

تحلیل ارجاعی- خمیری خاک‌های مسلح با استفاده از روش درون‌یابی نقطه‌بی

سید محمد بینش (استادیار)

بخش مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

نادر هاق (استاد)

ارسلان قهرمانی (استاد)

بردیس دانشکده‌های مهندسی، بخش مهندسی راه و ساختمان، دانشگاه شیراز

در این نوشتار روش تقویت شده درون‌یابی نقطه‌بی با توابع شعاعی^۱ (RPIM) برای تحلیل ارجاعی- خمیری^۲ خاک‌های مسلح مورد استفاده قرار گرفته است. تقویت روش بواسیله کثیرالجمله‌بی‌ها باعث افزایش دقت حل و قدرت بازتولید^۳ روش می‌شود. در تحلیل حاضر خاک مسلح به سه قسمت مجزای خاک، مسلح کننده و لایه واسطه^۴ تقسیک شده و در هر قسمت میدان جابجایی بر اساس روش RPIM تشکیل شده است. سیستم نهایی معادلات از جایگذاری میدان جابجایی تولید شده در فرم ضعیف^۵ معادلات خاک‌به بدست می‌آید. در این نوشتار رفتار خاک، مسلح کننده‌ها و لایه واسطه به صورت ارجاعی- خمیری کامل در نظر گرفته شده است. همچنین با به کار بردن منهوم المان رایط، امکان شبیه سازی لغزش در لایه واسطه فراهم شده است. بر اساس روابط بدست آمده، یک برنامه رایانه‌بی تهیه شده است و با حل چند مثال در انتها نوشتار عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفته است.

binesh@sutech.ac.ir
nhataf@shirazu.ac.ir
ghahrama@shirazu.ac.ir

واژگان کلیدی: روش درون‌یابی نقطه‌بی، خاک مسلح.

مقدمه

استفاده از مصالح مسلح کننده نظری^۶ و سیستمیک^۷ برای تخمین موضعی بر روی نقاط، شاخه‌ی جدیدی از روش‌های بدون شبکه را به وجود آورده‌همچنین با معرفی روش تقریب کمینه‌ی مربعات متوجه^۸ روش نایپولز^۹ یا نام روش بدون المان گالرکین^۹ بهبود بخشیده شد.^[۱] پژوهشگران بسیاری روش‌های مختلف بدون شبکه را نظری روش ابر محدود^[۱۰]،^[۱۱] روش ذره‌بی با هسته‌ی بازتولیدکننده^[۱۱]،^[۱۲] روش درون‌یابی نقطه‌بی^[۱۲] و... معرفی کرده‌اند. ویژگی اصلی این روش‌ها بی‌بنایی به شبکه به صورت مرسوم است. پژوهش‌های بسیاری در مورد کاربرد روش‌های بدون شبکه در حوزه‌های مختلف علمی انجام شده است که تعداد محدودی از آن‌ها با علوم مهندسی^{۱۳} نظریک مرتبط است. در این زمینه می‌توان به تحقیقاتی چند اشاره کرد برخی با استفاده از روش بدون المان گالرکین به تحلیل دو بعدی مدل سنگ‌های درزه دار پرداخته‌اند.^[۱۴] برخی نیز روش ژانگ را با استفاده از روش پناشی برای رفتار ارجاعی- خمیری درزه‌ها گسترش داده‌اند.^[۱۵] همچنین در مطالعه‌های مختلف: از روش درون‌یابی نقطه‌بی برای مدل سازی فرایند تحکیم^[۱۶] از روش بدون شبکه در تحلیل نشت با سطح آزاد^[۱۷] از روش نقطه‌ی مادی^[۱۸] در بررسی مسائل با تغییر فرم‌های بزرگ در مکانیک خاک^[۱۹] و از روش درون‌یابی نقطه‌بی در تحلیل ارجاعی خاک‌های مسلح استفاده شده است.^[۲۰]

در این نوشتار سعی بر گسترش تحلیل ارجاعی- خمیری خاک‌های مسلح و شبیه‌سازی لغزش لایه‌ی واسطه^{۲۱} است. در ادامه‌ی این نوشتار ابتدا روش درون‌یابی

استفاده از مصالح مسلح کننده نظری^۶ و سیستمیک^۷ برای بهبود مقاومت و پایداری سازه‌های زئوتکنیکی در حال افزایش است. حال آنکه بررسی رفتار سازه‌های خاکی مسلح از طریق مطالعه‌های صحرابی و با مدل سازی‌های ازماشگاهی معمولاً فریبندی پژوهی‌بند و زمان بر است. لذا اغلب از روش‌های تحلیل عددی برای پیش‌بینی خصوصیات بار- تغییر فرم سازه‌های خاکی مسلح استفاده می‌شود. یکی از متدالوں ترین روش‌های تحلیل عددی خاک‌های مسلح، روش المان محدود است. هر چند که روش المان محدود به صورت وسیعی استفاده می‌شود اما دارای نواقصی نظری ناتوانی در مدل سازی دو بعدی مسلح کننده‌ها، نتیجه‌گیری نادرست در تغییر فرم‌های بزرگ و یا گسترشگری تنش‌ها در مز المانها است. علت عدمه‌ی این مشکلات در روش المان محدود استفاده از شبکه بندی برای انجام تحلیل است. بنابراین دسته‌ی دیگری از روش‌های تحلیل عددی که به شبکه بندی^{۲۲} و استگی ندارند، برای تحلیل خاک‌های مسلح مورد استفاده قرار گرفت. این دسته‌ی جدید از روش‌های عددی را کلاً روش‌های بدون شبکه می‌نامند.

روش‌های بدون شبکه اولین بار در سال ۱۹۷۷ با نام ذرات هیدرودینامیکی صاف^{۲۳} برای بررسی پدیده‌های فضایی استفاده شد.^[۲۴] برخی از پژوهشگران این روش را برای حل مسائل مکانیک جامدات بسط دادند^[۲۵] و برخی نیز با استفاده

تاریخ: دریافت ۲۳، ۱۳۸۶، ۱۰، ۳۲۰، ۱۳۸۷/۵/۸، پذیرش ۱۳۸۷/۵/۸.

$$a = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}^T \quad (4)$$

$$P_Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 & \dots & p_n(X_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 & \dots & p_n(X_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 & \dots & p_n(X_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_ny_n & \dots & p_n(X_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

با فرض وارون‌پذیری ماتریس P_Q , جواب‌های منحصر به فرد ماتریس a را می‌توان از رابطه‌ی ۶ بدست آورد:

$$a = P_Q^{-1} U_S \quad (6)$$

از جای‌گذاری معادله‌ی ۶ در معادله‌ی ۱ داریم:

$$u(X) = P^T(X) P_Q^{-1} U_S = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i = \Phi^T(X) U_S \quad (7)$$

که $\Phi^T(X)$ بردار توابع شکل روش PIM است.

$$\Phi^T(X) = \{\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_n(X)\} \quad (8)$$

توابع شکل به دست آمده دارای خاصیت دلتای کرانکر^{۱۷} هستند که باعث تسهیل اعمال شرایط مرزی اساسی^{۱۸} همانند روش المان است.

روش درون‌بابی نقطه‌ی بی با استفاده از توابع اساسی کثیرالجمله‌ی، روشی دقیق و ساده است. اما انتخاب نامناسب توابع اساسی و یا آرایش بدگره‌های موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقطه‌ی X باعث می‌شود که ماتریس P_Q منفرد^{۱۹} شود و محاسبه‌ی ماتریس P_Q^{-1} ممکن نباشد. برای رفع این مشکل پیشنهادهای متغیری ارائه شده است.^[۱۵] یکی از کارآمدترین راه حل‌ها استفاده از توابع اساسی شعاعی است. کاربرد این توابع وارون‌پذیری ماتریس P_Q را تضمین می‌کند.

تابع مختلفی از توابع شعاعی مانند تابع مولتی کوادراتیک^{۲۰}، تابع گاوین^{۲۱}، تابع لگاریتمی و... به عنوان تابع اساسی استفاده می‌شوند. در این نوشتار تابع مولتی کوادراتیک (رابطه‌ی ۹) استفاده شده است:

$$R_i(X) = [r_i + c^T]^q \quad (9)$$

r_i فاصله‌ی بین گردهی مورد نظر X و گردهی میدانی X_i است که از رابطه‌ی ۱۰

تعیین می‌شود:

$$r_i = [(x - x_i)^T + (y - y_i)^T]^{1/q} \quad (10)$$

پaramترهای c و q ثابت‌هایی هستند که براساس نوع مسئله‌ی مورد بررسی تعیین می‌شوند. در مسائل مکانیک جامدات، مقاییر $1/42$ و $0/98$ به ترتیب برای c و q پیشنهاد شده است.^[۱۵] در این نوشتار نیز اعداد مذکور استفاده شده است.

برای ارضا شرایط سازگاری^{۲۲} و افزایش قدرت بازتولید روش تخمین، علاوه‌بر توابع شعاعی از کثیرالجمله‌یها نیز استفاده می‌شود. از این‌رو می‌توان تابع پیوسته‌ی (X) را با استفاده از توابع اساسی شعاعی و کثیرالجمله‌ی به صورت رابطه‌ی ۱۱ تخمین زد:

$$u(X) = \sum_i^n R_i(X) a_i + \sum_j^m p_j(X) b_j = R^T(X) a + P^T(X) b \quad (11)$$

نقشه‌ی با توابع اساسی کثیرالجمله‌ی و شعاعی شرح داده می‌شود و نحوه‌ی تقویت توابع اساسی شعاعی با کثیرالجمله‌ها بیان می‌شود. سپس معادله‌های لازم برای حل مسئله‌های خاک‌های مسلح در حالت ارجاعی-خميری و اصول تغییرات محیط‌های گستته مطرح شده است. سپس نحوه‌ی حل مسئله با جزئیات ارائه و در پایان با حل چند مثال صحبت عملکرد نرم‌افزار تهیه شده بر اساس تئوری ذکر شده بررسی شده است.

روش درون‌بابی نقطه‌ی بی

در بسیاری از روش‌های عددی نظیر المان محدود، برای درون‌بابی از کثیرالجمله‌ها بهمنزله‌ی توابع اساسی برای تشکیل تابع شکل استفاده می‌شود. در روش المان محدود این درون‌بابی براساس المان‌هایی است که بدون هیچ‌گونه گستینگی و یا هم‌پوشانی در تماس با یکدیگر قرار گرفته‌اند. حال آنکه در روش درون‌بابی نقطه‌ی بی، درون‌بابی برای یک نقطه‌ی دسته‌ی کوچکی از گره‌ها که در همسایگی آن نقطه قرار گرفته‌اند و اصطلاحاً در داخل دامنه‌ی تکیه‌گاهی محلی^{۱۵} نقطه‌ی موردنظر (شکل ۱) قرار می‌کرند انجام می‌شود و این دامنه‌های تکیه‌گاهی می‌توانند با یکدیگر هم‌پوشانی نیز داشته باشند.

تابع پیوسته‌ی $u(X)$ (مثلاً تابع جابجایی) را درنظر می‌گیریم. این تابع را در محدوده‌ی نقطه‌ی X می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱ تخمین زد:

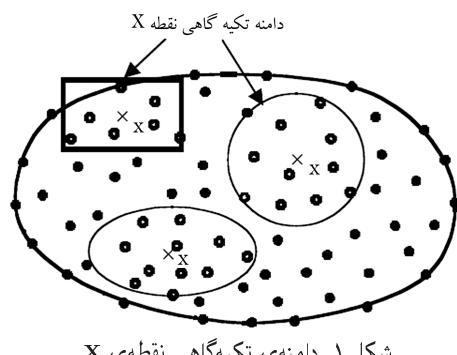
$$u(X) = \sum_{i=1}^n p_i(X) a_i = P^T a \quad (11)$$

که در آن، $p_i(X)$ تابع کثیرالجمله‌ی از متغیر فضایی $X = [x, y]^T$ ، n تعداد نقاط گره‌ی در دامنه‌ی تکیه‌گاهی X و a_i ضریب‌های نظیر هر تابع مولتی هستند و با اعمال جابجایی‌های گره‌ی بر تابع (X) در نقاط گره‌ی موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی می‌توان نوشت:

$$U_S = P_Q a \quad (12)$$

که U_S بردار جابجایی‌های گره‌ی، a بردار ضرایب مجھول و P_Q ماتریس گستاور^{۱۶} کثیرالجمله‌ی است.

$$U_S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}^T \quad (13)$$



شکل ۱. دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقطه‌ی X .

لذا از معادله‌ی ۲۲ رابطه‌ی ۲۵ به دست می‌آید:

$$a_0 = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = G^{-1} \bar{U}_S \quad (25)$$

و از تلفیق معادله‌های ۱۱ و ۲۵ رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید:

$$u(X) = \{R^T(X) P^T(X)\} G^{-1} \bar{U}_S = \bar{\Phi}^T(X) \bar{U}_S \quad (26)$$

که $\bar{\Phi}^T$ در رابطه‌ی ۲۶ از رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید:

$$\bar{\Phi}^T = \{\phi_1(X) \phi_2(X) \dots \phi_n(X) \phi_{n+1}(X) \dots \phi_{n+m}(X)\} \quad (27)$$

و می‌توان بردار توابع شکل را به صورت رابطه‌ی ۲۸ نوشت:

$$\Phi^T = \{\phi_1(X) \phi_2(X) \dots \phi_n(X)\} \quad (28)$$

تحلیل خاک مسلح

دو دیدگاه در مورد تحلیل عددی سازه‌های مسلح وجود دارد. دیدگاه اول توصیف ترکیبی ۲۳ محیط است که در آن سیستم مسلح شده به صورت ماده‌ی همگن و غیرهمسان ۲۴ معادل سازی می‌شود. در این حالت محیط ترکیبی خصوصیات اجزاء تشکیل‌دهنده و اندرکنشین بین آنها را انعکاس می‌دهد. دیدگاه دوم توصیف مجرای ۲۵ محیط است که در آن هر یک از اجزاء و اندرکنشین بین آنها به صورت جداگانه بررسی می‌شود. بدین ترتیب سیستم خاک مسلح به ۳ بخش مجرای خاک، مسلح‌کننده و لایه‌ی واسطه‌ی بین آنها تقسیم می‌شود. در این نوشته از دیدگاه دوم برای توصیف محیط خاک مسلح استفاده شده است. در ادامه‌ی بحث ابتدا معادله‌های کلی برای مسائل صفحه‌ی با مقادیر مرزی برای ۳ قسمت مجرای خاک مسلح (خاک، مسلح کننده و لایه‌ی واسطه‌ی) بیان می‌شود، سپس اصول تغییراتی برای محیط‌های گسسته با استفاده از تابع پتانسیل مطرح می‌شود و سیستم مجرای معادله‌ها برای تحلیل خاک مسلح به دست می‌آید.

معادله‌های کلی برای مسائل صفحه‌ی

معادله‌های تعادل استاتیکی

برای محدوده‌ی Ω از یک جسم جامد، معادله‌ی تعادل استاتیکی به صورت رابطه‌ی ۲۹ می‌شود:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (29)$$

با در نظر گرفتن شرایط کرشن صفحه‌ی، تانسور تنش از رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید:

$$\sigma^T = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy}\} \quad (30)$$

همچنین عملگر L به صورت رابطه‌ی ۳۱ و بردار نیروی حجمی به صورت رابطه‌ی ۳۲ بیان می‌شود:

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$b^T = \{b_x b_y b_z\} \quad (32)$$

P_j و R_i به ترتیب توابع اساسی شعاعی و کثیرالجمله‌ی از X ، n تعداد نقاط گردبی در دامنه‌ی تکیه‌گاهی محلی نقطه‌ی X ، m تعداد عبارت‌های کثیرالجمله‌ی مورداستفاده به عنوان توابع اساسی و a_i و b_j به ترتیب ضرایب مرتبط با R_i و P_j هستند. رابطه‌های ۱۲ تا ۱۵ برای فرم برداری هستند:

$$R(X) = [R_1(X) R_2(X) R_3(X) \dots R_n(X)]^T \quad (12)$$

$$P(X) = [P_1(X) P_2(X) P_3(X) \dots P_m(X)]^T \quad (13)$$

$$a = [a_1 a_2 a_3 \dots a_n]^T \quad (14)$$

$$b = [b_1 b_2 b_3 \dots b_m]^T \quad (15)$$

برای تعیین مقادیر a و b نیاز به $m+n$ معادله از طریق اعمال مقادیر گرهی بر تابع $u(X)$ به صورت رابطه‌ی ۱۶ تولید می‌شود:

$$u_k = u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n R_i(x_k, y_k) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x_k, y_k) b_j \quad (16)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

یا در فرم ماتریسی رابطه‌ی ۱۷ داریم:

$$U_S = R_Q a + P_m b \quad (17)$$

$$R_Q = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (18)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} p_1(x_1, y_1) & p_2(x_1, y_1) & \dots & p_m(x_1, y_1) \\ p_1(x_2, y_2) & p_2(x_2, y_2) & \dots & p_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n, y_n) & p_2(x_n, y_n) & \dots & p_m(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (19)$$

معادله‌ی باقیمانده با اعمال شرایط یکتاپی جواب از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i, y_i) a_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

یا در فرم ماتریسی رابطه‌ی ۲۱ داریم:

$$P_m^T a = 0 \quad (21)$$

و از تلفیق معادله‌های ۱۷ و ۲۱ رابطه‌ی ۲۲ به دست می‌آید:

$$\bar{U}_S = \left\{ \begin{array}{c} U_S \\ \vdots \end{array} \right\} \underbrace{\begin{bmatrix} R_Q & P_m \\ P_m^T & \ddots \end{bmatrix}}_G \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right\} = Ga. \quad (22)$$

در رابطه‌ی ۲۲ مقدار a و \bar{U}_S از رابطه‌های ۲۳ و ۲۴ به دست می‌آید:

$$a_0 = \{a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m\} \quad (23)$$

$$\bar{U}_S = \{u_1 u_2 \dots u_n \circ \circ \dots \circ\} \quad (24)$$

لایه‌ی واسطه (h) نسبت به طول آن (L) بسیار ناچیز است، می‌توان کرنش در جهت n را ثابت فرض کرد و جابجایی نسبی نقطه‌ی P را براساس جابجایی نسبی نقاط A و B بر روی صفحات بالا و پایین تعریف کرد. بنابراین رابطه‌ی 40 به دست می‌آید:

$$\delta = [\delta_s \ \delta_n]^T = \bar{U}_B - \bar{U}_A \quad (40)$$

که در آن، δ_s و δ_n به ترتیب جابجایی‌های نسبی عمودی و برشی در نقطه‌ی P ، \bar{U}_B و \bar{U}_A به ترتیب بردارهای جابجایی نقاط A و B در مختصات محلی $n-s$ هستند. با استفاده از ماتریس انتقال مختصات C می‌توان بردارهای جابجایی را در مختصات کلی به صورت رابطه‌ی 41 تعریف کرد:

$$U = C\bar{U} \quad (41)$$

از طرف دیگر می‌توان جابجایی هر یک از نقاط A و B را به جابجایی‌های نقاط موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی آنها مرتبط ساخت (شکل ۲). همان‌طورکه مشاهده می‌شود دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقاط A و B در محل لایه‌ی واسطه قطع شده‌اند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{U}_A &= \Phi_A \bar{u}_{gA} \\ \bar{U}_B &= \Phi_B \bar{u}_{gB} \end{aligned} \quad (42)$$

در رابطه‌ی 42 و Φ_A و Φ_B به ترتیب ماتریس‌های توابع شکل برای نقاط موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقاط A و B هستند که از روش RBPIM بدست می‌آیند و \bar{u}_{gA} و \bar{u}_{gB} به ترتیب بردارهای جابجایی گره‌ها در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقاط A و B هستند. با درنظر گرفتن رابطه‌های 40 تا 42 می‌توان رابطه‌ی 43 را نوشت:

$$\delta = B_i U_i \quad (43)$$

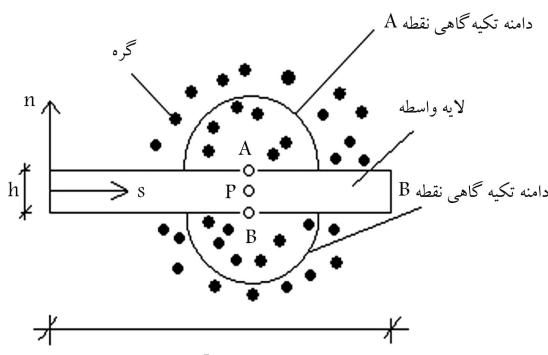
و U_i در آن به ترتیب از رابطه‌های 44 و 45 بدست می‌آیند:

$$B_i = [-C\Phi_A \ C\Phi_B] \quad (44)$$

$$U_i^T = [\bar{u}_{gA}^T \ \bar{u}_{gB}^T] \quad (45)$$

حال می‌توان تنسور کرنش در لایه‌ی واسطه را به صورت رابطه‌ی 46 به گونه‌ی تعریف کرد که فقط دارای دو مؤلفه‌ی کرنش برشی (γ_{ns}) و کرنش عمودی (ε_n) است:

$$\varepsilon_i = \{\gamma_{ns} \ \varepsilon_n\} \quad (46)$$



شکل ۲. مدل‌سازی لایه‌ی واسطه.

این تذکر لازم است که با وجود شرایط کرنش صفحه‌یی، مؤلفه‌ی عمودی بر صفحه‌ی n نیز برای استفاده در رابطه‌های تحلیل خمیری، در تنسور تنش در نظر گرفته شده است.

رابطه‌های کرنش-جابجایی

خاک و مسلح کننده‌ها

با توجه به اینکه در روش بدون شبکه هیچ‌گونه وابستگی بین توابع شکل و شبکه‌بندی وجود ندارد، می‌توان برخلاف برنامه‌های المان محدود، مسلح کننده‌ها را به صورت دو بعدی شبیه‌سازی کرد؛ لذا در هر نقطه‌ی دلخواه از محیط‌های خاک یا مسلح کننده، رابطه‌ی کرنش-جابجایی به صورت رابطه‌ی 33 است:

$$\varepsilon = \Delta^T u \quad (33)$$

که برای هماهنگی با تنسور تنش، تنسور کرنش به صورت رابطه‌ی 34 عملگر Δ نیز با رابطه‌ی 35 و جابجایی u با رابطه‌ی 36 تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy}\} \quad (34)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$u^T = \{u \ v\} \quad (36)$$

با استفاده از رابطه‌های 7 و 33 می‌توان رابطه‌ی ماتریسی کرنش-جابجایی را در هر دامنه‌ی تکیه‌گاهی به صورت رابطه‌ی 37 ارائه داد:

$$\varepsilon = B U_S \quad (37)$$

که در آن، U_S همان‌طورکه قبلاً اشاره شد بردار درجات آزادی گره‌های موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی است و ماتریس B با رابطه‌ی 38 محاسبه می‌شود:

$$B = \left[\tilde{B}_{i1} \ \tilde{B}_{i2} \ \dots \ \tilde{B}_{ik} \ \dots \ \tilde{B}_{in} \right] \quad (38)$$

\tilde{B}_{ik} در رابطه‌ی 38 از رابطه‌ی 39 به دست می‌آید:

$$\tilde{B}_{ik} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial z} \end{array} \right]^T \quad (39)$$

و $\phi_{ik}(x_i)$ نشان‌دهنده‌ی مقدارتابع شکل گره‌ی k ام در گره‌ی i ام از دامنه‌ی تکیه‌گاهی است.

لایه‌ی واسطه

محدوده‌ی تراس بین دو ماده با جنس‌های متفاوت را لایه‌ی واسطه می‌گوییم. در این نوشتار برای شبیه‌سازی لایه‌ی واسطه از مفهوم المان‌های رابطه 26 استفاده شده است. در این مدل‌سازی لایه‌ی واسطه به صورت دو صفحه‌ی موازی در نظر گرفته می‌شود که فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر ناچیز است و فشرهایی مابین دو صفحه در مقابل حرکت‌های مماسی و عمودی آنها نسبت به هم مقاومت می‌کنند. سختی این فنرها در واحد سطح (ضرایب سختی) در جهت‌های عمودی 27 و برشی به ترتیب k_s و k_n نشان داده می‌شوند.

برای بدست آوردن رابطه‌ی کرنش-جابجایی در لایه‌ی واسطه، مطابق شکل ۲ نقطه‌یی مانند P بین صفحات بالایی و پایینی در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که عرض

سپس می‌توان رابطه‌ی ۴۶ را به صورت رابطه‌ی ۴۷ نوشت:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} \delta \quad (47)$$

و با توجه به معادله‌های ۴۳ و ۴۷ رابطه‌ی کرنش-جابجایی در لایه‌ی واسطه به صورت رابطه‌ی ۴۸ تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} B_i U_i \quad (48)$$

همچنین τ و σ_n در رابطه‌ی ۵۵ به ترتیب تنش برشی و عتمدی در لایه‌ی واسطه هستند. در فتار خمیری با درنظرگرفتن توابع تسلیم و پتانسیل موهر-کولمب (رابطه‌های ۵۷ و ۵۸):

$$F = \tau - \sigma_n \tan \Theta \quad (57)$$

$$P = \tau - \sigma_n \tan \psi \quad (58)$$

و با استفاده از رابطه‌ی ۵۱ می‌توان رابطه‌ی تنش-کرنش را به صورت رابطه‌ی ۵۹ داشت:

$$d\sigma_i = D_{epi} d\varepsilon_i \quad (59)$$

و نیز D_{epi} در رابطه‌ی ۵۹ به صورت رابطه‌ی ۶۰ تعریف می‌شود و sgn تابع علامت است.

$$D_{epi} = \frac{1}{k_s + k_n \tan \Theta \tan \psi} \begin{bmatrix} k_s k_n \tan \Theta \tan \psi & k_s \tan \Theta \text{sgn}(\tau) \\ k_n \tan \psi \text{sgn}(\tau) & k_s k_n \end{bmatrix} \quad (60)$$

به طورکلی تابع ۲۱ انرژی کل پتانسیل برای محیط گستته را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۶۱ بیان کرد:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i + \Pi_f \quad (61)$$

Π_e و Π_i در رابطه‌ی ۶۱، به ترتیب انرژی کرنش ارجاعی برای محیط جامد و لایه‌ی واسطه هستند و Π_f انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای خارجی است. این توابع را می‌توان به صورت رابطه‌های ۶۲ تا ۶۴ تعریف کرد:

$$\Pi_e = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (62)$$

$$\Pi_i = \int_{\beta} \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \sigma_i d\beta \quad (63)$$

$$\Pi_f = - \int_{\Gamma} U^T \bar{T} d\Gamma - \iint_{\Omega} U^T b d\Omega \quad (64)$$

در رابطه‌های ۶۲ تا ۶۴، β پارامتر طولی لایه‌ی واسطه، \bar{T} تنش سطحی با مقدار مشخص و Γ است که در طول آن تنش سطحی اعمال می‌شود.

فرم تغییراتی (فرم ضعیف شده) رابطه‌ی ۶۱ را با استفاده از رابطه‌های تنش کرنش می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi = \iint_{\Omega} (\delta \varepsilon)^T D \varepsilon d\Omega + \int_{\beta} (\delta \varepsilon_i)^T D_i \varepsilon d\beta - \iint_{\Omega} (\delta U)^T b d\Omega -$$

$$\int_{\Gamma} (\delta U)^T \bar{T} d\Gamma = 0 \quad (65)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش خاک و مسلح کمندها

رابطه‌ی بین کرنش و تنش در حالت ارجاعی را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۴۹ بیان داشت:

$$\sigma = D_e \varepsilon \quad (49)$$

که با توجه به نحوه‌ی تعریف تانسورهای تنش و کرنش و درنظرگرفتن شرایط کرنش صفحه‌ی داریم:

$$D_e = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & 1 & \frac{v}{1-v} & 0 \\ \frac{v}{1-v} & \frac{v}{1-v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2v}{2(1-v)} \end{bmatrix} \quad (50)$$

در رابطه‌ی ۵۰، مدول ارجاعی و ضریب پواسون است. در تحلیل ارجاعی - خمیری رابطه‌ی تنش-کرنش به صورت رابطه‌ی ۵۱ تعریف می‌شود:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (51)$$

همچنین Dep در رابطه‌ی ۵۱ از رابطه‌ی ۵۲ به دست می‌آید:

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \left\{ \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D_e}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right\}} \quad (52)$$

در این رابطه، F و P به ترتیب تابع تسلیم و پتانسیل هستند. در این نوشتار برای خاک از الگوی خمیری کامل موهر-کولمب ۲۸ استفاده شده و تابع تسلیم به صورت رابطه‌ی ۵۳ است:

$$F = \frac{1}{\varphi} I_1 \sin \Theta + \sqrt{I_1} (\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \Theta) - \xi \cos \Theta \quad (53)$$

در رابطه‌ی ۵۳، I_1 نامتغیر اول تنش، I_2 نامتغیر دوم تنش انحرافی، Θ زاویه‌ی اصطکاک داخلی، θ زاویه‌ی لود ۲۹ و ξ چسبندگی محیط هستند. این تذکر لازم است که در حالت ناهمراه ۳۰ ، می‌توان با جایگزینی زاویه‌ی اصطکاک داخلی با زاویه‌ی اتساع (ψ) تابع پتانسیل P را به دست آورد.

در مورد مسلح کمندها نیز با توجه به صادق بودن رابطه‌های ۵۱ و ۵۲ می‌توان از هر الگوی خمیری دلخواه استفاده کرد.

لایه‌ی واسطه

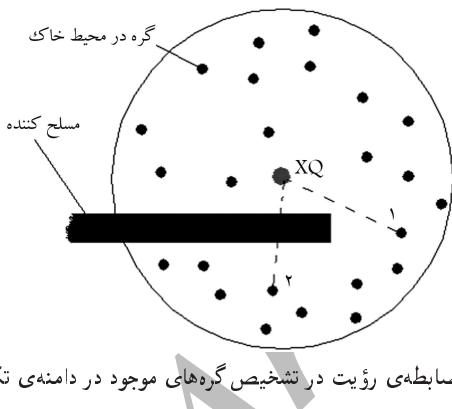
با توجه به نحوه‌ی تعریف تانسور کرنش در لایه‌ی واسطه، رابطه‌ی تنش-کرنش در رفتار ارجاعی به صورت رابطه‌ی ۵۴ تعریف می‌شود:

$$\sigma_i = D_i (h \varepsilon_i) = D_i \delta \quad (54)$$

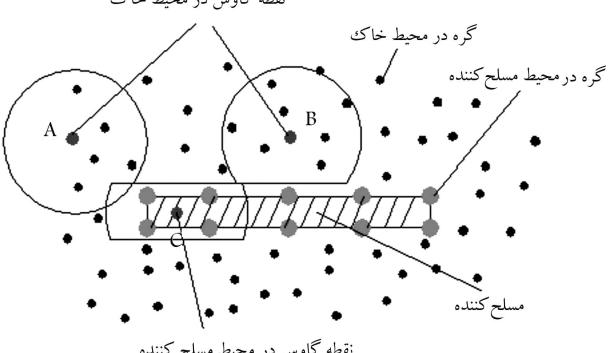
است. در این شرایط از ضابطه‌ی رؤیت^{۳۴} استفاده شده است. بر طبق این ضابطه، گره‌هایی در داخل یک دامنه‌ی تکیه‌گاهی منظور می‌شوند که اگر از مرکز آن دامنه به آن گره خطی وصل شود، خط مذکور محل گستینگی را قطع نکند. مثلاً در شکل ۳، نقطه‌ی ۱ جزء دامنه‌ی تکیه‌گاهی گره‌ی X محسوب می‌شود، حال آنکه نقطه‌ی ۲ جزء این دامنه‌ی تکیه‌گاهی محسوب نمی‌شود.

همچنین باید توجه داشت که دامنه‌های تکیه‌گاهی تشکیل شده به مرکزیت نقاط گاوس موجود در هر محیط، فقط گره‌های همان محیط را شامل می‌شوند، به عبارت دیگر مطابق شکل ۴ دامنه‌های تکیه‌گاهی در محیط خاک گره‌های مسلح‌کننده‌ها شامل نمی‌شوند و برعکس. در این حالت شرایط همسانی^{۳۵} با لایه‌ی واسطه فراهم می‌شود.

پس از ایجاد دامنه‌های تکیه‌گاهی، تابع شکل با استفاده از روش RBPIM تشکیل می‌شوند و ماتریس‌های موردنیاز برای محاسبه‌ی رابطه‌های^{۷۱} و^{۷۲} تعریف می‌شوند. پس از محاسبه‌ی انتگرال‌ها و جمع‌آوری در ماتریس کلی، معادله‌ی^{۷۰} به دست می‌آید. از طریق حل این معادله، می‌توان جابجایی‌های مجھول را تعیین کرد و به تبع آن، در نقاط مختلف به مقادیر تنش و کرنش دست یافت. تا این مرحله محاسبات مربوط به رفتار ارجاعی خاک مسلح به پایان رسیده است. در محاسبات مربوط به رفتار ارجاعی -خییری از روش اصلاح شده نیوتن رافسون^{۳۶} استفاده شده است. از این رو فقط ماتریس سختی ارجاعی استفاده شده است. در این حالت اعمال نیروهای خارجی به صورت مرحله‌ی در آمده است و در هر مرحله با محاسبه‌ی نیروهای نامتوازن^{۳۷} بر اساس تفاضل نیروهای گره‌ی ناشی از تنش داخلی و خارجی، و با کمینه‌سازی آن‌ها با توجه به اصلاح تنش‌های داخلی، روند محاسبات به پیش می‌رود. این تذکر لازم است که برای گذشتمن از هر مرحله به



شکل ۳. ضابطه‌ی رؤیت در تشخیص گره‌های موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی.



شکل ۴. نحوه‌ی قرارگیری گره‌ها در دامنه‌های تکیه‌گاهی مربوط به محیط‌های خاک و مسلح‌کننده.

با استفاده از رابطه‌های تنش‌کرنش می‌توان از معادله‌ی ۶۵ به سیستم معادله‌های مجزا دست یافت. به این ترتیب معادله‌ی ۶۶ به دست می‌آید:

$$KU = F \quad (66)$$

مقدار K و F در معادله‌ی ۶۶ نیز به ترتیب از رابطه‌های ۶۷ و ۶۸ بدست می‌آیند:

$$K = \iint_{\Omega} B^T DB d\Omega + \int_{\beta} B_i^T D_i B_i d\beta \quad (67)$$

$$F = \iint_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi^T \bar{T} d\Gamma \quad (68)$$

و با توجه به نحوه‌ی تعریف بردار b و شرایط کرنش صفحه‌ی، رابطه‌های ۶۹ و ۷۰ به دست می‌آیند:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}_{i1} & \tilde{\Phi}_{i2} & \dots & \tilde{\Phi}_{in} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\tilde{\Phi}_{ik} = \begin{bmatrix} \phi_{ik} & \\ & \ddot{\phi}_{ik} \\ & \ddot{\phi}_{ik} \\ & \ddot{\phi}_{ik} \end{bmatrix} \quad (70)$$

نحوه‌ی حل مسئله با برنامه‌ی رایانه‌ی

در روش بدون شبکه، هندسه‌ی مسئله با گره‌ها تعریف می‌شود. از این رو محیط خاک از طریق گره‌هایی با آرایش منظم یا نامنظم مدل‌سازی می‌شود. درین گره‌های خاک، هر مسلح‌کننده با گره‌هایی که در امتداد دو خط موازی قرار گرفته‌اند تعریف می‌شود. فاصله‌ی این دو خط موازی برابر با ضخامت مسلح‌کننده است. خاک و مسلح‌کننده کاملاً جدا از هم هستند و ارتباط بین آنها توسط لایه‌ی واسطه ایجاد می‌شود. در لایه‌ی واسطه هیچ‌گونه گره‌ی تعریف نمی‌شود و همان‌طور که قبل اشاره شد، رابطه‌های مربوط به لایه‌ی واسطه براساس جابجایی نسبی گره‌های خاک و مسلح‌کننده تعریف می‌شوند.

پس از معرفی هندسه‌ی مسئله، برای هرکدام از اجزاء خاک مسلح (خاک، مسلح‌کننده، لایه‌ی واسطه) شبکه‌ی پس زمینه‌ی^{۳۲} برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در رابطه‌های^{۶۷} و^{۶۸} تشکیل می‌شود. این شبکه‌ها برای محیط خاک به صورت دو بعدی است و برای مسلح‌کننده‌ها و لایه‌ی واسطه با توجه به ضخامت ناچیز آنها، شبکه‌های یک بعدی درنظر گرفته می‌شود. همچنین برای محاسبه‌ی عبارت دوم در رابطه‌ی^{۶۸} در طول مرزی که تنش خارجی اعمال می‌شود نیز یک شبکه‌ی یک بعدی تعریف می‌شود. این تذکر لازم است که برخلاف روش‌های شبکه‌ی، هیچ‌گونه ارتباطی بین شبکه‌ی پس زمینه و تابع شکل گره‌ها وجود ندارد و علت وجودی شبکه‌ی پس زمینه فقط انتگرال‌گیری عددی است. در این نوشتار از روش گاوس^{۳۳} برای انتگرال‌گیری عددی استفاده شده است. پس از معرفی نقاط گاوس، دامنه‌ی تکیه‌گاهی در اطراف هر نقطه درنظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی تکیه‌گاهی می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد. در این نوشتار از دامنه‌های دایره‌ی شکل استفاده شده است. شعاع دامنه‌های تکیه‌گاهی بسته به فاصله‌ی گره‌ها در مسئله‌ی مورد نظر متغیر است. معمولاً نلاش می‌شود که دست کم ۵ گره داخل دامنه‌ی تکیه‌گاهی قرار گیرند. همچنین قرارگرفتن بیش از ۳۰ گره در دامنه‌ی تکیه‌گاهی معمولاً علاوه بر افزایش حجم محاسبات از دقت جواب‌ها می‌کاهد. نکته‌ی^{۳۴} که در مورد تشکیل دامنه‌های تکیه‌گاهی مهم است شکل آن‌ها در محل گستینگی محیط (تقاطع خاک و مسلح‌کننده‌ها)

تفاوت جواب‌ها با حل اولیه برای گره‌های مشخص به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\eta = \left| \frac{\|U_{FEM}^P\| - \|U_{FEM}^F\|}{\|U_{FEM}^F\|} \right| \quad (72)$$

که در آن، U_{FEM}^F به ترتیب بردار جابجایی برای مرحله‌ی P تعداد المان و بردار جابجایی برای مرحله‌ی F با تعداد المان‌های تحلیل اولیه هستند. زمانی که مقادیر η با افزایش تعداد المان‌ها ثابت باقی بماند، می‌توان جواب تحلیل را به عنوان جایگزین حل دقیق در نظر گرفت.

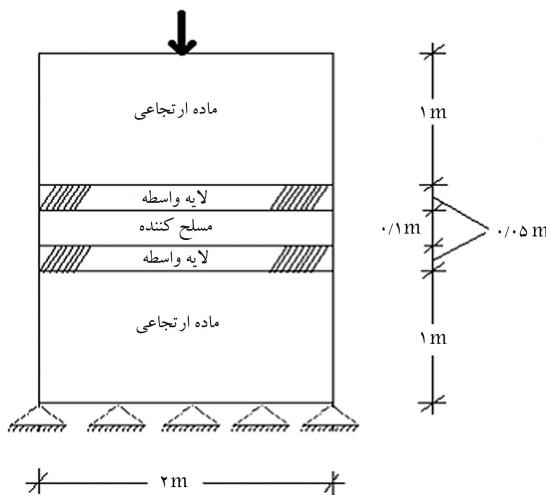
در این مثال، از نرم‌افزار SIGMAW [۱۸] برای تحلیل عددی براساس روش المان محدود استفاده شده است تا با داشتن المان‌های لغزش، به راحتی بتوان لایه‌ی واسطه را مدل‌سازی کرد چراکه شباهت بسیار خوبی با مدل‌سازی در روش بدون شبکه دارد. البته این مورد فقط در تحلیل ارجاعی کاربرد دارد. حل اولیه در این مثال با ۴ المان برای محیط، ۲ المان برای مسلح‌کننده و ۲ المان برای هر لایه‌ی واسطه (شکل ۶) آغاز شد. با افزایش تعداد المان‌ها و مقایسه‌ی جابجایی‌ها با مدل

مرحله‌ی بعد از ضابطه‌ی ۷۱ استفاده شده است که در آن $\|\cdot\|$ معرف نرم اقلیدسی و f_{unb} نیروی گردبی نامتوازن و f_{ext} نیروی گردبی خارجی هستند.

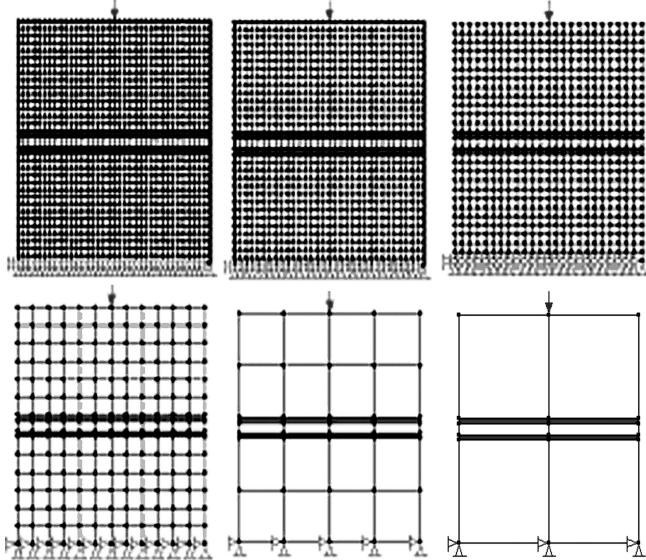
$$\frac{\|f_{unb}\|}{\|f_{ext}\|} < 0.001 \quad (71)$$

نکته‌ی که در تحلیل ارجاعی - خمیری خاک‌های مسلح باید در نظر گرفت آن است که در برخی موارد مانند آزمایش بیرون‌کشیدن^{۲۸} یا در پایداری شبکه‌ی مسلح، امکان لغزش^{۲۹} یا جدایی^{۳۰} مسلح‌کننده‌ها نسبت به خاک اطرافشان وجود دارد. در این نوشتار از مفهوم المان رایط هرمن^{۳۱} [۱۶] برای مدل‌سازی این‌گونه پدیده‌ها استفاده شده است. بر طبق روش هرمن^۳ پاسخ متفاوت در راسته با رفتار اندرکشی بین خاک و مسلح کننده وجود دارد که آن‌ها را جدایی، لغزش و اتصال می‌نامیم. هنگامی که برای لایه‌ی واسطه هیچ‌گونه مقاومت کششی در نظر گرفته نشود، اگر جابجایی نسبی دو صفحه‌ی لایه‌ی واسطه برای دورشدن آن‌ها از هم باشد، جدایی رخ می‌دهد. در این حالت ضرایب سختی لایه‌ی واسطه در هر دو جهت برشی و عمودی (به ترتیب k_s و k_n) صفر در نظر گرفته می‌شود. زمانی که جابجایی نسبی صفحات لایه‌ی واسطه برای دورشدن از هم نباشد، باید تنش برشی در این لایه بررسی شود. اگر تنش برشی در هر نقطه از لایه‌ی واسطه (τ) به مقاومت برشی در آن نقطه (τ_{max}) که بر اساس معیار زوال تعریف می‌شود رسیده باشد، آن‌گاه لغزش اتفاق می‌افتد و باید ضریب سختی برشی (k_s) را صفر منظور داشت. در این حالت پس از لغزش، لایه‌ی واسطه فقط فقط می‌تواند تنش برشی مساوی با τ_{max} را انتقال دهد و تفاوت بین τ و τ_{max} باید بین گره‌های همسایه باز پخش شود. زمانی که هیچ‌یک از شرایط ذکر شده رخ ندهد، حالت اتصال است و تحلیل با استفاده ضرایب سختی مشخص شده انجام می‌شود.

براساس مراحل مذکور، یک برنامه‌ی رایانه‌ی با استفاده از زبان برنامه نویسی MATLAB [۱۷] تهیه و مثال‌هایی که در ادامه می‌آیند با این برنامه تحلیل شده‌است.



شکل ۵. ستونی از محیط ارجاعی گسسته تحت بار متتمرکز.



شکل ۶. مدل‌های المان محدود که از راست به چپ با افزایش تعداد المان‌ها همراه است.

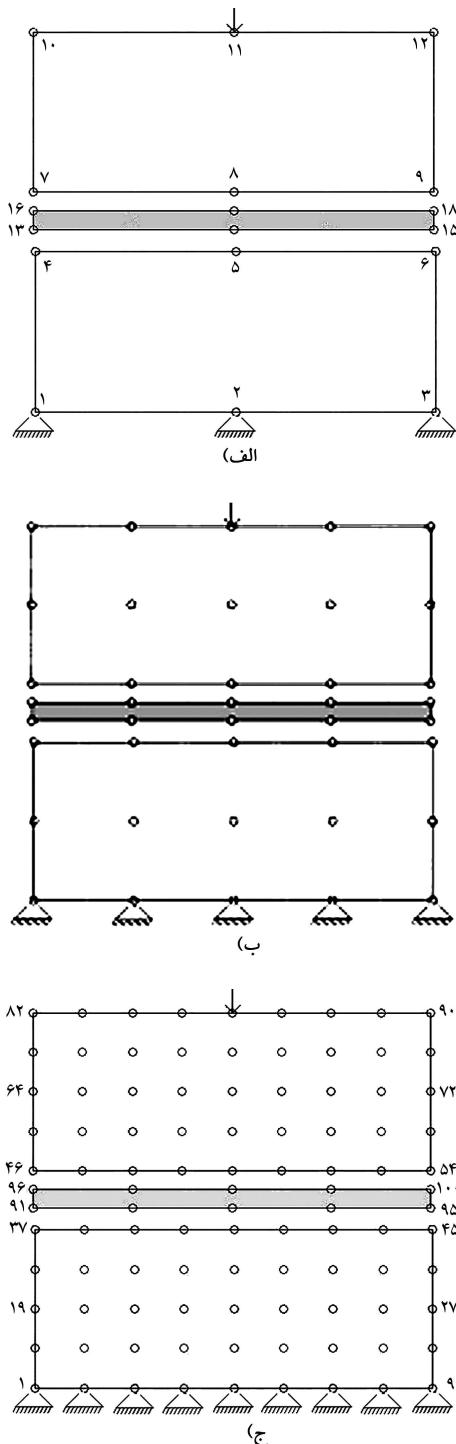
مطالعه‌ی عددی

در این قسمت با استفاده از برنامه‌ی رایانه‌ی MATLAB، ۳ مثال بررسی می‌شوند. با توجه به عدم مشاهده‌ی حل تحلیلی دقیق (بدون فرضیه‌های ساده‌شونده) برای محیط‌های گسسته، برای تأیید برنامه از تابع برنامه‌ی المان محدود استفاده شده است. در این مثال‌ها فرض برآن بوده است که با افزایش تعداد المان‌ها جواب مسئله به حل دقیق نزدیک‌تر می‌شود.

۱. محیط ارجاعی گسسته تحت بار متتمرکز

در این مثال ستونی از محیط مسلح در نظر گرفته شده که لایه‌ی مسلح‌کننده در وسط ارتفاع ستون قرار گرفته است. بار متتمرکز 50 kN در بالای ستون وارد می‌شود. هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی در شکل ۵ نشان داده شده است. محیط، بدون وزن و کاملاً ارجاعی با مدل ارجاعی 30 MPa و ضریب پواسون 0.3 فرض و مسلح‌کننده نیز کاملاً ارجاعی و با مدل ارجاعی 60 MPa و ضریب پواسون 0.25 در نظر گرفته شده است. در بالا و پایین مسلح‌کننده دو لایه‌ی واسطه وجود دارند که رفتار این دو لایه مشابه هم است و دارای ضریب سختی برشی (k_s) و عمودی (k_n) به ترتیب برابر با 10^3 kN/m^2 و 10^6 kN/m^3 هستند.

با توجه به اینکه حل دقیق تحلیلی برای این مسئله وجود ندارد، از روش المان محدود برای حل آن استفاده شده است. به این ترتیب مرتبًا با افزایش تعداد المان‌ها،



شکل ۸. مدل های بدون شبکه که با افزایش تعداد گره ها همراه است.

و بیشینه‌ی خطای کلی حدود ۱۱٪ است. نتایج این مثال نشان دهنده‌ی عملکرد مناسب روش بدون شبکه در محیط‌های گستته‌ی ارجاعی است.

۲. آزمایش بیرون‌کشیدن مسلح‌کننده

هدف از این مثال بررسی رفتار ارجاعی - خمیری لایه‌ی واسطه براساس مفهوم المان رابط هرمن در روش بدون شبکه است. در این مثال آزمایش دو بعدی بیرون‌کشیدن مسلح‌کننده شبیه‌سازی شده است. این مسئله برای بررسی صحت مدل سازی لایه‌ی

ولیه در هر مورد مقدار ۶ به دست آمد. در شکل ۷، مقدار ۶ در مقابل تعداد المان‌ها ترسیم شده است. با توجه به این شکل می‌توان مدل المان محدود را با ۹۶ المان ۳۲ المان برای محیط، ۳۲ المان برای مسلح‌کننده و نیز هر لایه‌ی واسطه به منزله‌ی جایگزین حل دقیق در نظر گرفت.

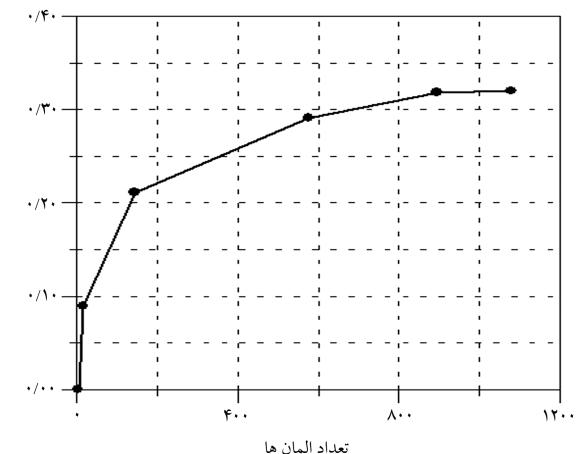
پس از به دست آوردن جوابی به منزله‌ی جایگزین حل دقیق، باید هم گرایی حل مسئله برای روش بدون شبکه بررسی شود. لذا مطابق شکل ۸، سه مدل بدون شبکه در نظر گرفته می‌شود. در مدل اول فاصله‌ی بین گره‌ها ۱m فرض شده است و هندسه‌ی مسئله با ۱۲ گره برای محیط و ۶ گره برای مسلح‌کننده (جمعاً ۱۸ گره) می‌باشد که به ترتیب ۴۰ و ۱۰۰ گره تولید می‌شوند. در همه‌ی مدل‌ها از شبکه‌ی پس زمینه‌ی ۴×۴ بلوکی که هر بلوک شامل ۱۶ نقطه‌ی گاووس است (شکل ۹) استفاده شده است. شعاع دامنه‌ی تکیه‌گاهی در مدل‌های مختلف متفاوت است. به این ترتیب که در مدل ۱۸ گره‌ی از شعاع تأییر ۱/۵m و در مدل‌های ۴۰ و ۱۰۰ گره‌ی به ترتیب از شعاع‌های ۱m و ۷/۷m استفاده شده است. مقدار خطای نسبی جابجایی‌های روش بدون شبکه نسبت به حل المان محدود که اکنون جایگزین حل دقیق شده است از رابطه‌ی ۷۳ تعیین می‌شود:

$$e_d = \frac{\sum_{i=1}^N |u_i^{MFM} - u_i^{FEM}|}{\sum_{i=1}^N |u_i^{FEM}|} \quad (73)$$

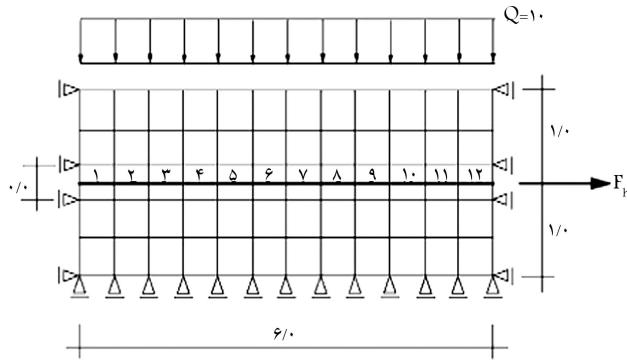
در این رابطه، e_d خطای نسبی جابجایی‌ها، u_i^{MFM} جابجایی گرهی نام در روش بدون شبکه، u_i^{FEM} جابجایی گرهی نام در روش المان محدود و N تعداد گره‌های مورد بررسی است. در شکل ۱۰، نحوه‌ی تغییر خطای نسبی جابجایی‌ها

نسبت به فاصله‌ی گره‌ها بر حسب لگاریتم مقدادر ترسیم شده است.

مشاهده می‌شود که با کم شدن فاصله‌ی گره‌ها خطای نسبی کاهش می‌یابد و این امر هم گرایی روش را تأیید می‌کند. در جدول ۱، نتایج مربوط به شماره‌ی گره‌های شکل ۸-الف) برای مدل ۹۰ گره‌ی و روش المان محدود نشان داده شده است. با توجه به تقارن مدل، نتایج فقط برای نیمی از گره‌ها ارائه شده است. در ستون آخر این جدول خطای کلی جواب‌های روش بدون شبکه نسبت به روش المان محدود نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که جواب‌ها مطابقت بسیار خوبی دارند



شکل ۷. تغییرات پارامتر η با تعداد المان‌ها.

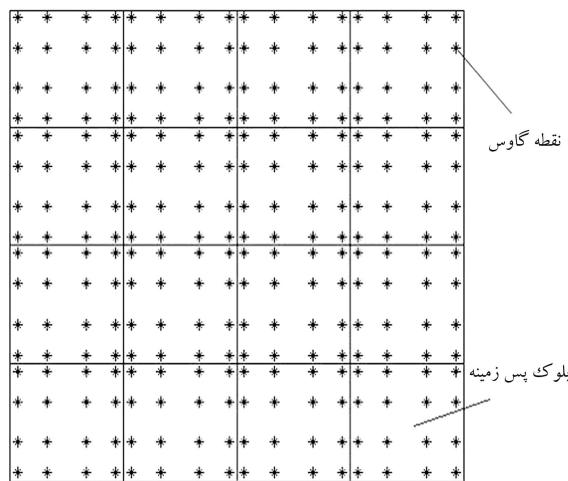


شکل ۱۱. مدل سازی دو بعدی آزمایش بیرون کشیدن مسلح کننده.

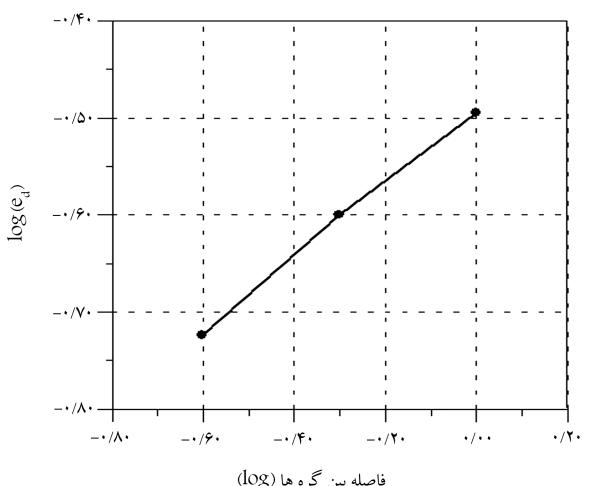
واسطه استفاده شده است^[۱۹] و نتایج به دست آمده از روش بدون شبکه با نتایج فوق مقایسه می شود.

همان طور که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، مستله با ۴۸ المان چهارضلعی برای محیط، ۱۲ المان خرپایی برای مسلح کننده و ۱۲ المان لایه ای واسطه با ضخامت صفر در هر طرف مسلح کننده شبیه سازی شده است. المان های بالای لایه ای واسطه از ۱ تا ۱۲ شماره گذاری شده اند. رفتار لایه ای واسطه به صورت ارتقای خمیری در نظر گرفته شده است که از معیار موهر کولمب با چسبندگی صفر و ضریب اصطکاک ۰/۵ پیروی می کند. ضریب های سختی برشی و نرمال در لایه ای واسطه به ترتیب ۱۰^۶ kN/m^۳ و ۱۰^۷ kN/m^۳ هستند.

با فرض شرایط کرنش صفحه بی، محیطی ارتقایی با مدول ارتقایی ۲ MPa و ضریب پواسون ۰/۲۵ اطراف مسلح کننده در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه هدف مقایسه ای عددی نتایج است، ازو زن محیط صرف نظر شده است. مسلح کننده به صورت میله ای یک بعدی با مدول ارتقایی ۲۰ MPa و سطح مقطع ۰/۱ m^۲ مدل سازی شده است. برای تحلیل رفتار لایه ای واسطه، بار گستردگی یکنواخت ۱۰ kN/m به صورت فشاری بر روی محیط اعمال می شود که طی تحلیل ثابت نگاه داشته می شود. در این بین بار افقی F_h به تدریج از مقدار صفر تا ۶۰ kN



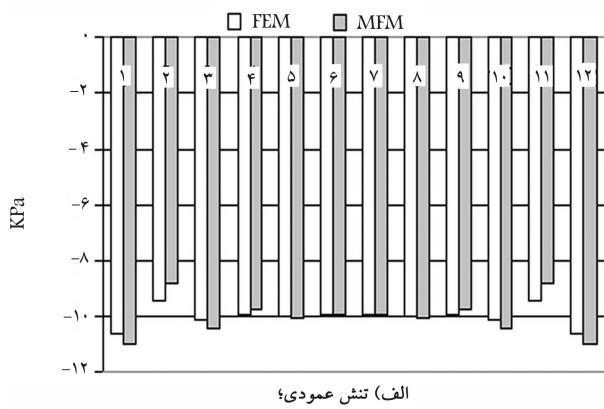
شکل ۹. شبکه پس زمینه برای انتگرال گیری.



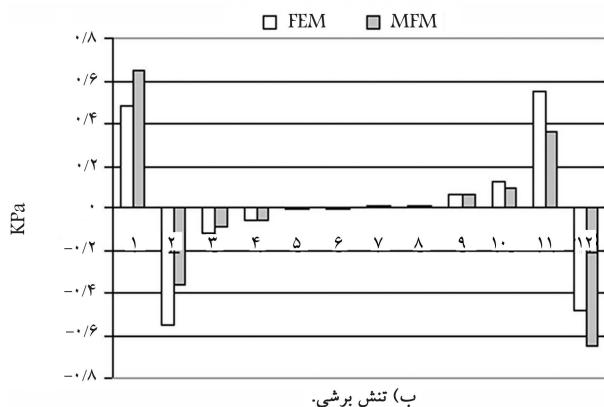
شکل ۱۰. تغییرات خطای نسبی جابجایی ها نسبت به فاصله گره ها.

جدول ۱. نتایج روش المان محدود با ۹۹۲ المان و روش بدون شبکه با ۹۰ گره.

خطای کلی %	روش بدون شبکه			روش المان محدود			شماره گره
	Y(mm)	X(mm)	جابجایی در جهت (mm)	Y(mm)	X(mm)	جابجایی در جهت (mm)	
۷,۴۸۰۰۸۱	-۴,۷۸E-۰۱		-۱,۳۵E-۰۱	-۴,۹۱E-۰۱		-۱,۷۱E-۰۱	۴
۷,۷۲۶۱۶۵	-۸,۱۸E-۰۱		۰	-۸,۸۶E-۰۱		۰	۵
۱۰,۳۵۸۴۳	-۵,۶۵E-۰۱		-۴,۲۶E-۰۱	-۵,۲۶E-۰۱		-۴,۸۹E-۰۱	۷
۷,۳۳۵۷۸۸	-۸,۹۶E-۰۱		۰	-۹,۶۷E-۰۱		۰	۸
۲,۸۰۴۸۸۷	-۵,۳۴E-۰۱		۱,۸۴E-۰۱	-۵,۴۶E-۰۱		۱,۹۵E-۰۱	۱۰
۱۰,۹۵۸۹	-۴,۵۵		۰	-۵,۱۱		۰	۱۱
۱,۴۶۸۴۵۹	-۵,۱۲E-۰۱		-۶,۵۸E-۰۲	-۵,۰۶E-۰۱		-۶,۶۹E-۰۲	۱۳
۷,۳۷۴۷۰۲	۸,۵۴E-۰۱		۰	-۹,۲۲E-۰۱		۰	۱۴
۲,۵۴۲۲۶۲	-۵,۱۶E-۰۱		-۱,۹۷E-۰۲	-۵,۰۸E-۰۱		-۳,۰۲E-۰۲	۱۶
۷,۳۴۵۴۴۱	-۸,۶۱E-۰۱		۰	-۹,۲۹E-۰۱		۰	۱۷

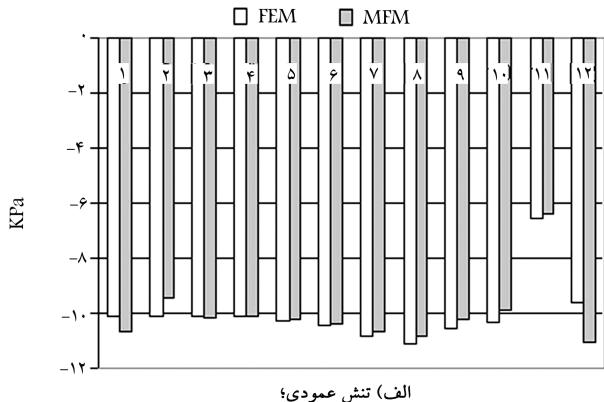


الف) تنش عمودی؛

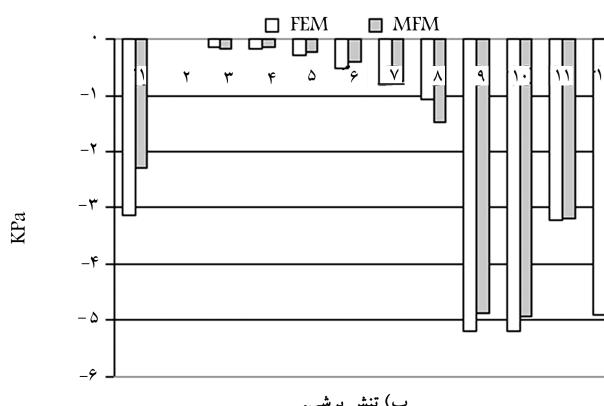


ب) تنش برشی.

شکل ۱۳. توزیع تنش برای $F_h = 0^\circ$



الف) تنش عمودی؛



ب) تنش برشی.

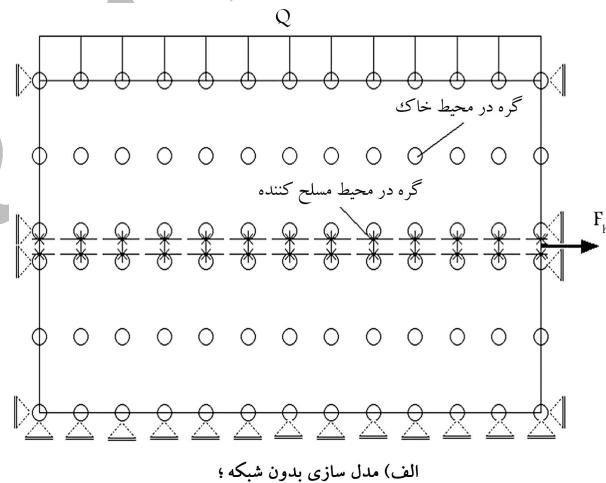
شکل ۱۴. توزیع تنش برای $F_h = 25kN$

افرازیش می‌یابد و در مقاطع مختلف توزیع تنش‌های برشی و عمودی در لایه‌ی واسطه بررسی می‌شود.

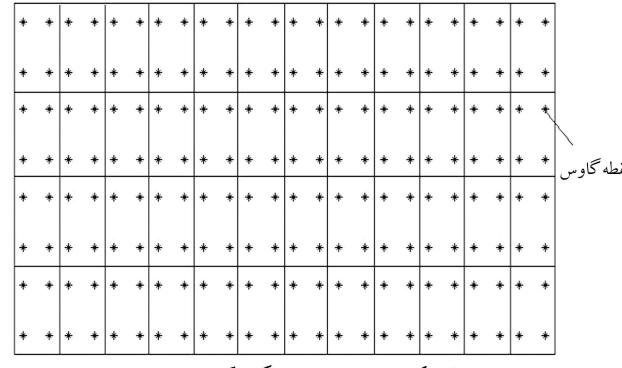
مدل سازی بدون شبکه‌ی محیط مطابق شکل ۱۲ الف، با ۷۸ گره‌ی برای محیط و ۲۶ گره‌ی برای مسلح کننده انجام شده است. هر لایه‌ی واسطه به ۱۲ زیرلایه با ضخامت $5m$ تقسیم شده است. با توجه به نتایج ارائه شده تحلیل در نوشتار^[۱۹] که هر المان به صورت میانگین در مرکز المان ارائه شده است، لایه‌ی واسطه در روش بدون شبکه به ۱۲ زیر لایه^{۲۲} تقسیم و نتایج به صورت میانگین در هر زیرلایه ارائه شده است. برای انتگرال‌گیری مطابق شکل ۱۲ ب، شبکه‌ی 12×4 بلوکی با نقطه‌ی گاوی در هر بلوک در نظر گرفته شده است. شعاع دامنه‌ی تکیه‌گاهی $0.7m$ و خصوصیات مربوط به هندسه و مصالح مطابق روش المان محدود است.

نحوه‌ی توزیع تنش‌های برشی و نرمال در لایه‌ی واسطه‌ی بالایی برای هر دو روش المان محدود و بدون شبکه در شکل‌های ۱۳ تا ۱۶ ارائه شده است که نشان‌گر مطابقت بسیار خوب بین مقادیر و نحوه‌ی توزیع تنش‌ها برای دو روش المان محدود و بدون شبکه هستند، و این امر صحبت عملکرد برنامه را در مدل سازی رفتار ارجاعی-خمیری لایه‌ی واسطه و نیز توافقی آن را در شبکه‌سازی لغزش در لایه‌ی واسطه تأیید می‌کند.

مثال ۳. اعمال بار توسط پی انعطاف‌پذیر بر روی خاک مسلح در این مثال یک پی نواری انعطاف‌پذیر به عرض $2m$ فشاری یکنواخت را بر روی جعبه‌ی از خاک مسلح به ابعاد $6m \times 6m$ 10° اعمال می‌کند. مطابق شکل ۱۷، سه



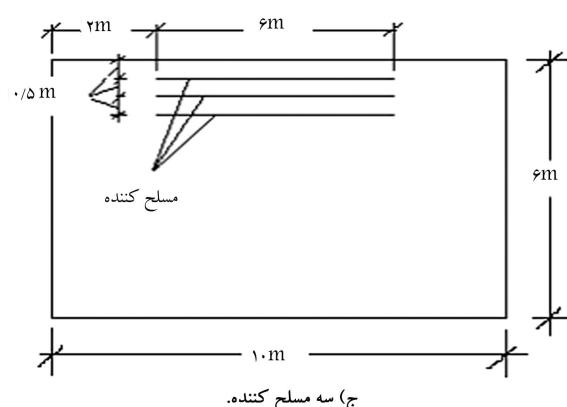
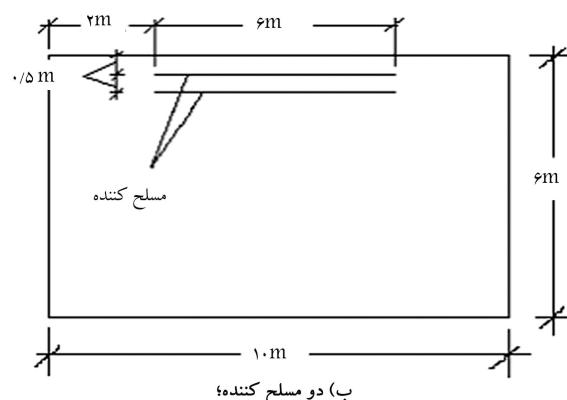
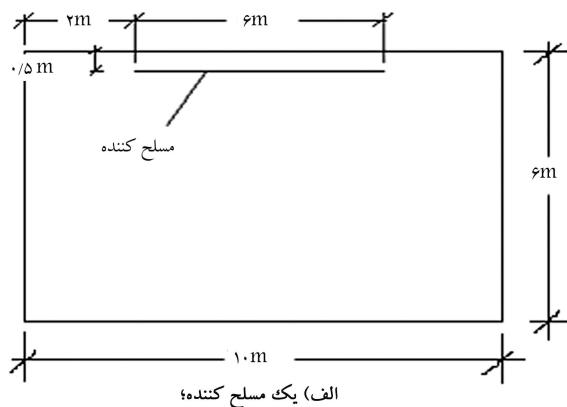
الف) مدل سازی بدون شبکه؛



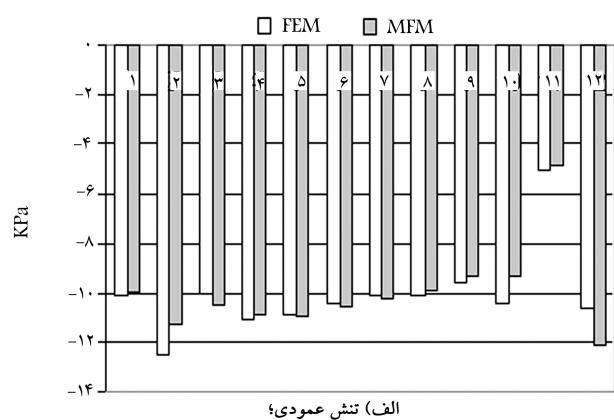
ب) شبکه‌ی پس زمینه برای انتگرال‌گیری.

شکل ۱۲. شماتی کلی مدل سازی آزمایش بیرون کشیدن مسلح کننده.

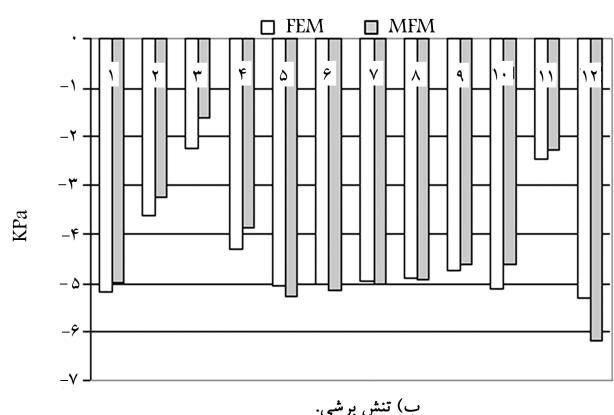
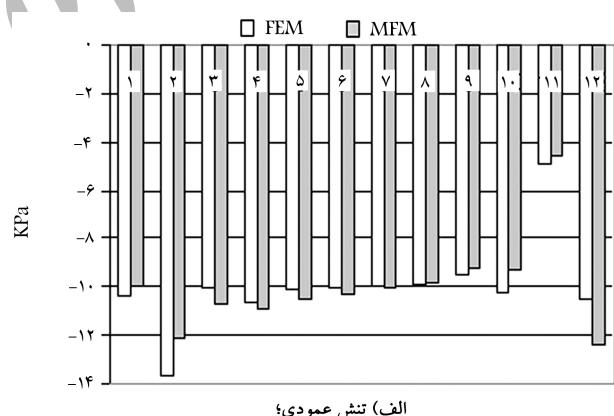
الگو برای نحوه آرایش مسلح‌کننده‌ها در نظر گرفته شده است. هدف آن است که منحنی بار-تغییر فرم در نقطه‌ی میانی در زیر پی برای دو روش المان محدود (که با افزایش تعداد المان‌ها به مترله‌ی جایگزین حل دقیق در نظر گرفته می‌شود) و روش بدون شبکه به دست آید و با یکدیگر مقایسه شوند. هندسه‌ی مسئله و نحوه قرارگیری مسلح‌کننده‌ها در شکل ۱۷ نشان داده شده است. خاک در برگیرنده‌ی مسلح‌کننده‌ها که ماده‌ی با رفتار ارتعاعی-خمیری و بدون وزن در نظر گرفته شده است، از معیار زوال مور-کولمب پیروی می‌کند. ویژگی‌های این خاک به شرح زیر است: مدول ارتعاعی 30 MPa ; ضریب پواسون 0.3 ; چسبندگی 20 kPa ; زاویه‌ی اصطکاک داخلی 25° و با فرض رفتار ناهمراه در حالت خمیری زاویه‌ی اتساع خاک 5° در نظر گرفته شده است.



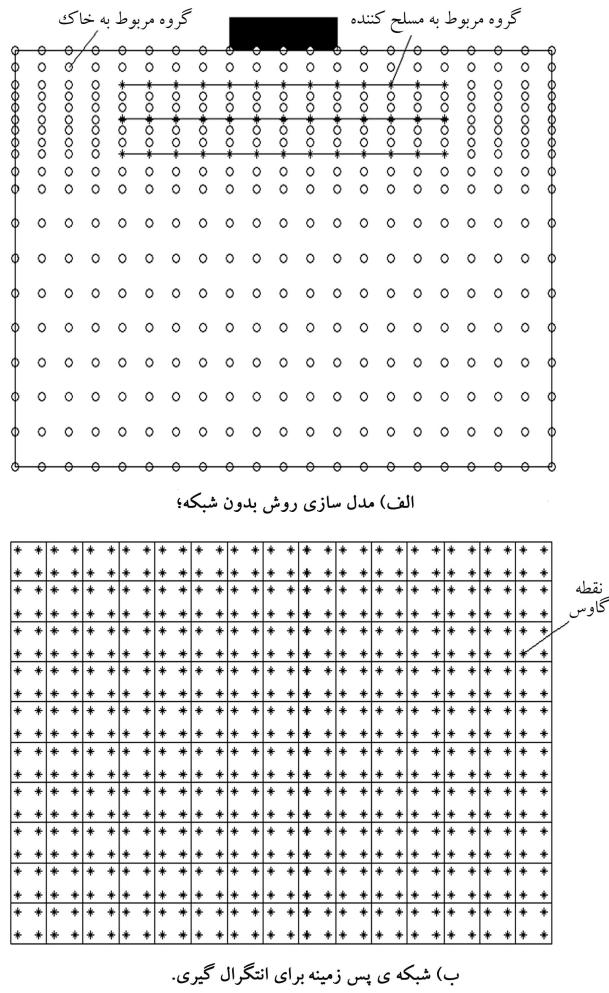
شکل ۱۷. الگوهای در نظر گرفته شده.



شکل ۱۵. توزیع تنش برای $F_h = 50 \text{ kN}$



شکل ۱۶. توزیع تنش برای $F_h = 57.5 \text{ kN}$



شکل ۱۸. شمای کلی مدل سازی پی روی خاک مسلح.

همستنده، t_i ضخامت لایه‌ی واسطه است که ضخامت مجازی 4° نامیده می‌شود و به صورت خودکار با نرم‌افزار به گونه‌یی انتخاب می‌شود که سختی مناسبی به دست آید. با توجه به رابطه‌های 54 تا 56 و رابطه‌ی 76 داریم:

$$D_i = \begin{bmatrix} k_s & \cdot \\ \cdot & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_i}{t_i} & \cdot \\ \cdot & \frac{E_{ode,i}}{t_i} \end{bmatrix} \quad (78)$$

بنابراین می‌توان با استفاده از ضخامت لایه‌ی واسطه، پارامترهای ارجاعی خاک و نیز ضریب کاهنده‌ی R_{inter} را با رابطه‌ی 78 سختی‌های برشی و نرمال لایه‌ی واسطه در روش بدون شبکه تعیین کرد.

در شکل 19 و 20 منحنی‌های بار-غیرفروم که از روش‌های المان محدود (PLAXIS) و بدون شبکه به دست آمده‌اند، قرارگیری مسلح‌کننده‌ها برای 3 الگوی مختلف نشان داده شده است. برای منحنی‌های نشان داده شده در شکل 19 اتصال کامل مسلح‌کننده‌ها و خاک برقرار است ($R_{inter}=1$). در شکل 20 منحنی‌ها برای شرایطی به دست آمده‌اند که پارامترهای مقاومت برشی در لایه‌ی واسطه 7° مقادار پارامترهای متضایر در خاک هستند ($R_{inter}=0^{\circ}, 7^{\circ}$). مقایسه‌ی این منحنی‌ها مطابقت بسیار خوبی را بین جواب‌های روش بدون شبکه و جایگزین حل دقیق نشان می‌دهد که عملکرد مناسب روش بدون شبکه را در حالت کلی با رفتار ارجاعی-خمیری خاک نشان می‌دهد.

مسلح‌کننده‌ها به صورت مصالح ارجاعی با مدول ارجاعی 600 MPa و ضریب پوسون 0.3 درنظر گرفته شده‌اند. ضخامت هر مسلح‌کننده نیز 1 m است. بالا و پایین هر مسلح‌کننده لایه‌ی واسطه‌ی به ضخامت 0.5 m قرار دارد.

برای مدل‌سازی با روش المان محدود از PLAXIS^[2] که نرم‌افزاری قوی در مدل‌سازی‌های مربوط به مسائل ریوتکنیکی است، استفاده شده است و در آن تولید شبکه به صورت خودکار انجام می‌شود و کاربر در هر مرحله فقط می‌تواند شبکه‌بندی را نسبت به مرحله‌ی قبل ریزتر کند، از این‌رو از نتایج ریزترین حالت شبکه‌بندی که نرم‌افزار قادر به انجام آن است به مزایه‌ی جواب‌های جایگزین حل دقیق استفاده شده است. به این ترتیب برای الگوهایی با یک، دو و سه مسلح‌کننده به ترتیب از مدل‌های المان محدود با $2182, 2248, 2312$ است. در نرم‌افزار PLAXIS مسلح‌کننده‌ها به صورت المان‌های یک‌بعدی شبیه‌سازی می‌شوند که فقط قابلیت انتقال نیروی محوری را دارند. همچنین برای شبیه‌سازی لایه‌ی واسطه از روش ضریب کاهنده استفاده می‌شود. در این روش کاربر ضریب کاهنده‌ی (R_{inter}) را برای لایه‌ی واسطه تعیین می‌کند. مقدار R_{inter} یا مساوی 1 است. با درنظر گرفتن معیار موهرب-کولمب رابطه‌ی بین پارامترهای مقاومت برشی خاک و لایه‌ی واسطه با توجه به R_{inter} به صورت رابطه‌های 74 و 75 است:

$$\xi_i = R_{inter}\xi_{soil} \quad (74)$$

$$\tan(\Theta_i) = R_{inter}\tan(\Theta_{soil}) \leq \tan(\Theta_{soil}) \quad (75)$$

در این رابطه‌ها، ξ_i و ξ_{soil} به ترتیب چسبندگی در لایه‌ی واسطه و خاک و Θ_i و Θ_{soil} به ترتیب زاویه‌ی اصطکاک داخلی در لایه‌ی واسطه و خاک هستند. تحلیل‌ها در روش المان محدود برای دو مقدار متفاوت R_{inter} انجام شده است.

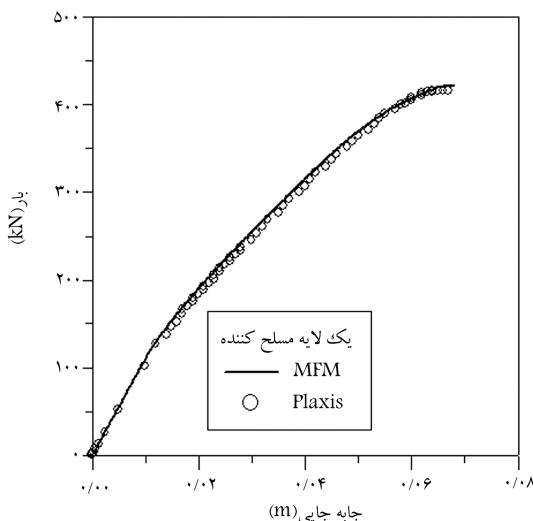
در روش بدون شبکه همان‌طور که در شکل ۱۸الف، نشان داده شده است، از 360 گره با آرایش منظم برای مدل‌سازی محیط خاک استفاده شده است. هر یک از مسلح‌کننده‌ها نیز با 26 گره در راستای دو خط موازی (که فاصله‌ی خطوط برابر ضخامت مسلح‌کننده است) شبیه‌سازی شده‌اند. برای انگل‌گیری از شبکه‌ی 15×10 بلوکی استفاده شده است که هر بلوک 4 نقطه‌ی گاؤس دارد (شکل ۱۸ب). شعاع دامنه‌ی تکیه‌گاهی نیز 1 m منظور شده است.

نکته‌ی مهم انتخاب ضرایب سختی لایه‌ی واسطه است به‌طوری که با مدل‌سازی نرم‌افزار PLAXIS همخوانی داشته باشد. برای این مظاواز لازم است تا رابطه‌ی مورد استفاده با نرم‌افزار PLAXIS برای محاسبه‌ی تنش‌ها و کرنش‌ها بررسی شود و آن‌ها را به‌نحوی مدل‌سازی روش مطرح شده در این نوشتار ربط داد تا بتوان ضرایب سختی لایه‌ی واسطه را تعیین کرد. در نرم‌افزار PLAXIS رابطه‌ی بین جابجایی‌های نسبی در لایه‌ی واسطه و تنش‌ها به صورت رابطه‌ی 76 است:

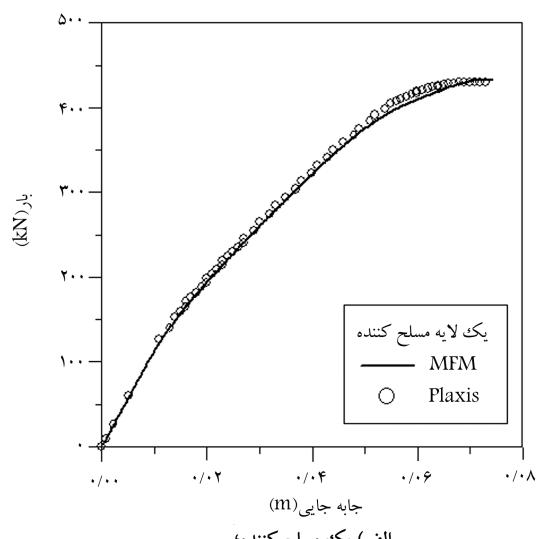
$$\delta_s = \frac{\tau t_i}{G_i}, \quad \delta_n = \frac{\sigma t_i}{E_{ode,i}} \quad (76)$$

$$\text{و } G_i \text{ در رابطه‌ی } 76 \text{ از رابطه‌ی } 77 \text{ به دست می‌آیند:} \\ E_{ode,i} = 2G_i \frac{1-v_i}{1-2v_i}, \quad G_i = R_{inter}^i G_{soil} \leq G_{soil}, \\ v_i = 0.45 \quad (77)$$

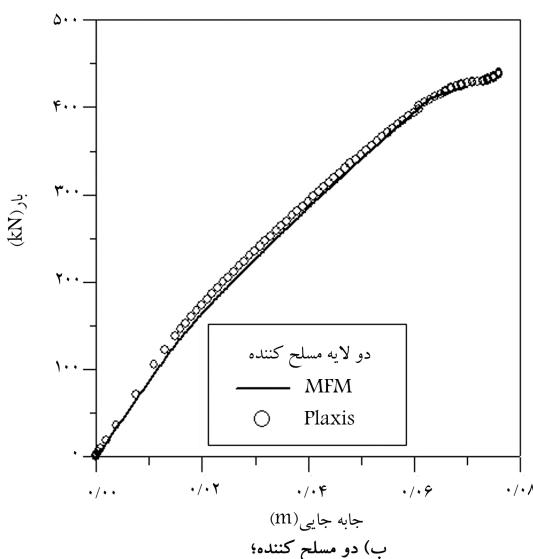
در رابطه‌های 76 و 77 به ترتیب جابجایی نسبی در جهت عمود و مماس بر لایه‌ی واسطه و σ و τ به ترتیب تنش عمودی و تنش برشی در لایه‌ی واسطه



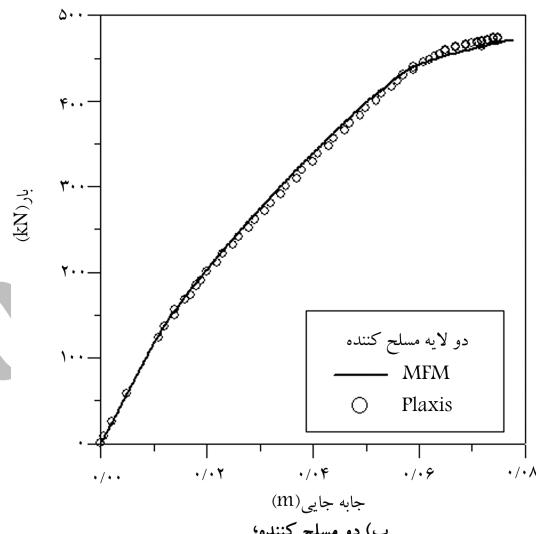
الف) یک مسلح کننده؛



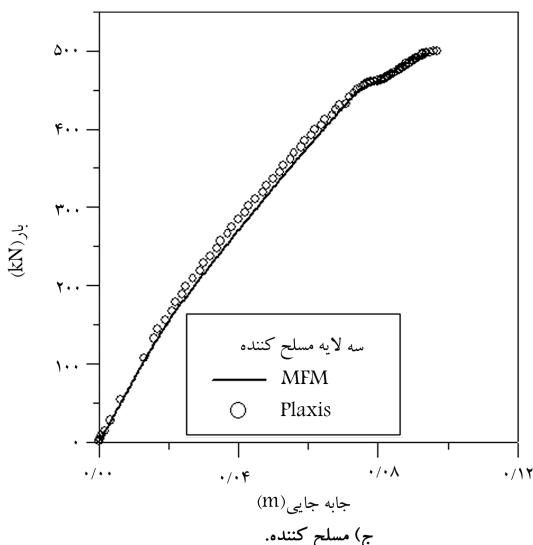
الف) یک مسلح کننده؛



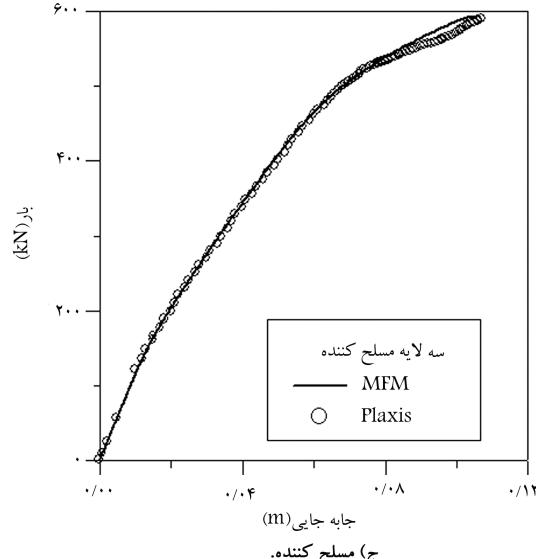
ب) دو مسلح کننده؛



ب) دو مسلح کننده؛



ج) مسلح کننده.



ج) مسلح کننده.

شکل ۱۹. منحنی بار-تغییرفرم در نقطه‌ی میانی زیربی در روش‌های المان محدود و بدون شبکه با $R_{inter} = 0.7$. شکل ۲۰. منحنی بار-تغییرفرم در نقطه‌ی میانی زیربی در روش‌های المان محدود و بدون شبکه با $R_{inter} = 1$.

نتیجه‌گیری

روش المان محدود با تعداد المان‌های زیاد داشتند. این امر می‌تواند نکته‌ی مشبّتی در استفاده از این روش‌ها برای تحلیل خاک‌های مسلح تلقی شود. با وجود این لازم است که سایر روش‌های بدون شبکه نیز برای تحلیل خاک‌های مسلح استفاده و نتایج عددی با تست‌های آزمایشگاهی مقایسه شوند. اما آنچه به نظر می‌رسد آن است که روش‌های بدون شبکه با توجه به نداشتن محدودیت‌ها در مورد قیود هندسی (نظیر ضخامت کم مسلح‌کننده‌ها) و توانایی مدل‌سازی دو بعدی مسلح‌کننده‌ها (برخلاف روش‌های المان محدود که به صورت یک بعدی شبیه‌سازی می‌کنند)، می‌توانند جواب‌های دقیق‌تری را به خصوص در رفتار ارجاعی -خمیری مسلح‌کننده‌ها به دست دهند.

در این نوشتار روش بدون شبکه بی‌با عنوان درون‌یابی نقطه‌یی براساس توابع شعاعی، برای تحلیل ارجاعی-خمیری خاک‌های مسلح استفاده شده است. در این روش ساخت توابع شکل مستقل از شبکه‌بندی است و فقط از شبکه‌بندی برای انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود.

با توجه به مثال‌های حل شده مطابقت بسیار خوبی بین جواب‌های با روش مطرح شده در این نوشتار و نتایج حل‌های جایگزین با حل دقیق مشاهده شد، به طوری‌که با تعداد گره‌های نسبتاً کم، نتایج روش بدون شبکه، مطابقت بسیار خوبی با جواب‌های

پانوشت

1. radial basis point interpolation method
2. elasto-plastic
3. reproducibility
4. interface layer
5. weak form
6. smoothed particle hydrodynamics
7. basis functions
8. moving least square
9. element free galerkin
10. finite cloud
11. reproducing kernel particle method
12. point interpolation method
13. material point method
14. interface layer
15. local compact support domain
16. moment matrix
17. kronecker delta
18. essential boundary conditions
19. singular
20. multi quadratic
21. Gaussian
22. consistency
23. composite description
24. anisotropic
25. discrete description
26. linkage elements
27. normal
28. Mohr-Coulomb
29. Lode angle
30. non-associated
31. functional
32. background mesh
33. Gauss
34. visibility criterion
35. compatibility
36. modified newton-raphson method
37. unbalanced force
38. pull out test
39. slip

40. separation
41. herrmann linkage element
42. sub-interface
43. virtual thickness

منابع

1. Lucy, L.B., "A numerical approach to the testing of fission hypothesis", *The Astronomical Journal*, **82**(12), pp. 1013-1024 (1977).
2. Libersky, L.D., and Petschek, A.G., "Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials", *Proceeding of The Next Free Lagrange Conference*, pp. 248-257 (1991).
3. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, p., "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, **10**, pp.307-318 (1992).
4. Belytschko, T.; Lu, Y.Y., and Gu, L., "Element-free galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, pp. 229-256 (1994).
5. Duarte, C., and Oden, J.T., "An hp adaptive method using clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, pp.237-262 (1996).
6. Liu, W.K.; Jun, S., and Zhang, Y.F., "Reproducing kernel particle methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **20**, pp.1081-1106 (1995).
7. Liu, G.R., and Gu, Y.T., "A point interpolation method for two-dimensional solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, pp.937-951 (2001).
8. Zhang, X.; Lu, M., and Wegner, J.L., "A 2-D meshless model for jointed Rock structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **47**, pp.1649-1661 (2000).

۹. هاتف، نادر؛ حاج عزیزی، محمد، و قهرمانی، ارسلان، «تحلیل مکانیکی توده‌های سنگی درزه دار با استفاده از روش بدون شبکه و با اعمال روش پنالتی»، مجله علمی پژوهشی شریف، ۴۰(۱۱-۱۲)، (زمستان ۱۳۸۶).

10. Wang, J.G.; Liu, G.R., and Wu, Y.G., "A point interpolation method for simulating dissipation process of consolidation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **190**, pp.5907-5922 (2001).
11. Wang, W.D.; Wang, J.G.; Wang, Z.L., and Nogami, T., "An unequal-order radial interpolation meshless method for biot's consolidation theory" *computers and geotechnics*, **34**, (2), pp.61-70, (2007).
12. Guangxin, L.; Jinhong, G., and Yuxin, J., "Free surface seepage analysis based on the element-free method", *Mechanics Research Communications*, **30**, pp. 9-19 (2003).
13. Wuezckowski, Z., "The material point method in large strain engineering problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **193**, pp. 4417-4438 (2004).
14. Binesh, S.M.; Hataf, N., and Ghahramani, A., "Elastic analysis of reinforced soil using point interpolation method", *Journal of Iranian Science and Technology*, **31**(B5), pp. 577-581 (2007).
15. Liu, G.R., "Mesh free methods: Moving beyond the finite element method", Florida, *CRC Press*, **171** (2002).
16. Herrmann, L.R., "Finite element analysis of contact problems", ASCE, *J. Eng. Mech. Div.*, **104**(5), pp. 1043-1057 (1978).
17. MATLAB manual; *The Math Works, Inc.* 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760 (2002).
18. SIGMAW manual; *User's guide*, *Geo-Slope International Ltd.* Calgary, Alberta, Canada (2000).
19. Coutinho, A.; Martin, M.; Sydenstricker, R.; Alves, J., and Landau, L., "Simple zero thickness kinematically consistent interface elements", *Computers and Geotechnics*, **30**, pp.347-374 (2003).
20. PLAXIS manual; "Finite element code for soil and rock analysis", *Rotterdam (Netherland) : A.A. Balkema* (1995).