar, M. M., Adamowski, Jan F. (2010). "Numerical solution for two-dimensional flow under sluice gate using natural element method". Canadian Journal of Civil Engineering. 37: 1550-1559.

Daneshmand, F., Sharan, S. K., and Kadivar, M. H. (1999). Finite element analysis of double-free-surface flow through gates. Proc. 17th Canadian Congress of Applied Mechanics, McMaster Univ. Hamilton. 213-214.

Daneshmand, F., Sharan, S. K., and Kadivar, M. H. (2000). "Finite Element Analysis of Double-Free surface Flow through Slit in Dam". Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 126: 515-522.

Fangmeier, D. D., and Strelkoff, T. S. (1968). "Solution for gravity flow under a sluice gate". Journal of the Engineering Mechanics. ASCE. 94: 153-176.

Ikegawa, M., and Washizu, K. (1973). "Finite element method applied to analysis of flow over a spillway crest". International Journal for Numerical Methods in Engineering 6: 179-189.

Issacs, L. T. (1977). "Numerical solution for flow

همچنین در این روش بر خلاف روش المان محدود، نیازمند تشکیل شبکه‌ای از المان نبوده و از شبکه دلخواهی از نقاط گره‌ای استفاده می‌شود که در مراحل مختلف حل با توجه به موقعیت سطوح آزاد، نقاط گرهی مورد نظر فعال می‌گردد. همچنین افزایش تعداد همسایگی انتخاب شده جهت نقاط گوسی باعث افزایش دقت حل مسأله و کاهش حساسیت نتایج بدست آمده به پارامت شکل می‌گردد.

مقایسه نتایج بیان کننده همخوانی خوبی بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی بر اساس روش ترکیبی گالرکین بدون المان-درون یاب نقطه‌ای شعاعی با نتایج عملی می‌باشد که نشان می‌دهد روش فوق توانائی مدل کردن مسائل دو بعدی دارای دو سطح آزاد را دارا می‌باشد.

5- فهرست علائم

H_E	ارتفاع آب پشت دریاچه شعاعی
m	تعداد توابع پایه
n	تعداد نقاط
N_s	تعداد گره های قرار گرفته بر روی سطح آزاد
$p(x)$	بردار توابع پایه
Q	شدت جریان
$R_i(x)$	تک جمله ای تابع اساسی شعاعی
y_i^{r-1}	موقعیت گره i قرار گرفته بر سطوح آزاد در مرحله $r-1$
y_i^r	موقعیت گره i قرار گرفته بر سطوح آزاد در مرحله r
α	بردار ضرایب
$\varphi_j(x)$	تابع شکل متعلق به گره j ام در نقطه x
Ω	دامنه حل
$\psi(x,y)$	تابع جریان
η	پارامتر شکل در تابع شعاعی
δ	مقدار خطای مجاز یا دقت تعریف شده جهت موقعیت گره‌ها
ε	دقت حل مساله

6- منابع

جوانمرد س. (1395). "آنالیز مسائل سرریز زیر دریاچه شعاعی

- element analysis of sluice gate flow". Transactions Engineering Institute of Canada. 14: C-2.
- Most T. (2007). "A natural neighbour-based moving least-squares approach for the element-free Galerkin method". International Journal for Numerical Methods in Engineering. 71: 224-252.
- Sankaranarayanan, S., and Rao, H. S. (1996). "Finite element analysis of free surface flow through gates". International Journal for Numerical Methods in Fluids. 22: 375-392
- Shiraz University. (2007). "Hydraulic model test of bottom outlet of shahryar dam", Report No. SHM-R-002. Shiraz, Iran
- Sokoray-Varga, B. and Józsa, J. (2008). "Particle tracking velocimetry (PTV) and its application to analyse free surface flows in laboratory scale models". Periodica Polytechnica Civil Engineering. 52: 63-71.
- Vanden-Broek, J. M. (1997). "Numerical calculations of the free surface flow under a sluice gate". Journal of Fluid Mechanics, Cambridge. U.K.. 330: 339-247.
- under sluice gates". Journal of the Hydraulics Division. ASCE. 103: 473-481.
- J I Chun-ning, WANG Yuan-zhan and WANG Jian-feng. (2005). "A Novel VOF-Type Volume-Tracking Method for Free-Surface Flows Based on Unstructured Triangular Mesh". China Ocean Engineering. 19:529-538.
- Larock B.E. (1975). "Flow over gated spillway crests". Proceeding of 14th Midwestern Mechanics Conference. University of Oklahoma. March 24-26. 437-451.
- Li, W., Xie, Q., and Chen, C. J. (1989). "Finite analytic solution of flow over spillways". Journal of Engineering Mechanics. ASCE. 115: 2635-2648.
- Liu, G.R. (2003). "Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method", CRC Press LLC.
- Masliah J.H., Nandakumar K., Hemphill F., Fung L. (1985). "Body fitted coordinates for flow under sluice gates". Journal of Hydraulic Engineering. 111: 922-933.
- McCorquodale, J. A., and Li, C. Y. (1971). "Finite