

## مقایسه‌ی الگوهای Lax-wendroff و NOC در حل مسئله‌ی تبادل جریان دو لایه از بین یک تنگ‌شدگی

زینب صوری شرق (دانشجوی کارشناسی ارشد)  
میر مصدق جمالی (دانشیار)  
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

در این تحقیق دو الگوی Lax-Wendroff و NOC در مدل‌سازی پدیده‌ی تبادل جریان دو لایه‌ی غیردائمی مورد مقایسه قرار می‌گیرند. جریان تبادل در اثر حذف یک مانع از کانال متصل‌کننده در بدنه‌ی سیال با تفاوت چگالی اندک، ایجاد می‌شود. پدیده‌های تبادل جریان دو لایه، معمولاً به صورت لایه‌های هم‌وزن سیال غیرگران‌رو با سرعت‌های عمودی کوچک و قابل اغماض مدل می‌شوند، که در آنها می‌توان توزیع فشار را هیدرواستاتیک فرض کرد و معادلات هیدرولیک یا معادلات آب‌های کم‌عمق را در هر لایه می‌توان به‌کار برد. نتایج دو الگو با نتایج آزمایشگاهی (تبادل جریان دو لایه‌ی دائمی در کانالی با عرض و عمق ثابت) و مطالعات عددی Helfrich (تبادل جریان دو لایه‌ی غیردائمی غیرگران‌رو در کانالی با عرض متغیر) مقایسه شد. نتایج گویای آن است که استفاده از الگوی Lax-wendroff به زمان اجرای کم‌تری نیاز دارد و مطابقت بیشتری با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد، اگرچه اختلاف نتایج دو الگو در حالت‌های مذکور بسیار اندک است.

### مقدمه

دینامیکی تنگه و قدرت نیروهای باروتروپیک‌اند. او در مدل‌سازی عددی خود معادلات هیدرولیک جریان را با استفاده از الگوی دو مرحله‌ی Lax-wendroff گسسته‌سازی کرد. در این نوشتار نیز معادلات هیدرولیک جریان دو لایه با استفاده از دو الگوی مختلف NOC و Lax-Wendroff گسسته‌سازی و حل شده است و در نهایت نتایج این دو مدل‌سازی با یکدیگر مقایسه شده است.

در ادامه‌ی این بحث توضیح مختصری از نظریه‌ی هیدرولیک جریان دو لایه ارائه می‌شود و سپس به معرفی دو الگوی به‌کار رفته در حل مدل خواهیم پرداخت. پس از آن به بررسی و مقایسه‌ی نتایج مدل برای دو الگوی مختلف می‌پردازیم و سپس خلاصه‌ی از موضوعات مورد بحث در این نوشتار و نیز نتیجه‌گیری لازم ارائه شده است.

### تئوری

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن دو لایه سیال هم‌وزن، به وسیله‌ی یک فصل مشترک از هم جدا شده‌اند. با بسط معادلات & Schonfeld & Schijff<sup>[۴]</sup> برای تغییرات در عرض و عمق کانال، معادلات پیوستگی و مقدار حرکت<sup>۳</sup> در دو لایه جریان، صرف‌نظر از شتاب عمودی، عبارت‌اند از:

(۱) معادله‌ی پیوستگی

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial(a_i u_i)}{\partial x} = 0 \quad i = 1, 2$$

وقتی دو حجم سیال با چگالی‌های متفاوت از طریق یک تنگه یا کانال به هم مرتبط می‌شوند، در اثر اختلاف چگالی یا اختلاف سطح آب جریان‌هایی بین این دو بدنه آب ایجاد می‌شود. این پدیده «تبادل جریان» نامیده می‌شود و تبادل آب شور مدیترانه با دریای آتلانتیک از طریق تنگه‌ی جبل الطارق و تنگه‌ی باب‌المندب (که اقیانوس هند را به دریای سرخ مرتبط می‌کند) نمونه‌هایی از این جریان هستند. بسیاری از مصادیق مهم تبادل جریان را می‌توان با تئوری «هیدرولیک جریان دو لایه‌ی دائمی» توصیف کرد، اما اثرات نیروهای باروتروپیک<sup>۲</sup> غیردائمی مانند جزر و مد همیشه قابل اغماض نیستند. تاکنون مطالعات نسبتاً کمی در خصوص پدیده‌ی تبادل جریان دو لایه، با در نظر گرفتن نیروهای غیردائمی انجام شده است. برخی از محققین استفاده از تخمین شبه دائمی را پیشنهاد کرده‌اند که در آن، در هر چرخه‌ی جزر و مد جریان دائمی در نظر گرفته می‌شود.<sup>[۱]</sup> این در حالی است که نتایج دیگر مطالعات به روشنی نشان می‌دهند که در صورت حضور جریان باروتروپیک نوسانی شدید، نظریه‌ی نیمه‌دائمی فقط در بخش کوچکی از چرخه‌ی جزر و مد قابل استفاده است.<sup>[۴]</sup>

همچنین Helfrich دینامیک جریان غیردائمی تبادل جریان دو لایه‌ی غیرگران‌رو را با اعمال جریان جزرومدی مشخص بررسی کرده است.<sup>[۴]</sup> که طبق او برای تنگه‌ی بی‌هندسه‌ی مشخص، جریان تبادل تابعی از پارامترهای بی‌بعد  $\gamma$  و  $q_{b0}$  که به ترتیب مشخص‌کننده‌ی طول

تغییر مکان سطح آزاد جریان قابل اغماض است (تقریب سطح صلب) و بنابراین دبی جریان باروتروپیک ( $q_b$ ) فقط تابعی از زمان خواهد بود:

$$q_b(t) = u_1 a_1 + u_2 a_2 \quad (7)$$

در این نوشتار همانند مطالعه‌ی Helfrich دبی جزر و مد به صورت متناوب و با مقدار متوسط زمانی صفر در نظر گرفته شده است:

$$q_b(t) = q_{b0} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (8)$$

که در آن  $T$  دوره‌ی تناوب جزر و مد است. اگر معادله‌ی مقدار حرکت لایه‌ی جریان بالایی را از لایه‌ی پایینی کم، و  $x$  را با مقیاس طولی ( $L$ )،  $h_i$  را با مقیاس عمق کل ( $H = h_1 + h_2$ )،  $b$  را با مقیاس عرض حداقل کانال ( $b_0$ )،  $u_i$  را با  $\sqrt{g'H}$  و  $t$  را با تناوب جزر و مد ( $T$ ) بی‌بعد کنیم، این ساده‌سازی‌ها به روابط بی‌بعد زیر منتهی می‌شوند:

$$h_1 + h_2 = 1 \quad (9)$$

$$A(x) = a_1 + a_2 = b \quad (10)$$

$$u_2 = \frac{q_b - U a_2}{A} \quad (11)$$

$$u_1 = \frac{q_b + U a_1}{A} \quad (12)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a_1 q_b(t) - U a_1 A + U a_1^2}{A} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U q_b(t) + U^2 a_1}{A} - \frac{a_1}{b} - \frac{U^2}{2} \right) = 0 \quad (14)$$

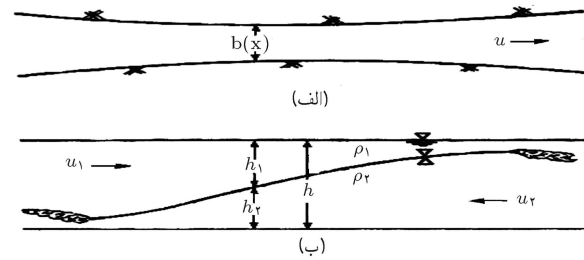
که در آنها  $U = u_2 - u_1$  برش بین لایه‌ها است و

$$\gamma = \frac{\sqrt{g'H}T}{L} \quad (15)$$

$$q_{b0} = \frac{u_{b0}}{\sqrt{g'H}} \quad (16)$$

باید توجه داشت که کمیت‌های طرف راست معادلات ۱۵ و ۱۶ بعد دارند. در رابطه‌ی ۱۶،  $u_{b0}$  سرعت بعددار جریان باروتروپیک در منطقه‌ی بی‌است که در آن  $A=1$  است. Helfrich با روابط ۸، ۱۳ و ۱۴ برای کانالی با هندسه‌ی معین نشان داد که نتایج حاصل فقط به پارامترهای بی‌بعد  $\gamma$  و  $q_{b0}$  بستگی دارند. روابط مذکور هنگامی قابل حل‌اند که امواج بلند درونی لایه‌ی میانی پایدار باشند. پارامتر پایداری امواج (عدد فرود پایداری<sup>۵</sup>) به صورت رابطه‌ی ۱۷ تعریف می‌شود:

$$F_{\Delta}^2 = \frac{U^2}{g'(h_1 + h_2)} \quad (17)$$



شکل ۱. الف) نمای جریان در یک تنگ‌شدگی از بالا؛ ب) مقطع طولی آن در تبادل جریان دو لایه. [۵]

(۲) معادله‌ی مقدار حرکت

$$\rho_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial P_i}{\partial x} = 0 \quad i = 1, 2$$

که در آن‌ها  $x$  و  $t$  متغیرهای زمان و مکان،  $a_i = b(x)h_i$  مساحت لایه‌ی  $i$ ام جریان و  $u_i$ ،  $h_i$ ،  $P_i$  و  $\rho_i$  به ترتیب سرعت، عمق لایه، فشار و چگالی لایه‌ی  $i$ ام هستند که در شکل ۱ نیز نمایش داده شده‌اند.  $b$  عرض کانال است که به صورت تابعی از  $x$  مشخص می‌شود و اندیس‌های ۱ و ۲ به ترتیب به لایه‌های بالایی و پایینی جریان اشاره دارند، و سرعت در راستای  $x$  مثبت در نظر گرفته می‌شود. با فرض هیدروستاتیک بودن جریان، فشار هر یک از لایه‌ها را می‌توان از روابط ۳ و ۴ محاسبه و در رابطه‌ی ۲ جایگزین کرد:

$$P_1 = \rho_1 g(h_1 + h_2) \quad (3)$$

$$P_2 = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) \quad (4)$$

در این صورت معادله‌ی مقدار حرکت (رابطه‌ی ۲) برای لایه‌های ۱ و ۲ جریان به صورت رابطه‌ی ۵ نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_1^2}{2} + g(h_1 + h_2) \right] = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u_2^2}{2} + g(h_1(1 - \epsilon) + h_2) \right] = 0 \quad (5)$$

در این روابط  $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$  اختلاف چگالی نسبی لایه‌ها است. جریان دو لایه نیز مانند جریان تک لایه توسط نقاط کنترل مشخص می‌شود. در نقاط کنترل، عدد فرود مرکب<sup>۴</sup> ( $G^2$ ) برابر ۱ است: [۵]

$$G^2 = F_1^2 + F_2^2 - \epsilon F_1^2 F_2^2 \quad (6)$$

که در آن  $F_i^2 = u_i^2 / (g'h_i)$  عدد فرود درونی لایه‌ی  $i$ ام جریان و  $g' = \epsilon g$  شتاب ثقل تقلیل‌یافته است. از آنجا که تفاوت چگالی بین لایه‌ها کم فرض شده است، می‌توانیم برای ساده‌تر کردن روابط تقریب بوزینسک ( $\rho_1 \approx \rho_2$ ) را در نظر بگیریم؛ به این ترتیب که در رابطه‌ی مقدار حرکت از تغییرات  $\rho$  در عبارت اینرسی صرف نظر می‌کنیم. بنابراین

## معرفی الگوهای به کار رفته در حل معادلات جریان دولایه

### الگوی Lax - Wendroff

الگوی دو مرحله‌ای Lax - Wendroff از دقت درجه‌ی دو در زمان و مکان برخوردار است و قابلیت مدل کردن پیشرفت و انتشار شوک‌هایی را که ممکن است به‌طور طبیعی در جریان‌های دولایه رخ بدهند، داراست. این الگو برای معادله‌ی  $\partial u / \partial t = -\partial F(u) / \partial x$  در حالت کلی به شکل زیر است:

$$w_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (19)$$

ملاحظه می‌شود که فرم معادلات جریان دولایه نیز به همین شکل است و می‌توان معادلات ۱۳ و ۱۴ را با استفاده از این الگو گسسته‌سازی کرد. به این ترتیب که در رابطه‌ی ۱۳،  $u = a_1$  و  $F(u) = \gamma(a_1 q_b(t) - U^2 a_1) / A$  و در رابطه‌ی ۱۴،  $u = U$  و  $F(u) = \gamma((U q_b(t) + U^2 a_1) / A - a_1 / b - U^2 / 2)$  است. در این الگو ابتدا مقدار متغیر در نیم‌گام زمانی و مکانی محاسبه می‌شود، سپس با استفاده از مقدار متغیر در نیم‌گام‌ها در دو نقطه‌ی مجاور، مقدار تابع در گام بعدی محاسبه می‌شود. شکل ۲ روند محاسبه در این الگو را نشان می‌دهد.

شرط پایداری الگوی Lax - Wendroff عبارت است از: [۷]

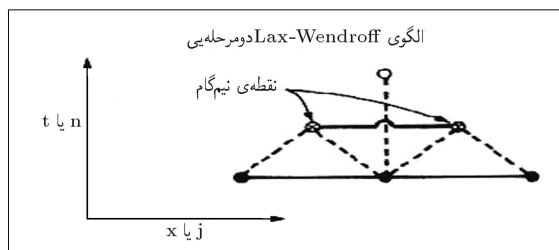
$$C \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \text{ و } C = \sqrt{g'H} \quad (20)$$

که بعد از بی‌بعدسازی خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\gamma} \quad (21)$$

### الگوی NOC

الگوی NOC الگویی با دقت درجه دو در مکان و زمان است که در واقع بسط الگوی قدیمی Lax-Friedrichs است. روند محاسبه در این الگو چنین است که اگر معادلات پیوستگی و مقدار حرکت بی‌بعد



شکل ۲. روند محاسبه در الگوی Lax-Wendroff. [۷]

هنگامی که  $F_{\Delta} \leq 1$  باشد، امواج بلند پایدارند و برای  $F_{\Delta} > 1$  سرعت‌های فاز درونی موهومی‌اند و امواج بلند ناپایدار می‌شوند. [۵]

معادلات نهایی حاکم بر جریان با استفاده از دو الگوی زیرگسسته و حل می‌شوند. در اینجا مشابه مطالعه Helfrich عبارت  $\nu U_{xx}$  به سمت راست معادله‌ی ۱۴ اضافه شده است که در آن  $0.1 \leq \nu \leq 0.7$  عددی ثابت است. اضافه کردن این عبارت، که یک نیروی اصطکاک مجازی را در هر لایه منظور می‌کند، به منظور کنترل رشد عدد موج در مناطقی که امکان مواجهه با ناپایداری امواج وجود دارد، صورت گرفته است. در محدوده‌ی انتخاب شده برای  $\nu$  تغییرات آن تأثیر قابل توجهی روی نتایج مدل نمی‌گذارد.

### شرایط مرزی

در این تحقیق شرایط مرزی مسئله در مرز باز  $x = \pm\infty$ ، به صورت شرط تشعشع<sup>۶</sup> در نظر گرفته شده‌اند. تعریف «شرایط مرزی باز»<sup>۷</sup> برای اطمینان از این موضوع است که امواج سطح تماس و اغتشاشات جریان، همراه جریان فوق بحرانی لایه‌ی نازک‌تر از منطقه خارج می‌شوند و محیط محاسباتی را ترک می‌کنند. بر مبنای شرط تشعشع، در دو انتهای دامنه داریم:

$$\varphi_t - c\varphi_x = 0 \quad (18)$$

که در آن  $\varphi = a_1, U$  و  $c$  سرعت موج است. سرعت موج در مرز سمت راست مثبت، و در مرز سمت چپ منفی است. این موضوع نشان دهنده‌ی جهت حرکت امواج سطح تماس است که در حال خارج شدن از محدوده‌ی مورد مطالعه‌اند. برای گسسته‌سازی معادلات شرط مرزی از یک الگوی پیشنهادی که از دقت درجه دو در زمان و مکان برخوردار است، استفاده شد. [۶]

### شرایط اولیه

شرایط جریان در لحظه‌ی  $t = 0$  برابر عمق و سرعت جریان لایه‌ها در حالت دائمی در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه‌ی پارامترهای مذکور باید معادلات هیدرولیک سیال دولایه برای حالت دائمی ( $q_b = 0$ ) را حل کرد. در حل دائمی برای  $q_b = 0$ ، مقدار بی‌بعد سرعت لایه‌ها در محل تنگ‌شدگی  $u_i = \pm 0.5$  و مقدار بی‌بعد دبی تبادل معادل  $q_{is} = u_i a_i = \pm 0.25$  است. اندیس s نشان دهنده‌ی دائمی بودن<sup>۸</sup> جریان است. [۵] برای حالت نشان داده شده در شکل ۱،  $q_1, q_2$  مثبت و  $q_2, q_1$  منفی‌اند. بعد از محاسبه‌ی اعماق و سرعت‌های جریان دو لایه، سطح مقطع لایه‌ی اول و تفاوت سرعت دو لایه‌ی جریان در هر نقطه، در زمان  $t = 0$  محاسبه شده و به‌عنوان شرایط اولیه در مدل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

را بصورت رابطه‌های ۲۲ و ۲۳ داشته باشیم:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu^2 + \beta_x h^2/\gamma) = hs_x \tag{23}$$

که در آن‌ها  $h$  عمق آب،  $u$  سرعت جریان، و  $\beta_x$  و  $s_x$  ضرایب معادله‌اند که در اثر بی‌بعدسازی به‌دست آمده‌اند و در اینجا بنا به اختصار از توصیف کامل آنها خودداری می‌کنیم. [۸] با تعریف پارامتر  $m = hu$  می‌توانیم رابطه‌های ۲۲ و ۲۳ را ادغام کرده و به‌صورت رابطه‌ی ۲۴ بنویسیم:

$$w_t + f_x = s \tag{24}$$

که در آن

$$w = \begin{pmatrix} h \\ m \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} m^2/h + \beta_x h^2/\gamma \\ m \end{pmatrix} \text{ و } s = \begin{pmatrix} s_x \end{pmatrix} \tag{25}$$

با در نظر گرفتن  $w = (h, m)^T$  به‌عنوان متغیرهای پایه،  $w_j^n$  نشان‌دهنده‌ی مقدار متوسط متغیر در گام مکانی  $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$  و در زمان  $t^n$  خواهد بود و داریم:

$$\bar{w}(x, t^n) = \bar{w}_j^n + \frac{x - x_j}{\Delta x} \bar{w}'_j \tag{26}$$

که در این رابطه  $\bar{w}'_j$  مشتق متوسط سلول<sup>۹</sup> محاسباتی است. مهم‌ترین تفاوت الگوی NOC با سایر الگوهای استاندارد روش تفاضل‌های محدود، در متناوب بودن نقاط شبکه‌ی آن است. در زمان  $t^{n+1}$  مقدار متوسط تابع در سلول محاسباتی  $\bar{w}_{j+1/2}^{n+1}$  روی گام مکانی  $[x_j, x_{j+1}]$  محاسبه می‌شود (شکل ۳). مرزهای سلول‌ها در گام زمانی جدید عبارت خواهند بود از مرکز سلول‌ها در گام زمانی قبلی یعنی نقاط  $x_j$  و  $x_{j+1}$ . در این نقاط مقدار چندجمله‌ی رابطه‌ی ۲۶ در گام زمانی قبلی ( $t^n$ ) موجود است. بنابراین شار عبوری از مرزهای سلول‌ها در گام زمانی جدید، با استفاده از برون‌یابی رابطه‌ی

تیلور محاسبه می‌شود. به‌منظور رسیدن به دقت درجه دو در زمان، از قانون نقاط میانی در زمان استفاده می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\bar{w}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\gamma}(\bar{w}_{j+1/4}^n + \bar{w}_{j+3/4}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1}^{n+1/2} + f_j^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{\gamma}(s_{j+1/4}^{n+1/2} + s_{j+3/4}^{n+1/2}) \tag{27}$$

همان‌طور که در شکل ۳ نشان داده شده است، مقادیر  $\bar{w}_{j+1/4}^n$  و  $\bar{w}_{j+3/4}^n$  طبق رابطه‌ی ۲۶ از روی سلول‌های  $j$  و  $j+1$  زام محاسبه می‌شوند، یعنی:

$$\bar{w}_{j+1/4}^n = \bar{w}_j^n + \frac{1}{4}\bar{w}'_j, \bar{w}_{j+3/4}^n = \bar{w}_{j+1}^n - \frac{1}{4}\bar{w}'_{j+1} \tag{28}$$

شار عبوری ( $f$ ) در نقاط یک چهارم<sup>۱۰</sup> سلول  $(x_j, t^{n+1/2})$  و  $(x_{j+1}, t^{n+1/2})$  از برون‌یابی رابطه تیلور در زمان بدست می‌آید:

$$\bar{w}_j^{n+1/2} = \bar{w}_j^n + \frac{\Delta t}{\gamma}(\partial\bar{w}/\partial t)_j^n, f_j^{n+1/2} = f(\bar{w}_j^{n+1/2}) \tag{29}$$

به‌همین ترتیب عبارت‌های مربوط به چشمه و چاه ( $s$ ) در نقاط یک چهارم سلول  $(x_{j+1/4}, t^{n+1/2})$  و  $(x_{j+3/4}, t^{n+1/2})$  از برون‌یابی رابطه‌ی تیلور در زمان و مکان بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} s_{j+1/4}^{n+1/2} &= s(\bar{w}_{j+1/4}^{n+1/2}), \\ \bar{w}_{j+1/4}^{n+1/2} &= \bar{w}_j^n + \frac{\Delta t}{\gamma}(\partial\bar{w}/\partial t)_j^n + \frac{1}{4}\bar{w}'_j, \\ s_{j+3/4}^{n+1/2} &= s(\bar{w}_{j+3/4}^{n+1/2}), \\ \bar{w}_{j+3/4}^{n+1/2} &= \bar{w}_{j+1}^n + \frac{\Delta t}{\gamma}(\partial\bar{w}/\partial t)_{j+1}^n + \frac{1}{4}\bar{w}'_{j+1}, \end{aligned} \tag{30}$$

که در این رابطه‌ها مقدار  $(\partial\bar{w}/\partial t)_j^n$  با استفاده از رابطه‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود:

$$(\partial\bar{w}/\partial t)_j^n = -(\partial f/\partial x)_j^n + s_j^n = -A_j \bar{w}_j/\Delta x + s_j^n \tag{31}$$

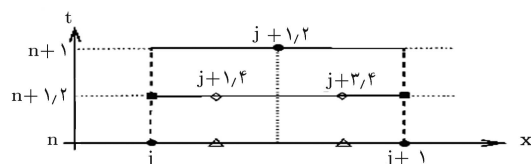
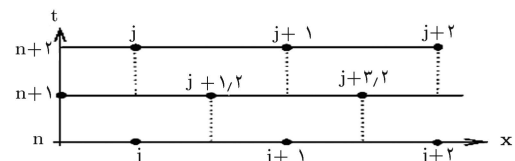
که در آن  $(\partial f/\partial x)_j^n = f'_j/\Delta x$  است.

### مقایسه‌ی نتایج مدل برای دو الگو

مدل در کانالی با عرض مقطع زیر اجرا شد:

$$b(x) = 1 + 4(1 - e^{-\beta x^2}) \tag{32}$$

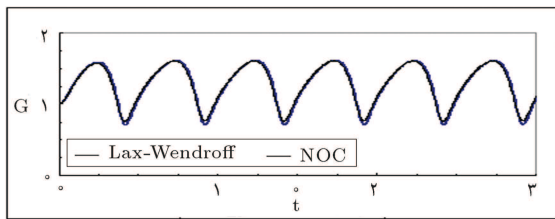
که در آن  $\beta = 1/0.73$  است و در  $x = \pm 0.5$ ،  $b=2$  است.



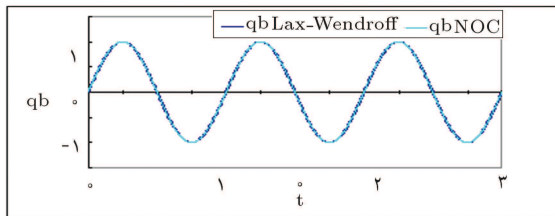
شکل ۳. روند محاسبه در الگوی Lax-Wendroff.

از یک تناوب جزر و مد بعد از رسیدن به حل تناوبی جریان در این شکل‌ها  $(t=2, 2.25, 2.5, 2.75)$  برای دو الگوی به‌کار رفته نشان می‌دهد. در این شکل‌ها  $q_{b0} = 1$ ،  $\gamma = 4$ ،  $v = 0.1$ ،  $\Delta x = 0.125$  و  $\Delta t = 0.0005$  است. سطح تماس به همراه جریان باروتروپیک بالا و پایین می‌رود. در شکل ۵ و ۵د موجی با دامنه‌ی کوچک در لایه‌ی بالایی و پایینی جریان دیده می‌شود که وقتی جریان باروتروپیک فرو می‌نشیند، از تنگه خارج می‌شود. چنان‌که ملاحظه می‌شود نتایج مدل برای دو الگو بر هم منطبق است.

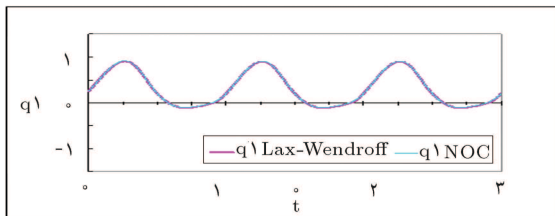
در شکل ۶ الف تغییرات زمانی عدد فرود مرکب جریان در حالت قبل نشان داده شده است. حل تناوبی معمولاً بعد از یک دوره حاصل می‌شود. چنان‌که ملاحظه می‌شود جریان فقط به‌طور لحظه‌ی بحرانی می‌شود ( $G^2 = 1$ ) تقریباً به‌صورت سینوسی،



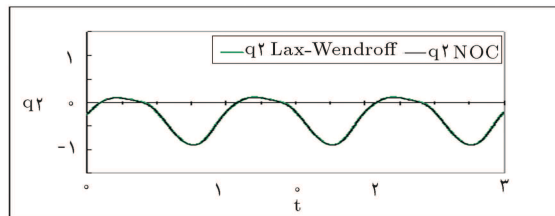
(الف)



(ب)

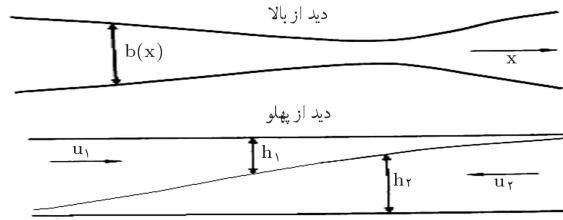


(ج)



(د)

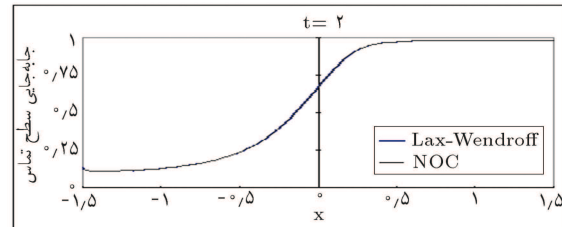
شکل ۶. الف) تغییرات زمانی عدد فرود مرکب جریان؛ ب) مقدار دبی جزر و مد ج) و د) و دبی هر یک از لایه‌های جریان در حالت  $q_{b0} = 1$ ،  $\gamma = 4$ ،  $v = 0.1$ ،  $\Delta x = 0.125$  و  $\Delta t = 0.0005$ .



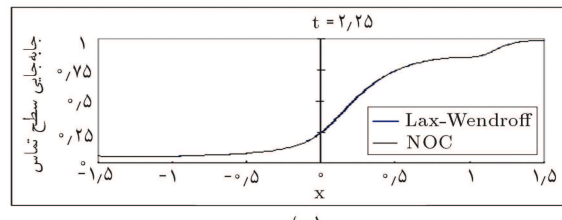
شکل ۴. نمایی از هندسه‌ی کانال. [۴]

مقیاس طولی کانال  $L=1$  و دوره‌ی تناوب جزر و مد  $T=1$  در نظر گرفته شده است. شکل ۴ نمایی از هندسه‌ی کانال را نشان می‌دهد که در آن لایه‌ی بالایی جریان، از چپ به راست حرکت می‌کند و لایه‌ی پایینی از راست به چپ جریان دارد.

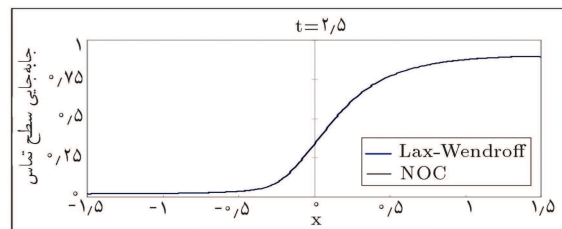
شکل ۵ محل سطح تماس دو لایه را در چهار مرحله‌ی زمانی



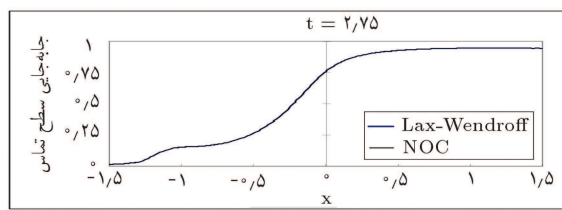
(الف)



(ب)

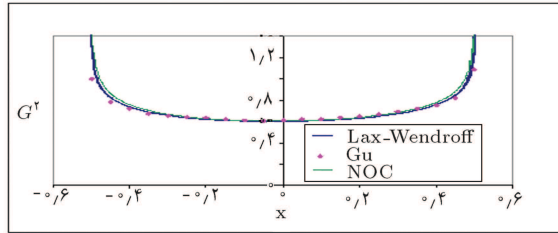


(ج)

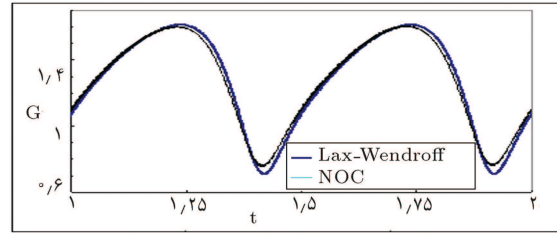


(د)

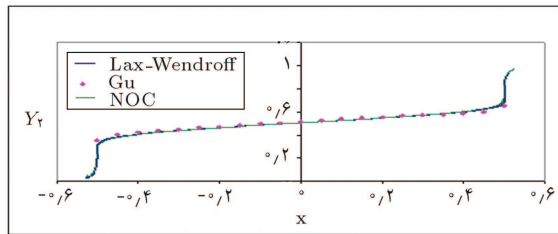
شکل ۵. سطح تماس دو لایه در چهار مرحله‌ی زمانی از یک تناوب جزر و مد در این شکل‌ها  $(t=2, 2.25, 2.5, 2.75)$  برای دو الگو در حالت  $q_{b0} = 1$ ،  $\gamma = 4$ ،  $v = 0.1$ ،  $\Delta x = 0.125$  و  $\Delta t = 0.0005$ .



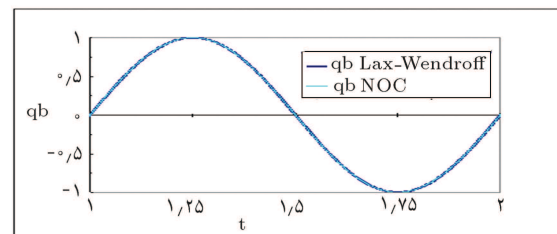
(الف)



(الف)



(ب)



(ب)

شکل ۹. الف) تغییرات زمانی عدد فرود مرکب جریان؛ ب) محل سطح تماس دولایه؛ در کانالی با عرض و عمق ثابت و مقایسه‌ی آن با نتایج آزمایشگاهی موجود. [۹]

شکل ۷. الف) تغییرات زمانی عدد فرود مرکب جریان؛ ب) مقدار دبی جزر و مد در حالت  $q_{b0} = 1, \gamma = 4, v = 0.1, \Delta x = 0.125$  و  $\Delta t = 0.0005$  (بازوی محدودتری از شکل‌های الف و ب).

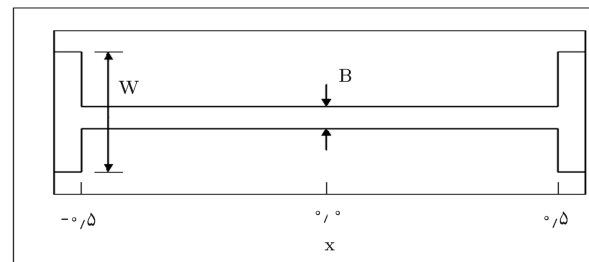
مشاهده می‌شود در شرایط مدل‌سازی یکسان، نتایج الگوی Lax-wendroff مطابقت بیشتری با نتایج آزمایشگاهی موجود [۹] نشان می‌دهد. اما اختلاف نتایج دو الگو در این حالت بسیار کم است به طوری که میانگین مقادیر خطای حل عددی نسبت به مقادیر اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه برای الگوی NOC برابر حدود ۱/۶ درصد و برای الگوی Lax-wendroff برابر ۱/۴ درصد است.

علاوه بر این، با اجرای مدل برای حالت‌های مختلف هندسه‌ی کانال (تغییر  $\gamma$ ) و مقادیر مختلف دبی جزر و مد ( $q_{b0}$ )، مشاهده شد که زمان اجرای مدل برای الگوی Lax-wendroff کوتاه‌تر از الگوی NOC است، زیرا برای جلوگیری از ناپایداری شدن مدل، در شرایط یکسان، در الگوی NOC به انتخاب گام‌های زمانی ( $\Delta t$ ) بسیار کوچک‌تری از الگوی Lax-wendroff نیازمندیم. اما در عوض، الگوی NOC برخلاف الگوی Lax-wendroff قادر به حل معادلات جریان در حالت‌هایی است که شدت جریان‌های باروتروپیک (جزر و مد) بسیار شدید ( $q_{b0}$  زیاد) یا طول تنگه خیلی کوتاه ( $\gamma$  زیاد) است. به طوری که در شرایطی که شدت نیروهای جزر و مد خیلی زیاد نباشد ( $|q_{b0}| \leq 1.25$ ) یا طول تنگه به اندازه‌ی کافی زیاد باشد ( $\gamma \leq 16$ )، استفاده از الگوی Lax-wendroff توصیه می‌شود. اما در شرایط شدید بودن نیروهای جزر و مدی ( $|q_{b0}| > 1.25$ ) یا کوتاه بودن طول تنگه ( $\gamma > 16$ ) استفاده از الگوی NOC نتایج بهتر و دقیق‌تری در بر خواهد داشت. برای مشاهده‌ی بهتر اختلاف نتایج دو الگو در شکل‌های ۹ الف و ۹ ب، بازوی محدودتری از هر یک از این شکل‌ها در شکل‌های ۱۰ الف و ۱۰ ب آمده است.

با فرکانسی معادل دو برابر فرکانس جزر و مد، حول  $G = 1$  نوسان می‌کند. در شکل ۶ تغییرات مقدار دبی جزر و مد ( $qb$ ) و در شکل‌های ۶ ج و ۶ د دبی هر یک از لایه‌های جریان دو لایه ( $q_1, q_2$ ) در محل تنگ‌شدگی به صورت تابعی از زمان رسم شده است. مشاهده می‌شود که فرم تغییرات دبی لایه‌ها تقریباً سینوسی است. در این نمودارها نیز اختلاف قابل توجهی بین نتایج دو الگو مشاهده نمی‌شود.

برای مشاهده‌ی بهتر اختلاف نتایج دو الگو در شکل‌های ۶ الف و ۶ ب، بازوی محدودتری از هر یک از این شکل‌ها در شکل‌های ۷ الف و ۷ ب آمده است.

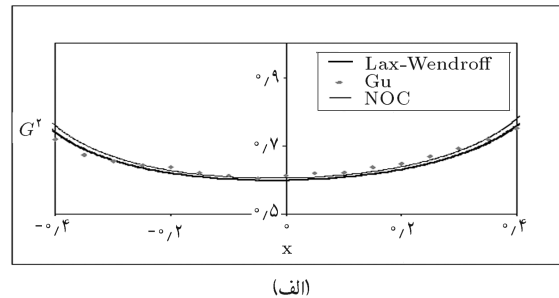
برای مقایسه‌ی بهتر نتایج دو الگو، مدل برای کانالی با عرض ثابت که با یک بازشدگی ناگهانی به مخزن متصل می‌شود (شکل ۸) اجرا شده و نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی موجود [۹] مقایسه شده است. نتایج این اجرا در شکل ۹ آمده است. در این شکل  $\Delta t = 0.0001, \nu = 0.001, \Delta x = 0.00025, \Delta t = 0.000025$  است. چنان‌که



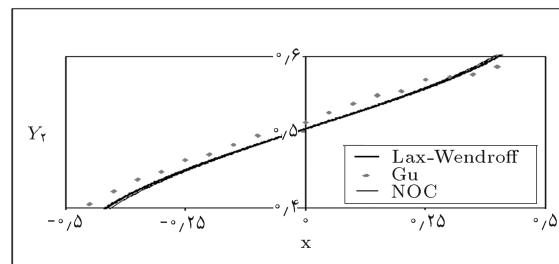
شکل ۸. نمای کانال مورد آزمایش برای مقایسه‌ی نتایج الگوها (از بالا).

عرض مقطع  $b(x) = 1 + 4(1 - e^{-\beta^2 x^2})$  و نیز کانالی با عرض ثابت اجرا شده و اثر نیروهای باروتروپیک (جزرومدی) روی دبی متوسط جریان تبدیلی در یک چرخه‌ی جزرومد بررسی شده است. دبی جزرومد به صورت متناوب و با مقدار متوسط زمانی صفر در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی مسئله در دو مرز باز، به صورت شرط تشعشع و شرایط اولیه‌ی جریان در لحظه‌ی  $t = 0$  برابر عمق و سرعت جریان لایه‌ها در حالت دائمی در نظر گرفته شده‌اند.

مقایسه‌ی نتایج اجرای مدل با دو الگوی مختلف نشان می‌دهد که استفاده از الگوی Lax-wendroff به زمان اجرای کم‌تری نیاز دارد و در حل برخی از مسائل هیدرولیک سیال دولایه مطابقت بیشتری با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد، اگرچه اختلاف نتایج دو الگو در حالت‌های مذکور بسیار اندک است. در مثال انجام شده، میانگین مقادیر خطای حل عددی نسبت به مقادیر اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه برای الگوی NOC حدوداً برابر ۱/۶ درصد و برای الگوی Lax-wendroff برابر ۱/۴ درصد است. در عوض الگوی NOC برخلاف الگوی Lax-wendroff قادر به حل معادلات جریان در حالت‌هایی از جریان است که شدت جریان‌های باروتروپیک (جزرومد) بسیار شدید ( $q_{b0}$  زیاد) و یا طول تنگه خیلی کوتاه ( $\gamma$  زیاد) است. به طور کلی در شرایطی که شدت نیروهای جزرومد خیلی زیاد نباشد ( $|q_{b0}| \leq 1.25$ ) یا طول تنگه به اندازه‌ی کافی زیاد باشد ( $\gamma \leq 16$ )، استفاده از الگوی Lax-wendroff توصیه می‌شود. اما در صورت شدید بودن نیروهای جزرومدی ( $|q_{b0}| > 1.25$ ) یا کوتاه بودن طول تنگه ( $\gamma > 16$ ) استفاده از الگوی NOC نتایج بهتر و دقیق‌تری در بر خواهد داشت.



(الف)



(ب)

شکل ۱۰. الف) تغییرات زمانی عدد فرود مرکب جریان؛ ب) محل سطح تماس دو لایه در کانالی با عرض و عمق ثابت و مقایسه‌ی آن با نتایج آزمایشگاهی موجود (بازهی محدودتری از شکل‌های ۹ الف و ۹ ب). [۹]

## نتیجه‌گیری

در این تحقیق کاربرد الگوهای NOC و Lax-wendroff روی حل معادلات هیدرولیک سیال دولایه از طریق تهیه‌ی یک مدل عددی مقایسه شده است. هر دو الگو از دقت درجه‌ی دو در مکان و زمان برخوردارند. مدل برای کانالی با تنگ‌شدگی تدریجی در عرض با رابطه‌ی

## پانویس

1. exchange flow
2. barotropic
3. momentum
4. composite froude number
5. stability froude number
6. radiation condition
7. open boundary condition
8. steady
9. cell
10. quadrature points

## منابع

1. Armi, L. & Farmer, D., "Maximal two-layer exchange flow through a contraction with barotropic net flow", *J. Fluid Mech.* **164**, pp. 27-51 (1986).
2. Geyer, W.R., "Time-dependent, two-layer flow

over a sill", *The Physical Oceanography of Sea Straits*. L. J. Pratt, Ed., NATO/ASI Series, Kluwer Academic, pp. 421-432 (1990).

3. Helfrich, K. R., "Time-dependent two-layer hydraulic exchange flows", *J. Phys. Oceanog* **25**, pp. 359-373 (1995).
4. Schijf, J. & Schonfeld, J., "Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water", In Proc. of the Minn. Int. Hydraulics Conv., Joint meeting IAHR and Hyd. Div., ASCE, pp. 321-333 (1953).
5. Lawrence, G., "On the hydraulics of Boussinesq and non-Boussinesq two-layer flows", *J. Fluid Mech.* **215**, pp. 457-480 (1990).
6. Orlandi, I., "A simple boundary condition for

- unbounded hyperbolic flows”, *J. Comput. Phys.* **21**, pp. 251-269 (1976).
7. Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S. & Vetterling, W., “Numerical Recipes”, Cambridge University Press (1986).
  8. Y. C. Tai et al., “Shock-Capturing and Front-Tracking Methods for Granular Avalanches”, *J. Comput. Phys.* **175**, pp. 269-301 (2002).
  9. Gu, L., “Frictional exchange flow through a wide channel with application to the Burlington Ship Canal”, PhD thesis, Dept. of Civil Engineering, University of British Columbia (2001).