

مدل سازی ناهمگونی تغییر شکل پذیری نهشته های طبیعی به کمک نظریه ی فضای تصادفی

رضا جمشیدی چناری (استادیار)

رامین علومی دودران (دانشجوی کارشناسی ارشد)
دانشکده ی مهندسی عمران، دانشگاه گیلان

در روابط ارائه شده برای محاسبه ی نشست شالوده های سطحی، متغیرهای مورد استفاده به عنوان «پارامتر ورودی» حالت میانگین دارند و تغییرات آن ها در نقاط مختلف — که در بیشتر خاک ها مشاهده و ناهمگونی نامیده می شود — مورد توجه قرار نمی گیرد. در پژوهش حاضر با بررسی تفصیلی ویژگی مزبور، به معرفی فضای تصادفی کشسان همسان برای استفاده در مدل کردن فضای مسئله پرداخته شده است. مدل تغییر شکل خاک به عنوان متغیر تصادفی، و توزیع قدر مطلق نرمال به عنوان توزیع مناسب برای این پارامتر در راستای افقی در نظر گرفته شده است. این پارامتر طوری در فضا توزیع می شود که با فرض ثابت ماندن ضریب تغییرات، میانگین آن از روند مشخصی در راستای قائم تبعیت کند. روند تغییرات میانگین این پارامتر در راستای قائم مورد بررسی قرار گرفته و مفهوم عمق تبدیل که در آن روند مزبور در راستای قائم تغییر می کند معرفی شده و با کمک گرفتن از روابط نظری ارائه شده برای مدل تغییر شکل کشسان به محاسبه ی این عمق خواهیم پرداخت. حالت های محتمل توزیع این پارامتر با استفاده از نظریه ی حوزه های میانگین محلی (LAS)^۱ به منظور تأمین همبستگی و استناد بر نتایج آزمایش های برجا و استفاده از نرم افزار MATLAB ترسیم شده و نهایتاً نظریه ی فضای تصادفی^۲ به عنوان ابزاری قوی برای مدل سازی ناهمگونی خاک ها در کنار نظریه ی اجزای محدود معرفی شده است.

واژگان کلیدی: نظریه ی فضای تصادفی، نظریه ی حوزه های میانگین محلی، ناهمگونی، نشست، شالوده ی سطحی.

مقدمه

امروزه اهمیت محاسبه ی نشست شالوده ها، به عنوان معیاری برای تعیین ظرفیت باربری و حد سرویس دهی شالوده ها، برکسی پوشیده نیست. با مروری بر روش های ارائه شده برای محاسبه نشست شالوده های سطحی می توان این روش ها را به «روابط نظری» که از قوانین فیزیکی تغییر شکل اجسام پیروی می کند، و «روابط تجربی»

که مبتنی بر استفاده از نتایج آزمایش هاست تقسیم کرد. متغیرهایی که به عنوان پارامتر ورودی در بیشتر روش های متداول برای محاسبه ی نشست شالوده های سطحی مورد استفاده قرار می گیرند با فرض همگن بودن توده ی خاک ارائه شده و تغییرات این متغیرها در نقاط مختلف به دلیل پیچیدگی کار کم تر مورد توجه قرار می گیرد. از سوی دیگر، عدم قطعیت فقط پارامترهای ژئوتکنیکی را شامل نمی شود بلکه احتمال تغییر شرایط بارگذاری، قطعیت نداشتن مطالعات ساختگاهی و فرضیات منظور شده برای مدل رفتاری خاک ها، اطمینان کامل به محاسبات انجام گرفته را دشوار می سازد. ابزار متعارف برای در نظر گرفتن ناهمگونی تکیه بر در این نوشتار به بررسی عدم قطعیت در مدل تغییر شکل کشسان خاک ها -- مورد استفاده در محاسبات مربوط به نشست شالوده های سطحی -- و نحوه ی اعمال ناهمگونی در این متغیر پرداخته می شود. نظریه ی فضای تصادفی به همراه مدل سازی اجزای محدود، ابزاری توان مند را برای مدل کردن تصادفی پارامترهای خاک و ارائه نتایج آماری از میزان خطر پذیری سازه های ژئوتکنیکی ارائه می کند.^[۱] در این تحقیق با معرفی مفهوم ناهمگونی و ارائه ی مدارک علمی مستند در ارتباط با الگوی تغییرات مدل تغییر شکل کشسان خاک ها به صورت دوبعدی و بهره گیری از نظریه ی حوزه های میانگین محلی (LAS) و نرم افزار MATLAB، نحوه ی مدل سازی ناهمگونی در مش بندی اجزای محدود تشریح می شود. بدیهی است با بهره گیری از این روش و مدل تصادفی ارائه شده، و نیز به کمک فرمولاسیون اجزای

تاریخ: دریافت ۱۳۸۸/۵/۵، اصلاحیه ۱۳۸۸/۱۲/۱۱، پذیرش ۱۳۸۹/۶/۲.

محدود می توان به مطالعه الگوی تغییر شکل و ظرفیت باربری شالوده های سطحی، پایداری شیروانی ها و غیره پرداخت.

ناهمگونی

یکی از عوامل مؤثر بر رفتار نهشته های طبیعی، «ناهمگونی» است. ناهمگونی یکی از ویژگی های خاک است که از نقطه یی به نقطه ی دیگر متفاوت است. تقریباً همه ی نهشته های طبیعی دارای مجموعه پارامترهای فیزیکی و مکانیکی متغیر و ناهمگون اند. ناهمگونی در نهشته های طبیعی را می توان به طور کلی در دو موضوع ناهمگونی لایه بندی^۳ و ناهمگونی ذاتی^۴ بررسی کرد. ناهمگونی لایه بندی با ظهور یک لایه یا لایه های نرم یا سخت در بین لایه های سخت یا نرم بروز می کند. نوع دوم ناهمگونی به صورت تغییرات ذاتی در خواص خاک ظاهر می شود. این نوع ناهمگونی به نوبه ی خود ممکن است به دو شکل اتفاق بیفتد: ۱. تفاوت در خواص خاک در نتیجه شرایط رسوب گذاری مختلف و تاریخچه ی تنش؛ ۲. وجود روندی معین^۵ در خواص خاک.^[۳]

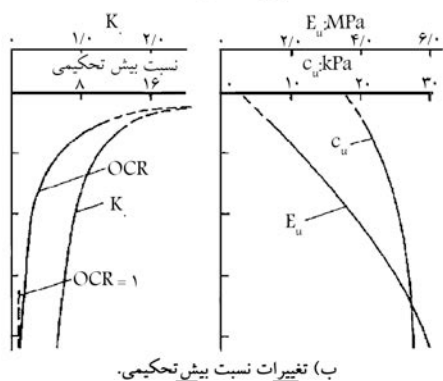
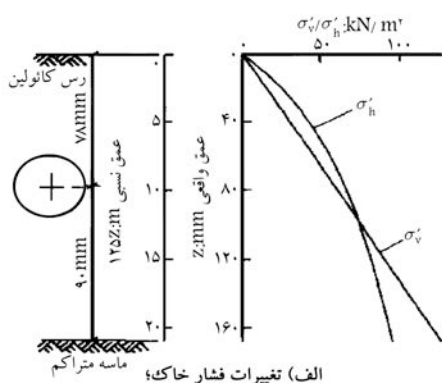
در بررسی ناهمگونی ذاتی از نوع اول که مربوط به شرایط رسوب گذاری است، تعداد ۵۰۰ آزمایش سنجش انبساط حرارتی (دیلاتومتر^۶) در طول ۵۰ متر به فواصل ۰/۵ متر و در عمق ۱ متر به فواصل قائم ۰/۲ متر انجام گرفته است.^[۴] در شکل ۱ نتایج مربوط به تغییرات مدول سختی در راستای افقی برای اعماق مختلف ترسیم شده است.

برخلاف آنچه که در ارتباط با ناهمگونی ذاتی نوع اول بیان شد، در بررسی تأثیر تغییر عمق بر رفتار خاک که همراه با افزایش تنش مؤثر است، معمولاً می توان روند مشخصی را یافت. محققین با انجام تعداد زیادی آزمایش امواج برشی و فشاری بر روی خاک ماسه یی به کمک جعبه کالیبراسیون^[۵] به بررسی ناهمگونی رفتار تغییر شکل در ماسه ی تیکنو^۷ پرداختند. از آنجا که در این مطالعه تغییرات مدول تغییرات شکل خاک در شرایط مختلف تنش مؤثر افقی و قائم بررسی شده، می توان تغییرات آن را برای مقادیر مختلف نسبت فشار خاک (K_0) بر حسب تنش مؤثر قائم ترسیم کرد. تنش مؤثر قائم می تواند نمایانگر عمق باشد و لذا با انتخاب الگویی مشخص برای تغییرات ضریب فشار خاک با عمق می توان به الگوی تقریبی تغییرات مدول سختی خاک با عمق و به عبارتی ناهمگونی ذاتی از نوع دوم (روند مشخص) پی برد. در برخی از مطالعات تغییرات کاهش با عمق برای ضریب فشار خاک در خاک رس کاتولینیت مطرح شده^[۶] که البته این تغییرات تابع نسبت بیش تحکیمی است و روند مشابهی دارد (شکل ۲). علاوه بر این، با انجام تعداد زیادی آزمایش دیلاتومتر

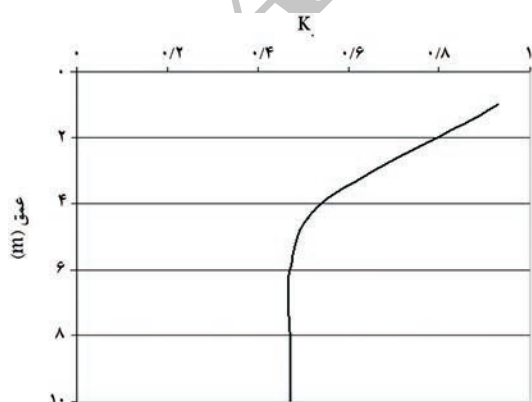
بر روی ماسه ی سست تا متوسط روند تغییرات ضریب فشار سکون خاک (K_0) مطابق شکل ۳ ارائه شده است.^[۷]

بررسی اشکال ۲ و ۳ نشان می دهد که ضریب فشار سکون خاک بر اثر افزایش تنش مؤثر قائم یا عمق کاهش می یابد. بنابراین با اتخاذ الگوی کاهش برای ضریب K_0 می توان به طور تقریبی به الگوی تغییرات مدول سختی خاک پی برد (شکل ۴). بررسی نتایج ترسیم شده حاکی از تغییرات زیاد مدول تغییر شکل خاک با عمق است. البته باید توجه داشت که تغییرات پارامتر مزبور برای اعماق سطحی (تنش قائم کم تر از ۵۰ کیلو پاسکال) را نمی توان از نتایج ارائه شده استخراج کرد.

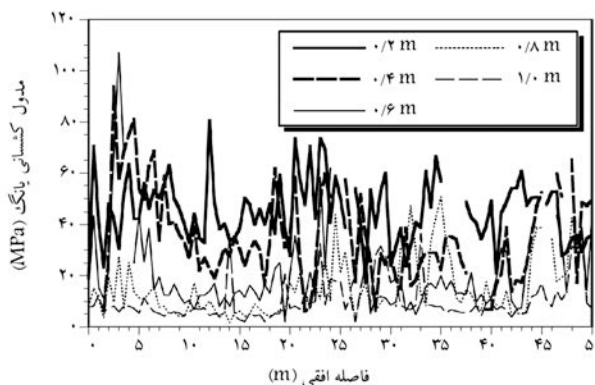
نکته ی مهمی که لازم است به آن توجه شود این است که در آزمایش های انجام شده بر روی ماسه ی تیکنو کمیته تنش مؤثر قائم ۵۰ کیلو پاسکال است؛ این سطح تنش را می توان معادل عمق حدوداً ۳ متر تلقی کرد. در بررسی نشست شالوده های سطحی، از آنجا که حوزه ی تأثیر تنش معمولاً تا عمق ۵ برابر عرض



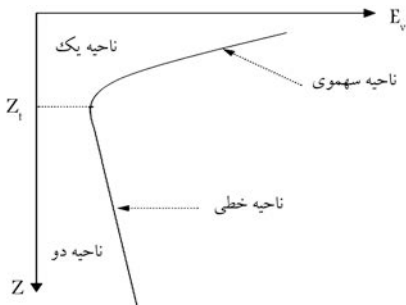
شکل ۲. مدول کشسانی و مقاومت برشی زهکشی نشده با عمق برای رس کاتولینیت.^[۶]



شکل ۳. تغییرات ضریب فشار سکون خاک با عمق برای ماسه ی سست تا متوسط.^[۷]



شکل ۴. تغییرات مدول سختی خاک در راستای افقی، برای پنج عمق مختلف.^[۴]



شکل ۵. نمایش شماتیک الگوی تغییرات مدول تغییر شکل خاک.

با عمق کاهش می‌یابد. در ناحیه‌ی دو مدول تغییر شکل دارای افزایش نسبتاً خطی با عمق است.

در شکل ۵ تغییرات مدول تغییر شکل با عمق به صورت شماتیک نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود در عمق Z_t که مرز بین دو ناحیه‌ی ۱ و ۲ است روند تغییرات مدول سختی عوض می‌شود. این عمق را می‌توان «عمق تبدیل» نامید.

برای بررسی صحت وجود «عمق تبدیل» برای مدول‌های سختی به صورت تحلیلی از رابطه‌ی ۱ که تأثیر تنش اعمال شده در جهات مختلف (i, j) ، نسبت منافذ (تابع $f(e)$)، تأثیر طبیعت خاک (پارامترهای S, n, k) و نسبت بیش تحکیمی (OCR) را بر روی مدول‌های سختی در نظر می‌گیرد،^[۸] استفاده می‌شود.

$$G_{ij} = S_{ij} f(e) (OCR)^k pr^{(1-n_i-n_j)} (\sigma'_i)^{n_i} (\sigma'_j)^{n_j} \quad (1)$$

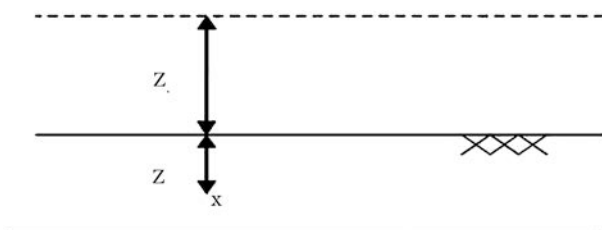
در این رابطه، σ'_i و σ'_j تنش مؤثر در جهات i و j ، pr فشار مرجع و S_{ij} ثابتی است که به جنس خاک بستگی دارد. با فرض این که $f(e)$ و S_{ij} و pr وابستگی ناچیزی به عمق داشته باشند، رابطه‌ی ۱ برای مدول سختی خاک به رابطه‌ی ۲ تبدیل می‌شود:

$$E = C (OCR)^k (\sigma'_v)^n \quad (2)$$

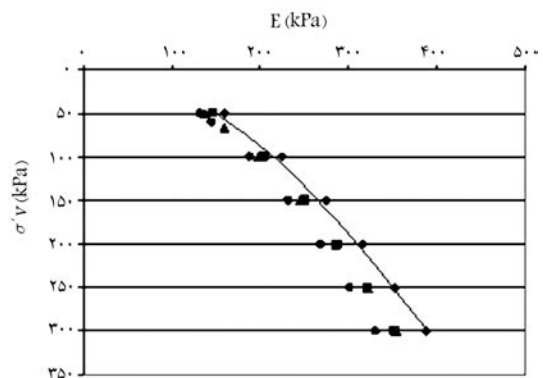
که در آن C یک عدد ثابت است. از آنجا که عمق تبدیل عمقی است که در آن مدول سختی خاک نسبت به عمق به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد، برای یافتن عمق تبدیل ابتدا باید پارامترهای تأثیرگذار رابطه‌ی ۲ را برحسب عمق (Z) نوشته و مشتق مدول سختی نسبت به Z برابر صفر قرار داد. برای یافتن ارتباط OCR با عمق (شکل ۶)، ارتفاع لایه‌ی خاکی را که یاربرداری شده و باعث ایجاد بیش تحکیمی در لایه‌ی خاک شده برابر Z_0 در نظر می‌گیریم. در این صورت OCR برابر است با:

$$OCR = \frac{\gamma'(z+z_0)}{\gamma'z} = 1 + \frac{z_0}{z} \quad (3)$$

رابطه‌ی به دست آمده که مربوط به یک هذلولی است با نمودار تغییرات OCR که در شکل ۲ نشان داده شد هم‌خوانی خوبی دارد. اکنون برای مدول سختی خاک



شکل ۶. نمایش شماتیک بیش تحکیمی در عمق Z_0 .



شکل ۴. تغییرات مدول سختی خاک با عمق برای ماسه‌ی تیکینو.^[۵]

پی ($5B$) است، ارزیابی دقیق‌تر پارامترهای رفتاری در اعماق سطحی از اهمیتی دوچندان برخوردار است. بنابراین باید با بررسی سایر مطالعات انجام شده -- نظیر آزمایش‌های برجا -- تصویر روشنی از حوزه‌ی تغییرات مدول سختی خاک در اعماق کم ارائه داد، و در مطالعه‌ی آماری نشست شالوده‌های سطحی و بررسی ناهمگونی مدول سختی تغییرات آن در اعماق سطحی نیز مد نظر قرار گیرد.

نشست شالوده‌های سطحی

هنگام اعمال بار بر اسکلت خاک از طریق شالوده‌های سطحی، تغییرات تنش مؤثر در اسکلت خاک باعث غلتیدن ذرات و ایجاد لغزش، خردشدگی و نیز تغییر شکل‌های کشسان در آن‌ها می‌شود. با این که تغییر شکل کشسان سهم کوچکی از نشست شالوده‌های سطحی را دارد، فرض رفتار کشسان و انجام محاسبات بر مبنای نظریه‌ی کشسانی برای اسکلت خاک -- علی‌رغم توسعه و ظهور نرم‌افزارهای قوی با امکان تعریف مدل‌های رفتاری پیشرفته -- همچنان متداول است. پارامترهای ماتریس رفتاری کشسان خاک که تغییرات تنش مؤثر در اسکلت خاک را به تغییرات کرنش مرتبط می‌سازد با فرض رفتار همگن و همسان به دو پارامتر مدول کشسانی خاک (E) و ضریب پواسون (ν) تقسیم می‌شوند. در این بین بازه تغییرات ضریب پواسون برای مصالح ژئومکانیکی محدودتر است، و تغییرات مدول کشسانی خاک -- به عنوان پارامتر اصلی و تأثیرگذار در تغییر شکل خاک -- از اهمیت به‌سزایی در محاسبات نشست شالوده‌های سطحی برخوردار است؛ از این رو در تحقیق حاضر مورد بررسی قرار گرفته است.

مدول تغییر شکل

در بررسی تغییرات مدول سختی در اعماق سطحی که سطح تنش قائم در آن پایین است معمولاً فراهم آوردن شرایط تنش مشابه در آزمایشگاه به سختی امکان‌پذیر می‌شود و بهتر است از نتایج آزمایش‌های برجا استفاده شود. در این میان آزمایش برجای دیلاتومتر از دقت نسبتاً کافی برخوردار است و می‌تواند توزیع پیوسته‌ی تغییرات مدول کشسانی را با عمق ارائه دهد. نتایج حاصل از آزمایش‌های برجای دیلاتومتر که توسط محققین مختلف انجام شده، همگی حاکی از آن است که منحنی تغییرات مدول تغییر شکل خاک از دو بخش کاملاً مجزا تشکیل شده است. در بخش اول که به ناحیه‌ی فوقانی مربوط است تغییرات مدول تغییر شکل سهموی است که

با این فرض که $\sigma'_v = \gamma' Z$ می توان رابطه ی ۴ را نوشت:

$$E = C \left(1 + \frac{z_0}{z} \right)^k (\gamma' z)^n \quad (4)$$

با مشتق گیری از رابطه ی ۴ بر حسب عمق، رابطه ی ۵ برای عمق تبدیل مدول سختی خاک (Z_{tr}) حاصل می شود:

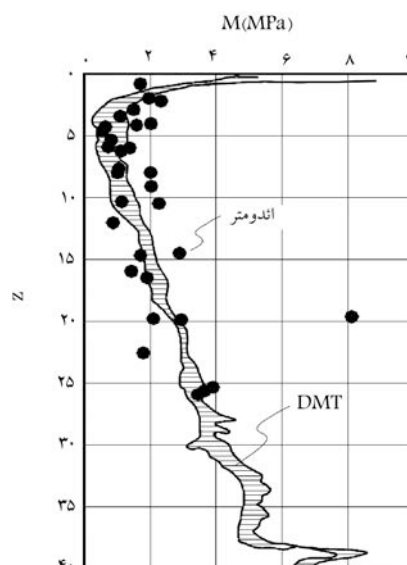
$$Z_{tr} = \left(\frac{z_0}{n} \right) (k - n) \quad (5)$$

به طور خلاصه می توان گفت که تغییرات مدول سختی تابع نسبت بیش تحکیمی و سطح تنش در هر عمق است که به ترتیب با عمق کاهش و افزایش می یابد. در واقع مدول سختی برآیند اثر این دو پارامتر است و در اعماق کم تر از عمق تبدیل اثر نسبت بیش تحکیمی (OCR) و در اعماق بیشتر از آن اثر تنش مؤثر غالب است.

روش یاد شده در آزمایش های برجایی که توسط محققین مختلف انجام شده کاملاً مشهود است؛ به عنوان مثال می توان به نتایج آزمایش های دیلاتومتر (DMT) و ادنومتر انجام شده بر روی خاک رس انسوی^۹ نروژ اشاره کرد. [۹] در این مطالعه روند تغییرات مدول تغییر شکل حجمی محصور شده (M) با عمق مطابق شکل ۷ ارائه شده است؛ مدول تغییر شکل خاک (E) را نیز می توان با روشی مشابه و به طور تقریبی از رابطه ی $E \approx 0.8 M_{DMT}$ محاسبه کرد. علاوه بر این نتایج مطالعات انجام شده توسط محققین دیگر بر روی خاک های مختلف -- اعم از ماسه یی و رسی -- به نوعی مؤید مطلب یاد شده است. [۷، ۱۰، ۱۲]

نگاهی مجدد به شکل ۱ مربوط به اندازه گیری های مدول سختی خاک توسط دیلاتومتري در اعماق سطحی [۹] مؤید مطلب گفته شده در بالاست. اگرچه مدول تغییر شکل خاک در راستای افقی دارای توزیع تصادفی و ناهمگون از نوع ذاتی نوع اول است، میانگین آن با عمق کاهش یافته و دارای ناهمگونی ذاتی نوع دوم و روند معین است.

در توزیع افزایش تنش قائم با عمق ناشی از بارگذاری شالوده های سطحی، بخش عمده ی تمرکز تنش ها در نواحی سطحی اتفاق می افتد. بنابراین مدول تغییر شکل این بخش نقشی اساسی در تخمین نشست دارد. نگاهی به منابع اشاره شده ی



شکل ۷. تغییرات مدول حجمی محصور شده در دو آزمایش دیلاتومتر و ادنومتر برای رس انسوی. [۹]

پیشین نشان می دهد که عمق تبدیل (Z_{tr}) برای خاک های مورد مطالعه بین ۲ تا ۴ متر متغیر است که با فرض بُعد پی $B = 2$ m، این اعماق معادل عمق نسبی (Z/B) حدود ۱ تا ۲ است که خود معادل حباب تنش (q/q_0) حدود ۰٫۲۸ تا ۰٫۵۵ برای شالوده ی نواری و ۰٫۱۳ تا ۰٫۳۵ برای شالوده ی مربعی، در زیر خط مرکزی شالوده است. [۱۳] این اعداد با توجه به سطوح افزایش تنش غیرقابل اغماض به روشنی بیانگر اهمیت در نظر گرفتن توزیع واقعی مدول تغییر شکل در اعماق سطحی اند.

نظریه ی فضای تصادفی

نظریه ی فضای تصادفی یک گستره ی n بعدی از تحلیل سری های زمانی است [۱۲] که در آن ها از تابع مهم آماری خودهمبستگی^۹ استفاده می شود. [۱۳] تابع خودهمبستگی بیانگر تغییرات ضریب همبستگی (ρ_τ) بر حسب فاصله ی تأخیر (τ) است که به صورت رابطه ی ۶ بیان می شود:

$$\rho_\tau = \frac{c_\tau}{c_0} \quad (6)$$

در این رابطه، c_τ خودهمبستگی در فاصله ی τ و c_0 مقدار کواریانس

$$Cov(X_i, X_{i+\tau}) = E[(X_i - \bar{X})(X_{i+\tau} - \bar{X})]$$

است که در آن X_i و $X_{i+\tau}$ به ترتیب مقدار پارامتر در مکان های i و $i + \tau$ ، \bar{X} مقدار میانگین متغیر X در فضای مسئله، E امید ریاضی و c_0 مقدار کواریانس در فاصله ی صفر، و به عبارت دیگر واریانس متغیر X است.

تابع خودهمبستگی آماری به صورت نموداری از تغییرات ρ_τ بر حسب فاصله ی تأخیر $T = 0, 1, 2, \dots$ است که در آن T بیشینه فاصله ی تأخیر است که عموماً برابر $N/4$ در نظر گرفته می شود؛ [۱۵] N تعداد کل نقاطی است که مقادیر پارامتر مزبور در آن نقاط محاسبه شده است. در این صورت مقدار تابع خودهمبستگی نمونه ها در فاصله ی تأخیر τ از رابطه ی ۷ به دست می آید:

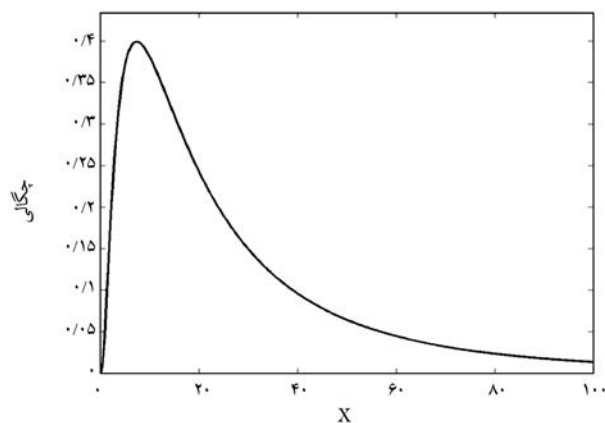
$$\rho_\tau = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (X_i - \bar{X})(X_{i+\tau} - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad (7)$$

در بررسی رفتار تصادفی خاک ها در مسائل ژئوتکنیکی سه پارامتر میانگین، انحراف معیار و مقیاس نوسان (θ) مورد توجه قرار گرفت. [۱۶] مقیاس نوسان شاخصی است برای اندازه گیری میزان همبستگی پارامتر مورد بررسی و فاصله یی است که در آن پارامترهای مربوط به خاک همبستگی زیادی از خود نشان می دهند و خارج از این بازه این پارامترها به صورت متغیرهای تصادفی غیرهمبسته رفتار می کنند. [۱۷]

محققین نشان دادند که مقیاس نوسان بعضی پارامترها را می توان با محاسبه ی فاصله ی بارتلت^{۱۰} به کمک رابطه ی ۸ به دست آورد. [۱۸] در این حالت مقیاس نوسان فاصله یی است که در آن تابع خودهمبستگی اولین بار با یکی از خطوط ترسیمی مربوط به این رابطه برخورد می کند. معادله ی این خطوط از رابطه ی ۸ به دست می آید:

$$r_\tau = \pm \frac{1.96}{\sqrt{N}} \quad (8)$$

به عنوان مثال، نمودار خودهمبستگی بر حسب فاصله ی افقی برای داده های ارائه شده در شکل ۱ مربوط به مدول تغییر شکل خاک در اعماق مختلف رسم شده است



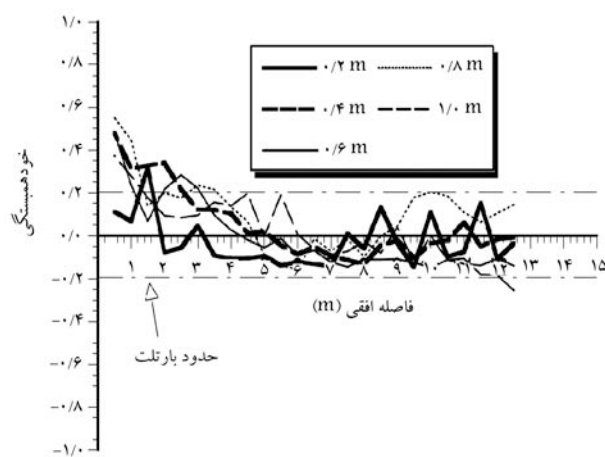
شکل ۹. تابع چگالی احتمال توزیع لگاریتم نرمال برای پارامتر X با میانگین $\mu = 12.18$ و انحراف معیار $\sigma = 7.39$.

و امکان آزادی عمل را از متغیر تصادفی سلب می‌کند (شکل ۹). اشکال دیگر توزیع لگاریتم نرمال به روشی که توسط محققین قبلی مورد استفاده قرار گرفته آن است که در توزیع لگاریتم نرمال همبستگی بین داده‌های لگاریتمی متضمن همبستگی در مقیاس واقعی نیست. مفهوم این نکته آن است که چنانچه در دو نقطه‌ی مجاور، مقادیر لگاریتم پارامتر ژئوتکنیکی اختلاف اندکی داشته باشند اختلاف بین آن دو پارامتر در مقیاس واقعی می‌تواند غیرقابل قبول باشد. البته این نقیصه را می‌توان با انتخاب توزیع مناسب‌تر و واقعی‌تر برای پارامترهای رفتاری خاک برطرف کرد.

در صورت استفاده از توزیع نرمال برای مدول کشسانی و چنانچه، برای مثال، میانگین این پارامتر برابر با 10^4 kPa و ضریب تغییرات (COV) 11 -- که برابر نسبت انحراف معیار به میانگین است -- برابر ۴۰ درصد (که عدد بزرگی است) فرض شود احتمال این که عدد تولیدشده برای مدول کشسانی منفی شود ۰/۶۲ درصد خواهد بود که احتمال بسیار کوچکی است و می‌توان با استفاده از قدر مطلق توزیع نرمال از تولید مقادیر منفی برای کمیت‌های ژئوتکنیکی جلوگیری کرد، بدون این که تغییر عمده‌ی در شکل توزیع ایجاد شود.

در سال ۲۰۰۲، با استفاده از نظریه‌ی حوزه‌های میانگین محلی (LAS) مدلی فضایی برای محاسبات مربوط به نشست شالوده‌های سطحی ارائه شد^[۲۲] که در آن مدول کشسانی به‌عنوان پارامتر متغیر دارای توزیع لگاریتم نرمال و ساختار همبسته‌ی فضایی گوسی با مقیاس نوسان یکسان در جهات مختلف بوده است. به‌عنوان زمینه‌ی کاربردی دیگری از نظریه‌ی فضای تصادفی، محققین با مقایسه‌ی نتایج اندازه‌گیری‌های صحرایی و تحلیل‌های عدم قطعیت اظهار داشتند که نسبت نشست تخمینی به نشست اندازه‌گیری‌شده از توزیع بتا پیروی می‌کند^[۲۳] و بر این اساس نمودارهای طراحی استخراج شد. اکثر مطالعات انجام‌شده‌ی مربوط به نشست شالوده‌های سطحی در حوزه‌ی نظریه‌ی فضای تصادفی در فضای دوبعدی انجام گرفته‌اند. با این حال در سال‌های اخیر با مطالعه‌ی سه‌بعدی این مسئله، اثر پارامترهای مختلف -- اعم از میانگین، ضریب تغییرات و مقیاس نوسان -- بر پارامترهای آماری نشست محاسبه شده بررسی شده است.^[۲۴]

در سال ۲۰۰۹ اثر انواع مختلف توزیع‌های آماری -- اعم از لگاریتم نرمال، گاما و بتا -- برای مشخص کردن تنوع فضایی مدول کشسانی در نشست شالوده‌های سطحی بررسی شد.^[۲۵] در این مطالعه نشان داده شد که اثر نوع توزیع آماری پارامتر تغییر شکل پذیری خاک می‌تواند به‌خصوص در مواقعی که ضریب تغییرات



شکل ۸. نمودار تغییرات خودهمبستگی مدول کشسانی برحسب فاصله‌ی افقی.^[۲۴]

(شکل ۸). مشاهده می‌شود با توجه به این که تعداد داده‌های (N) مربوط به هر یک از این اعماق ۱۰۰ است، نمودارهای خودهمبستگی مربوط به اعماق پنج‌گانه‌ی خط $r_{\tau} \approx 0.2$ را در فواصل تقریبی بین ۰/۵ تا ۲/۵ متر با میانگینی برابر ۱/۴ متر قطع می‌کنند که معادل مقیاس نوسان متوسط نمونه‌هاست.

مدل‌های تصادفی پیشینی

پس از معرفی ناهمگونی به‌عنوان شاخص عمده‌ی مصالح ژئومکانیکی و مطرح کردن نظریه‌ی فضای تصادفی به‌عنوان روشی برای در نظر گرفتن توزیع تصادفی پارامترهای ژئوتکنیکی و معرفی پارامترهای مورد نیاز برای تعریف این فضا، در این بخش به بررسی اجمالی مدل‌های تصادفی ارائه‌شده در گذشته پرداخته می‌شود.

در سال ۱۹۸۱ مدلی دوبعدی از فضای تصادفی ارائه شد که از روش اجزاء محدود برای انجام محاسبات مربوط به نشست‌های کلی و تفاضلی شالوده‌ها بهره می‌جست.^[۱۹] در این تحقیق مدول کشسانی خاک با توزیع تصادفی در نظر گرفته شده و دو نوع تابع همبستگی گوسی و نمایی برای بیان تغییرات و توزیع آماری این متغیر مورد استفاده قرار گرفته است.

در مدلی که در سال ۱۹۹۲ ارائه شد، مدول برشی خاک به‌عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته شد و از توزیع نرمال (گوسی) به‌عنوان توزیع متغیر تصادفی بهره‌می‌جست.^[۲۰] فضای مدل به حلقه‌هایی حول محور مرکزی با مدول کشسانی ثابت تقسیم شده و از سوی دیگر فاصله‌ی همبستگی بالایی برای متغیر تصادفی در نظر گرفته شد که غیر واقع‌بینانه است.

در سال ۱۹۹۴ مدول کشسانی خاک به‌عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته شد با این فرض که این پارامتر دارای توزیع لگاریتم نرمال در فضای مسئله است.^[۲۱] برای بیان همبستگی فضایی این پارامتر، از تابع ضریب همبستگی نمایی با این فرض که مدول کشسانی حول محور مرکزی شالوده دارای تقارن است، استفاده شد. دلیل استفاده از توزیع لگاریتم نرمال در مسائل ژئوتکنیکی این است که متغیرهای ژئوتکنیکی کمیت‌هایی غیرمنفی‌اند و بنابراین با اتخاذ توزیع نرمال برای این پارامترها، ظهور مقادیر منفی برای آن‌ها محتمل خواهد بود که این قابل قبول نیست. نگاهی دقیق به توزیع لگاریتم نرمال نشان می‌دهد که این توزیع یک توزیع نامتقارن است و احتمال این که عدد تولیدشده بیشتر از مقدار میانگین باشد بیشتر از احتمال تولید مقادیر کوچک‌تر از میانگین است و دارای تجمع بیشتری حول میانگین است

Z_1^1, Z_2^1 با توزیع نرمال به‌گونه‌ی تولید می‌شود که سه شرط زیر در مورد میانگین و واریانس آن‌ها برقرار باشد:

الف) واریانس آن‌ها از نظریه‌ی تقسیم‌بندی موضعی میانگین پیروی کند:

ب) این دو عدد دارای همبستگی کامل باشند:

ج) میانگین آن‌ها برابر میانگین حوزه‌ی ماقبل (حوزه‌ی مادر) باشد؛ یعنی

$$(Z_1^1 + Z_2^1)/2 = Z^1$$

در مرحله‌ی دوم دو عدد Z_1^2 و Z_2^2 با توزیع نرمال به‌گونه‌ی تولید می‌شوند که علاوه بر این که سه شرط فوق در مورد میانگین و واریانس آن‌ها برقرار است، با مقادیر Z_1^1 و Z_2^1 که در خانه‌های مجاور تولید شده‌اند به‌طور کامل همبسته باشند.

به‌عنوان نمونه فرض کنید که داده‌های مربوط به مرحله‌ی i ام موجود بوده و قرار است که مقادیر مربوط به مرحله‌ی $i+1$ تولید شود. ابتدا لازم است فضای مسئله برای این مرحله تعریف شود:

$$D^i = \frac{D}{r^i} \quad i = 0, 1, 2, \dots, L \quad (9)$$

که در آن D کل فضای مسئله و i شماره مرحله است. شکل ۱۱ به‌طور شماتیک ارتباط بین مراحل متوالی و شماره‌گذاری خانه‌های ایجادشده را نمایش می‌دهد.

مقادیر ایجادشده برای خانه‌های $2j-1$ و $2j$ از روابط 1^0 و 1^1 به دست می‌آید:

$$Z_{2j}^{i+1} = M_{2j}^{i+1} + c^{i+1} U_j^{i+1} \quad (10)$$

$$Z_{2j-1}^{i+1} = 2Z_j^i - Z_{2j}^{i+1} \quad (11)$$

که برای به دست آوردن M_{2j}^{i+1} از چند همسایگی Z_j^i در مرحله‌ی i ام استفاده می‌شود:

$$M_{2j}^{i+1} = \sum_{k=j-n}^{j+n} a_{k-j}^i Z_k^i \quad (12)$$

در رابطه‌ی ۱۲ با انتخاب $n=3$ یا $n=5$ نتایج قابل قبولی به دست خواهد آمد. با فرض این که U_j^{i+1} یک عدد نرمال با میانگین صفر و انحراف معیار واحد است $(U_j^{i+1} \approx N(0, 1))$ ، ضرایب a_{k-j}^i و c^{i+1} به ترتیب از روابط ۱۳ و ۱۴ محاسبه می‌شوند:

$$E [Z_{2j}^{i+1} Z_m^i] = \sum_{k=j-n}^{j+n} a_{k-j}^i E [Z_k^i Z_m^i] \quad (13)$$

$$(c^{i+1})^2 = E \left[(Z_{2j}^{i+1})^2 \right] - \sum_{k=j-n}^{j+n} a_{k-j}^i E [Z_{2j}^{i+1} Z_m^i] \quad (14)$$

مرحله i ام	j	$j+1$		
مرحله $i+1$ ام	$2j-1$	$2j$	$2j+1$	$2j+2$

شکل ۱۱. ارتباط بین مراحل ایجاد داده‌ها در نظریه‌ی تقسیم‌بندی موضعی.

و مقیاس نوسان بالاست تأثیر قابل توجهی بر نشست تخمینی داشته باشد. اگرچه اهمیت عدم قطعیت در مسائل ژئوتکنیکی به‌اندازه‌ی کافی روشن شده، در عمل به‌دلیل پیچیدگی به‌کارگیری این عدم قطعیت‌ها و آسان‌تر بودن ارزیابی به‌روش مشخصه پیشرفت قابل توجهی در این زمینه اتفاق نیفتاده است. بنابراین از مقادیر متوسط پارامترهای رفتاری در طراحی سازه‌های مختلف ژئوتکنیکی استفاده می‌شود.

باید توجه داشت چنان‌که در بخش‌های پیشین مربوط به ناهمگونی مشخص شد تغییرات مدول کشسانی میانگین در راستای قائم (عمق) از روندی مشخص پیروی می‌کند و در صورت رعایت نکردن این ویژگی ممکن است با حالت‌هایی مواجه شویم که در آن توزیع این پارامتر در راستای قائم (عمق) کاملاً متناقض باشد با روند واقعی که همان ناهمگونی ذاتی نوع دوم (روند مشخص) است. لحاظ نکردن این نکته که میانگین پارامترهای مزبور همراه با تغییر سطح تنش در راستای قائم روند مشخصی را دنبال می‌کنند ضعف عمده‌ی است که در مدل‌های ارائه‌شده توسط این محققین مشاهده می‌شود. به عبارت دیگر مدل‌های تصادفی مورد استفاده باید چنان تعریف شوند که در عین حال که تغییرات و توزیع تصادفی پارامتر مورد مطالعه را در راستای افقی در نظر می‌گیرند قادر به مدل‌سازی ناهمگونی در راستای قائم ناشی از تغییرات سطح تنش نیز باشند.

مدل تصادفی ارائه‌شده در تحقیق حاضر

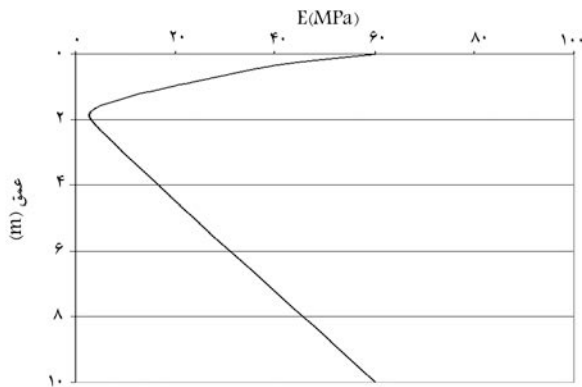
در این تحقیق سعی بر آن است که ضعف‌های عمده‌ی موجود در مدل‌های قبلی ارائه‌شده توسط سایر محققین در ارتباط با مدل‌سازی ناهمگونی برطرف شود. بدین منظور با فرض یک توزیع قدرمطلق نرمال برای مدول کشسانی در راستای افقی و توزیع مشخصه برای میانگین آن در راستای قائم و همچنین به‌کمک پاره‌سازی ۱۲ که در شکل‌بندی اجزای محدود به‌کار می‌رود، یک توزیع دوبعدی از این پارامتر در المان‌های رسم‌شده ایجاد شده است. نکته‌ی مهمی که باید به آن توجه داشت این است که در توزیع قدرمطلق نرمال برای مدول کشسانی به‌کمک نظریه‌ی حوزه‌های میانگین محلی (LAS) سعی شده همبستگی لازم بین مقادیر پارامتر مزبور در نقاط مجاور برقرار باشد. [۲۶]

نظریه‌ی حوزه‌های میانگین محلی

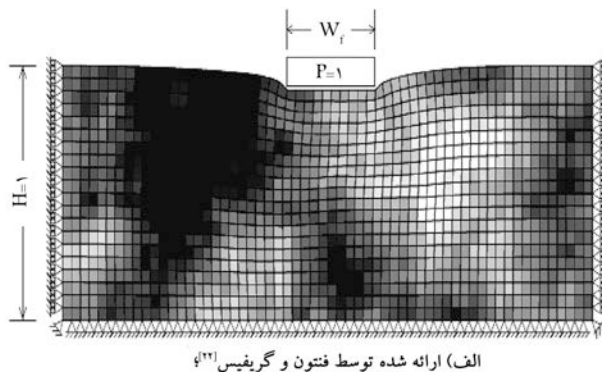
در ارائه‌ی این نظریه از یک روش چرخه‌ی استفاده شده است. [۲۶] مطابق شکل ۱۰ در مرحله‌ی صفر یک میانگین کلی Z^0 به‌وسیله‌ی توزیع نرمال ایجاد شده و سپس در مرحله‌ی اول کل لایه به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. در این مرحله دو عدد

مرحله ۰	Z^0							
مرحله ۱	Z_1^1				Z_2^1			
مرحله ۲	Z_1^2	Z_2^2	Z_3^2	Z_4^2	Z_5^2	Z_6^2	Z_7^2	Z_8^2
مرحله ۳	Z_1^3	Z_2^3	Z_3^3	Z_4^3	Z_5^3	Z_6^3	Z_7^3	Z_8^3
مرحله ۴								

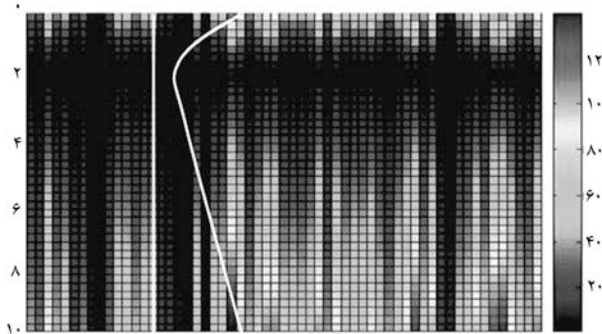
شکل ۱۰. تولید مرحله‌ی اعداد در نظریه‌ی تقسیم‌بندی موضعی. [۲۶]



شکل ۱۲. تغییرات میانگین مدول سختی خاک با عمق مورد استفاده قرار گرفته در تحقیق حاضر.



الف) ارائه شده توسط فتون و گریفیس [۲۳]



ب) تحقیق حاضر ($\theta = 10$).

شکل ۱۳. یک حالت محتمل از توزیع مدول کشسانی.

علاوه بر این، به منظور نشان دادن همبستگی بین داده‌ها یک توزیع دوبعدی از مدول تغییر شکل با همبستگی کم‌تر در مقایسه با آنچه که در شکل ۱۳ رسم شده، ارائه شده است. چنان که در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود تغییرات رنگ‌ها در راستای افقی در فواصل کم‌تری اتفاق افتاده که خود بیانگر کاهش همبستگی بین داده‌هاست. به صورت کمی نیز می‌توان همبستگی بین داده‌ها را با ترسیم نمودار خودهمبستگی برحسب فاصله‌ی تأخیر نمایش داد. در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نمودارهای خودهمبستگی که به ترتیب متناظر با توزیع تصادفی مدول تغییر شکل ترسیم شده در اشکال ۱۳ و ۱۴ هستند به نمایش درآمده است. در این نمودارها میزان همبستگی داده‌ها در هر حالت به خوبی نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود در شکل ۱۵ که مربوط به فاصله‌ی همبستگی ۱۰ متر است نرخ کاهش تابع خودهمبستگی برحسب فاصله‌ی افقی در مقایسه با شکل ۱۶ که مربوط به فاصله‌ی همبستگی ۳ متر است، در عمل باید با اتخاذ مقیاس

که در آن‌ها توابع احتمال به‌کمک رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$E \left[Z_k^i Z_{k+m}^i \right] = \frac{\sigma^2}{\gamma} \begin{bmatrix} (m-1)^2 \gamma ((m-1) D^i) \\ -2m^2 \gamma (m D^i) + \\ (m+1)^2 \gamma ((m+1) D^i) \end{bmatrix} \quad (15)$$

در رابطه‌ی ۱۵، γ تابع واریانس است و به صورت رابطه‌ی ۱۶ تعریف شده است: [۲]

$$\gamma(D^i) = \left(\frac{1}{\sigma D^i} \right) \int_0^{D^i} \int_0^{D^i} B(\xi - \xi') d\xi d\xi' = \int_0^{D^i} \left(|D^i| - |\tau| \right) B(\tau) d\tau \quad (16)$$

که در آن $B(\tau)$ تابع اتوکوریانس از $Z(t)$ با تأخیر τ بوده و $\sigma^2 = B(0)$ است. در تحقیق حاضر از تابع کوریانس گوس - مارکو^۳ (رابطه‌ی ۱۷) استفاده شده است:

$$B(\tau) = \exp\left(\frac{-2|\tau|}{\theta}\right) \quad (17)$$

که در آن τ فاصله‌ی تأخیر ($m D^i$) است. در این تحقیق به منظور ایجاد زمینه‌ی مناسب برای بررسی توزیع تصادفی نشست زیرشالوده‌های سطحی سعی بر آن است تا با ایجاد یک مدل واقعی از توزیع پارامترهای مؤثر در وقوع این پدیده، گام اولیه و اساسی مورد نیاز در انجام تحلیل‌های اجزاء محدود تصادفی (RFEM) برداشته شود. مهم‌ترین پارامتر در میان پارامترهای تأثیرگذار بر وقوع نشست، مدول تغییر شکل خاک است که خود شدیداً متأثر از ناهمگونی موجود در مصالح ژئومکانیکی است.

برای مدل‌سازی دوبعدی توزیع مدول کشسانی فرض شده است که این پارامتر در راستای افقی دارای توزیع تصادفی از نوع قدر مطلق نرمال با ضریب تغییرات ۴۰ درصد و میانگین مدول تغییر شکل مطابق با روند کلی ارائه شده در شکل ۵ است. مطالعات صورت گرفته مؤید این مطلب است که در میان پارامترهای ژئوتکنیکی، پارامترهای سختی خاک بیشترین ضریب تغییرات را دارند. [۲۷] با بررسی روند تغییرات مدول سختی حاصل از آزمایش‌های دیلاتومتری که در شکل ۱ ارائه شده، [۴] فرض ضریب تغییرات ۴۰ درصد مناسب به نظر می‌رسد. در این تحقیق با ثابت نگه داشتن ضریب تغییرات (COV) فرض شده که این پارامتر با افزایش سطح تنش مؤثر تغییر نمی‌کند. برای مدل‌سازی توزیع میانگین مدول تغییر شکل خاک در راستای قائم (عمق) با فرض عمق تبدیل ۲ متر، سهموی بودن بخش ابتدایی و خطی بودن بخش انتهایی (نمودار ۱۲)، و با بهره‌گیری از نرم‌افزار MATLAB و استفاده از نظریه‌ی حوزه‌های میانگین محلی (LAS) سعی شده توزیع نسبتاً واقعی از مدول کشسانی ایجاد شود.

در شکل ۱۳ یک حالت محتمل برای توزیع E ، در مقایسه با فرضیات دیگری که محققین در مطالعات خویش در نظر گرفتند، [۲۲] نشان داده شده است. در شکل ۱۳ الف حالتی به نمایش گذارده شده که در آن توزیع تصادفی مدول تغییر شکل خاک در دو راستای افقی و قائم منجر به تغییرات نامعقول و غیرواقعی این پارامتر در فضای مسئله شده است، در حالی که در شکل ۱۳ ب میانگین این پارامتر در راستای قائم از یک روند مشخص تبعیت می‌کند و در جهت افقی این پارامتر دارای توزیع تصادفی همبسته با مقایسه مقیاس نوسان مشخص است.

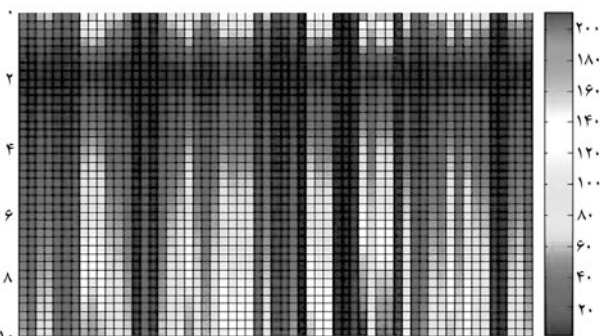
نتیجه‌گیری

ناهمگونی پدیده‌ی است که در بسیاری از مصالح مهندسی نظیر خاک‌ها رخ می‌دهد. از آنجا که هدف این پژوهش بررسی پارامترهای تأثیرگذار بر نشست شالوده‌های سطحی است، لذا به‌عنوان مهم‌ترین پارامتر مؤثر در وقوع نشست به بررسی مدول تغییر شکل خاک و همچنین ناهمگونی مرتبط با این پارامتر پرداخته شد و تغییرات مدول تغییر شکل با عمق که منعکس‌کننده‌ی ناهمگونی مشخصه است مورد بررسی دقیق قرار گرفت. بررسی نتایج آزمایش‌های برجا و روابط نظری مربوط به مدول تغییر شکل نشان داد که روند تغییرات این پارامتر از دو بخش مجزا تشکیل شده است. در بخش اول شاهد کاهش مدول با عمق با تغییرات سهموی و در بخش دوم شاهد افزایش آن با عمق با تغییرات نسبتاً خطی هستیم؛ هر کدام از این ویژگی‌ها تأثیر به‌سزایی در میزان نشست ایجاد شده دارد. بررسی روند تغییرات در این دو بخش منجر به معرفی یک مفهوم جدید تحت عنوان عمق تبدیل شد: «عمقی که در آن روند تغییرات مدول سختی تغییر می‌کند عمق تبدیل نامیده می‌شود و عمقی است که در آن اثر افزایش سطح تنش و بیش‌تحکیمی یکدیگر را خنثی می‌کنند». بدیهی است برای اعماق سطحی که کم‌تر از عمق تبدیل هستند با افزایش عمق به‌دلیل کاهش شدید بیش‌تحکیمی مدول تغییر شکل کاهش یافته و در اعماق غیرسطحی که بیشتر از عمق تبدیل هستند به‌دلیل افزایش تنش مؤثر در شرایطی که بیش‌تحکیمی تغییر چندانی ندارد، مدول تغییر شکل با عمق افزایش می‌یابد. در این تحقیق برای عمق تبدیل مدول تغییر شکل خاک رابطه‌ی ارائه شد که نشان می‌داد عمق تبدیل مدول سختی به میزان بیش‌تحکیمی و نوع خاک بستگی دارد.

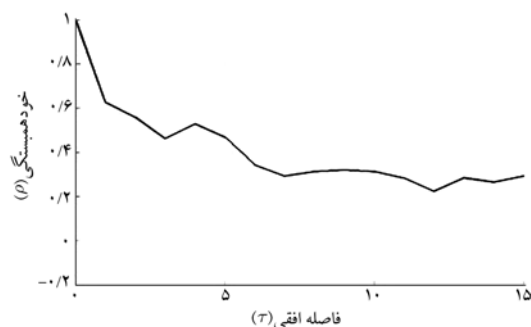
به‌منظور بررسی ناهمگونی افقی مدول تغییر شکل در این تحقیق از نظریه‌ی فضای تصادفی بهره گرفته شد که با تلفیق آن با نظریه‌ی اجزای محدود می‌توان به مدل‌سازی ناهمگونی در محاسبات نشست شالوده‌های سطحی، ظرفیت باربری آن‌ها، پایداری شیروانی‌ها و غیره پرداخت. برای توصیف یک فضای تصادفی سه پارامتر میانگین، انحراف معیار و مقیاس نوسان به‌عنوان پارامترهای شاخص معرفی شدند.

در این تحقیق با معرفی اشکالات مربوط به توزیع لگاریتم نرمال که توسط محققین قبلی مورد استفاده قرار گرفته است، و نیز با در نظر گرفتن یک توزیع قدرمطلق نرمال به مدل‌سازی تغییرات افقی مدول تغییر شکل قائم پرداخته شد. مدل‌سازی تغییرات قائم این پارامتر نیز با فرض ثابت ماندن ضریب تغییرات -- همان نسبت واریانس به میانگین -- و تغییرات مشخصه‌ی میانگین آن با توجه به مفهوم عمق تبدیل ارائه شده انجام گرفت.

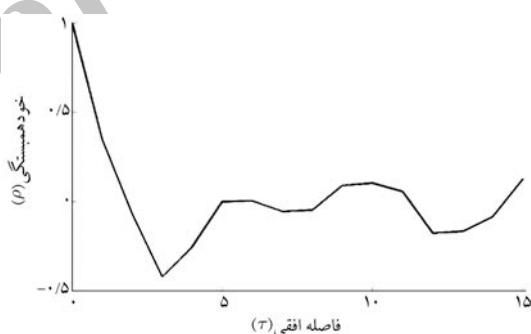
به‌منظور برقراری همبستگی بین متغیر تصادفی ایجاد شده در فضای مسئله در راستای افقی، از نظریه‌ی حوزه‌های میانگین محلی استفاده شد. ضمن معرفی این نظریه و فرضیات مورد استفاده در آن، و نیز با فرض مقیاس نوسان مشخص به تولید داده‌هایی پرداخته شد که دارای همبستگی مورد قبول در فواصل کم‌تر از این مقیاس هستند. با به‌کارگیری نظریه‌ی فضای تصادفی و توزیع معرفی شده برای مدول تغییر شکل مبتنی بر مفهوم عمق تبدیل می‌توان به مدل‌سازی نسبتاً واقعی رفتار مصالح ژئومکانیکی پرداخت. در این تحقیق به‌منظور نشان دادن اثر مقیاس نوسان در توزیع تصادفی مدول تغییر شکل خاک، حالات محتمل با احتساب سطوح مختلف همبستگی ایجاد شد. مقایسه‌ی این حالات با آنچه توسط محققین قبلی ارائه شده است می‌تواند گویای اهمیت مدل‌سازی واقعی مدول تغییر شکل خاک در هر دو راستای افقی و قائم باشد.



شکل ۱۴. یک حالت محتمل برای توزیع مدول کشسانی قائم با مقیاس نوسان $\theta = 3$.



شکل ۱۵. خودهمبستگی مدول تغییر شکل در راستای افقی و در عمق دلخواه با مقیاس نوسان $\theta = 10$.



شکل ۱۶. خودهمبستگی مدول تغییر شکل در راستای افقی و در عمق دلخواه با مقیاس نوسان $\theta = 3$.

نوسان (θ) مناسب و متناسب با آنچه از آزمایش‌های برجا به دست آمده است به مدل‌سازی توزیع پارامترهای مختلف پرداخت. بنابراین لازم است مطالعات کامل‌تر و جامع‌تری در ارتباط با مقیاس نوسان (θ) صورت گیرد تا بتوان دید روشن‌تری نسبت به تغییرات مدول تغییر شکل خاک‌های مختلف ارائه داد. این تحقیق صرفاً به‌منظور نشان دادن نحوه‌ی مدل‌سازی ناهمگونی به‌کمک نظریه‌ی فضای تصادفی و معرفی پارامترهای آماری مرتبط با توزیع آن‌ها اعم از میانگین، انحراف معیار و مقیاس نوسان در مدل‌سازی عددی است. نکته‌ی بی‌کی که در بررسی اشکال ۱۳ و ۱۴ حائز اهمیت به نظر می‌رسد تغییر در روند تغییرات مدول‌های تغییر شکل در عمق تبدیل است. چنان که مشاهده می‌شود، عمق تبدیل $Z_{tr} = 2 \text{ m}$ تراز است که در آن روند مزبور برعکس می‌شود. تغییرات شماتیک مدول تغییر شکل در شکل ۱۳ ب ترسیم شده است.

پانوشت

1. local average subdivisions
2. random field theory
3. lithological heterogeneity
4. inherent heterogeneity
5. deterministic trend
6. dilatometry test (DMT)
7. ticino sand
8. Onsoy clay
9. autocorrelation function
10. Bartlett distance
11. coefficient of variation
12. discretization
13. Gauss-Markov covariance
14. random finite element method (RFEM)

منابع

1. Morgenstern, N.R., *Performance in Geotechnical Practice*, The inaugural Lumb lecture, Hong Kong Institution of Engineers, pp. 59 (May 2000).
2. VanMarcke, E.H., *Random Fields: Analysis and Synthesis*, M.I.T. Press, Cambridge (1984).
3. Elkateb, T.; Chalaturnyk, R. and Robertson, P.K. "An overview of soil heterogeneity: Quantification and implications on geotechnical field problems", *Can. Geotech. J.*, **40**, pp. 1-15 (2003).
4. Jaksa, M.B.; Yeong, K.S.; Wong, K.T. and Lee, S.L. "Horizontal spatial variability of elastic modulus", *Proc. 9th Australia New Zealand Conference on Geomechanics*, Auckland (2004).
5. Bellotti, R.; Jamiolkowski, M.; Lo Presti, D.F. and O'Neill, D.A. "Anisotropy of small strain stiffness in Ticino sand", *Géotechnique*, **46**(1), pp. 115-131 (1996).
6. Mair, R.J., *Centrifugal Modelling of Tunnel Construction in Soft Clay*, PhD thesis, University of Cambridge (1979).
7. Marchetti, S. "In situ tests by flat dilatometer", *ASCE Jnl GED*, **106**(GT3), pp. 299-321 (1980).
8. Hardin, B.O. and Blandford, G.E. "Elasticity of particulate materials", *JGE Div. ASCE*, **115**(6), pp.788-805 (1989).
9. Lacasse, S., *In Situ Site Investigation Techniques and Interpretation for Offshore Practice*, Norwegian Geotechnical Inst., Report 40019-28 (Sept. 1986).
10. Skempton, A.W. and Henkel, D.J. "Tests on London clay from deep borings at paddington, victoria and the South Bank", *Proc. 4th Znt. Conf. Soil Me&, London*, **1**, pp. 100-106 (1957).
11. Iwasaki, K.; Tsuchiya, H.; Sakai, Y. and Yamamoto, Y. "Applicability of the marchetti dilatometer test to soft ground in Japan", *Proc. GEOCOAST '91*, Yokohama, 1/6 (Sept. 1991).
12. Ortigao, J.A.R.; Cunha, R.P. and Alves, L.S. "In situ tests in Brasulia porous clay", *Can. Geotech. J.*, **33**, pp. 189-198 (1996).
13. Bowels J.E., *Foundation Analysis and Design*, Fifth Edition, McGraw-Hill, p. 292 (1996).
14. Brockwell, P.J. and Davis, R.A. *Time Series: Theory and Methods*, Springer-Verlag, New York (1987).
15. Box, G.E.P. and Jenkins, G.M., *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Fransisco (1970).
16. VanMarcke, E.H. "Probabilistic modeling of soil profiles", *Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE*, New York, **103**(11), pp. 1227-1246 (1977).
17. Jaksa, M.B.; Brooker, P.I. and Kaggwa, W.S. "Inaccuracies associated with estimating random measurement errors", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, New York, **123**(5), pp. 393-401 (1997).
18. Jaksa, M.B.; Kaggwa, W.S. and Brooker, P.I. "Experimental evaluation of the scale of fluctuation of a stiff clay", *Proc. 8th Int. Conf. on the Application of Statistics and Probability*, Melchers, R.E.; Stewart, M.G.; Sydney, A.A.; Balkema, Rotterdam (eds.), (Publ. 2000), **1**, pp. 415-422 (1999).
19. Baecher, G.B. and Ingra, T.S. "Stochastic FEM in settlement predictions", *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE*, **107**(GT4), pp. 449-463 (1981).
20. Zeitoun, D.G. and Baker, R. "A stochastic approach for settlement predictions of shallow foundations", *Géotechnique*, **42**(4), pp. 617-629 (1992).
21. Paice, G.M.; Griffiths, D.V. and Fenton, G.A., *Influence of Spatially Random Soil Stiffness on Foundation Settlement*, In *Proceedings of the Conference on Vertical and Horizontal Deformation of Foundations and Embankments*, Part 1 (of 2), College Station, Tex. pp. 628-639 (1994).
22. Fenton, G.A. and Griffiths, D.V. "Probabilistic foundation settlement on a spatially random soil", *ASCE, J. Geotech. & Geoenv. Engrg.*, **128**(5), pp. 381-390 (2002).
23. Sivakugan, N. and Johnson, K. "Settlement predictions in granular soils: A probabilistic approach", *Géotechnique*, **54**, pp. 499-502 (2004).
24. Fenton G.A. and Griffiths D.V. "Three-dimensional probabilistic foundation settlement", *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, **131**, pp. 232-239 (2005).
25. Jimenez R. and Sitar N. "The importance of distribution types on finite element analyses of foundation settlement", *Computers and Geotechnics*, **36**, pp. 474-483 (2009).
26. Fenton, G.A. and Vanmarcke, E.H. "Simulation of random fields via local average subdivision", *J. Engrg. Mech.*, **116**(8), pp. 1733-1749 (1990).
27. Phoon, K.K. and Kulhawy, F.H. "Characterization of geotechnical variability", *Canadian Geotechnical Journal*, **36**(4), pp. 612-624 (1999).