

بررسی آزمایشگاهی و تحلیل عددی رفتار ارتعاشی مخازن مستطیلی بتنی ذخیره‌ی آب

امیرصادق قدس (دکتری)

محمد رضا اصفهانی^{*} (استاد)

امیرحسین کیوانی (دانشجوی دکتری)

گروه مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

برای بالا بردن دقیق تحلیل دینامیکی مخازن ذخیره‌ی آب، بررسی مشخصه‌ها و رفتار ارتعاشی سیستم آب و سازه اهمیت زیادی دارد. به منظور بررسی رفتار ارتعاشی مخازن ذخیره‌ی آب، یک مخزن مستطیلی بتنی به ابعاد $130 \times 130 \times 150$ سانتی‌متری ساخته و برای حالت‌های مختلف ارتفاع آب، آزمایش مودال بر روی آن انجام شد. در بخش تحلیلی با استفاده از روش المان محدود، مخزن ساخته شده در آزمایشگاه مدل و نتایج آن با پاسخ‌های آزمایش مقایسه و مطابقت خوبی مشاهده شد. برآسان نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی با زیاد شدن ارتفاع آب درون مخزن، مقادیر بسامدها کاهش و درصد میرایی افزایش یافته است. در مرور رابطه‌ی افزایش ارتفاع آب در مخزن، کاهش بسامدها، و افزایش میرایی در این نوشتار بحث و بررسی شده است. همچنین در تحلیل، اثر امواج سطحی بر روی نتایج وابسته به ارتفاع آزاد در حوزه‌ی بسامد، یعنی بسامدهای طبیعی، شکل مودها و توابع پاسخ بسامدی بررسی شد. برآسان نتایج تحلیل‌ها در نظر گرفتن امواج سطحی، منجر به پذیده‌شدن تعداد زیادی بسامدهای مربوط به بخش موج و اعمال فشارهای دینامیکی قسمت‌های بالائی مخزن نسبت به حالت نبود امواج سطحی می‌شود.

واژگان کلیدی: آزمایش مودال، اندرکنش آب و سازه، امواج سطحی، حوزه‌ی بسامدی، فشار هیدرودینامیکی، و مخازن بتنی مستطیلی.

۱. مقدمه

مخازن ذخیره‌ی آب شهری معمولاً از بتن مسلح و به صورت مستطیلی ساخته می‌شوند. تحقیقات اولیه بر روی پاسخ‌های دینامیکی مخازن ذخیره‌ی آب تحت تحریک‌های ناشی از زلزله صورت پذیرفت،^[۱] که در آن یک روش تقریبی برای تعیین فشار هیدرودینامیکی ناشی از شتاب افقی زمین ارائه و فرض شد که مایع درون مخزن تراکم‌ناپذیر و دیواره‌های آن صلب است. این روش در بسیاری از آینه‌ها برای محاسبه‌ی فشار هیدرودینامیکی مخازن وارد شده است. طبق نظریه‌ها، مدل دینامیکی مایعات که در درون مخزنی با جدار سخت قرار دارند، مدلی با درجه ازادی است.

در این روش، فشارهای هیدرودینامیکی به دو بخش سخت و موج مایع درون مخزن تقسیم شده که از طریق جرم‌های افزوده متمم رکز تقریب زده می‌شوند و بر روی دیوارهای مخزن قرار می‌گیرند. همچنین اثر انعطاف‌پذیری دیوارها بر مقدار و نحوه‌ی توزیع فشارهای هیدرودینامیکی بررسی و مشخص شده که فشارهای هیدرودینامیکی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۰ آذر ۱۳۸۹، اصلاحیه ۱۱، پذیرش ۳۰ آذر ۱۳۸۹.

است که ویزگی‌های بسامد، میرایی، و جرم سازه را در بر می‌گیرد.^[۱۹]

$$U(t) = \int_0^t p(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1)$$

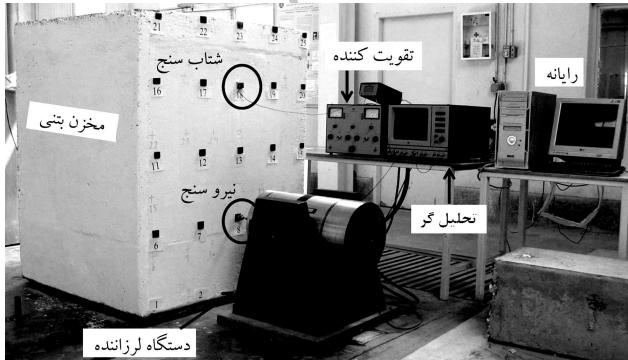
هنگامی که بار $p(\tau)$ نامشخص باشد، حل این تابع اولیه بسیار دشوار می‌شود. با بهره‌جویی از تبدیل فوریه، $p(\tau - t)$ از حوزه زمان به حوزه فرکانسی منتقل می‌شوند. بنابراین پاسخ سازه در حوزه فرکانسی از این ضرب ساده (رابطه ۲) به دست خواهد آمد.^[۱۹]

$$U(\omega) = 2\pi H(\omega) \cdot P(\omega) \quad (2)$$

در آزمایش مودال تجربی، باید سازه را در درجه آزادی مورد نظر با دستگاه لرزاننده و یا چکش ضربه تحریک کرد. پاسخ سازه با حسگرهای بسیار دقیق اندازه‌گیری و از نسبت پاسخ به تحریک، ماتریس (H) ، برپا می‌شود که این تحلیل ها با دستگاه تحلیل‌گر دو کاناله صورت می‌پذیرد.^[۲۰] نمودارهای پاسخ سازه در حوزه فرکانسی (FRF) نامیده می‌شوند و پارامترهای تحریکی مودال (بسامد، میرایی، و شکل مود) از مجموعه‌یی از اندازه‌گیری تابع‌های پاسخ فرکانسی به دست می‌آیند. برای نشان دادن خطاهای نمونه‌برداری و اندازه‌گیری، تابعی در دامنه بسامدی به نام چسیندگی (Coherence) تعریف شده است که مقدارهای بین صفر تا یک را در بر می‌گیرد.^[۲۱] اندازه‌گیری و نمونه‌برداری هنگامی دقیق است که این تابع نزدیک به یک باشد.

۱.۲. نمونه‌ی آزمایشی

به منظور تعیین مشخصات دینامیکی مخازن مستطیلی بتئی به کمک آزمایش مودال، یک نمونه مکعبی از این نوع مخازن با طول و عرض ۱/۳ متر، ارتفاع ۰/۵ متر، ضخامت دیوار و کف ۱۶۵ میلی‌متر ساخته شد. ابعاد نمونه با این هدف طرح شد که بسامدهای طبیعی آن مقادیر بالایی داشته باشند تا بتوان پاسخ‌ها را با دقت بالاتر و بدون هرگونه اغتشاشی برداشت کرد و همچنین غییرات بسامد مودهای مختلف به عملت افزایش ارتفاع آب در مخزن قابل ملاحظه باشد. شکل ۱، نمونه‌ی آزمایشی و دستگاه آزمایشی را نشان می‌دهد. بتن استفاده شده در ساخت نمونه دارای وزن مخصوص ۲۴۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب و مقاومت فشاری استوانه‌یی ۲۸ روزه‌ی ۲۷ مگاپاسکال و ضریب ارتجاعی ۰/۴۵ است و همچنین دیوارها و کف مخزن با آرماتور به قطر ۱۲ میلی‌متر و به فاصله‌ی ۲۰ سانتی‌متر در دو سفره مسلح شده است.



شکل ۱. دستگاه و نمونه‌ی آزمایشی.

مایعات، پدیده‌ی حرکت سطح آزاد مایع است که از تحریک خارجی مخزن همچون زلزله ناشی می‌شود. امواج سطحی موجب ایجاد فشارهای دینامیکی بر روی سازه مخزن می‌شوند که باید در طراحی سازه مخزن وارد شوند.^[۲۲] دامنه‌ی این حرکت وابسته به دامنه و بسامد حرکت مخزن، عمق مایع درون مخزن، مشخصات مایع و هندسه‌ی مخزن است.^[۱۰]

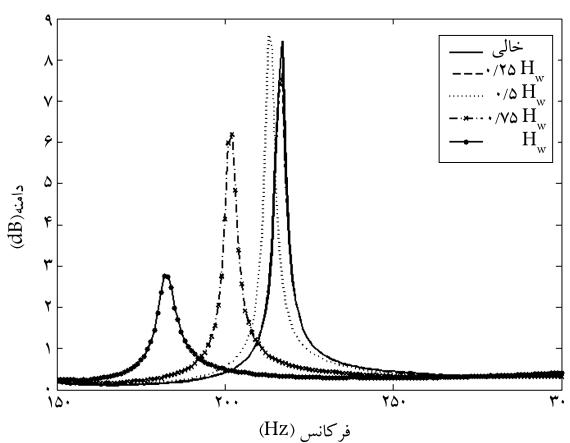
در اغلب پژوهش‌ها، مدل مخزن به صورت دو بعدی با بدنه‌ی صلب و مایع درون آن غیرچسبنده و تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است.^[۱۳-۱۱] همچنین حرکت غیرخطی سیال در مخازن استوانه‌یی و مستطیلی تحت بار هارمونیک و تحریک‌های ناشی از زلزله به صورت عددی بررسی شده است.^[۱۴] در این پژوهش پدیده‌ی امواج سطحی به صورت سه بعدی و با استفاده از روش المان مرزی در حوزه زمان مدل شده است که در آن مخزن به صورت صلب و مایع غیرچسبنده و تراکم ناپذیر در نظر گرفته شده است. در پژوهشی دیگر اثر توری خطی و غیرخطی امواج بر روی مودهای ارتعاشی و توزیع فشار هیدرودینامیکی برای مخزن مستطیلی دو بعدی با بدنه‌ی صلب بررسی شده است.^[۱۵] که در آن دوره‌ی تناوب مودهای مختلف آب و فشار ناشی از حرکت مایع بر روی بدنه‌ی مخزن با روش عددی المان محدود با توری خطی و غیرخطی تعیین شدند. نتایج نشان می‌دهند که غیرخطی در نظر گرفتن حرکت امواج سطحی تأثیر چندانی در دوره‌ی تناوب آب و توزیع فشار بر روی دیوارها ندارد.

در بالابدن دقت تحلیل دینامیکی مخازن ذخیره‌ی آب علاوه‌بر در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری دیوارها، بررسی مشخصه‌ها و رفتار ارتعاشی سیستم آب و سازه اهمیت دارد. در سال‌های اخیر، مطالعاتی بر روی رفتار ارتعاشی مخازن استوانه‌یی به صورت تحلیلی و آزمایشی انجام شده است که بیشتر بر روی بسامدهای سیستم مرکز بوده‌اند.^[۱۶]

آزمایش‌های ارتعاشی سازه‌ها به منظور مشخص کردن پارامترهای مودال (بسامدهای طبیعی، میرایی، و شکل مودها) و با بررسی روابط و مدل‌های تئوری صورت می‌پذیرد که بهمنزله‌ی یک آزمایش غیرمخرب می‌توان از آن بهره جست. آزمایش مودال یکی از آزمایش‌های غیرمخرب برای تعیین پاسخ و رفتار دینامیکی سازه‌ی واقعی است. در یکی از پژوهش‌های آزمایشگاهی که بر روی مخازن استوانه‌یی فولادی در سال ۱۹۹۰ انجام شد، برای استخراج مشخصات ارتعاشی، آزمایش مودال بر روی سه مخزن فولادی انجام شد.^[۱۷] پژوهشی دیگر که به صورت آزمایشگاهی و تحلیلی بر روی مخازن استوانه‌یی انجام شده است، با هدف درک بیشتر از پارامترهای مختلف بر روی مشخصات مودال مخازن ذخیره‌ی مایعات صورت گرفته است.^[۱۸] در این نوشتار، یک نمونه‌ی مخزن مستطیلی بتئی به صورت آزمایشی و تحلیلی به منظور تعیین مشخصه‌های ارتعاشی و پاسخ‌های دینامیکی بررسی شده است. در قسمت تحلیلی از روش المان محدود استفاده شده است که در این روش اثروجود امواج سطحی بر روی مشخصات دینامیکی مخزن نیز در نظر گرفته شده است.

۲. آزمایش مودال

تحلیل مودال، روند شناسایی ویزگی‌های دینامیکی سازه‌ها با بهکاربردن مودهای ارتعاشی آن‌هاست. ویزگی‌های دینامیکی موردنظر شامل بسامدهای طبیعی، میرایی، و شکل مودها هستند که با کمک آزمایش مودال به دست می‌آیند. پاسخ سازه به نیروی دلخواه از طریق یک انتگرال (رابطه ۱) که قابل استفاده برای هر سیستم دینامیکی خطی است، به دست می‌آید که در آن $(\tau - t)h$ تابع پاسخ ضربه‌ی واحد



شکل ۳. نمودار تابع پاسخ فرکانسی برای مخزن خالی و ارتفاعهای مختلف پر از آب.

از آزمایش را نشان می‌دهد و همان‌طورکه مشاهده می‌شود مقادیر این نمودار در بسامدهای مختلف به یک نزدیک بوده که نشان دهنده آن است که پاسخ‌ها عاری از اغتشاش است. شکل ۲ ب بهترین یک نمونه از نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی به دست آمده از آزمایش را برای مخزن خالی و پر از آب نشان می‌دهد. همان‌طورکه از نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی در شکل ۲ ب نتیجه می‌شود با پرشدن مخزن، محل قله‌های موجود در محور افقی نمودارها که بیان‌گر بسامدهای مودهای مختلف مخزن است، جایجا شده که نشان از کاهش بسامدها دارد. همچنین با پرشدن مخزن، نمودار تابع پاسخ فرکانسی در محل قله‌ها پهن‌تر شده است که نشان از افزایش میرایی دارد. شکل ۳، نمودار تابع پاسخ فرکانسی را در محدوده‌ی بسامد مود اول برای حالت‌های مختلف ارتفاع آب داخل مخزن نشان می‌دهد که در آن H_w ارتفاع دیوار مخزن است. چنان که مشاهده می‌شود، مقدار کاهش بسامد مود اول در حالت یک چهارم پر ($25 H_w$) بسیار ناچیز است، به طوری که منحنی تابع پاسخ فرکانسی آن بر روی منحنی تابع پاسخ فرکانسی در حالت مخزن خالی منطبق شده است. در حالی که با زیاد شدن ارتفاع آب از حالت نیمه‌پر به بعد، نرخ کاهش مقدار بسامد افزایش می‌یابد.

این وضعیت برای مقدار درصد میرایی (۱) نیز برقرار است، به طوری که این مقادیر از مخزن نیمه‌پر تا کاملاً پر افزایش بسیار بیشتری داشته است. مطابق شکل ۴، با استفاده از منحنی بخش حقیقی و موهومی نمودار تابع پاسخ فرکانسی به دست آمده از آزمایش و رابطه‌ی ۳ می‌توان (۱) را برای مودهای مختلف تعیین کرد.^[۲۲] از اختلاف میان بسامدهای ۲ و ۳ برای تعیین مقدار نسبت میرایی در مود اول استفاده می‌شود. مقادیر دقیق بسامدها و درصد میرایی آزمایشگاهی در جدول ۱، در بخش نتایج تحلیلی ارائه شده است.

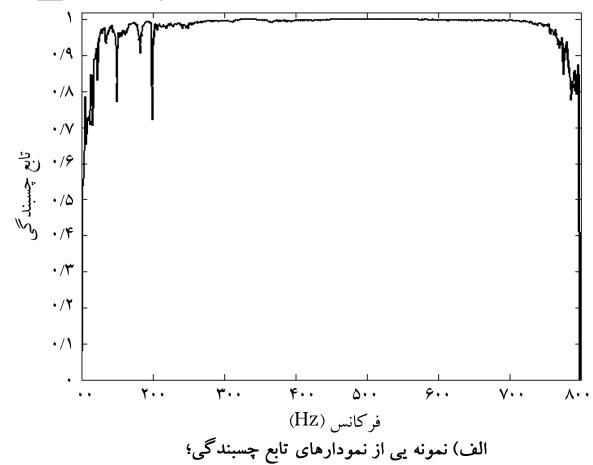
$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_{n_1} (1 + \zeta_{q1}) - \omega_{n_1} (1 - \zeta_{q1}) = 2\zeta_{q1} \omega_{n_1}$$

$$\text{or } \zeta_{q1} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_{n_1}} \quad (3)$$

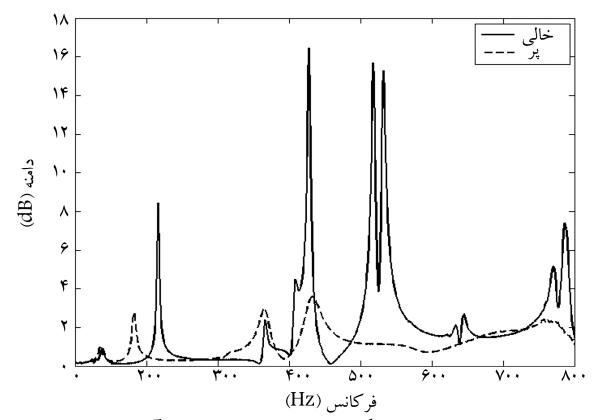
۳. اندرکش آب و سازه

اندرکش به معنای کنش و واکنش دو محیط مجاور هم است. در این حالت سازه بر سیال اثر می‌گذارد و سیال نیز آن اثر را برمی‌گرداند و سازه‌یی که اثر متقابل را دریافت کرده است، اثر دیگری بر سیال می‌گذارد و رفتار رفت و برگشتی ادامه پیدا می‌کند.

۲.۲ آزمایش مودال و نتایج
در آزمایش مودال بر روی نمونه‌ی ساخته شده، تحریک (سیگنال‌های تصادفی) به وسیله‌ی دستگاه لرزاننده متصل شده به مخزن انجام شد (شکل ۱). این دستگاه لرزاننده به وسیله‌ی یک میله‌ی بلند و لاغر به مخزن متصل شد تا نیرو فقط در امتداد محور آن به مخزن وارد شود. هنگام انجام آزمایش با دستگاه لرزاننده برای کمینه کردن نشت، روی هم افتادگی و آلوهشدن نمودارهای پاسخ از یک پنجره‌ی دامنه‌ی زمانی ویژه استفاده شد. یک نیروسنج بین مخزن و میله‌ی باریک قرار گرفت تا نیروی اعمالی را اندازه‌گیری کند. آزمایش مودال در دو بخش انجام شد. در بخش نخست با تحریک مخزن و اندازه‌گیری شتاب‌ها، نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی به دست آمدند. این نمودارها نشان دهنده دریه‌های ماتریس (ω) هستند که ویژگی‌های مخزن را در برمی‌گیرد. به این منظور بر روی دیوارهای مخزن تعداد ۲۵ درجه‌ی آزادی تعریف شد. در کلیه‌ی آزمایش‌ها دستگاه لرزاننده در یک درجه‌ی آزادی به صورت ثابت قرار داده شد و پاسخ‌ها به وسیله‌ی شتاب سنج در سایر درجه‌های آزادی تعیین شدند. در بخش دوم با استفاده از روش همسان‌کردن نمودارها و یافتن ریشه‌های معادله، مقدار ویژه‌ی نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی تحلیل شدند. آزمایش مودال بر روی مخزن در یک حالت مخزن خالی و در چهار ارتفاع مختلف پر از آب انجام شد. نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی و چسبندگی به کمک دستگاه تحلیل‌گر دو کاناله اندازه‌گیری شدند. شکل ۲الف یک نمونه از نمودار تابع چسبندگی به دست آمده



الف) نمونه بی از نمودارهای تابع چسبندگی؛



ب) نمودار تابع پاسخ فرکانسی برای مخزن خالی و پر از آب.

شکل ۲. نمودار تابع پاسخ فرکانسی و چسبندگی نمونه‌ی آزمایشی.

جدول ۱. نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی برای مود درگیر اول و دوم مخزن.

ارتفاع آب	بسامد اول آزمایشگاهی (Hz)	بسامد اول تحلیلی (Hz)	اختلاف (%)	بسامد دوم آزمایشگاهی (Hz)	بسامد دوم تحلیلی (Hz)	اختلاف (%)	درصد میرایی مود اول (آزمایشگاهی)
خالی	۲۱۷,۰۰	۱۹۸,۷۱	۸,۴۲	۴۲۹,۰۰	۴۸۵,۸۹	۱۱,۷۰	۰,۴۰۷
۰,۲۵H _W	۲۱۶,۳۶	۱۹۸,۵۵	۸,۲۳	۴۲۲,۴۸	۴۸۱,۷۲	۱۲,۲۹	۰,۴۱۲
۰,۵H _W	۲۱۳,۲۲	۱۹۵,۹۷	۸,۰۸	۳۹۰,۰۸	۴۴۹,۸۱	۱۳,۲۸	۰,۴۱۷
۰,۷۵H _W	۲۰۱,۷۳	۱۸۶,۶۵	۷,۴۷	۳۸۰,۷۱	۴۳۵,۲۰	۱۲,۵۲	۰,۵۳۶
H _W	۱۸۲,۵۵	۱۷۰,۹۱	۶,۳۷	۳۶۶,۳۷	۴۲۴,۳۷	۱۳,۶۶	۱,۱۹۴

ماتریس میرایی C را می‌توان با استفاده از میرایی هیسترسیک^۱ یا رابطه‌ی ۵ محاسبه کرد.^[۲۳]

$$C = \frac{\beta_d}{\omega} K \quad (5)$$

در رابطه‌ی ۵، ضریب میرایی هیسترسیک و دارای مقدار ثابت است. رابطه‌ی ۴ را با درنظر گرفتن نیروهای خارجی مثل آب مخزن می‌توان به شکل رابطه‌ی ۶ بازنویسی کرد:

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = F_{ext} + F_w \quad (6)$$

F_w در این رابطه، بردار نیروی خارجی ناشی از آب مخزن است.

۲.۳. معادلات حاکم بر آب

برای مدل سازی محیط آب در این نوشتار، از فرمولاسیون اولری استفاده شده است. این فرمولاسیون به کارگیری درجات آزادی فشار را برای سیال ممکن می‌سازد.^[۲۴] معادله‌ی دیفرانسیل حرکت آب مخزن با فرض سیال تراکم پذیر، جریان غیرچرخشی و دامنه‌ی کوچک حرکت به شکل رابطه‌ی ۷ است.

$$\nabla^t p = \frac{1}{c^t} \frac{\partial^t p}{\partial t^t} \quad (7)$$

که در آن، c سرعت انتشار موج در آب و p فشار هیدرودینامیکی است. با گسته سازی اجرای محدود معادله‌ی ۷، برای هر المان مایع رابطه‌ی ۸ حاصل خواهد شد.

$$H^e P^e + \frac{1}{c^t} G^e \ddot{P} = R^e \quad (8)$$

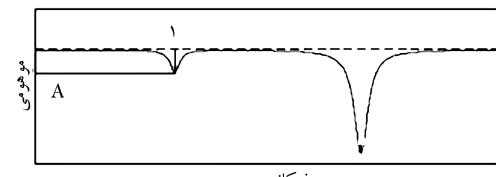
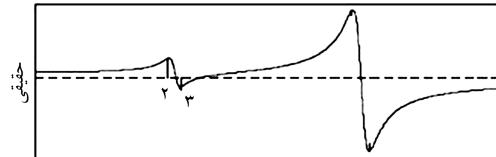
ماتریس‌های H^e, G^e و R^e برای هر المان به شکل رابطه‌های ۹ الی ۱۱ تعریف می‌شوند:

$$H^e = \int_V \left(\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N^T}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial N^T}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} \frac{\partial N^T}{\partial z} \right) dV \quad (9)$$

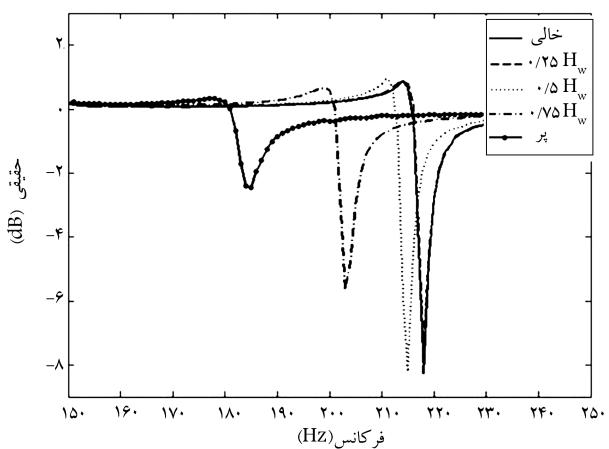
$$G^e = \int_V N N^T dV \quad (10)$$

$$R^e = \oint_A N \frac{\partial p}{\partial n} dA \quad (11)$$

در این روابط، N بردار توابع شکل و n بردار عمود بر سطح به طرف بیرون هستند. بردار نیروهای R^e از انتگرال گیری روی سطوح مرزی به دست می‌آید. براساس رابطه‌ی ۱۱، $\frac{\partial p}{\partial n}$ برای شرایط مختلف مرزی زیر باید محاسبه شود.



الف) بخش حقیقی و موهومی از یک نمودار تابع پاسخ فرکانسی؛



ب) بخش حقیقی نمودار تابع پاسخ فرکانسی آزمایشگاهی.

شکل ۴. نمودار بخش حقیقی و موهومی برای تعیین درصد میرایی.

که به طور مجزا قابل تحلیل نیست. در ادامه، معادلات اندرکش آب و سازه و روش

تحلیل مخزن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳.۱. معادلات حاکم بر سازه

با فرض رفتار خطی در رابطه‌ی تنش کرنش، معادله‌ی حرکت دینامیکی مخزن را می‌توان با رابطه‌ی ۴ نشان داد.

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = F_{ext} \quad (4)$$

که در این رابطه، r, \dot{r} و \ddot{r} به ترتیب بردارهای تغییر مکان، سرعت و شتاب نسبی سازه C, M و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی هستند. F_{ext} بردار نیروی خارجی وارد به سازه (مخزن) است.

عبارت‌های سمت راست معادله‌ی ۱۸ حاصل از اعمال شرایط مرزی ۱ و ۲ هستند. در صورت واردساختن اثر امواج سطحی در تحلیل‌ها، باید ماتریس \mathbf{G}^e از رابطه‌ی ۱۹ تعیین شود.

$$\mathbf{G}^e = \int_V \mathbf{N} \mathbf{N}^T dV + \frac{c^r}{g} \int_A \mathbf{N} \mathbf{N}^T dA \quad (19)$$

در ادامه، بسامدهای تحلیلی در دو حالت بود و نبود امواج سطحی تعیین شده‌اند.

۳.۳. معادلات اندرکنش آب و سازه

رابطه‌های ۶ و ۱۸ معادلات حرکت سازه و آب به‌طور مجزا هستند. معادله‌ی حرکت آب به‌وسیله‌ی بردار نیروهای خارجی \mathbf{F}_w به معادله‌ی حرکت سازه وابسته می‌شود. این بردار که فشارهای گرهی را به نیروی گرهی سازه مرتبط می‌کند، از رابطه‌ی ۲۰ محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{F}_w = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (20)$$

بنابراین روابط ۶ و ۲۰ را می‌توان به شکل رابطه‌ی ۲۱ نوشت:

$$M\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (21)$$

معادله‌های ۱۸ و ۲۱ به فرم ماتریسی به صورتی که مجهولات همگنی در سمت چپ قرار گیرند، با رابطه‌ی ۲۲ نشان داده می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} M & \cdot \\ \rho \mathbf{B} & \frac{c^r}{c^r} \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -\mathbf{B}^T \\ \cdot & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (22)$$

رابطه‌ی ۲۲، معادله‌ی وابسته‌ی سیستم آب و سازه است. چنانچه سطر دوم از معادله‌ی ۲۲ در $-\rho c^r$ ضرب شود، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} M & \cdot \\ -\mathbf{B} & -\frac{\rho}{c^r} \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -\mathbf{B}^T \\ \cdot & -\frac{H}{\rho} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{ext} \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (23)$$

چنان‌که از رابطه‌ی ۲۳ پیداست، ماتریس‌های جرم و سختی کل در معادله‌ی اندرکنش نامتقارن هستند. به دلیل نامتقارن بودن ماتریس‌های جرم و سختی دو سری بردار ویژه‌ی راست و چپ وجود دارد که لزوماً با هم برابر نیست و برای تحلیل مودال باید محاسبه شوند. به این شکل مودها، شکل مود درگیر گفته می‌شود. برای محاسبه‌ی بسامدهای سیستم باید مسئله‌ی مقادیر ویژه‌در روابط ۲۴ و ۲۵ حل شود.

$$\bar{\mathbf{K}}\phi_R = \bar{\mathbf{M}}\phi_R \Lambda \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{K}}\phi_L = \bar{\mathbf{M}}\phi_L \Lambda \quad (25)$$

محاسبه‌ی شکل مودهای درگیر امکان مقایسه با پاسخ‌های مربوط به نتایج آزمایشگاهی را فراهم می‌سازد. در این حالت باید مودهای مؤثر و هم‌راستا با جهت تحریک را مشخص کرد. همچنین می‌توان از شکل مودها برای ترسیم نمودار تابع پاسخ فرکانسی استفاده کرد. تعداد مودهای مناسب برای رسیدن به پاسخی با دقت مطلوب در این

۱۰.۲.۳. شرط مرزی دیوار سازه‌ی مخزن و آب مخزن

هنگامی که سیال با جسم جامد تماس دارد، با صرف نظر کردن از تغییرات چگالی سیال می‌توان ثابت کرد که رابطه‌ی ۱۲ برقرار است. این رابطه شتاب‌های گرهی $\ddot{\mathbf{r}}$ در جهت عمود بر سطح بدنه‌ی مخزن را به گرادیان فشار در سطح مخزن مرتبط می‌سازد.^[۲۴]

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{r}_n \quad (12)$$

پس از جایگزینی رابطه‌ی ۱۲ در رابطه‌ی ۱۱ و گسسته‌سازی اجزای محدود، رابطه‌ی ۱۳ حاصل می‌شود.

$$\mathbf{R}^e = -\rho \mathbf{B}^e \ddot{\mathbf{r}}^e \quad (13)$$

ماتریس \mathbf{B} در این رابطه به ماتریس اندرکنش معروف است و شتاب‌های گرهی را به فشار گرهی مرتبط می‌سازد.

۲۰.۲.۳. شرط مرزی سطح آب مخزن

در صورت چشم‌پوشی از اثر امواج سطحی روی مرز بالای سیال و آلام پنداشتن سطح آن هنگام نوسان آزاد مخزن (او حتی اجرایی)، مقدار فشار (P) در کل مرز برابر صفر می‌شود. بنابراین، این شرط مرزی مربوط به سیال که به شرط سطح آزاد معروف است، در حالت نبود امواج سطحی به صورت رابطه‌ی ۱۴ خواهد بود. در این حالت درجات آزادی مربوط به گره‌های سطح آب از معادلات حذف می‌شوند.

$$\mathbf{P}^e = \{ \cdot \} \quad (14)$$

در صورت واردساختن اثر امواج سطحی و در نظر گرفتن امواج گرانشی و نقلی ناشی از نوسان سیال در مرز فوقانی، این شرط مرزی (رابطه‌ی ۱۴) تغییر می‌کند و دیگر فشار در سطح سیال برابر صفر نخواهد بود. در این حالت، فشار در هر نقطه روی مرز مزبور برابر با حاصل ضرب وزن حجمی سیال در ارتفاع موج ایجاد شده در همان نقطه است (رابطه‌ی ۱۵).

$$P = \rho g \eta \quad (15)$$

با دو بار مشتق‌گیری زمانی از دو سوی معادله‌ی ۱۵ و استفاده از مفهوم پتانسیل سرعت، رابطه‌ی ۱۶ را خواهیم داشت:

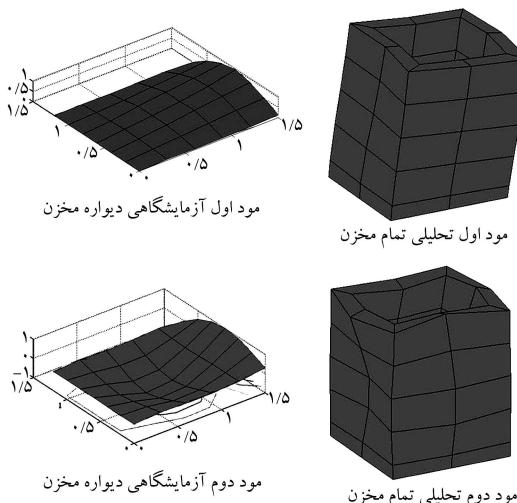
$$\begin{aligned} \ddot{P} &= \rho g \ddot{\eta} = \rho g \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\eta}) = \rho g \frac{\partial}{\partial t} (V_y) = \rho g \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \\ &\quad \rho g \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -g \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}) \end{aligned} \quad (16)$$

آخرین جمله‌ی درون پلانتر چیزی نیست جز همان فشار یا P . بنابراین رابطه‌ی ۱۷ به دست می‌آید:

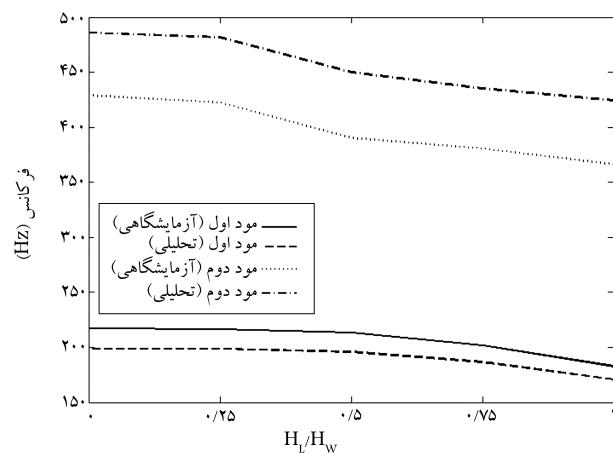
$$\ddot{P} = -g \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (17)$$

با جایگزینی این روابط به شرایط مرزی در رابطه‌ی ۱۰، سوارکردن ماتریس‌ها و اعمال شرط مرزی سطح آب (رابطه‌ی ۱۴)، معادله‌ی حرکت دینامیکی مایع درون مخزن به شکل رابطه‌ی ۱۸ نوشته می‌شود:

$$\frac{1}{c^r} G \ddot{\mathbf{P}} + H \mathbf{P} = -\rho \mathbf{B} \ddot{\mathbf{r}} \quad (18)$$



شکل ۶. دو شکل مود خمسی آزمایشگاهی و تحلیلی دیوارهای مخزن پر از آب.



شکل ۷. درصد کاهش بسامد با افزایش ارتفاع آب داخل مخزن.

را برای مودهای اول و دوم آزمایشگاهی و تحلیلی برای حالت‌های مختلف ارتفاع آب نشان می‌دهد که در آن H_L و H_W به ترتیب ارتفاع آب و دیوار مخزن هستند. همان‌طور که مشاهده می‌شود نحوه کاهش بسامد در هر دو مود برای پاسخ‌های آزمایشگاهی و تحلیل کاملاً یکسان است. همچنین نتیجه می‌شود که میزان کاهش بسامد برای مودهای مختلف، متفاوت و تابعی از شکل آن مود است. برای مود اول، کاهش بسامد برای ارتفاع آب از $75HW$ تا پر بیشتر است، در صورتی که در مود دوم، نزدیک کاهش سامد از $25HW$ تا نیمه‌ی پر بیشتر است. برای یک شتاب معروف، پاسخ تغییرشکلی یک سیستم سازه‌یی بستگی به بسامدها و نسبت میرایی دارد. یک سازه هر چه بسامدهای پایین تر یا زمان تاوب بزرگ‌تری داشته باشد، تغییرشکل‌های بیشتری را از خود نشان می‌دهد. حریک‌های زمین در حوزه‌ی بسامد، در یک محدوده‌ی بسامدی مشخص با دامنه‌های متفاوت برای زلزله‌های با حوزه‌ی دور و نزدیک رخ می‌دهد و موجب حریک سازه می‌شود. بنابراین کاهش بسامدها با افزایش ارتفاع آب درون مخزن، منجر به قرارگرفتن تعداد بسامد بیشتری از سازه در محدوده‌ی بسامد حریک می‌شود. درنتیجه، تعداد مودهای مؤثر متناظر با بسامدهای مذکور بیشتر و موجب افزایش پاسخ‌های دینامیکی مخزن می‌شود که در طراحی دقیق‌تر مخزن باید در نظر گرفته شود.

همان‌طور که از نتایج آزمایشگاهی نتیجه گرفته شد، با افزایش ارتفاع آب مخزن،

حالت نامشخص و دارای اهمیت زیادی است. بنابراین، برای رسم دقیق نمودار تابع پاسخ فرکانسی بهتر است رابطه‌ی ۲۳ در محدوده‌ی بسامد حل شود. به این منظور می‌توان از حل رابطه‌ی ۲۶ استفاده کرد.

$$\left(\begin{bmatrix} K(1 + 2\beta_d i) & -B^T \\ 0 & -\frac{H}{\rho} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ -B & -\frac{\rho}{c^2} G \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} r \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{ext} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

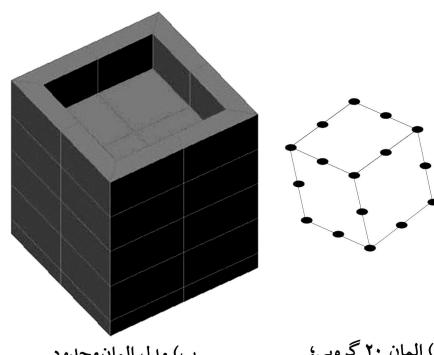
۴. مدل تحلیلی و نتایج

در بخش تحلیلی، مخزن مستطیلی یعنی ساخته شده در آزمایشگاه با همان ابعاد و مشخصات مصالح مدل شد. به منظور مدل‌سازی المان محدود سازه‌ی مخزن از المان‌های ۲۰ گره‌یی آجری جامد و برای مدل‌سازی آب داخل مخزن از المان‌های ۲۰ گره‌یی مایع استفاده شد. شکل ۵، مدل المان محدود را برای تحلیل مخزن نشان می‌دهد.

جدول ۱، بسامدهای درگیر به دست آمده از تحلیل المان محدود و آزمایش را برای مودهای اول و دوم خمسی در حالت‌های مختلف ارتفاع آب ارائه می‌دهد. اختلاف مقدار بسامد به دست آمده از روش تحلیلی و آزمایشگاهی برای مخزن خالی ۸٪ است که نشان از تطابق خوب نتایج تحلیلی با آزمایشگاهی دارد. این اختلاف با افزایش ارتفاع آب داخل مخزن کاهش نیز داشته است. مقدار درصد کاهش بسامدهای به دست آمده از آزمایش در ارتفاع‌های مختلف آب $5, 25HW$ و $5, 5HW$ برای مود اول به ترتیب $30, 0\%$ ، $24, 0\%$ ، $20, 0\%$ و $19, 0\%$ و برای مود دوم به ترتیب $40, 0\%$ ، $35, 0\%$ ، $30, 0\%$ و $26, 0\%$ نسبت به مخزن خالی است. همان‌طور که از مقادیر به دست آمده نتیجه می‌شود در مود اول بیشترین کاهش مقدار بسامد از حالت سه چهارم پر تا پر و در مود دوم از یک چهارم پر تا نیمه‌پر رخ داده است.

بسامدهای ارائه شده در جدول ۱ در حالت نبود امواج سطحی (شرط مرزی فشار صفر بر روی سطح آب) و مربوط به بخش سخت آب است. شکل ۶ به ترتیب دو شکل مود اول خمسی به دست آمده از آزمایش و تحلیل را برای مخزن پر از آب نشان می‌دهد که بسامدهای ارائه شده در جدول ۱ مربوط به این دو شکل مود هستند.

چنان‌که پیش‌تر از نمودار شکل ۳ و جدول ۱ نیز نتیجه گرفته شد، با زیاد شدن ارتفاع آب داخل مخزن، مقدار بسامد کاهش می‌یابد. شکل ۷، روند کاهش بسامد

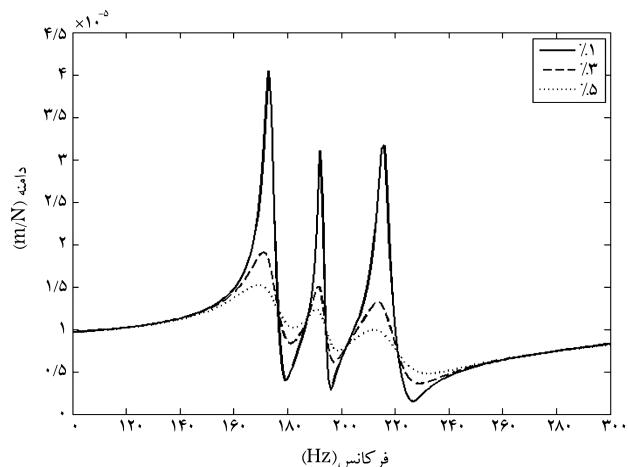


الف) المان ۲۰ گره‌یی؛ ب) مدل المان محدود.

شکل ۵. مدل المان محدود مخزن مستطیلی.

جدول ۲. بسامدهای امواج سطحی (Hz)

H_W	$0,75H_W$	$0,5H_W$	$0,25H_W$	مود
۲,۸۴۵	۲,۸۴۲	۲,۸۱۵	۲,۵۶۶	۱
۲,۸۴۵	۲,۸۴۲	۲,۸۱۵	۲,۵۶۶	۲
۳,۳۹۵	۳,۳۹۵	۳,۳۸۹	۳,۲۶۲	۳
۴,۲۴۷	۴,۲۴۷	۴,۲۴۷	۴,۲۴۱	۴
۴,۲۴۷	۴,۲۴۷	۴,۲۴۷	۴,۲۴۱	۵
۴,۴۷۲	۴,۴۷۲	۴,۴۷۲	۴,۴۴۷	۶
۴,۴۷۲	۴,۴۷۲	۴,۴۷۲	۴,۴۴۷	۷
۵,۱۲۷	۵,۱۲۷	۵,۱۲۶	۵,۱۱۴	۸
۶,۶۷۲	۶,۶۷۲	۶,۶۷۰	۶,۵۵۴	۹
۶,۶۷۲	۶,۶۷۲	۶,۶۷۰	۶,۵۵۴	۱۰



شکل ۸. نمودار تابع پاسخ فرکانسی تحلیلی با ضرایب مختلف بنا.

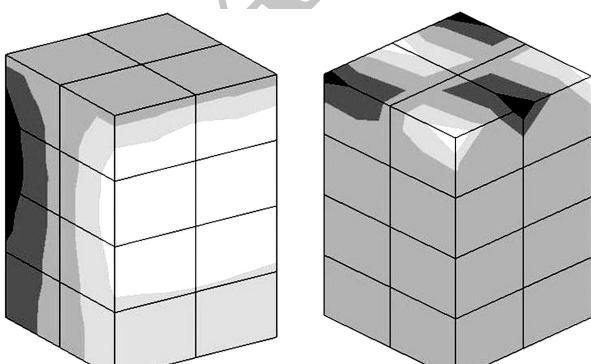
درصد میرایی برای مودهای مختلف نیز تغییر می‌کند. با هدف بررسی اثر میرایی بر روی پاسخ‌های مخزن در حوزه‌ی سامدی، نیروی واحدی به مخزن اعمال شد و تغییرمکان یکی از گره‌ها برای بسامدهای متفاوت تعیین شد. پذین ترتیب نمودار تابع پاسخ فرکانسی مخزن پر از آب برای درصدهای مختلف ضریب ضربه β_d ترسیم شد که در شکل ۸ نشان داده شده‌اند. در این نمودار تأثیر تغییر β_d را بر روی تغییرمکان‌ها برای مخزن پر نشان می‌دهد. در این نمودار با افزایش درصد β_d ، بسامد مودها ثابت است، ولی تغییرمکان‌ها کاهش چشمگیری داشته‌اند. قابل توجه است که در آین نامه‌های معتبر مقدار درصد میرایی β_d برای مخازن، بدون توجه به میران پر بودن آن، برای کلیه‌ی حالات ۵٪ پیشنهاد شده است. نمودار تابع پاسخ فرکانسی شکل ۸ با نتایج تحلیلی ترسیم شده است که در دامنه‌ی بسامدی صفر تا 30^0 هرتز دارای سه قله است. قله‌ی ابتدایی همان مود اول خمیشی است و دو مود دیگر مودهای پیچشی و قطری‌اند.

براساس شرایط مرزی رابطه‌ی ۱۸، می‌توان بسامدهای طبیعی محیط در حالت درنظرگرفتن اثر امواج سطحی را با حل عددی مسئله‌ی مقدار ویژه در روش اجزای محدود یافت. بنابراین با هدف بررسی اثر امواج سطحی آب بر روی پاسخ‌های دینامیکی، مسئله‌ی مقدار ویژه با درنظرگرفتن شرط وجود امواج سطحی حل شد. مطابق جدول ۲ بسامدهای به دست آمده برای چهار حالت ارتفاع آب داخل مخزن پس از تحلیل نشان می‌دهد که علاوه بر بسامدهای تعیین شده در حالت نبود امواج سطحی، بسامدها و شکل مودهای جدیدی (بسامدهای مریبوط به بخش امواج) پدیدار می‌شود که در حالت چشمپوشی از اثر امواج سطحی، اصلًا وجود نداشتند. با توجه به ماهیت حرکت امواج در سطح آب، که دارای دوره‌ی تناوب بالا نسبت به بخش پایینی آب است، مقدار بسامدهای جدید بسیار کمتر است.

همان‌طور که از پاسخ‌ها نتیجه می‌شود، با زیاد شدن ارتفاع آب درون مخزن، مقدار بسامدهای امواج سطحی افزایش می‌یابد که این نز افزایش از مخزن نیمه‌پر تا پرکاهش می‌یابد. جدول ۲، بسامدهای مریبوط به ده مود ابتدایی بخش امواج آب را نشان می‌دهد. این در حالی است که در بسامدهای مودهای بالاتر، مقدار بسامدها به همان بسامدهای به دست آمده با شرط مرزی فشار صفر در سطح آب متوجه می‌شود. همان‌گونه که از نتایج ارائه شده بر می‌آید، با درنظرگرفتن امواج سطحی، تعداد زیادی مودهای جدید به وجود می‌آید و تأثیری بسیار ناچیز در بسامدهای طبیعی بخش سخت، در حالت نبود امواج سطحی دارد. بنابراین، هنگام تحلیل دینامیکی در بسامدهای نزدیک به بسامدهای بالا نیازی به درنظرگرفتن اثر امواج سطحی نیست.

هنگام درنظرگرفتن اثر امواج سطحی، محیط دو دسته‌ی بسامد طبیعی (بخش سخت و امواج) خواهد داشت. در صورتی که N تعداد درجات آزادی فشار در مرز فوکانی سیال یا همان شمارگرهای شبکه‌ی اجزای محدود در سطح محیط باشد، در یک سیستم گسترشده، درست به تعداد این گره‌ها، بسامد طبیعی و شکل مود مریبوط به اثر امواج سطحی وجود خواهد داشت. بنابراین به دلیل ماهیت گسترشی مسئله در روش اجزای محدود، این شیوه‌ی توانایی به دست دادن بی‌شمار بسامد طبیعی محیط را ندارد و فقط تعداد محدودی از آن‌ها را در دسترس قرار می‌دهد. این تعداد محدود، در مورد بسامدهای بخش سخت، درست برابر تعداد گره‌ها یا همان درجات آزادی فشار در کل محیط و در مورد بسامدهای بخش سخت، فقط به تعداد گره‌های موجود در سطح سیال است.

شکل ۹ الف وضعیت توزیع فشار دینامیکی را برای مود هشتم با بسامد $5,127\text{ Hz}$ و شکل ۹ ب برای مود بیست و یکم با بسامد $175,91\text{ Hz}$ با درنظرگرفتن اثر امواج سطحی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در بسامدهای پایین، در نزدیکی سطح آزاد، فشار دینامیکی ناشی از بخش سخت وجود دارد که این فشار در قسمت‌های میانی و پایینی مخزن صفر می‌شود. این در حالی است که در بسامدهای بالا فشار دینامیکی در سطح آزاد صفر می‌شود.



شکل ۹. وضعیت توزیع فشار با درنظرگرفتن اثر امواج سطحی.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، رفتار ارتعاشی و پاسخ‌های لرزه‌یی مخازن مستطیلی ذخیره‌ی آب به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی شد. به منظور بررسی پاسخ‌های دینامیکی و ارتعاشی مخازن مستطیلی ذخیره‌ی آب، یک مخزن مستطیلی بتقی در حالت‌های مختلف ارتفاع از آب، تحت آزمایش مodal و تحلیل در حوزه‌ی بسامدی قرار گرفت. براساس نتایج آزمایشگاهی و مقادیر به دست آمده از روابط تحلیلی، این نتایج حاصل شد:

۱. با درنظر گرفتن شرط مرزی امواج سطحی، تعداد زیادی بسامد‌های جدید به وجود می‌آید که مربوط به بخش امواج مایع هستند. نتایج عددی به دست آمده از تغییر بسیار ناچیز بسامد‌های طبیعی و شکل مودها در حالت وجود امواج سطحی بر روی بسامد‌های مودهای بالا یا همان بخش سخت مایع حکایت دارد. بنابراین، هنگام تحلیل دینامیکی در بسامد‌های نزدیک به بسامد‌های بالا نیازی به درنظر گرفتن اثر امواج سطحی نیست.
۲. با توجه به آنکه درنظر گرفتن امواج سطحی موجب اعمال فشارهای دینامیکی بر روی قسمت‌های بالایی بدنه‌ی مخزن در بسامد‌های پایین تحریک با دامنه‌ی زیاد می‌شود، باید در طراحی مخزن درنظر گرفته شوند. در حالی که صرف نظر کردن از امواج سطحی، موجب نادیده‌گرفتن اثرات مودهای مربوط در پاسخ‌های دینامیکی خواهد شد.

پانوشت‌ها

1. frequency response function
2. Hysteretic

(References) منابع

1. Housner, G.W. "The dynamic behavior of water tank", *Bulletin of the Seismological Society of American*, **74**(3), pp. 1031-1041 (1963).
2. Yang, J.Y., *Dynamic Behavior of Fluid-Tank System*, Ph.D. thesis, Houston (Texas), Civil Engineering, Rice University (1976).
3. Veletsos, A.S. "Seismic response and design of liquid storage tanks", *Guidelines for the Seismic Design of Oil and Gas Pipeline Systems*, Tech. Council in Life-line Earthquake Engineering, ASCE, New York, N.Y., pp. 255-370 (1984).
4. Haroun, M.A. "Stress analysis of rectangular walls under seismically induced hydrodynamic loads", *Bulletin of the Seismological Society of America*, **74**(3), pp. 1031-1041 (June 1984).
5. Kim, J.K.; Koh, H.M. and Kwahk, I.J. "Dynamic response of rectangular flexible fluid containers", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **122**(9), pp. 807-816 (1996).
6. Park, J.H.; Koh, H.M. and Kim, J. "Liquid-structure interaction analysis by coupled boundary element-finite element method in time domain", *Proceedings of the 7th International Conference on Boundary Element Technology*, BE-TECH/92, Computational Mechanics Publication, Southampton, England, pp. 89-92 (1992).
7. Chen, J.Z., *Dynamic Response of Concrete Rectangular Liquid Storage Tanks*, Master Thesis, Ryerson University, Toronto, Canada (2003).
8. Chen, J.Z. and Kianoush, M.R. "Seismic response of concrete rectangular tanks for liquid containing structures", *Canadian Journal of Civil Engineering*, **32**(4), pp. 739-752 (2005).
9. Souto-Iglesias, A.; Delorme, L.; Perez-Rojas, L. and Abril-Perez, S. "Liquid moment amplitude assessment in sloshing type problems with smooth particle hydrodynamics", *Ocean Engineering*, **33**(11-12), pp. 1462-1484 (2006).
10. Akyildiz, H. and Unal, N.E. "Sloshing in a three-dimensional rectangular tank: Numerical simulation and experimental validation", *Ocean Engineering*, **33**(16), pp. 2135-2149 (2006).
11. Chen, Y.G.; Djidjeli, K. and Price, W.G. "Numerical simulation of liquid sloshing phenomena in partially filled containers", *Computers & Fluids*, **38**(4), pp. 830-842 (2009).
12. Godderidge, B.; Turnock, S.; Tan, M. and Earl, C. "An investigation of multiphase CFD modeling of a lateral sloshing tank", *Computers & Fluids*, **38**(2), pp. 183-193 (2009).
13. Sriram, V.; Sannasiraj, S.A. and Sundar, V., "Numerical simulation of 2D sloshing waves due to horizontal and

- vertical random excitation”, *Appl Ocean Res*, **28**(1), pp. 19-32 (2006).
14. Chen, Y.H.; Hwang, W.S. and Ko, C.H. “Sloshing behaviors of rectangular and cylindrical liquid tanks subjected to harmonic and seismic excitation”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, **36**, pp. 1701-1717 (2007).
15. Virella, J.C.; Prato, C.A. and Godoy, L.A. “Linear and nonlinear 2D finite element analysis of sloshing modes and pressures in rectangular tanks subject to horizontal harmonic motion”, *Journal Sound and Vibration*, **312**(3), pp. 442-460 (2008).
16. Biswal, K.C.; Bhattacharyya, S.K. and Sinha, P.K. “Dynamic response analysis of a liquid-filled cylindrical tank with annual baffle”, *Journal Sound Vibration*, **274**(1/2), pp. 13-37 (2004).
17. Mourad, S.A., *Modal Analysis and Buckling Effects on Steel Structures under Dynamic Loading*, Ph.D. Dissertation, University of California, Irvine (1990).
18. Kruntcheva, M.R. “Free vibration of cylindrical storage tanks: Finite-element analysis and experiments”, *Jour-*
- nal of Engineering Mechanics, ASCE*, **133**(6), pp. 728-733 (June 2007).
19. Lynch, J.P. *Advanced Structural Dynamics and Smart Structures*, Michigan University, CEE810 (CEE619), Fall Semester (2004-2005).
20. Schwarz, B.J. and Richardson, M.H., *Experimental Modal Analysis*, CSI Reliability Week (1999).
21. Verboven, P., *Frequency-Domain System Identification for Modal Analysis*, PhD Dissertation, Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium (2002).
22. Schmitz, T.L. and Smith, K.S. “Modal analysis”, *Machining Dynamics*, pp. 7-57, DOI: 10.1007/978-0-387-09645-2_2 (2009).
23. Aftabi Sani, A. and Lotfi, V. “Dynamic analysis of concrete arch dams by ideal-coupled approach”, *Engineering Structures*, **32**(5), pp. 1377-1383 (2010).
24. Zienkiewicz, O.C. and Bettes, P. “Fluid-structure dynamic interaction and wave forces”, *An Introduction to Numerical Treatment, Int. Journal for Numerical Methods In Engineering*, **13**(1), pp. 1-16 (1978).