فصلنامه‌ی علمی و پژوهشی شریف
زمستان ۱۳۸۶، شماره‌ی چهلم، ص. ۳-۱۱

# تحلیل مکانیکی توده‌های سنگی درزه‌دار با استفاده از روش بدون شبکه

**نادر هاتف (استاد)**
**محمد حاجی‌عزیزی (دانشجوی دکتری)**
**ارسلان قهرمانی (استاد)**
**دانشکده‌ی مهندسی–بخش عمران، دانشگاه شیراز**

در این نوشتار از روش گالرکین بدون شبکه برای تحلیل مکانیکی توده‌های سنگی درزه‌دار و همچنین از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی ضروری استفاده شده است که نتایج حاصل از آن نشان‌دهنده‌ی قابلیت‌های خوب این روش برای تحلیل چنین مسائلی است. در تحلیل رفتار سنگ‌های درزه‌دار با روش‌های مبتنی بر شبکه، معمولاً با مشکلاتی از قبیل هندسه‌های بد[۱] به‌ویژه هنگام حفاری این توده سنگ‌ها یا مراحل مربوط به معرفی درزه، مواجهیم. اما در روش‌های بدون شبکه که در حوزه‌ی مسئله فقط گره معرفی می‌شود و شبکه‌یی وجود ندارد، چنین معضلاتی به‌وجود نمی‌آید.

در این پژوهش علاوه بر تغییرشکل‌های نسبی بلوک‌ها نسبت به هم، تغییر مکان درزه‌ها و گره‌های هر بلوک نیز با استفاده از روش گالرکین بدون شبکه محاسبه می‌شود. به‌همین منظور، ضمن ارائه‌ی مثال‌هایی در این خصوص در پایان هر مثال علاوه بر محاسبه‌ی تغییرمکان‌ها، زمان محاسبه‌ی لازم در دو روش گالرکین بدون شبکه و روش تفاضل محدود مقایسه شده است که بر این اساس روش گالرکین بدون شبکه زمان محاسبه‌ی کم‌تری را صرف کرده است.

## ۱. مقدمه

در بیشتر موارد، رفتار توده‌های سنگی درزه‌دار توسط درزه‌های آن کنترل می‌شود. بررسی گسترش ترک در سنگ و همچنین تغییرشکل‌های بزرگ در شیب‌های سنگی، از اهمیت ویژه‌یی برخوردار است. در همین راستا لازم است مدل مناسبی برای تحلیل رفتار توده‌های سنگی درزه‌دار با چنین وضعیتی ارائه شود. روش‌های عددی زیادی برای تحلیل توده‌های سنگی درزه‌دار ارائه شده است از قبیل روش‌های اجزای محدود[۲][۱]، تفاضل محدود[۳][۲]، المان درزه‌ها[۴][۳]، المان مرزی[۵][۴]، اجزاء مجزا[۶][۵]، تحلیل تغییرشکل‌های گسسته[۷][۶]، اجزاء محدود صلب[۸][۷] و چندین روش دیگر. مبنای تمام روش‌های ذکر شده روش شبکه[۹] (شبکه‌بندی) است، و در این راستا ضروری است تا در هر قدم از تغییر هندسه‌ی مسئله، شبکه‌بندی‌های متوالی انجام گیرد تا بتوان به حل نهایی رسید. ایجاد شبکه‌های متوالی در هر تغییر هندسه علاوه بر صرفِ زمان بسیار، موجب کاهش دقت محاسبات و پیچیدگی برنامه خواهد شد.[۸] درنتیجه روش‌های مبتنی بر شبکه، برای مسائل مرتبط با تغییرشکل‌های بزرگ و گسترش ترک‌ها مناسب نیستند. اگر چه در همین ارتباط روش اویلر–لاگرانژ اختیاری[۱۰]، نیز ارائه شده است، که این روش نیز مشکلات محاسباتی خاص خود را دارد.[۹]

از سه دهه‌ی قبل، بسیاری از محققین برای فائق آمدن بر مشکلات ناشی از شبکه‌بندی در جست‌وجوی روش‌های بدون شبکه بودند. در این ارتباط، فرایس و ماتیز[۱۱] از دانشگاه برانچویگ در سال ۲۰۰۴ جزوه‌یی ارائه دادند که به دسته‌بندی و توضیح روش‌های بدون شبکه پرداخته است.[۱۰] آن‌ها به بررسی روش‌های بدون‌شبکه‌ی SPH[۱۲] و DEM[۱۳] و EFG[۱۴] و LSMM[۱۵] و MLPG[۱۶] و LBIE[۱۷] و PUM[۱۸] و HC[۱۹] و NEM[۲۰] و MFEM[۲۱] و RKEM[۲۲] و چندین روش دیگر پرداخته‌اند.

در نوشتار حاضر، از روش گالرکین بدون شبکه برای تحلیل مکانیکی توده‌های سنگی درزه‌دار، و برای اعمال شرط مرزی ضروری از روش پنالتی — که در محیط‌های درزه‌دار کاری نو و جدید است — استفاده می‌شود.

مثال‌های حل شده نتایج بسیار خوبی را نشان می‌دهند و در مثال‌هایی که بلاک‌های سنگی توسط درزه به هم مرتبط می‌شوند، زمان محاسبه‌ی کم‌تری نسبت به روش‌های مبتنی بر شبکه، به‌ویژه روش تفاضل محدود صرف می‌شود. لازم به ذکر است که مثال اول در این نوشتار برای یک تیر طره‌یی و در محیط پیوسته حل شده است که قبلاً نیز توسط دیگر محققین حل شده است و در این نوشتار صرفاً برای

نشان دادن انطباق نتایج حاصل از برنامه‌ی نوشته شده توسط مؤلفین با حل دقیق آورده شده است.

## ۲. روش گالرکین بدون شبکه

بلیچکو و همکارانش با اصلاح تابع شکل در روش DEM، روش جدیدی به‌نام «روش گالرکین بدون شبکه» ارائه کردند.[۱۱] آن‌ها برای تعیین تابع شکل، از تقریب کم‌ترین خطای مربعات محرک [۲۳] استفاده کردند. این تقریب چنین تعریف می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \qquad (1)$$

که در آن، $\mathbf{x}$ عبارت است از:

$$\mathbf{x}^T = [x, y, z] \qquad (2)$$

و $p_j(\mathbf{x})$ توابع پایه‌یی[۲۴] چندجمله‌یی است که در فضای یک‌بعدی عبارت است از:

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, x^2, \ldots, x^m] \qquad (3)$$

و در فضای دوبعدی به‌ترتیب عبارت است از:

$$\mathbf{P}^T(x,y) = [1, x, y, xy, x^2, y^2, \ldots, x^m, y^m] \qquad (4)$$

و نهایتاً در فضای سه‌بعدی عبارت خواهد بود از:

$$\mathbf{P}^T(x,y,z) = [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \ldots, x^m, y^m, z^m] \qquad (5)$$

که $m$ تعداد جمله‌های چندجمله‌یی تابع پایه است.

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$ بردار ضرایب است و با کمینه کردن $\mathbf{J}$ از رابطه‌ی ۶ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{J} = \sum_{I=1}^{m} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)[\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_I]^2 \qquad (6)$$

که در آن $\mathbf{u_I}$ مقدار گره‌یی تابع است به‌طوری که:

$$\mathbf{u_I} = \mathbf{u}(\mathbf{x_I})$$

با کمینه کردن $J$ نسبت به $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \qquad (7)$$

یا:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u} \qquad (8)$$

که:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} w(\mathbf{x})\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \qquad (9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_2), \ldots, w_n(\mathbf{x})p(\mathbf{x}_n)] \qquad (10)$$

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \qquad (11)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۸ در رابطه‌ی ۱ خواهیم داشت:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{ji}\, u_i \qquad (12)$$

یا

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\mathbf{x}) u_i \qquad (13)$$

که تابع شکل عبارت است از:

$$\Phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \qquad (14)$$

همچنین مشتق تابع شکل را می‌توان چنین نوشت:

$$\Phi_{I,i} = \sum_{j=1}^{m} \Big\{ p_{j,i}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{jI} + p_j \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}_{,i} - \mathbf{A}_{,i}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})_{jI} \Big\} \qquad (15)$$

تابع $w_I(\mathbf{x})$ همواره مقداری مثبت است.

در این پژوهش تابع وزن را از رابطه‌ی ۱۶ به‌دست آورده‌ایم:

$$w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & : s <= \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & : \frac{1}{2} < s <= 1 \\ 0 & : s > 1 \end{cases} \qquad (16)$$

که در آن

$$s = d_I / r \qquad \text{و} \qquad d_I = ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_I||$$

و $r$ شعاع حوزه‌ی تأثیر انتخابی است. یادآور می‌شود که تابع وزن برای $\mathbf{x}_I$ نزدیک به $\mathbf{x}$ مقدار بزرگی است و هر چه از آن دور شود، مقدارش کوچک‌تر می‌شود تا آن‌جا که مقدار آن در خارج از حوزه‌ی تأثیر صفر خواهد شد.

## ۳. فرمول‌بندی معادله‌ی تعادل برای محیط‌های درزه‌دار

تغییر مکان هر نقطه از بلوک را می‌توان از رابطه‌ی ۱۷ به‌دست آورد:

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u}_a \quad (۱۷)$$

که $\Phi(\mathbf{x})$ تابع شکل است و از رابطه‌ی ۱۸ به‌دست می‌آید:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-۱}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (۱۸)$$

جمله‌های مربوط به طرف راست رابطه‌ی ۱۸ پیش‌تر توضیح داده شده‌اند.

$\mathbf{u}_a$ بردار تغییر مکان‌های گره‌هایی است که در حوزه‌ی تأثیر نقطه‌ی $\mathbf{x}$ قرار دارند. بردار تغییرمکان گره‌ها از معادله‌ی تعادل به‌دست می‌آید و معادله‌ی تعادل را نیز می‌توان از اصل تغییرات[۲۵] به‌دست آورد. تابع انرژی پتانسیل کل توده‌ی سنگی درزه‌دار را می‌توان چنین نوشت:

$$\Pi = \Pi_b + \Pi_j + \Pi_f + \Pi_p \quad (۱۹)$$

که در آن $\Pi_b$ انرژی کرنش کشسانی بلوک، $\Pi_j$ انرژی کرنش کشسانی درزه، $\Pi_f$ انرژی پتانسیل نیروهای حجمی $f_e$، و $\Pi_p$ انرژی پتانسیل نیروی متمرکز $P$ است که هرکدام با استفاده از روابط ۲۰ تا ۲۳ حاصل می‌شود:[۱۲]

$$\Pi_b = \sum_e t_b \iint_{\Omega e} \frac{۱}{۲}\varepsilon^T \mathbf{D}_b \varepsilon d_x dy$$
$$= \frac{۱}{۲}\sum_e \mathbf{u}_b^T \left(t_b \iint_{\Omega e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d_x d_y\right)\mathbf{u}_b \quad (۲۰)$$

$$\Pi_j = \sum_k t_k \int_{\beta k} \frac{۱}{۲}\delta^T \mathbf{D}_j \delta d_s$$
$$= \frac{۱}{۲}\sum_k \mathbf{u}_j^T \left(t_k \int_{\beta k} \mathbf{B}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{B}_j d_s\right)\mathbf{u}_j \quad (۲۱)$$

$$\Pi_f = -\sum_e \iint_{\Omega e} \mathbf{u}^T \mathbf{f}_e d_x d_y$$
$$= -\sum_e \mathbf{u}_b^T \left(\iint_{\Omega e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_e d_x d_y\right) \quad (۲۲)$$

$$\Pi_p = -\sum_m \mathbf{u}^T \mathbf{p}_m = -\sum_m \mathbf{u}_b^T(\mathbf{N}^T \mathbf{p}_m) \quad (۲۳)$$

$\Pi_j$ در واقع همان انرژی کرنش کشسانی است که اثرش در محیط‌های گسسته همانند توده‌های سنگی درزه‌دار، یا محیط‌های درزه‌دار آشکار می‌شود.

باکمینه‌کردن تابع $\Pi$ در رابطه‌ی ۱۹ معادله‌ی تعادل توده‌های سنگی درزه‌دار به‌ترتیب زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (۲۴)$$

که در آن:

$$\mathbf{K} = \sum_e t_e \iint_{\Omega e} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d_x d_y + \sum_k t_k \int_{\beta k} \mathbf{B}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{B}_j d_s \quad (۲۵)$$

$$\mathbf{P} = \sum_e \iint_{\Omega e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_e d_x d_y + \sum_m \mathbf{N}^T \mathbf{p}_m \quad (۲۶)$$

$$\mathbf{U} = [u_۱, v_۱, u_۲, v_۲, ..., u_n, v_n]^{\mathrm{T}} \quad (۲۷)$$

$t_e$ ضخامت بلوک $e$، $t_k$ ضخامت درزه‌ی $k$، و $n$ تعداد کل گره‌های موجود در هندسه‌ی مسئله است. $\mathbf{U}$ برابر است با بردار تغییر مکان کل گره‌ها. تغییر مکان هر نقطه از حوزه‌ی مسئله را می‌توان از رابطه‌ی ۲۸ به‌دست آورد:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\,\mathbf{u}_b \quad (۲۸)$$

که در آن:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \Phi_۱(\mathbf{x}), ۰, \Phi_۲(\mathbf{x}), ۰, ..., \Phi_n(\mathbf{x}), ۰ \\ ۰, \Phi_۱(\mathbf{x}), ۰, \Phi_۲(\mathbf{x}), ۰, ..., \Phi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

و $\mathbf{u}_b$ بردار تغییر مکان حوزه‌ی تأثیر نقطه‌ی $\mathbf{x}$ است. همچنین کرنش $\varepsilon$ و تنش $\boldsymbol{\sigma}$ را می‌توان برای هر نقطه از مسئله، از روابط ۲۹ و ۳۰ به‌دست آورد:

$$\varepsilon = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (۲۹)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (۳۰)$$

که در آن‌ها:

$$\mathbf{B}_b = \begin{pmatrix} \Phi_{۱,x}(\mathbf{x}), ۰, ..., \Phi_{n,x}(\mathbf{x}), ۰ \\ ۰, \Phi_{۱,y}(\mathbf{x}), ۰, ..., ۰, \Phi_{n,y}(\mathbf{x}) \\ \Phi_{۱,y}(\mathbf{x}), \Phi_{۱,x}(\mathbf{x}), ..., \Phi_{n,y}(\mathbf{x}), \Phi_{n,x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (۳۱)$$

$$\mathbf{D}_b = (E/(۱-v^۲)) \begin{pmatrix} ۱ & v & ۰ \\ v & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & (۱-v)/۲ \end{pmatrix} \quad (۳۲)$$

برای تنش مسطح، و

$$\mathbf{D}_b = (E/(۱-۲v)(۱+v)) \begin{pmatrix} ۱-v & v & ۰ \\ v & ۱-v & ۰ \\ ۰ & ۰ & (۱-۲v)/۲ \end{pmatrix} \quad (۳۳)$$

برای کرنش مسطح است.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]^T \qquad (۳۴)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}]^T \qquad (۳۵)$$

## ۴. ماتریس سختی مرتبط با درزه در محیط‌های گسسته

سهم درزه در ماتریس سختی معادله‌ی تعادل در محیط‌های درزه‌دار عبارت است از:

$$\mathbf{K}_j = \sum_k t_k \int_{\beta k} \mathbf{B}_j^T \mathbf{D}_j \mathbf{B}_j ds \qquad (۳۶)$$

برای تحلیل توده‌های سنگی بدون درزه، از سختی درزه‌ی $\mathbf{K}_j$ صرف‌نظر می‌شود. در نتیجه ماتریس سختی معادله‌ی تعادل فقط شامل ماتریس سختی بلوک‌های سنگی خواهد شد. برای تحلیل توده‌های سنگی درزه‌دار محاسبه‌ی $\mathbf{K}_j$ و $\mathbf{K}_b$، هر دو، ضروری است؛ به‌طوری که ماتریس سختی کل $\mathbf{K}$ در معادله‌ی تعادل عبارت خواهد بود از مجموع $\mathbf{K}_j$ و $\mathbf{K}_b$. ماتریس $\mathbf{B}_j$ که آن «ماتریس گشتاور[۲۶]» نیز می‌نامند، چنین تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B}_j = [\overline{O}, \ldots, -\mathbf{L}\,\mathbf{N}_i, \overline{O}, \ldots, \mathbf{L}\,\mathbf{N}_j, \overline{O}, \ldots] \qquad (۳۷)$$

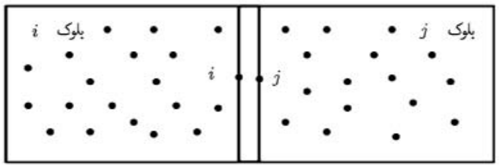
که در آن $\mathbf{N}_i$ و $\mathbf{N}_j$ ماتریس‌های مربوط به بلوک‌های درزه‌یی هستند که توسط آن درزه به یکدیگر مرتبط می‌شوند. از آن جا که در شماره‌گذاری بلوک‌ها، ممکن است دو بلوک از نظر شماره‌گذاری به‌طور متوالی توسط یک درزه درکنار یکدیگر قرار نگیرند، لازم است به جای ماتریس $\mathbf{N}$ آن، مقدار صفر قرار داد و با توجه به ترتیب شماره‌گذاری، $\mathbf{N}$های بلوک‌هایی را که توسط درزه به یکدیگر مرتبط می‌شوند محاسبه کرد. در شکل ۱ یک درزه و دو بلوک که توسط درزه به یکدیگر مرتبط می‌شوند، نشان داده شده است. $\mathbf{L}$ نیز ماتریس انتقال است، به‌طوری که مختصات محلی را به مختصات کلی تبدیل می‌کند.

ماتریس کشسانی $\mathbf{D}_j$ برای درزه چنین تعریف می‌شود:

$$D_j = \begin{pmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{pmatrix} \qquad (۳۸)$$

که در آن $k_s$ سختی برشی و $k_n$ سختی عمودی درزه است. تغییر مکان یک درزه ($\delta$) را به‌صورت اختلاف برداری تغییر مکان نقاط $i$ و $j$ (شکل ۱) تعریف می‌کنیم:

$$\delta = [\delta_n, \delta_s] = \tilde{u}_i - \tilde{u}_j = \mathbf{B}_J\,\mathbf{u}_J \qquad (۳۹)$$




شکل ۱. دو بلوک که توسط یک درزه به هم مرتبط شده‌اند.

که در آن $\mathbf{u}_j$ از رابطه‌ی ۴۰ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{u_J} = [u_i^T, u_j^T]^T \qquad (۴۰)$$

$\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{u}_j$ تغییر مکان نقاط $i$ و $j$، واقع بر روی سطوح درزه‌اند. بردار کرنش درزه را می‌توان از رابطه‌ی ۴۱ به‌دست آورد:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_n \\ \gamma_{ns} \end{pmatrix} = \delta/h = (1/h)\mathbf{B}_J\,\mathbf{u}_J \qquad (۴۱)$$

که در آن $\varepsilon_n$ کرنش نرمال (عمودی) و $\gamma_{ns}$ کرنش برشی است. همچنین بردار تنش درزه را می‌توان از رابطه‌ی ۴۲ به‌دست آورد:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n \\ \tau_s \end{pmatrix} = \mathbf{D}_j\delta \qquad (۴۲)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}_n$ تنش نرمال (عمودی) و $\boldsymbol{\tau}_s$ تنش برشی است.

## ۵. معادله‌ی تعادل با اعمال شرط مرزی ضروری

مقدار حاصله از تابع تقریب $u^h(\mathbf{x})$ برای گره $\mathbf{x}$، که از روش گالرکین بدون شبکه به‌دست می‌آید، با مقدار واقعی تابع $u(x)$ در آن گره برابر نیست. این موضوع باعث می‌شود که تابع شکل در روش گالرکین بدون شبکه با دلتای کرونکر[۲۷] برابر نباشد. یعنی:

$$\Phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ} \qquad (۴۳)$$

برابر نبودن تابع شکل با دلتای کرونکر، موجب می‌شود که شرط مرزی ضروری ارضا نشود. یک راه ساده و مؤثر برای اعمال شرط مرزی ضروری استفاده از روش پنالتی است. شرط مرزی ضروری را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \qquad \text{روی مرز } \boldsymbol{\Gamma}_u \qquad (۴۴)$$

که در آن $\overline{\mathbf{u}}$ مقدار تغییر مکان داده شده روی مرز $\boldsymbol{\Gamma}_u$ است.

معادله‌ی حاصل از گالرکین، با اعمال شرط مرزی ضروری و با استفاده از روش پنالتی عبارت است از:[۱۳]

$$\int\limits_{\Omega} \delta(Lu)^T c(Lu) d\Omega - \int\limits_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int\limits_{\Gamma t} \delta u^T \bar{t} d\Gamma$$

$$\delta \int\limits_{\Gamma u} 0.5(u-\overline{u})^T \alpha (u-\overline{u}) d\Gamma = 0 \qquad (۴۵)$$

با انجام عملیات لازم برروی معادله‌ی ۴۵ معادله‌ی تعادل نهایی، با اعمال شرط مرزی ضروری، عبارت خواهد بود از:

$$[\mathbf{K}+\mathbf{K}_\alpha]\mathbf{U}=\mathbf{P}+\mathbf{P}_\alpha \quad (۴۶)$$

که در آن جمله‌های $\mathbf{K}_\alpha$ و $\mathbf{P}_\alpha$ از اعمال شرط مرزی ضروری به روش پنالتی حاصل شده‌اند و از انتگرال‌های روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mathbf{K}_\alpha=\alpha\int_{\Gamma u}\mathbf{N}^T\mathbf{N}\,d\Gamma \quad (۴۷)$$

$$\mathbf{P}_\alpha=\alpha\int_{\Gamma u}\mathbf{N}^T\overline{\mathbf{u}}\,d\Gamma \quad (۴۸)$$

که در آن‌ها $\alpha$ ضریب پنالتی است. هرچه ضریب پنالتی بزرگ‌تر باشد برگرداندن مرزی که به خارج از مکان خودش رفته است دقیق‌تر خواهد بود؛ و در حالت ایده‌ال مقدار این ضریب باید بی‌نهایت باشد. اما از آن‌جا که خیلی بزرگ بودن ضریب پنالتی به‌بروز مشکلات عددی در برنامه‌های رایانه‌یی منجر خواهد شد، نمی‌توان عدد خیلی بزرگی به آن اختصاص داد. بنابراین سعی می‌شود که برای ضریب $\alpha$ بزرگ‌ترین عددی که به بروز مشکل رایانه‌یی نینجامد، انتخاب شود، و آن معمولاً عددی است بین $10^3$ تا $10^{13}$ برابر مدول کشسانی.

لازم به ذکر است که معمولاً توده‌های سنگی درزه‌دار در طبیعت شامل مرزهای بی‌نهایت‌اند. مدل‌کردن این مرزها در حالت دوبعدی به این ترتیب است که قسمت پایین (تحتانی) توده‌های سنگی که شامل مرز بی‌نهایت در هر دو جهت طول و عرض است، در هر دو جهت $x$ و $y$ گیردار در نظر گرفته می‌شوند، اما مرزهای جانبی که فقط در یک جهت شامل مرز بی‌نهایت می‌شوند، فقط در همان جهت‌گیردار می‌شوند و در جهت دیگر ممکن است تغییر مکان داشته باشد. معمولاً گیرداری در مرزهای جانبی در راستای محور $x$ است. این موضوع در کلیه‌ی طرح‌های مهندسی مرتبط با سنگ و خاک که شامل مرزهای بی‌نهایت می‌شوند منظور می‌شود. گیردارکردن یک مرز به این معنی است که تغییر مکان آن مرز را صفر در نظر بگیریم، یا اجازه ندهیم جابه‌جایی داشته باشد. اعمال این شرط مرزی ضروری در معادله‌ی ۴۵ مشاهده می‌شود. به‌طوری که $\overline{\mathbf{u}}$ تغییر مکان معلوم، روی مرز است و اگر بخواهیم تغییر مکان قسمت‌هایی از مرز توده‌ی سنگی برابر صفر باشد مقدار $\overline{\mathbf{u}}$ آن را در معادلات صفر می‌کنیم.

## ۶. معادلات مربوط به رفتار سطوح درزه با رفتار خمیری

ما معمولاً علاقه‌مند به مدل کردن درزه‌ها به‌صورت برشی، فشاری و یا کششی هستیم. اگر رفتار درزه در حالت کششی قرار بگیرد، تنش برشی و فشاری آن را برابر با صفر در نظر خواهیم گرفت و اگر در حالت غیرکششی قرار بگیرد، لازم است نظارت داشته باشیم که رفتار آن در حالت کشسانی است یا در حالت خمیری. معیارهای لازم برای تشخیص این رفتار معیارهای موهرـکولمب و پاتُن[۲۸] است. رفتار درزه را به‌صورت کشسانی‌ـخمیری کامل در نظر خواهیم گرفت. سطوح درزه دارای اصطکاک، زاویه‌ی انبساط، چسبندگی، سختی عمودی و سختی برشی هستند. یک درزه را به‌صورت اندرکنش دو صفحه‌یی تعریف می‌کنیم که از طریق فنرهای عمودی و برشی به هم مرتبط‌اند. در صورتی که مقدار اصطکاک یا چسبندگی درزه بزرگ انتخاب شود می‌توان از جاری شدن درزه جلوگیری کرد و رفتار درزه به‌صورت کاملاً خطی و ارتجاعی باشد.[۱۴] تابع تسلیم در معیار موهرـکولمب عبارت است از:

$$f=\left|\tau_s\right|+\sigma_n\tan\phi-C \quad (۴۹)$$

که در آن $\tau_s$ تنش برشی، $\sigma_n$ تنش فشاری، $\phi$ زاویه‌ی اصطکاک و $C$ چسبندگی است. همچنین تابع تسلیم پاتُن عبارت است از:[۱۵]

$$f=\left|\tau_s\right|+\sigma_n\tan(\phi_b+i)-C \quad (۵۰)$$

که در آن $\phi_b$ زاویه‌ی اصطکاک اولیه‌ی درزه، و $i$ زاویه‌ی سطح زبری درزه است. مقدار افزایش جابه‌جایی نسبی برشی ($\Delta u_s$) و افزایش جابه‌جایی نسبی عمودی ($\Delta u_n$) از دو قسمت کشسانی و خمیری تشکیل شده است که آن‌ها را چنین می‌نویسند:

$$\Delta u_s=\Delta u_s^e+\Delta u_s^p \quad (۵۱)$$

$$\Delta u_n=\Delta u_n^e+\Delta u_n^p \quad (۵۲)$$

ابتدا فرض می‌شود که تغییر مکان‌های خمیری برابر صفر باشد، یعنی درزه به‌صورت کشسانی عمل کند؛ در نتیجه افزایش تنش برشی و عمودی به‌ترتیب زیر خواهد بود:

$$\Delta\tau_s=k_s\Delta u_s \quad (۵۳)$$

$$\Delta\sigma_n=k_n\Delta u_n \quad (۵۴)$$

بنابراین تنش‌های برشی و عمودی جدید از روابط ۵۵ و ۵۶ به‌دست خواهند آمد:

$$\tau_s^I=\tau_s+\Delta\tau_s \quad (۵۵)$$

$$\sigma_n^I=\sigma_n+\Delta\sigma_n \quad (۵۶)$$

سپس مقادیر تنش‌های فوق را در معیار گسیختگی مورد نظر قرار می‌دهیم تا امکان جاری شدن آن را بررسی کنیم. اگر داشته باشیم:

$$f(\sigma_n^I,\tau_s^I)<0 \quad (۵۷)$$

آن‌گاه درزه در حالت کشسانی قرار دارد و تنش‌های حاصل از روابط ۵۵ و ۵۶ برآوردهای صحیحی از تنش‌های نهایی‌اند. اما اگر مقدار تابع تسلیم مساوی، یا بزرگ‌تر از صفر شود آنگاه تنش‌های حاصل از روابط ۵۵ و ۵۶ تنش‌های صحیحی نیستند و باید تصحیح شوند. به‌عبارت دیگر، درزه در حالت خمیری قرارگرفته است و باید علاوه بر تغییر مکان‌های ناشی از رفتار کشسانی، تغییر مکان‌های ناشی از رفتار خمیری نیز محاسبه شوند. برای یافتن افزایش تغییر مکان خمیری $\Delta u_s^p$ و $\Delta u_n^p$ از تابع جریان استفاده می‌کنیم که عبارت است از:

$$g = \left|\tau_s\right| + \sigma_n \tan\psi \tag{۵۸}$$

که در آن $\psi$ زاویه‌ی انبساط است. شکل عمومی رابطه‌ی تنش و نرخ کرنش را که از شرط نرمالیته، مطابق با تابع تسلیم به‌دست می‌آید، چنین می‌نویسند:[۱۶]

$$\varepsilon_{ij}^I = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{۵۹}$$

رابطه‌ی ۵۹ را می‌توان برحسب تغییر مکان‌های خمیری برشی و عمودی، و با در نظرگرفتن ناپیوستگی قانون جریان، چنین نوشت:

$$\Delta u_s^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau_s} = \lambda\,\mathrm{sgn}(\tau_s) \tag{۶۰}$$

$$\Delta u_n^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_n} = \lambda \tan(\psi) \tag{۶۱}$$

به‌منظور ارضاء تابع تسلیم ($f = 0$) و با استفاده از روابط یاد شده، رابطه‌ی ضریب $\lambda$ عبارت خواهد بود از:

$$\lambda = \frac{f(\sigma_n^I, \tau_s^I)}{k_s + k_n \tan\phi \tan\psi} \tag{۶۲}$$

بنابراین مقادیر تصحیح شده‌ی تنش‌ها چنین خواهد شد:

$$\tau_s = \tau_s^I - k_s \Delta u_s^p \tag{۶۳}$$

$$\sigma_n = \sigma_n^I - k_n \Delta u_n^p \tag{۶۴}$$

قابل توجه است که وقتی نقطه‌یی از درزه به حالت خمیری می‌رسد، ماتریس سختی آن نیز باید اصلاح شود. ماتریس سختی اصلاح شده چنین به‌دست می‌آید:

$$D^{ep} = D^e - \frac{\left(D^e \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_n}\right)\left(D^e \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_n}\right)^T}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_n}\right)^T . D^e . \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_n}\right)} \tag{۶۵}$$

که در آن $D^{ep}$ ماتریس اصلاح شده، $D^e$ ماتریس کشسانی، $g$ تابع جریان و $f$ تابع تسلیم است.

## ۷. بررسی چند مثال

برای نشان دادن نتایج حاصل از روش بدون شبکه چند مثال ارائه می‌شود.

**مثال ۱.** در این مثال یک تیر طره‌یی (شکل ۲) که حل دقیق آن موجود است بررسی می‌شود و نتایج حاصل از حل دقیق با نتایج حاصل از روش بدون شبکه مقایسه می‌شود. در انتهای تیر طره‌یی، بار $P$ که به‌صورت سهمی شکل است، اعمال شده است که مطابق با رابطه‌ی $\tau_{xy} = Py(D-y)/(2I)$ در هر نقطه از انتهای تیر به‌دست می‌آید. حل دقیق یک تیر طره‌یی توسط تیموشینکو و گودایر[۱۷] از طریق روابط ۶۶ و ۶۷ داده شده است:

$$u_x = -(p/6\overline{E}I)(y - D/2)[3x(2L - x) + (2 + \overline{v})y(y - D)] \tag{۶۶}$$

$$u_y = (p/6\overline{E}I)[x^2(3L - x) + 3\overline{v}(L - x)(y - D/2)^2 + (4 + 5\overline{v})D^2x/4] \tag{۶۷}$$

که:

$$I = D^3/12$$

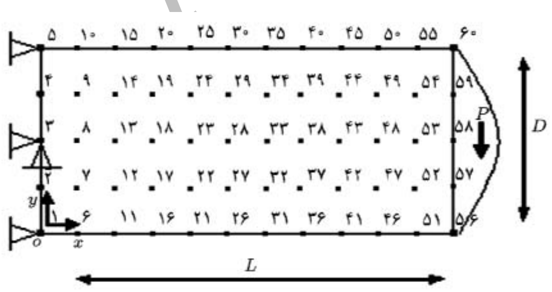
$$E = \begin{cases} E & \text{برای حالت تنش صفحه‌یی} \\ \overline{E}/(1 - \nu^2) & \text{برای حالت کرنش صفحه‌یی} \end{cases}$$

$$\overline{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{برای حالت تنش صفحه‌یی} \\ \nu/(1 - \nu) & \text{برای حالت کرنش صفحه‌یی} \end{cases}$$

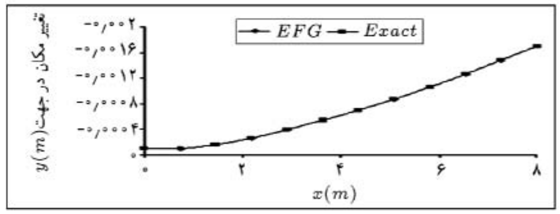
این مسئله برای حالت کرنش صفحه‌یی و برای شرایط زیر حل شده است:

$$P = 1000\,\mathrm{N}, E = 2e7\mathrm{Pa}, D = 4\mathrm{m}, L = 8\mathrm{m}, v = 0.3$$

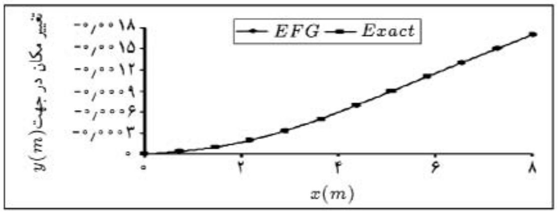
تابع وزن چندجمله‌یی درجه سه[۲۹] انتخاب می‌شود و تعداد نقاط انتخابی برای انتگرال‌گیری در هر سلول ($6 \times 6$) است. تعداد کل گره‌های انتخابی ۶۰ گره است و تعداد کل سلول برای محاسبه‌ی انتگرال،



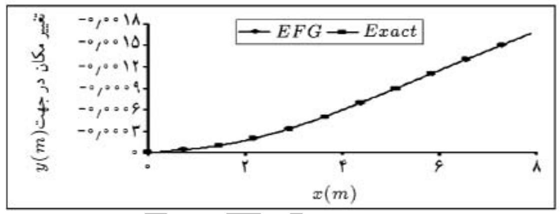

شکل ۲. تیر تیموشینکو و گره‌های انتخابی در آن.



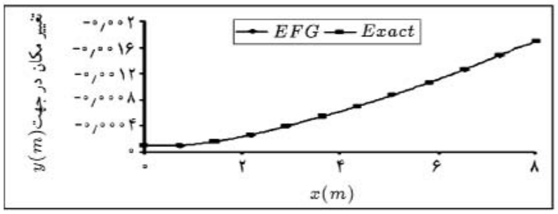

شکل ۳. مقایسه‌ی روش بدون شبکه و حل دقیق در $y = ۰$.



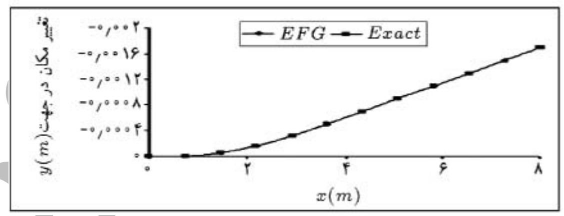

شکل ۶. مقایسه‌ی روش بدون شبکه و حل دقیق در $y = ۳$.



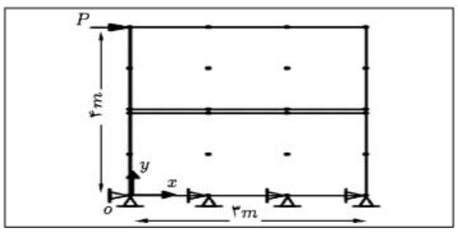

شکل ۴. مقایسه‌ی روش بدون شبکه و حل دقیق در $y = ۱$.




شکل ۷. مقایسه‌ی روش بدون شبکه و حل دقیق در $y = ۴$.




شکل ۵. مقایسه‌ی روش بدون شبکه و حل دقیق در $y = ۲$.




شکل ۸. دو بلوک سنگی که توسط یک درزه بهم مرتبط‌اند.

۴۴ سلول است. حوزه‌ی تأثیر برابر ۱٫۹۵۵ و ضریب پنالتی $۱e + ۵$ در نظرگرفته شده است. نتایج حاصل در شکل‌های ۳ تا ۷ ارائه شده است. در شکل‌های ۳ تا ۷ با توجه به این که بار به شکل سهمی و قائم است، تغییر مکان قائم تیر برای گره‌هایی که در $y = ۰$، $y = ۲$، $y = ۳$ و $y = ۴$ قرارگرفته‌اند، آمده است.

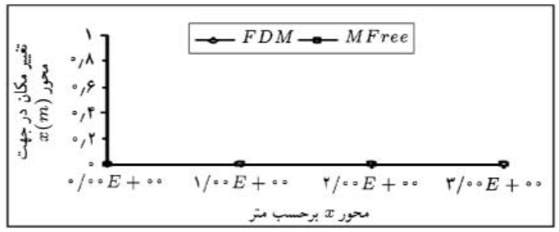
همان‌طورکه مشاهده می‌شود مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل دقیق و روش بدون شبکه تطابق بسیار خوبی دارند که نشان‌دهنده‌ی قابلیت خوب روش بدون شبکه است.

**مثال ۲.** در این مثال یک توده‌ی سنگی درزه‌دار که در معرض بار افقی است بررسی می‌شود (شکل ۸). ارتفاع هر بلوک سنگی ۲ متر و عرض آن ۳ متر در نظرگرفته شده است.

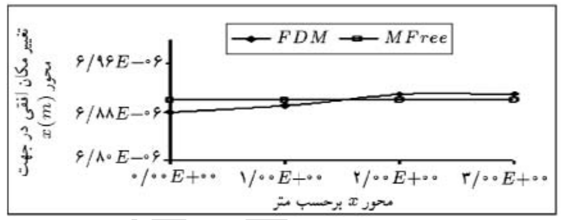
سختی‌های برشی و عمودی برابر $۰/۵e۸$ پاسکال بر متر است. نسبت پواسون و مدول کشسانی سنگ، به‌ترتیب ۰٫۳ و $۲e۱۰$ پاسکال در نظرگرفته شده است. نیروی افقی وارده برابر ۱۰۰۰ نیوتن، تعداد سلول‌های هر بلوک $(۲ \times ۲)$، و تعداد کل گره‌ها برابر ۲۴ گره است. تابع وزن، یک چندجمله‌یی درجه سه است و شعاع مؤثر برابر ۱٫۵ در نظرگرفته شده است. مسئله در حالت کرنش مسطح حل شده است و ضریب پنالتی برابر $E$۱۰۰۰ است. همچنین این مسئله با روش عددی تفاضل محدود حل شده است. نتایج حاصله از روش گالرکین بدون شبکه و تفاضل محدود در شکل‌های ۹ تا ۱۲ مقایسه شده‌اند. در این شکل‌ها با توجه به افقی بودن بارگذاری، تغییر مکان افقی برای گره‌هایی که در $y = ۰$، $y = ۲$، $y = ۳$ و $y = ۴$ قرار دارند، رسم شده است. اشکال رسم شده نشان‌دهنده‌ی تطابق خوب دو روش تفاضل محدود و بدون شبکه است، اما با توجه به این که حل دقیق چنین مسئله‌یی در دسترس نیست، نمی‌توان قضاوت دقیقی نسبت به صحیح‌تر بودن هر کدام از روش‌ها داشت. شاید با توجه به مثال ۱ که در آن نتایج حاصل از روش بدون شبکه دقیقاً بر نتایج حاصل از حل دقیق منطبق است، بتوان با حسن نظر بیشتری به روش گالرکین بدون شبکه، نگاه کرد. همچنین برای به‌دست آوردن نتایج در روش بدون شبکه زمان کم‌تری نسبت به روش تفاضل محدود صرف شده است؛ به‌طوری که این زمان برای روش بدون شبکه ۰٫۴۲ ثانیه و برای روش تفاضل محدود ۲۲ ثانیه است.

براساس اطلاعات به‌دست آمده، اختلاف زمانی دو روش قابل توجه است که علت آن را می‌توان به زمان‌بر بودن روش تفاضل محدود برای به صفر نزدیک کردن نیروهای نامتعادل نسبت داد.

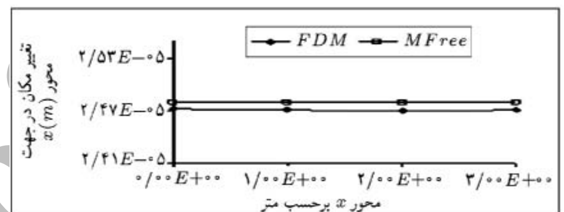
**مثال ۳.** در این مثال یک توده‌ی سنگی درزه‌دار که در معرض بار افقی ۱۰۰٬۰۰۰ نیوتنی است، بررسی می‌شود (شکل ۱۳).



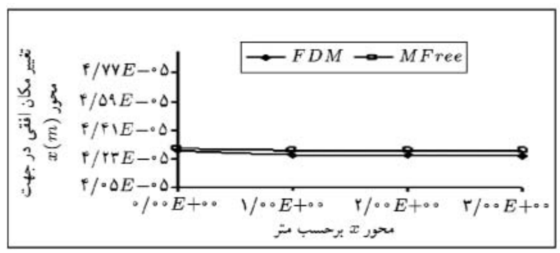

شکل ۹. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=0$.



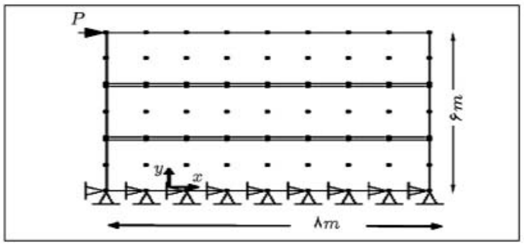

شکل ۱۰. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=2$.



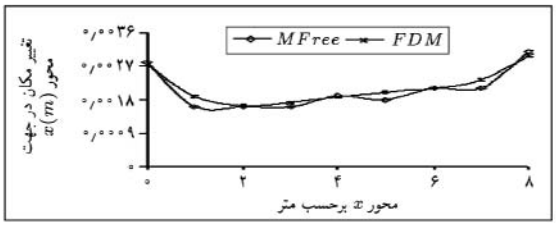

شکل ۱۱. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=3$.



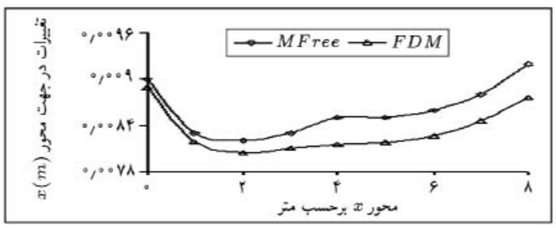

شکل ۱۲. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=4$.



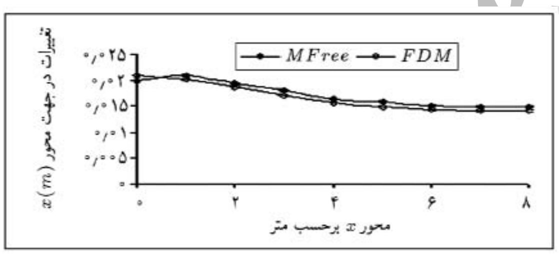

شکل ۱۳. سه بلوک سنگی که توسط دو درزه بهم مرتبط‌اند.




شکل ۱۴. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=1$.




شکل ۱۵. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=3$.




شکل ۱۶. تغییر مکان در راستای محور $x$ در $y=5$.

درزه‌های این توده‌ی سنگی دارای چسبندگی ۲۵ کیلو پاسکال است و زاویه‌ی اصطکاک داخلی و زاویه‌ی انبساط هر دو برابر صفر درجه فرض شده است. ارتفاع هر بلوک سنگی ۲ متر و طول آن ۸ متر در نظرگرفته شده است. سختی‌های برشی و عمودی برابر $0{,}5e8$ پاسکال بر متر است. نسبت پواسون و مدول کشسانی سنگ، به‌ترتیب ۰٫۳ و $2e7$ پاسکال است. تعداد کل گره‌ها برابر ۸۱ گره است. تابع وزن یک چندجمله‌یی درجه سه است و شعاع مؤثر آن برابر ۱٫۴۲ در نظر گرفته شده است.

مسئله در حالت کرنش مسطح حل شده است و ضریب پنالتی برابر $E$۱۰۰٫۰۰۰ است. این مسئله با روش عددی تفاضل محدود نیز حل شده است. نتایج حاصل از حل به‌روش بدون شبکه و به‌روش تفاضل محدود به‌خوبی با هم تطابق دارند. مقایسه‌ی نتایج یادشده در شکل‌های ۱۴ تا ۱۶ آمده است. در این شکل‌ها تغییر مکان افقی گره‌هایی که در $y=1$، $y=3$ و $y=5$ قرار دارند، به‌ترتیب رسم شده است.

برای به‌دست آوردن نتایج در روش بدون شبکه زمان کم‌تری نسبت به‌روش تفاضل محدود صرف شده است؛ به‌طوری که این زمان برای روش بدون شبکه ۱٫۲۳ ثانیه و برای روش تفاضل محدود ۴۳ ثانیه است. علت اختلاف زیاد زمانی این دو روش را نیز می‌توان به زمان‌بر بودن روش تفاضل محدود برای به صفر نزدیک‌کردن نیروهای نامتعادل دانست.

## ۸. نتیجه‌گیری

تحلیل توده‌های سنگی درزه‌دار با استفاده از روش بدون شبکه علاوه بر این‌که می‌تواند نتایج قابل قبولی در برداشته باشد راه‌گشای مناسبی برای رفع مشکلات تحلیل با استفاده از روش‌های مبتنی بر شبکه است. در این نوشتار فرمول‌بندی روش بدون شبکه برای محیط‌های درزه‌دار در حالت کشسانی و خمیری آمده است که کاری نو و جدید است و در این رابطه، مثال‌های حل شده نشان‌گر نتایج قابل قبولی هستند. همچنین زمان کم‌تری برای محاسبه لازم است و اگر تغییری در مسیر درزه‌ها پیش آید نیازی به انطباق دوباره‌ی شبکه بر درزه، همانند روش‌های مبتنی بر شبکه نیست.

## پانوشت

1. bad geometry
2. finite element method
3. finite difference method
4. joint element
5. boundary element
6. discrete element
7. discontinuous deformation analysis
8. rigid finite element
9. mesh
10. arbitrary lagrangian-eulerian
11. T.-P. Fries and H.-G. Matthies
12. smoothed particle hydrodynamics
13. diffuse element method
14. element free galerkin
15. least squares meshfree method
16. meshfree local petrov galerkin
17. local boundary integral equation
18. partition of unity method
19. hp clouds
20. natural element method
21. meshless finite element method
22. reproducing kernel element method
23. moving least squares approximation
24. Basis Functions
25. variational principles
26. moment matrix
27. kronecker delta
28. patton
29. cubicspline

## منابع


1. Gudehus G., Finite Elements in Geomechanics, John Wiley and Sons, New York (1979).
2. Cundall P. A., "Explicit finite difference method in geomechanics", *Numerical Methods in Engineering*, **1**, pp. 132-150 (1976).
3. Goodman R. E., Taylor R. L. and Brekke T. L., "A model for the mechanics of jointed rock", *ASCE J. of the soil Mech. Division*, **94**, pp. 637-659 (1968).
4. Cruse T. A., "Two-dimensional BEM fracture mechanics analysis", *Appl Math. Modelling*, **2**, pp. 287-293 (1978).
5. Cundall P. A., "A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock system", Proceedings of Symposium on Rock Fracture(ISRM), Nancy (1971).
6. Shi G. H. and Goodman R. E., "Discontinuous deformation analysis", Proceedings of $25^{th}$ U. S. Symposium on Rock Mechanics, pp. 269-277 (1984).
7. Qian L. X. and Zhang X., "Rigid finite element method and its applications in engineering", *Acta Mechanica Sinica*, **11**(1), pp. 44-50 (1995).
8. Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M. and Krysl P., "Meshless method: An overview and recent developments", *Comput. Method Appl. Mech. Engrg*, **139**, pp. 3-47 (1996).
9. Noh, WF. CEL., "A Time- Dependent Two - Space - Dimensional Coupled Eulerian-Lagrangian Code", In Methods in Computational physics, **3,** Alder B, Fernbach S, Rotenberg M (eds). Academic Press: New York (1964).
10. FriesThomas-Peter, Matthies Hermann -Georg, Classification and Overview of Meshfree Methods, Braunschweig Institut für Wissenschaftliches Rechnen Technische Universität Braunschweig (2004).
11. Belytschko T., Lu YY. and Gu L., "Element-Free Galerkin Method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pp. 229-256 (1994).
12. Zhang X. and Lu MW., "Block-Interfaces Model for Nonlinear Numerical Simulations of rock Structures", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **35** (7), pp. 983-990 (1998).
13. Liu G. R., Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method, Florida, CRC Press, 171 (2002).
14. فخیمی، احمدعلی. تئوری و راهنمای نرم‌افزار CA۲، مرکز تحقیقات ساختمان و مسکن، نشریه شماره ۲۶۲، تهران، (۱۳۷۶).
15. Hoek, E., Rock Engineering, www. rocscience. com/hoek (2006).
16. Chen, W.F., "Limit analysis and soil plasticity"", American Elsevier Publishing Company, INC., New York (1975).
17. Timoshenko Sp., Goodier JN, Theory of Elasticity, New York, McGraw-Hill (1970).