فصلنامه‌ی علمی و پژوهشی شریف
بهار ۱۳۸۶، شماره‌ی سی و هفتم، ص. ۵۷-۶۳

کاربرد روش اجزاء محدود بسط یافته در مدل‌سازی ترک چسبنده

محمدتقی کاظمی (دانشیار)
علیرضا فرقانی (دانشجوی دکتری)
امیررضا خویی (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

در سال‌های اخیر روش‌های عددی، از جمله روش اجزاء محدود، در تحلیل مسئله‌ی ترک کاربرد روزافزون و چشم‌گیری یافته است. روش‌های سنتی اجزاء محدود، که مبتنی بر به‌کارگیری توابع شکل پیوسته برای مدل‌سازی میدان جابه‌جایی‌اند، با دو مشکل «نیاز به تغییر هندسه‌ی شبکه‌بندی در هنگام گسترش ترک» و «وابستگی نتایج تجزیه و تحلیل به هندسه‌ی شبکه‌بندی» مواجه‌اند. روش‌های نوین اجزاء محدود، از جمله روش اجزاء محدود بسط‌یافته، امکان مدل‌سازی ترک در داخل اجزا را مهیا می‌کند و بدین‌ترتیب نیازی به تغییر شبکه‌بندی در فرایند گسترش ترک نیست. در این نوشتار از ترکیب روش اجزاء محدود بسط‌یافته و روش کنترل طول ترک برای حل مسئله‌ی گسترش ترک چسبنده در مواد نیمه‌ترد استفاده شده است. نتایج حاصل با نتایج دیگر روش‌ها مقایسه شده و همخوانی مناسب و قابل قبولی مشاهده شد.

مقدمه

پدیده‌های «شکست» و «گسترش ترک» از مهم‌ترین مسائل مطرح در «مکانیک جامدات» است. هم‌زمان با پیشرفت علم مکانیک شکست در یک قرن اخیر، تحقیقات آزمایشگاهی گسترده‌یی نیز درمورد جنبه‌های مختلف شکست انجام گرفته و در حال انجام است. در دهه‌های اخیر مطالعه‌ی عددی شکست و ناپیوستگی نیز به کمک پردازنده‌های قوی و روش‌های عددی نوین، رواج گسترده‌یی پیدا کرده است.[۱-۵]

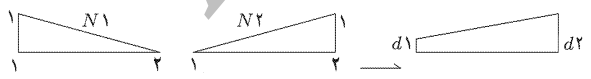
در مدل‌سازی «گسترش ترک» دو نوع رویکرد متداول است. در رویکرد اول، ترک به‌صورت کرنشِ پخش شده درکل المان مدل می‌شود. روابط رفتاری غیرکشسانی برای این اجزا به ظاهر پیوسته به‌گونه‌یی تعریف می‌شود که رفتار آنها وجود ناپیوستگی را شبیه‌سازی می‌کند. این متد، روش ترکِ پخش شده نام‌گذاری شده است.[۱] در رویکرد دوم، با به‌کارگیری توابع شکل خاص در داخل اجزای تحت تأثیر ترک، موجبات مدل‌سازی ناپیوستگی مهیا می‌شود.[۲-۶] در این رویکرد از توابع شکل موسوم به «توابع غنی‌سازی» برای مدل‌سازی ناپیوستگی علاوه بر توابع شکل عادی استفاده می‌شود. درجات آزادی مجازی نیز که بیان‌کننده‌ی هندسه‌ی ناپیوستگی‌اند، برای گره‌های تحت تأثیر ناپیوستگی در نظر گرفته می‌شود.

روش اجزاء محدود بسط‌یافته، از جمله روش‌های نوین مدل‌سازی ناپیوستگی و ترک است.[۶-۹] در این نوشتار با استفاده از این روش به مدل‌سازی و حل گسترش ترک چسبنده در مواد نیمه‌ترد پرداخته شده است. بدین‌منظور نرم‌افزار مورد نیاز برای مدل‌سازی ناپیوستگی نوشته شده و به‌کمک آن مثال‌های متنوعی حل شد. برای تعیین مسیر گسترش ترک از روش کنترل طول ترک استفاده شده است. نتایج حاصل نشان‌گر کارایی روش اجزاء محدود بسط یافته است.

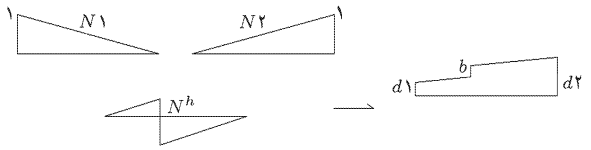
مدل‌سازی ناپیوستگی در روش اجزاء محدود

روش مدل‌سازی ناپیوستگی در داخل اجزاء، در دهه‌ی گذشته به‌سرعت توسعه یافته و استفاده‌ی گسترده‌یی داشته است.[۲-۵] استفاده از عنوان «روش اجزاء محدود بسط یافته[۱] (X-FEM)» برای رویکرد جدیدی که مبتنی بر به کارگیری توابع شکل خاص برای غنی‌سازی میدان جابه‌جایی است، اخیراً مورد پذیرش اغلب محققین قرار گرفته است.[۶-۸] در این روش توابع شکل عادی برای تمام گره‌ها در نظر گرفته شده و توابع غنی‌سازی تنها بر گره‌های تحت تأثیر ناپیوستگی اعمال می‌شود.

در شکل ۱ چگونگی تأثیر غنی‌سازی به‌کمک یکی از روش‌های اولیه‌ی ارائه شده برای غنی‌سازی در مدل تک‌بعدی نمایش داده شده



الف) توابع شکل عادی و حوزه جابه‌جایی پیوسته حاصل؛



ب) توابع شکل عادی، تابع پرش و حوزه جابه‌جایی ناپیوسته حاصل.

شکل ۱. مقایسه‌ی میدان جابه‌جایی ایجاد شده.

Archive of SID
www.SID.ir

است. در شکل۱ الف، توابع شکل عادی اجزاء محدود که با N_1 و N_2 نمایش داده شده برای تعریف میدان جابه‌جایی پیوسته به کار می‌روند. در شکل ۱ ب علاوه بر توابع شکل فوق از تابع شکل پرش N^h نیز به‌منظور ایجاد ناپیوستگی در میدان جابه‌جایی در داخل المان استفاده شده است.

در شکل ۱، مدل‌سازی ناپیوستگی با به‌کارگیری مستقیم تابع پرش در رابطه‌ی جابه‌جایی (u) انجام شده است. رابطه‌ی ۱ چگونگی استفاده از توابع شکل معمولی و پرش به‌منظور بیان حوزه‌ی جابه‌جایی را نشان می‌دهد.

$$u = \sum_{on I} N_i d_i + N^h b \qquad (۱)$$

تابع پرش بدین صورت تعریف می‌شود:

$$N^h = \begin{cases} N_1 - 1 & \text{اگر} x \in \Omega_1 \\ N_1 & \text{اگر} x \notin \Omega_1 \end{cases} \qquad (۲)$$

در رابطه‌ی ۱، I برابر تعداد گره‌های المان بوده (گره‌های ۱ و ۲ در شکل ۱) و Ω_1بخشی از محدوده المان است که گره ۱ در آن قرار دارد. در شکل ۱ این محدوده سمت چپ محل ناپیوستگی را شامل می‌شود. در رابطه‌ی ۱، d_i جابه‌جایی‌های مربوط به درجات آزادی عادی المان محدود، و b جابه‌جایی نسبی در محل ناپیوستگی است. اشکال روش به‌کارگیری مستقیم تابع پرش در رابطه‌ی جابه‌جایی، ایجاد وابستگی بین کرنش در دو طرف ناپیوستگی است. در شکل ۱ ب، شیب دو طرف ناپیوستگی یکسان است.

در اجزاء محدود دوبعدی، گرهِ تحت تأثیر ناپیوستگی گرهی است که حداقل یک یال منتهی به آن توسط خط ناپیوستگی قطع شده باشد (شکل ۲).

برای تولید توابع غنی‌سازی در X-FEM از روش اجزاء محدود با پاره‌سازی وحدت[۹] استفاده می‌شود. براین اساس می‌توان از حاصلضرب توابع شکل معمولی در توابع دارای خاصیت مورد نظر (مانند خاصیت پرش در میدان جابه‌جایی) به‌منظور ساخت توابع غنی‌سازی استفاده کرد.

$$\vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{on I} N_i(\mathbf{x})\vec{\mathbf{d}}_i + \sum_{on\ J} N_j^h(\vec{\mathbf{x}})\vec{\mathbf{b}}_j \qquad (۳)$$

در رابطه‌ی ۳، $\mathbf{N}_j^h$ تابع غنی‌سازی مربوط به گره $\mathbf{j}$ و $\mathbf{b_j}$ معرف بردار پرش مربوط به درجه آزادی غنی‌سازی $\mathbf{j}$ است. $\mathbf{d_i}$ بردار جابه‌جایی درجه آزادی عادی گره $\mathbf{i}$ است. در فضای دوبعدی بردارهای $\mathbf{d_i}$ و $\mathbf{b_j}$ هر یک دارای دو مؤلفه‌ی جابه‌جایی متعامدند. در این رابطه I معرف تمام گره‌ها، و $\mathbf{J}$ معرف تعداد گره‌های تحت تأثیر ناپیوستگی هستند (گره‌های مشخص شده با دایره در شکل ۲)؛ همچنین $\mathbf{x}$ بردار مکان است. نحوه‌ی ساخت تابع غنی‌سازی مطابق رابطه‌ی ۴ است:

$$N_j^h(\mathbf{x}) = N_j(\mathbf{x})G_j(\mathbf{x}) \qquad (۴)$$

ضرب تابع شکل استاندارد (N_j) در تابع شکل خاص مورد نظر (G_j)، موجب ایجاد قید در حوزه عملکردی غنی‌سازی در محدوده‌ی مورد نظر و رعایت شرایط مرزی جابه‌جایی می‌شود.

تابع غنی‌سازی پیشنهادی

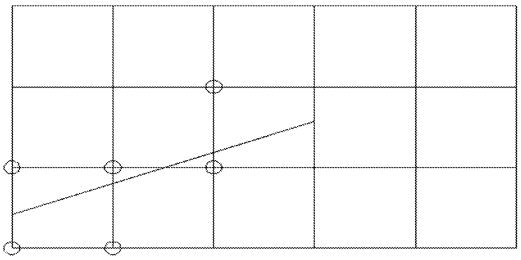
تابع غنی‌سازی مورد استفاده برای شبیه‌سازی رفتار ترک باید دارای دو شرط ایجاد ناپیوستگی در محل ترک، و عدم اختلال شرایط پیوستگی میدان جابه‌جایی بر روی مرزها باشد. با توجه به شرایط یادشده، تابع غنی‌سازی مورد استفاده در این نوشتار مطابق رابطه‌ی ۵ تعریف می‌شود:

$$G_j(\mathbf{x}) = H_j(\mathbf{x}) \qquad (۵)$$

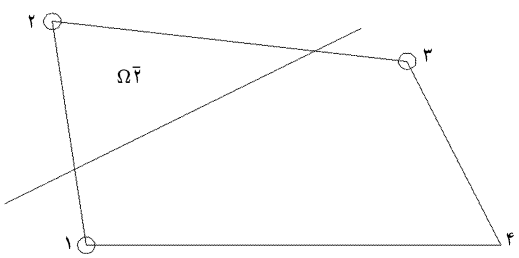
که در آن تابع هویساید[۳] (H) براساس رابطه ۶ تعریف می‌شود:

$$H_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} ۰ & \text{اگر} \quad \mathbf{x} \in \Omega_j^- \\ ۱ & \text{اگر} \quad \mathbf{x} \notin \Omega_j^- \end{cases} \qquad (۶)$$

در رابطه‌ی ۵، $\mathbf{H}_j(\mathbf{x})$ تابع پرش مربوط به گره $\mathbf{j}$ است. Ω_j^- دامنه‌ی محدود به گره $\mathbf{j}$ و امتداد ناپیوستگی است. در شکل ۳، دامنه‌ی اعمال تابع پرش رابطه‌ی ۶ برای گره شماره ۲ نمایش داده شده است.

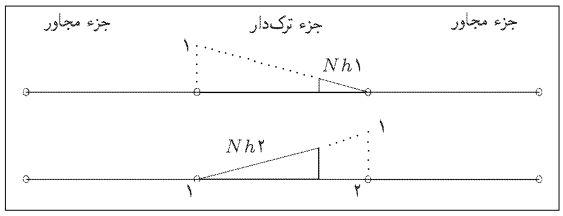


شکل ۲. عبور ترک از داخل اجزاء و گره‌های تحت تأثیر ترک (مجموعه گره‌های J).



شکل ۳. هندسه‌ی مربوط به تابع غنی‌سازی پیشنهادی.

Archive of SID
www.SID.ir



شکل ۴. رفتار توابع پرش در محیط تک‌بعدی برای گره‌های ۱ و ۲.

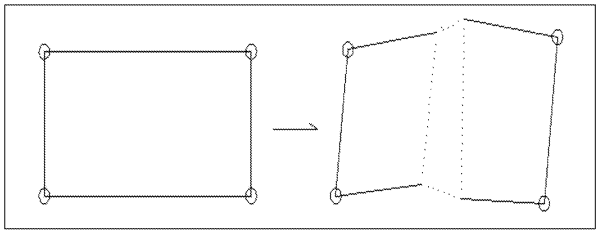
نحوه‌ی عملکرد تابع غنی‌سازی پیشنهادی در محیط یک بعدی در شکل ۴ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که شرایط دوگانه‌ی ایجاد پرش در محل ناپیوستگی و عدم تأثیر در مرزها توسط این روش احراز می‌شود.

هندسه‌ی ناپیوستگی

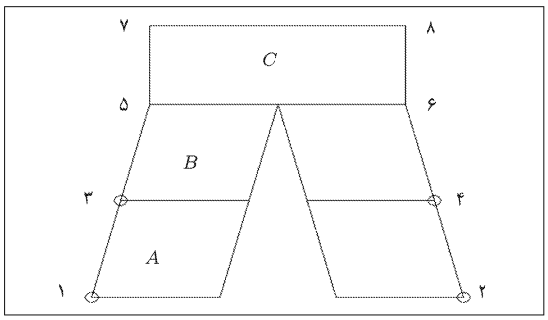
هندسه‌ی مرزهای داخلی در محل ناپیوستگی همانند مرزهای خارجی اجزاء، بستگی به درجه‌ی توابع شکل مورد استفاده دارد. در اینجا با توجه به ۴ گرهی بودن اجزاء و وجود دو درجه آزادی غنی‌سازی در هر گره غنی شده، هندسه‌ی مرزهای داخلی المان و درنتیجه مسیر ترک و نیز تغییر مقدار بازشدگی ترک در داخل المان به‌صورت خطی خواهد بود (شکل ۵).

چنان که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، تغییر شکل نسبی دو طرف ترک به‌صورت مستقل در برگیرنده‌ی تمام حالات تغییر شکل محتمل است؛ در نتیجه تابع پیشنهادی ممکن است به‌عنوان تابعی مناسب برای استفاده در غنی‌سازی اجزاء تحت عبور ترک، استفاده شود. در المان شکل ۵ هر ۴ گره تحت تأثیر ترک قرار دارد و در نتیجه هشت درجه آزادی غنی‌سازی ایجاد کننده‌ی تغییر مکان نسبی دو طرف ترک خواهد بود.

در المان‌های واقع در مسیر ترک، تمام گره‌های اطراف ترک تحت تأثیر غنی‌سازی قرار می‌گیرد و در المان انتهای ترک تنها ۲ گره غنی می‌شود. در شکل ۶ در المان A که ترک از آن عبور کرده هر ۴ گره ۱، ۲، ۳ و ۴ غنی شده‌اند. در المان B که در انتهای ترک قرار دارد تنها دو گره ۳ و ۴ غنی‌سازی شده و المان C هیچ گره غنی شده‌یی ندارد.



شکل ۵. نحوه‌ی تغییر شکل المان غنی‌سازی شده.



شکل ۶. تغییر شکل نمونه‌ی اجزاء تحت تأثیر عبور ترک. فقط گره‌های مشخص شده با دایره غنی می‌شوند.

روابط حاکم

میدان جابه‌جایی و تانسور کرنش را برای المان تحت اثر ترک می‌توان چنین نوشت:[۵]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\,\mathbf{d} + H(\mathbf{x})\,\mathbf{N}(\mathbf{x})\,\mathbf{b} \qquad (۷)$$

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{d} + H(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x})\,\mathbf{b} + (\delta\,\mathbf{n})\mathbf{N}(\mathbf{x})\,\mathbf{b} \qquad (۸)$$

که در آن‌ها $\mathbf{N}$ ماتریس سطری توابع شکل اجزاء محدود، و $\mathbf{B}$ ماتریس مشتقات مکانی توابع شکل المان محدود است. $\mathbf{d}$بردار جابه‌جایی عادی گره‌یی، و $\mathbf{b}$درجات آزادی غنی‌شده‌ی این گره‌ها هستند. Hنیز تابع پرش است. به‌واسطه‌ی پرش ایجاد شده در میدان جابه‌جایی روی مرز ترک، جمله‌ی نامحدود دلتای دیراک δ در راستای عمود بر مسیر ترک $(\mathbf{n})$ در رابطه‌ی کرنش ظاهر شده است.

با استفاده از حساب تغییرات و با مستقل در نظر گرفتن درجات آزادی حقیقی و درجات آزادی غنی‌سازی، دو رابطه‌ی انتگرالی ۹ و ۱۰ حاصل می‌شود:

$$\int_{\text{در محدوده}} \mathbf{B}^T\sigma\,d\Omega = \int_{\text{روی مرز خارجی}} \mathbf{N}^T t\,d\Gamma \qquad (۹)$$

$$\int_{\text{روی جزء متأثر از ترک}} H\,\mathbf{B}^T\sigma\,d\Omega + \int_{\text{روی مرز داخلی}} \mathbf{N}^T\mathbf{t}\,d\Gamma = ۰ \qquad (۱۰)$$

که در آن‌ها $\mathbf{t}$ بردار نیروی سطحی در مرز و $\mathbf{B}$ عملگر مشتقات توابع شکل است. نمو تانسور تنش را می‌توان از رابطه‌ی ۱۱ محاسبه کرد:

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D}\dot{\epsilon} = \mathbf{D}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{a}} + H\,\mathbf{B}\dot{\mathbf{b}}) \qquad (۱۱)$$

که در آن، $\mathbf{D}$ تانسور رفتار مصالح است و نقطه‌ی بالای بردارها نشانه‌ی مقادیر نموی است. با قراردادن تنش از رابطه‌ی فوق در معادلات انتگرالی ۹ و ۱۰، معادله‌ی تعادل برداری سیستم برای تغییرات در درجات آزادی حاصل می‌شود:

$$\mathbf{K}\begin{Bmatrix} d\mathbf{a} \\ d\mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ ۰ \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{int} \\ \mathbf{f}_b^{int} \end{Bmatrix} \qquad (۱۲)$$

Archive of SID
www.SID.ir

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس سختی است و طبق رابطه‌ی ۱۳ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\int \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,d\Omega & \int H\,\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\,d\Omega \\ \int H\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega & \int H\mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}d\Omega+\int \mathbf{N}^T\mathbf{T}\mathbf{N}d\Gamma\end{bmatrix} \quad (۱۳)$$

$$\mathbf{f}_a^{int}=\int \mathbf{B}^T\sigma\,d\Omega \quad (۱۴)$$

$$\mathbf{f}_b^{int}=\int H\,\mathbf{B}^T\sigma\,d\Omega+\int \mathbf{N}^T\mathbf{t}\,d\Gamma \quad (۱۵)$$

$\mathbf{T}$ از روی تابع رفتاری انتخاب شده برای مدل‌سازی ترک چسبنده محاسبه شده، و برابر با مشتق نیروی سطحی نسبت به بازشدگی ترک خواهد بود. مقادیر $\mathbf{f}$ در معادلات فوق بیانگر نیروهای معادل گره‌یی متناظر درجات آزادی عادی و غنی‌سازی است.

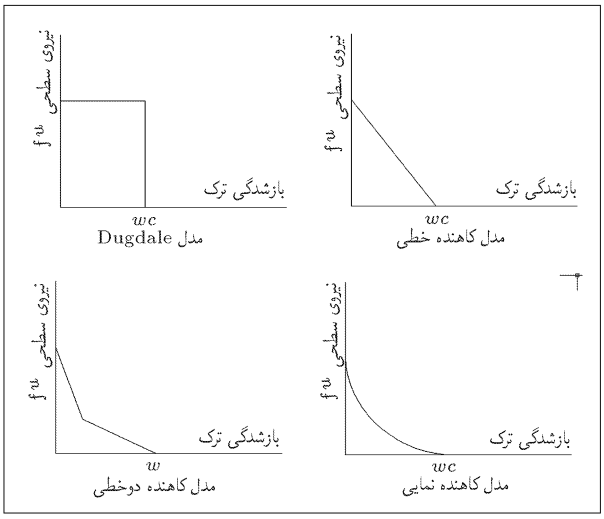
مدل ترک چسبنده و نحوه‌ی گسترش ترک

ترک چسبنده روشی است برای شبیه سازی رفتار غیر خطی مصالح در محدوده‌ی فرایند شکست، و بدین منظور فرض می‌شود نیروهای سطحی چسبنده‌ی متقابل بین لبه‌های ترک اعمال می‌شود. نحوه‌ی اعمال این زوج نیروهای دوزنده به‌گونه‌یی است که در لحظه‌ی گسترش تُرک، مساحت زیر نمودارِ نیروی سطحی ـ بازشدگی ترک که نشانگر انرژی صرف‌شده برای جدا شدن دو سطح با مساحت واحد است، برابر با انرژی شکست تُرک ($\mathbf{G}_f$) خواهد بود. در این روش به‌جز ترک رفتار بقیه‌ی سیستم ارتجاعی فرض می‌شود. مدل‌های مختلف رفتاری نیرو- بازشدگی ترک برای مواد مختلف پیشنهاد شده است. نمونه‌هایی از این مدل‌ها در شکل ۷ نمایش داده شده است. چسبندگی بین دو لبه‌ی ترک بر ماتریس سختی و نیروهای معادل گره‌یی سیستم تأثیرگذار است.

در شرایط ترک مود مرکب، پس از تفکیک مقادیر بازشدگی و لغزش نسبی، مؤلفه‌های قائم و مماسی نیروهای سطحی محاسبه می‌شود. برای شبیه‌سازی رفتار مود مرکب ترک چسبنده، در پژوهش‌ها از مدل‌های رفتاری مختلفی استفاده شده است. در حالت کلی، نیروهای سطحی اصطکاکی و نرمال بین دو لبه‌ی ترک، تابع لغزش و همچنین بازشدگی دو لبه‌ی ترک خواهند بود.[۵]

در مثال‌های حل شده در این نوشتار، از اثر اصطکاکی دو لبه‌ی ترک، به‌منظور ساده‌سازی، صرف‌نظر شده و به‌بیان دیگر، مؤلفه‌های مماسی نیروهای متبادل بین دو لبه‌ی ترک برابر صفر در نظر گرفته شده است. این فرض برای مواد نیمه‌ترد، در حالتی که مود اول حاکم است مناسب خواهد بود.

در این پژوهش از معیار رانکین برای کنترل شرایط و نیز گسترش ترک استفاده شده است. در این روش از بیشترین مقدار تنش حداکثر غیرمحلی[۴] کششی به‌منظور کنترل شرط گسترش ترک استفاده می‌شود.



شکل ۷. نمودار رفتاری مدل‌های چسبنده‌ی مختلف.

تنش غیرمحلی نوک ترک با استفاده از حوزه‌ی تنش در نقاط گاوسی[۵] با به‌کارگیری ضرایب وزنی براساس رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ محاسبه می‌شود:

$$\sigma=\sum w_i\sigma_i \quad (۱۶)$$

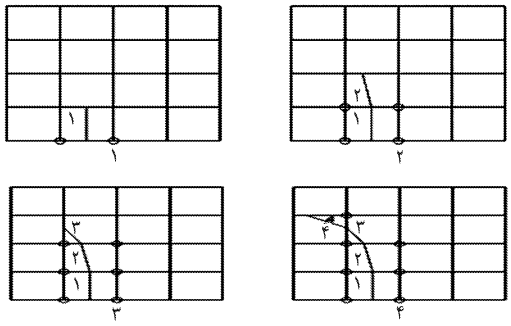
$$w_i=\frac{1}{(2\pi)^{2/3}l^3}\exp(-\frac{r_i^2}{2l^2}) \quad (۱۷)$$

در این رابطه‌ها σ_i تانسور تنش در نقاط گاوسی، w_i ضرایب وزنی، r فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از نقاط گاوسی و l پارامتر مشخصه‌ی طول برابر با بعد المان است.[۵]

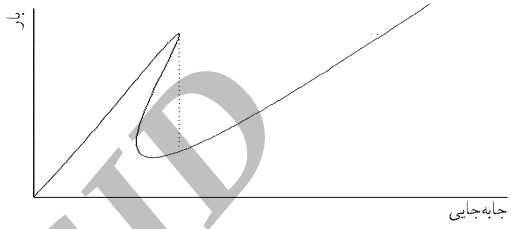
با رسیدن مقدار تنش کششی اصلی به مقاومت کششی ماده، شرایط گسترش ترک مهیا می‌شود. معیار حداکثر تنش محیطی به‌عنوان معیار حاکم بر جهت گسترش ترک انتخاب شده است. بدین معنی که با محاسبه‌ی حوزه تانسور تنش در نوک ترک، جهت تنش کششی بیشینه محاسبه شده و راستای گسترش ترک، موازی صفحه‌ی تنش کششی بیشینه خواهد بود.

امتیاز بارز روش اجزاء محدودِ بسط‌یافته، کارایی این روش به هنگام گسترش ترک است؛ به این ترتیب که برخلاف روش‌های سنتی اجزاء محدود، که گسترش ترک در آنها مستلزم تغییر در هندسه‌ی شبکه‌بندی است، در این روش برای اعمال گسترش ترک کافی است درجات آزادی غنی‌سازی برای گره‌هایی که تحت اثر ترک قرار می‌گیرند افزوده شود. در شکل ۸ نمونه‌یی از چهار مرحله‌ی گسترش ترک و نحوه‌ی اختصاص درجه آزادی غنی‌سازی به گره‌های تحت تأثیر ترک نمایش داده شده است.

Archive of SID
www.SID.ir



شکل ۸. مراحل گسترش ترک و گره‌های غنی شده در هر مرحله.



شکل ۹. عدم توانایی روش‌های کنترل بار و کنترل جابه‌جایی در پی‌گیری مسیر تعادل در حالت پرش به عقب.

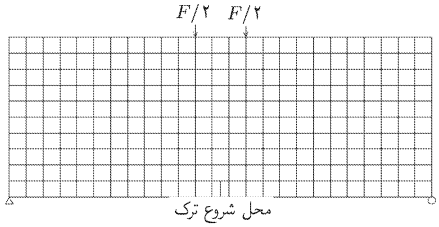
پرش به عقب[۶]

حالت «پرش به عقب» از شرایطی است که در تجزیه و تحلیل شکست، به‌ویژه برای مواد ترد، ممکن است اتفاق افتد (شکل ۹). روش‌های کنترل نیرو و کنترل جابه‌جایی قابلیت مدل‌سازی حالت پرش به عقب را ندارند. از جمله راهکارهای ارائه شده برای حل این مسئله روش کنترل طول ترک است.[۱۰و۱۱] در این روش، از طول ترک که در فرایند تحلیل همواره فزاینده است، به‌عنوان پارامتر کنترل محاسبات استفاده می‌شود.

مثال گسترش ترک در مود اول

در این مثال تیر همراه با ترک در میانه، به‌وسیله‌ی برنامه‌ی نوشته شده مدل‌سازی شده است. هندسه و مقادیر این مثال از منابع موجود استخراج شده است.[۱۱] شکل ۱۰ نشان‌دهنده‌ی هندسه‌ی شبکه‌بندی این تیر است.

در مرجع[۱۱] این مسئله به‌کمک روش‌های عادی المان محدود



شکل ۱۰. شبکه‌بندی تیر با شکاف اولیه تحت بارگذاری مود اول.

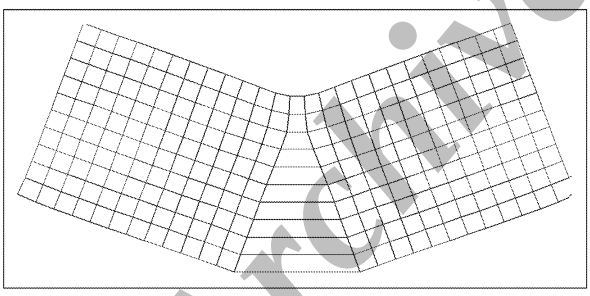
و با مدل‌سازی چسبندگی، به‌کمک فنرهایی با رفتار غیر خطی و با استفاده از روش کنترل طول ترک حل شده است. با توجه به استفاده از مقادیر طول و نیروی بدون بعد، مقادیر و ابعاد این مثال نیز همخوان با مقادیر مثال مزبور انتخاب شده است. طول تیر برابر با ۷۵۰۰ میلی‌متر و عمق آن ۱۸۷۵ میلی‌متر فرض شده است. ضریب کشسانی برابر با $E = ۱۰۰\,GPa$ و ضریب پواسن $v=۰/۳$ انتخاب شده است. مقاومت کششی برابر $f_t = ۸۷/۵MPa$ انتخاب شده، و مدل کاهنده خطی برای شبیه‌سازی رفتار چسبنده در نظر گرفته شده است. این مسئله برای مقادیر مختلف بازشدگی بحرانی حل شده است.

در شکل ۱۱، هندسه‌ی تغییر شکل یافته‌ی تیر بر اثر گسترش ترک به‌میزان ۸ المان نمایش داده شده است. بازشدگی بحرانی برابر با $w_c = ۰/۲۳mm$ فرض شده و نقطه‌ی متناظر با گسترش ترک در هر المان، به‌ترتیب، در شکل ۱۲ مشخص شده است.

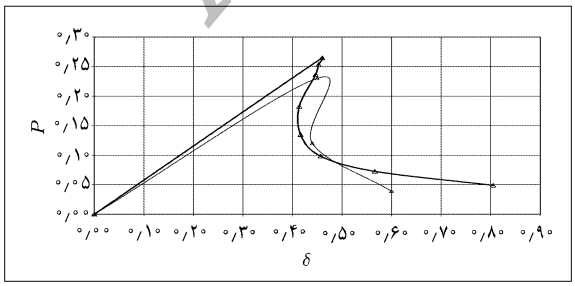
برای مقایسه‌ی نتایج حل برنامه با نتایج ثبت شده در مرجع ۱۱، مسیر تعادل برای مقدار بازشدگی بحرانی $w_c =۰/۲۳mm$ به‌صورت مقایسه‌یی در شکل ۱۲ ترسیم شده است. این نمودار براساس مقادیر بدون‌بعد نیرو و تغییر مکان براساس روابط ۱۸ و ۱۹ رسم شده است:

$$P = \frac{F}{f_t b^۲} \qquad (۱۸)$$

$$\delta = \frac{u}{b}.۱۰^۴ \qquad (۱۹)$$

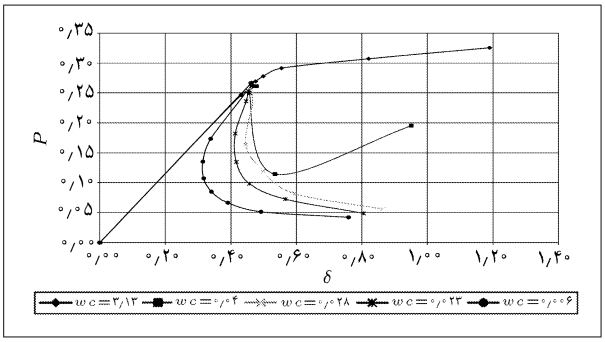


شکل ۱۱. هندسه‌ی تغییر شکل‌یافته‌ی تیر (تغییر شکل به‌صورت اغراق‌آمیز رسم شده است).



شکل ۱۲. نمودار نتایج تحلیل حاضر (خط ضخیم‌تر) در مقایسه با نتیجه موجود (خط نازک‌تر)[۱۱].

Archive of SID
www.SID.ir



شکل ۱۳. نمودارهای نیرو ـ جابه‌جایی برای مقادیر مختلف بازشدگی بحرانی.

که در آنها، F بار وارده، b عمق تیر و u جابه‌جایی در محل بارهای وارده است.

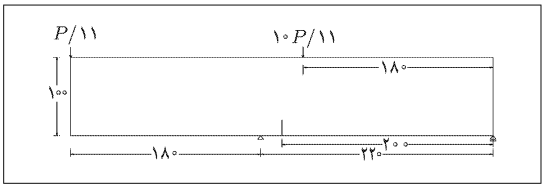
چنان که ملاحظه می‌شود، نتایج تحلیل برنامه‌ی حاضر به نتایج قبلی نزدیک است و این مسئله نشان‌گر دقت مناسب این برنامه است. در شکل ۱۳ مسیر تعادل سیستم به‌ازای مقادیر مختلف بازشدگی بحرانی ترسیم شده است. با توجه به شکل ۱۳ موارد زیر قابل استنتاج است:

- حالت پرش به عقب در مواردی که انرژی شکست و درنتیجه بازشدگی بحرانی کوچک‌تر است، شدیدتر است. کم‌بودن مقدار انرژی شکست با فرض یکسان بودن مقاومت کششی، نمایان‌گر کم‌بودن تأثیر رفتار چسبنده در کل ساز، خواهد بود و رفتاری مشابه گسترش ترک براساس نظریه‌ی مکانیک شکست کشسان خطی[۷]، LEFM، حاصل خواهد شد.
- در مواردی که مقدار انرژی شکست بزرگ‌تر باشد، با فرض یکسان بودن مقاومت کششی، رفتار خمیری‌ـکشسانی مشاهده می‌شود. در این حالات ناپایداری و حالت پرش به عقب اتفاق نمی‌افتد.
- در حالت‌های بین دو مورد یادشده که در واقع‌گذار از LEFM به رفتار خمیری‌ـکشسانی است، همراه با افزایش انرژی شکست، رفتار پایدارتری حاصل خواهد شد.

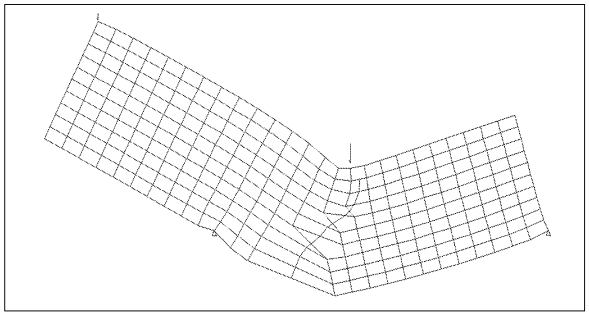
مثال گسترش ترک در مود مرکب

به‌منظور محک صحت تعیین جهت گسترش ترک به‌وسیله‌ی این برنامه، مثالی از گسترش ترک مود مرکب که در آن ترکیبی از کشش و برش در ناحیه‌ی ترک وجود دارد، انتخاب و مطرح می‌کنیم.[۵] هندسه و ابعاد مسئله در شکل ۱۴ نمایش داده شده است (ابعاد برحسب سانتی‌متر است). فاصله شکاف اولیه از تکیه‌گاه سمت راست برابر $200\,cm$ است.

ضریب کشسانی برابر با E=۳۵ GPa و ضریب پواسن برابر v=۰٫۲ انتخاب شد. مقاومت کششی معادل f_t =۳MPa انتخاب شده و از مدل نرم‌شونده‌ی خطی برای شبیه‌سازی رفتار ترک چسبنده



شکل ۱۴. هندسه‌ی مثال دوم.



شکل ۱۵. مسیر گسترش ترک در مود مرکب و هندسه‌ی تغییر شکل یافته اغراق آمیز.

با بازشدگی بحرانی برابر w_c= ۰٫۰۵cm استفاده شده است. در این مسئله از اصطکاک دو لبه‌ی ترک صرف‌نظر شده است.

در مسائل مود مرکب، جهت گسترش ترک از پیش معین نیست و مسیر ترک در طی گام‌های حل، توسط برنامه مشخص می‌شود. در شکل ۱۵، مسیر گسترش ترک و هندسه‌ی تغییر شکل حاصل از برنامه‌ی حاضر نمایش داده شده است. نتیجه‌ی حاصله مشابه نتیجه‌ی موجود قبلی است و در هردوی تحلیل‌ها مسیر ترک به سمت محل بار وارده گرایش پیدا کرده است.

نتیجه‌گیری

روش‌های مبتنی بر مدل‌سازی ناپیوستگی در داخل اجزا، قدرت و انعطاف‌پذیری زیادی برای مدل‌سازی مسائلی همراه با ناپیوستگی، مانند ترک، دارند. به‌کمک روش اجزاء محدود بسط‌یافته، بدون تغییر در هندسه‌ی شبکه‌بندی سیستم می‌توان به تحلیل گسترش ترک چسبنده پرداخت. مقایسه‌ی نتایج این روش با حل‌های معمولی اجزاء محدود و همچنین با شهود آزمایشگاهی، نشان‌گر دقت و توانایی این روش در مدل‌سازی گسترش ترک چسبنده است. نرم‌افزار تهیه شده با به‌کارگیری روش اجزاء محدود بسط یافته و نیز با استفاده از روش کنترل طول ترک، از قابلیت مدل‌سازی گسترش ترک چسبنده با مدل‌های رفتاری مختلف و پرش به عقب برخوردار است. تابع غنی‌سازی پیشنهادی، برخلاف دیگر توابع مورد استفاده، فقط در المان‌های واقع در مسیر عبور ترک اعمال شده و درنتیجه به‌کارگیری این روش در برنامه‌های تجاری اجزا محدود ساده‌تر می‌تواند باشد.

Archive of SID

www.SID.ir

پانوشت

1. The Extended Finite Element Method (X-FEM)
2. partition of unity finite element method
3. heaviside
4. non-local stress
5. Gaussian points
6. snap-back
7. Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)

منابع

1. Bazant, Z.P. and Planas, J. " Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials", *CRC Press*, (1997).
2. Oliver, J. " Continuum modeling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models", *Computational Mechanics;* **17**, pp. 49-61 (1995).
3. Armero, F. and Garikipati, K. " Analysis of strong-discontinuities in inelastic solids with applications to the finite element simulation of strain localization problems." *Proceedings of Engineering Mechanics;* **1**, pp. 56-59 (1996).
4. Belytschko, T. and Black, T. " Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering;* **45**(5), pp. 601- 620 (1999).
5. Wells, G.N. and Sluys, L.J. " A new method for modeling cohesive cracks using finite elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng;* **50**, pp. 2667-2682 (2001).
6. Sukumar, N. Moes, N. Moran, B. and Belytschko, T. " Extended finite element method for three-dimensional crack modeling", *Int. J. Numer. Meth. Engng;* **48**, pp. 1549-1570 (2000).
7. Chopp, D.L. and Sukumar, N. " Fatigue crack propagation of multiple coplanar cracks with the coupled extended finite element/fast marching method", *International Journal of Engineering Science,* **41**, pp.845-869 (2003).
8. Moes, N. and Belytschko, T. " Extended finite element method for cohesive crack growth", *Engineering Fracture Mechanics,* **69**, pp. 85-833 (2002).
9. Melenk, J. M. and Babuska, I. " The partition of unity finite element method: basic theory and applications", *Seminar fur Angewandte Mathematik Eidgenossische Technische Hochschule CH80-92 Zurich, Switzerland , Research Report* No.96-0 (1996).
10. Carpinteri, A. " Post-peak and post-bifurcation analysis of cohesive crack propagation", *Engng. Frac. Mech.* **32**(2), pp. 265-278 (1989).
11. Carpinteri, A. and Colombo, G. " Numerical analysis of catastrophic softening behavior (snap-back instability)", *Computers and Structures,* **31**(4), pp. 607-636 (1989).

Archive of SID

www.SID.ir