

ارائه‌ی روابط تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های سطحی نواری واقع بر خاک‌های رسی دو لایه با استفاده از روش تفاضل محدود

محمد‌مهدی احمدی*

بهداد مفتوح کوچکی (کارشناس)

دانشکده‌ی هندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار از روش تفاضل محدود و مدل سازی دو بعدی به کمک نرم‌افزار FLAC برای تعیین ظرفیت باربری زهکشی‌نشده‌ی شالوده‌های نواری واقع بر خاک‌های رسی دو لایه استفاده شده است. همچنین برای مدل سازی رفتار خاک، از مدل رفتاری کشسان - خمیری با سطح سلسیم موهر - کولب استفاده شده است. در این پژوهش نسبت عمق لایه‌ی بالایی به عرض شالوده از $15/0$ تا $3/0$ و نسبت مقاومت برشی زهکشی‌نشده‌ی لایه‌ی بالایی به پایینی از $2/0$ تا $5/0$ تغییر کرده است. این نسبت‌ها به گونه‌ی انتخاب شده‌اند که مدل سازی و تحلیل برای بیشتر حالات محتمل هندسه‌ی لایه‌ها و نیز مقاومت برشی زهکشی‌نشده‌ی آن‌ها انجام شود. در پایان با توجه به نتایج این پژوهش، روابطی کاربردی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های نواری واقع بر خاک‌های دو لایه‌ی رسی ارائه شده است، که دقیق‌ترین دارند و می‌توانند به صورت گستردگی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های نواری در خاک‌های دو لایه‌ی رسی استفاده شوند.

واژگان کلیدی: ظرفیت باربری، شالوده‌ی نواری، تحلیل عددی، رسی، خاک دو لایه.

mmahmadi@sharif.edu
b.mofarraj@outlook.com

۱. مقدمه

است. این روش یک مدل رفتاری کاملاً خمیری را به همراه معیار گسیختگی ترسکا برای خاک در نظر می‌گیرد، که درنهایت منجر به حل یک مسئله‌ی بزرگ برنامه‌ریزی خطی می‌شود. این مسئله در دو حالت حد پایین ظرفیت باربری (با اعمال شرایط مرزی مربوط به یک میدان تش قابل قبول از نظر استاتیکی) و حد بالا (با اعمال شرایط مرزی مربوط به یک میدان سرعت قابل قبول از نظر کینماتیکی) حل و نتایج به صورت جدولی توسط آن‌ها اعلام شده است.

پژوهشگر دیگری نیز با درنظرگرفتن دو نوع الگوی گسیختگی برای خاک دو لایه‌ی رسی و استفاده از روش تحلیل حدی، به محاسبه‌ی حد بالای ظرفیت باربری نهایی پرداخته است.^[۱] الگوی اول، شامل محیطی است که به طور پیوسته دچار تغییرشکل می‌شود و دیگری چندین بلاک صلب را در زیر شالوده در نظر می‌گیرد. محاسبات وی حاکی از این است که الگوی دوم انعطاف‌پیشتری برای مدل سازی حالات مختلف گسیختگی دارد و از طریق آن حد بالای کوچک‌تری به دست می‌آید. وی در ادامه نیز به بررسی اثر بارهای افقی در ظرفیت باربری خاک‌های دو لایه‌ی رسی پرداخته است، که از موضوع این نوشتار به دور است.

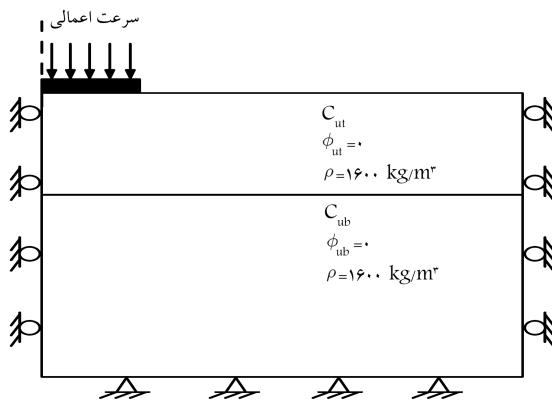
پژوهشگران دیگری نیز حد بالای ظرفیت باربری را با فرض الگوی گسیختگی دایروی برای شالوده‌ی سطحی محاسبه کرده‌اند،^[۲] و در مطالعه‌ی دیگری با فرض همان سطح گسیختگی و با بهکارگیری تئوری تعادل حدی^۳ ظرفیت باربری محاسبه

ظرفیت باربری نهایی شالوده‌های نواری واقع بر خاک تک لایه‌ی همگن رسی از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بسیاری بوده است و در عمل نیز برای تعیین ظرفیت باربری در حالت ذکر شده به روابط ارائه شده ترازاقی،^[۱] رجوع می‌شود. اما معمولاً در مسائل واقعی، خصوصیات خاک ممکن است با تغییر عمق از سطح زمین تغییر کنند و باحتی چند لایه با مشخصات کاملاً متفاوت زیر هم قرار گیرند. در این صورت ممکن است ظرفیت باربری نهایی شالوده با توجه به ضخامت و مقاومت لایه‌ها، تحت تأثیر خصوصیات لایه‌های زیرین نیز قرار گیرد. با اینکه در گذشته موضوع تغییر مقاومت خاک با افزایش عمق توسط پژوهشگران متعددی بیان شده است،^[۲] تاکنون معادلات دقیقی برای به دست آوردن ظرفیت باربری خاک‌های دو لایه‌ی رسی بدون نیاز به نمودار و جدول ارائه نشده است.

از جمله مهم‌ترین کارهای انجام شده در زمینه‌ی تعیین ظرفیت باربری نهایی خاک‌های دو لایه‌ی رسی می‌توان به مطالعات برخی پژوهشگران اشاره کرد،^[۱۵-۳] اما در این میان در مطالعه‌ی مریفیاد و همکاران،^[۲] با استفاده از روش تحلیل عددی ابداع شده توسط برخی پژوهشگران دیگر،^[۱۶] که براساس تئوری‌های حدی خمیری کلاسیک و المان محدود توسعه یافته‌اند، به حل این مسئله پرداخته شده

* نویسنده مسئله

تاریخ: دریافت ۱۶/۵/۱۳۹۲، اصلاحیه ۴/۹/۱۳۹۲، پذیرش ۱۷/۱۰/۱۳۹۲.



شکل ۱. شرایط مرزی مدل به کار گرفته شده در FLAC با در نظر گرفتن ویژگی تقارن در مسئله.

تحلیل های عددی در این مطالعه نسبت c_{ut}/c_{ub} در حالت خاک نرم روی سخت از ۰/۲ تا ۱ و در حالت خاک سخت روی خاک نرم از ۱ تا ۵ تغییر می کند. مقادیر این نسبت ها به گونه ایی انتخاب شده اند که بتوانند بیشتر حالات مقادیر ممکن برای مقاومت بر شی زهکشی نشده خاک های دو لایه را در بر گیرند. برای مثال نسبت c_{ut}/c_{ub} از ۰/۲ تا ۱ بدين معنی است که مقدار c_{ut} لایه بالای نرم تراز ۰/۲ تا ۱ برابر مقاومت بر شی زهکشی نشده لایه پایینی سخت تر تغییر می کند. به نظر می رسد که این نسبت انتخاب شده همان گونه که ذکر شد، می تواند بسیاری از حالات عملی را بیوشاند. همچنین توجه شود که با این نسبت های انتخاب شده برای تحلیل های کافی و گستردی بی انجام شده است تا روند تغییرات به طور مناسب قابل ارزیابی و تحلیل شوند. در بخش های دیگر این نوشتار تفسیرهای مورد نیاز برای این تحلیل های گسترشده بیان شده است. همچنین در این پژوهش از مدل موهر - کولمب برای مدل سازی شرایط گسیختگی خاک استفاده شده است.

متغیر دیگری که در این مسئله باید مورد توجه قرار گیرد، نسبت عمق لایه بالایی به عرض شالوده (H/B) است، که نقش به سرایی در تعیین ظرفیت برای و شکل سطوح گسیختگی در زیر شالوده دارد. در این پژوهش نسبت H/B از کمینه ۰/۱۵ تا جایی که دیگر خاک به تغییرات عمق لایه بالایی حساس نباشد و ظرفیت برای خاک فقط با استفاده از خصوصیات فیزیکی لایه بالایی قابل تعیین باشد، تغییر می کند. بنابراین طبق پژوهش های انجام شده و نتایج منتشر شده از سایر پژوهشگران این نسبت برای حالت خاک نرم روی خاک سخت از ۰/۱۵ تا ۰/۸ و برای عکس این حالت از ۰/۱۵ تا ۳ متغیر در نظر گرفته شده است.^[۱۶، ۱۷] لازم به توضیح است که این مطالعه فقط برای خاک های لایه پایین رسی اشاعر در حالت زمین مسطح انجام شده است. پس از تعیین شکل کلی مسئله، نوبت به تعیین سایر پارامترهای مکانیکی خاک نظری نسبت پواسون و مدول کشسانی هر یک از لایه ها می رسد. بدین منظور ابتدا نمونه های مختلفی از خاک همگن و دو لایه با نسبت پواسون و مدول کشسانی متفاوت تحلیل و نتایج ظرفیت برای آن ها با یکدیگر مقایسه شده اند. نتایج حاکی از عدم تأثیر مقدار این دو پارامتر در ظرفیت برای ویژگی خاک، چه در حالت تک لایه و چه در حالت دو لایه است. با وجود این برای هر چه نزدیک ترین رفتار مدل به شرایط زهکشی نشده باید نسبت پواسون خاک نزدیک به ۰/۵ در نظر گرفته شود، که با توجه به میل کردن مدول حجمی خاک به سمت بی نهایت با میل دادن نسبت پواسون به ۰/۵، این پارامتر در مدل برابر با ۴۵ در نظر گرفته شده است. مدول کشسانی هر یک از لایه ها نیز برابر ضریب از

شده است.^[۱۸] در مقابل همان طور که در پژوهش دیگری در سال ۱۹۷۳^[۱۹] نشان داده شده است، برای حالات خاک های ناهمگن، الگوی گسیختگی دایروی در مقایسه با تئوری خمیری، ظرفیت باربری را بسیار بالاتر از واقعیت برآورد می کند. همچنین پژوهشگران دیگری با توجه به نتایج تجربی به دست آمده از آزمایش های حقیقی، روابطی تجربی و نیمه تجربی جهت تعیین ظرفیت باربری شالوده های سطحی در این حالت ارائه کرده اند.^[۲۰] که طبق مقایسه های انجام شده در پژوهشی در سال ۱۹۹۹^[۲۱] روش های تجربی و نیمه تجربی می توانند در برخی حالات تا ۲۰٪ خطای داشته باشند.

در پژوهش های جدیدتری نیز به بررسی تأثیر لایه بیرونی خاک در ظرفیت باربری نهایی شالوده ها در حالت ۳ بعدی به کمک روش المان محدود پرداخته شده است.^[۱۱] همچنین در مطالعه دیگری روشی برای محاسبه حد بالای ظرفیت باربری با در نظر گرفتن چندین بلاک صلب در زیر شالوده و استفاده از تئوری تحلیل حدی برای تعیین ظرفیت باربری نهایی انواع خاک های دو لایه ارائه شده است.^[۱۲]

در سال های اخیر، تعدادی از پژوهشگران به روش المان محدود به بررسی این مسئله پرداخته اند و نتایج خود را در چند جدول ها و نمودارهای متعددی ارائه کرده اند.^[۱۳، ۱۴] علاوه بر آن، به بررسی تأثیر عمق مدفون شالوده در ظرفیت باربری نهایی نیز پرداخته اند.^[۱۵] که از موضوع این نوشتار به دور است.

در مطالعه دیگری نیز با استفاده از روش المان محدود و فرض تغییر شکل های بزرگ به بررسی ظرفیت باربری شالوده های مربعی و دایروی واقع بر سطح خاک های رسی دو لایه پرداخته شده است و نتایج را بر حسب چگالی خاک و عرض شالوده به شکل نموداری ارائه کرده اند.^[۱۶]

همان طور که مشاهده می شود، بیشتر پژوهشگران نتایج خود را بر اساس حد بالایی ظرفیت باربری ارائه کرده اند، اما در عمل با توجه به مشخص نبودن مقدار دقیق ظرفیت باربری، استفاده از این نتایج منجر به عدم اطمینان در طراحی شالوده می شود. به همین علت رویکرد مریفیلد و همکاران^[۱۷] که منجر به ارائه نتایج مربوط به حد پایین ظرفیت باربری شده است، می تواند مورد توجه قرار گیرد؛ اما همچنان نتایج آن ها بازه بی برای حدود ظرفیت باربری ارائه می دهد، که ممکن است منجر به طراحی غیراقتصادی ابعاد شالوده و ایجاد تردید در تعیین ضریب اطمینان شود.

۲. تشریح مسئله

در این پژوهش از مدل سازی عددی با استفاده از نرم افزار FLAC^[۱۸] برای تعیین ظرفیت باربری شالوده های نواری استفاده شده است. این مدل سازی برای دو حالت خاک نرم روی سخت و خاک سخت نهایی انجام شده است. FLAC یک نرم افزار شبیه سازی محیط های خاکی، سنگی یا سایر موادی است که در صورت رسیدن به حد گسیختگی خود، به صورت خمیری جریان می یابند. در این پژوهش از قابلیت نرم افزار مذکور در حل مسائل دو بعدی به روش تفاضل محدود صریح و در شرایط کرنش صفحه هی استفاده شده است. این روش مناسب مدل سازی سازه های طولانی با سطح مقطع ثابت است، به طوری که نیروها فقط در صفحه هی سطح مقطع وارد شوند، نظیر آنچه در شالوده های نواری رخ می دهد.

همان طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، مدل از خاک دو لایه رسی با خصوصیات و ویژگی های متفاوت تشکیل شده است، به طوری که خصوصیات هر لایه با لایه دیگر متفاوت است. زاویه ای اصطکاک داخلی برای هر دو لایه برابر صفر، چسبندگی لایه بالا c_{ut} و لایه پایین c_{ub} نامیده شده است. برای

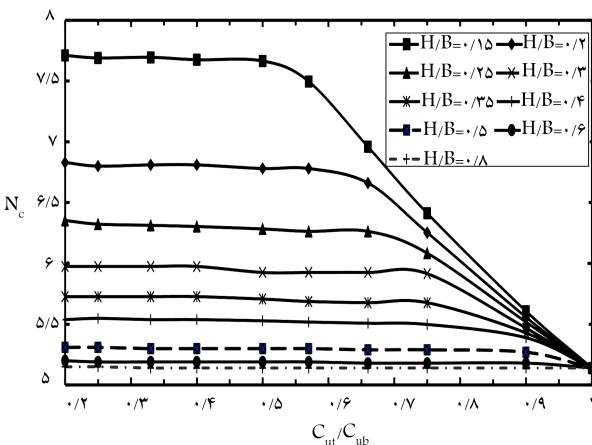
N_c ضریب ظرفیت باربری و ۷ بار مربوط به سربار است، که در این پژوهش با توجه به قرارگرفتن شالوده بر روی سطح برابر صفر است. هدف از انجام این پژوهش، تعیین ضریب N_c است، که طبق تحلیل‌های انجام‌شده تابعی از هر دو نسبت H/B و c_{ut}/c_{ub} است.

۳. ارائه‌ی نتایج و روابط تعیین ظرفیت باربری

در این بخش ابتدا نتایج حاصله به صورت نمودار ارائه شده و در ادامه، روابطی برای محاسبه‌ی ظرفیت باربری ارائه و در انتها در مورد میزان موفقیت این روابط در توضیح داده‌ها بحث شده است.

۱.۱. حالت خاک نرم روی سخت

شکل ۲، تغییرات ضریب N_c را برای حالت خاک نرم روی خاک سخت بر حسب c_{ut}/c_{ub} نشان می‌دهد. هر منحنی نماینده تغییرات ضریب N_c برای یک H/B خاص است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به طور کلی ضریب N_c با کاهش H/B افزایش می‌یابد؛ همچنین در صورتی که c_{ut}/c_{ub} باشد، مقدار N_c نیز افزایش می‌یابد. البته مطابق شکل ۲ باید توجه داشت که با کاهش بیشتر N_c به بیشینه‌ی خود که همان $N_{c,max}$ است، می‌رسد و پس از آن با کاهش c_{ut}/c_{ub} دیگر افزایشی در N_c مشاهده نمی‌شود. علت ثابت شدن هر یک از منحنی‌ها در c_{ut}/c_{ub} های کوچک این است که در این حالات لایه‌ی بالایی به قدری نرم است که پس از افزایش تنش‌ها به حد کافی برای گسیختگی لایه‌ی زیرین، لایه‌ی بالایی گسیخته می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، برای حالت H/B برابر با ۰/۱۵، و برای c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از $0/5$ ، N_c با کاهش c_{ut}/c_{ub} افزایش نمی‌یابد و در نتیجه مقدار آن از $7/7$ فراتر نمی‌رود. بدین ترتیب رابطه‌ی باید ارائه شود که برای تعیین ضریب N_c ، اولاً شیب بخش سمت راست (بخش شیب‌دار) منحنی‌های ترسیم شده در شکل ۲ را، که تابعی از نسبت H/B است، درست برآورد کند و ثانیاً مقدار N_c برآورده شده بنا بر این H/B برای هر یک از مقادیر H/B بیشتر شود. برای مثال برای $H/B = 0/5$ ، نباید مقدار N_c از $7/7$ افزایش باید.



شکل ۲. تغییرات ضریب N_c در حالت خاک نرم بر روی خاک سخت برای H/B های مختلف.

چسبندگی آن لایه در نظر گرفته می‌شود، تا منحنی‌های بارگذاری - نشست مربوط به شالوده‌ها به شکل واقعی خود نزدیک‌تر باشند. با فرض تحکیم عادی خاک، مدول کشسانی خاک هر لایه برابر با 55 برابر چسبندگی آن در نظر گرفته شده است.^[۱۹] همان‌طور که پیش تر نیز ذکر شد، تحلیل‌های گسترده‌ی اولیه نشان‌دهنده‌ی آن است که مدول کشسانی خاک در ظرفیت باربری نهایی شالوده هیچ تأثیری ندارد، که این امر توسط ادبیات فنی موجود نظریه ترازاقی نیز تأیید می‌شود.^[۲۰] به طوری که حتی در صورت استفاده از مدول کشسانی برابر بین دو لایه، در مقدار ظرفیت باربری نهایی شالوده تغییر حاصل نخواهد شد. همچنین نتایج تحلیل‌های اولیه نشان‌دهنده‌ی این است که تغییرات چگالی خاک نیز در ظرفیت باربری نهایی تأثیری نداشته است، که با انتظارات ما طبق روابط ارائه‌شده ترازاقی،^[۲۱] کاملاً مطابق است. در این پژوهش، چگالی تمامی لایه‌ها برابر 1650 کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. آخرین پارامتر مکانیکی که باید تأثیر آن در ظرفیت باربری نهایی بررسی شود، نسبت نتش افقی به قائم در حالت سکون (K_0) است، که مقدار آن از $0/5$ تا 1 تغییر داده شده و نتایج با هم مقایسه شده‌اند. مشاهدات حاکی از آن است که این ضریب نیز در ظرفیت باربری نهایی شالوده تأثیری ندارد، اما تا حدودی در میزان نشست شالوده تحت بار تأثیرگذار است. در واقع با کاهش ضریب مذکور شالوده پس از نشست بیشتری به ظرفیت باربری نهایی خود می‌رسد. در این پژوهش مقدار K در جهت اطمینان برابر $0/5$ در نظر گرفته شده است.

همچنین باید ابعاد مدل و المان‌ها طوری تعیین شوند که کوچک‌ترین مدل با بزرگ‌ترین ابعاد المان به کار گرفته شود و تغییر این پارامترها موجب افزایش بی‌دلیل حجم مدل یا پدیدآمدن خطاهای مربوط به تحلیل عددی، که ناشی از دقت ناکافی مدل است، نشود. برای این منظور، تحلیل‌های بسیار گسترده‌ی جهت انتخاب ابعاد المان و ابعاد مدل بهینه انجام شده و نتایج به دست آمده از این تحلیل‌ها با یکدیگر مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند که برای حالت خاک نرم روی سخت، اگر ابعاد المان‌ها بیشینه‌ی $B/200$ ، عرض مدل 8 برابر عرض شالوده و ارتفاع آن با توجه به اینکه گسیختگی عموماً محدود به لایه‌ی بالایی است،^۴ برابر عرض شالوده باشد، کافی است. در حالت خاک سخت روی نرم با توجه به نفوذ سطوح گسیختگی به لایه‌ی زیرین و قوع گسیختگی سوراخ کننده^۳ در لایه‌ی بالایی و پدیدآمدن سطوح گسیختگی بسیار بزرگ‌تر در مقایسه با خاک تک لایه با حالت خاک نرم روی سخت در لایه‌ی نرم تر پایینی، عرض مدل تا 25 برابر عرض بی و ارتفاع آن تا 9 برابر عرض پی باید افزایش یابد. ابعاد المان‌ها نیز باید بیشینه‌ی $B/40$ باشند. این نتایج بدین معنی است که افزایش ابعاد مدل یا کاهش ابعاد المان‌ها از حدود ذکرشده، نتایج را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، مقادیر ذکرشده برای هر حالت بهینه است و لذا کلیه تحلیل‌ها براساس مقادیر ذکرشده انجام شده‌اند.

با توجه به وجود تقارن در مسئله‌ی مورد نظر و جهت صرفه‌جویی در زمان و کاهش حجم محاسباتی، فقط نصف مدل در نرم افزار FLAC تحلیل شده است. در راستای اعمال شرایط مرزی نزدیک به واقعیت، مطابق شکل ۱، حرکت در راستای افقی در مرز افقی زیرین و مرزهای عمودی محدود شده است. علاوه بر آن، حرکت در راستای قائم نیز در مرز افقی زیر مدل محدود شده است، تا مدل از نظر شرایط تعادل استاتیکی مشکلی نداشته باشد.

رابطه‌ی کلی ظرفیت باربری نهایی برای خاک‌های رسی به شکل رابطه‌ی 1 نوشته می‌شود:

$$q_u = c_u \times N_c + q \quad (1)$$

که در آن، q_u بیشینه‌ی نتش مجاز زیر پی، c_u مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی رس،

رابطه از نوسانات اندک این پارامتر در نواحی انتهایی منحنی‌های رسم شده در شکل ۲ صرف نظر و مقدار کمیته‌ی آن (در جهت اطمینان) به عنوان نماینده‌ی این بخش از منحنی در نظر گرفته شده است. رابطه‌ی ۴ بدین منظور ارائه شده است:

$$N_{c,\max} = 5/14 \left[1 + 1/25 \left(1 - \frac{H}{B} \right)^2 \right] \quad (4)$$

در شکل ۴، برآورد رابطه‌ی ۴ از $N_{c,\max}$ با نتایج حاصل از تحلیل عددی مقایسه شده است. ضریب تشخیص این رابطه برابر با $5/14$ است.

درنهایت برای محاسبه‌ی ظرفیت باربری در حالت خاک نرم بر روی خاک سخت، با جایگذاری مقدار شبیب نمودار از رابطه‌ی ۳ و مقادیر $N_{c,\max}$ از رابطه‌ی ۴ در رابطه‌ی ۲ و تقسیم طرفین به عدد $5/14$ ، رابطه‌ی ۵ را خواهیم داشت:

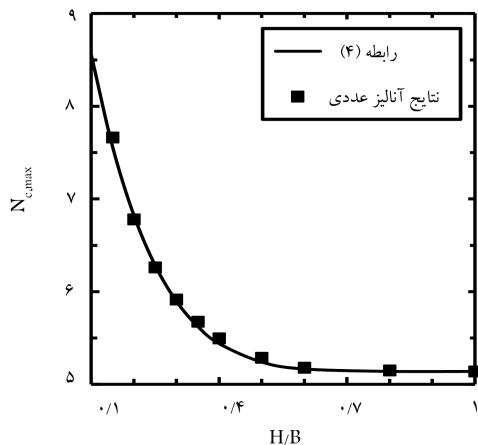
$$\frac{N_c}{5/14} = \min \left[1 + \frac{0/25}{\left(\frac{H}{B} \right)^{0.75}} \left(1 - \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \right), 1 + 1/25 \left(1 - \frac{H}{B} \right)^2 \right] \quad (5)$$

طبق مقایسه‌ی انجام شده بین برآورد رابطه‌ی ۵ و نتایج تحلیل عددی، ضریب تشخیص این رابطه برابر با $5/14$ است. با توجه به ضرایب اطمینان استفاده شده در طراحی شالوده‌ها، این خطاب عملانه‌ی ناقص و قابل صرف نظر کردن است.

۲.۳. حالت خاک سخت روی نرم

در این حالت، جهت ارائه‌ی رابطه‌ی تعیین ظرفیت باربری، ابتدا ضریب N_c^* با تقسیم تنش متوسط زیرشالوده بر c_{ub} (به جای c_{ut}) محاسبه شده است. نتایج حاصله در شکل ۵ ارائه شده است. برای مثال، در صورتی که نسبت c_{ut}/c_{ub} برابر با ۵ باشد، اگر نسبت عمق لایه‌ی بالایی به عرض شالوده کوچک‌تر از ۲ باشد، لایه‌ی نرم تر پایینی در ظرفیت باربری نهایی شالوده اثر منفی می‌گذارد و اگر H/B از ۲ بزرگ‌تر باشد، گسیختگی به کلی در لایه‌ی بالایی رخ می‌دهد ($N_c^* = 5 \times 5/14$).

تفاوت دیگر این حالت با حالت خاک نرم روی سخت در آن است که این بار تغییرات N_c^* بر حسب H/B و برای c_{ut}/c_{ub} های مختلف نمایش داده شده است. نمایش داده‌ها بدین شکل، موجب سهولت در ارائه‌ی رابطه‌ی متشابه با رابطه‌ی ۲



شکل ۴. مقایسه‌ی نتایج تحلیل عددی و برآورد رابطه‌ی ۴ از $N_{c,\max}$ مربوط به H/B های مختلف ترسیم شده در شکل ۲.

با توجه به شکل ۲ هر چه نسبت H/B کوچک‌تر باشد، منحنی مربوط شیب بزرگ‌تری دارد. همچین در حالت خاک نرم روی سخت، تغییرات قابل توجه در ظرفیت باربری، برای H/B های کوچک‌تر از $5/14$ رخ می‌دهد. در صورت تجاوز H/B از $5/14$ ، عملانه‌ی نرم تر بالایی محوم شود و مقدار N_c برابر با $5/14$ (مانند خاک رسی تک لایه‌ی همگن) می‌شود.

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، تمامی منحنی‌ها از نقطه‌ی $N_c = 5/14$ به ازاء $c_{ut}/c_{ub} = 1$ عبور می‌کنند. شبیب بخش سمت راست و آنها نیز متناسب با کاکاوش نسبت H/B افزایش می‌یابند. با وجود مشاهده‌ی اندکی اینها در منحنی‌های ترسیم شده (خصوصاً برای H/B های کوچک)، می‌توان با تقریب خوبی شبیب بخش سمت راست هر منحنی را ثابت فرض کرد. در نتیجه، رابطه‌ی موردنظر باید به صورت رابطه‌ی ۲ باشد:

$$\begin{cases} N_c = \min \left[5/14 + Slope \times \left(1 - \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \right), N_{c,\max} \right] \\ Slope \propto \frac{H}{B} \\ N_{c,\max} \propto \frac{H}{B} \end{cases} \quad (2)$$

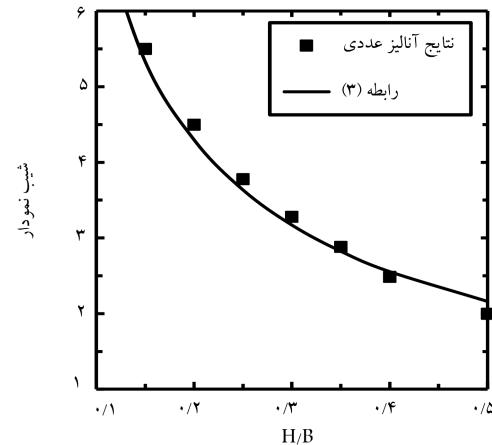
اکنون به رابطه‌ی جهت تعیین شبیب بر حسب H/B نیاز است. بدین منظور رابطه‌ی

۳ جهت تعیین شبیب منحنی‌های رسم شده در شکل ۲ ارائه شده است:

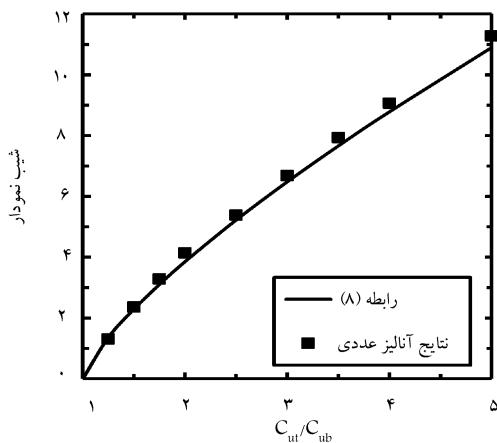
$$Slope = 5/14 \left(\frac{0/25}{\left(\frac{H}{B} \right)^{0.75}} \right) \quad (3)$$

شکل ۳ برآورد رابطه‌ی ۳ را در برای شبیب اندازه‌گرفته شده برای هر H/B نمایش می‌دهد. ضریب تشخیص (R^2) این رابطه برابر با 0.984 است. این تذکر لازم است که رابطه‌ی ۳، به دلیل عدم تغییر قابل توجه ضریب N_c در H/B های بزرگ‌تر از $5/14$ (برای c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از $5/14$) عملانه‌ی نمایش داده شود. قابل ذکر است که در تعیین این ضریب بزرگ‌تر است.

با توجه به اینکه طبق شکل ۲، ظرفیت باربری همواره با شبیب ثابت افزایش نمی‌یابد و مقدار آن از حد مشخصی تجاوز نمی‌کند، باید رابطه‌ی برای تعیین N_c ، که تابعی از H/B است، ارائه شود. قابل ذکر است که در تعیین این



شکل ۳. مقایسه‌ی نتایج تحلیل عددی و برآورد رابطه‌ی ۳ از شبیب قسمت سمت راست منحنی‌های رسم شده برای H/B های مختلف در شکل ۲.



شکل ۶. مقایسه‌ی نتایج تحلیل عددی و برآورد رابطه‌ی ۸ از شیب سمت چپ منحنی‌های ترسیم شده در شکل ۵ برای c_{ut}/c_{ub} های مختلف.

برآورد رابطه‌ی ۷ و مقادیر بدست آمده از تحلیل عددی، ضریب تشخیص این رابطه برابر 997° است. با توجه به ضرایب اطمینان مورد استفاده در طراحی شالوده‌ها، این خطاب عملاً ناچیز و قابل صرف نظر کردن است.

۴. بحث در مورد نتایج

در این بخش نتایج حاصل از روابط ۵ و ۹، حد بالا و پایین ارائه شده توسط مریفیلد و همکاران،^[۲] نتایج تحلیل حدی میکالوفسکی،^[۳] رابطه‌ی تجربی میرهوف و هانا،^[۴] رابطه‌ی توریک چن،^[۵] و نتایج تحلیل المان محدود ژو،^[۱۲] و بندهایی و فم،^[۱۴] مقایسه شده‌اند.

این تذکر لازم است که در این میان نتایج تحلیل عددی مریفیلد و همکاران،^[۲] میکالوفسکی،^[۳] ژو،^[۱۲] و بندهایی و فم،^[۱۴] به صورت جدولی و یا نموداری ارائه شده‌اند. با توجه به اینکه پارامترهای ورودی مسئله H/B و c_{ut}/c_{ub} بین این پژوهش‌ها انجام شده به روش تفاصل محدود کاملاً منطبق نیستند، جهت مقایسه‌ی نموداری H/B هایی در نظر گرفته شده‌اند که بین این پژوهش‌ها مشترک هستند. علاوه بر آن حالت $H/B = 125$ نیز (خارج از بازه بررسی شده به روش تفاصل محدود) فقط جهت بررسی عملکرد روابط ۵ و ۹ نسبت به نتایج سایر پژوهشگران در نظر گرفته شده است. پیش از انجام مقایسه به مرور رویکرد سایر پژوهشگران در حل این مسئله پرداخته شده است.

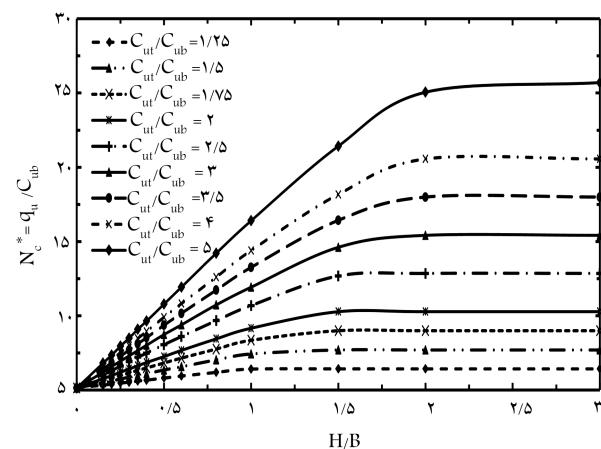
رابطه‌ی ۱۰ توسط چن،^[۵] و به روش تحلیل حدی با فرض یک سطح گسیختگی دایروی و با برابر قراردادن نرخ کار نیروهای داخلی و خارجی جهت محاسبه‌ی حد بالای ضریب N_c ارائه شده است:

$$N_c(r, \theta) = 2 \left(\frac{r}{B} \right)^2 \left\{ \frac{\theta + n\theta_i}{\left(\frac{r}{B} \right) \sin \theta - \frac{1}{2}} \right\} \quad (10)$$

طبق روابط ۱۱ و ۱۲ خواهیم داشت:

$$\theta_i = \cos^{-1} \left(\cos \theta + \frac{H}{r} \right) \quad (11)$$

$$n = \frac{c_{ub}}{c_{ut}} - 1 \quad (12)$$



شکل ۵. تغییرات ضریب N_c^* در حالت خاک سخت بر روی خاک نرم برای c_{ut}/c_{ub} های مختلف.

می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی ۸ این رابطه باربری نهایی در حالت خاک سخت بر روی خاک نرم ارائه می‌شود، باید به شکل رابطه‌ی ۶ باشد:

$$\begin{cases} N_c^* = \min [5/14 + Slope \times \frac{H}{B}, N_{c,max}^*] \\ N_c^* = N_c \times \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \\ Slope \propto \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \\ N_{c,max}^* \propto \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \end{cases} \quad (6)$$

واضح است که در این حالت بیشترین مقدار ظرفیت باربری زمانی رخ می‌دهد که گسیختگی به کلی در لایه‌ی بالای رخ دهد و دیگر نسبت به مقاومت لایه‌ی ذرم تر حساسیتی وجود نداشته باشد ($N_c = 5/14$). در این صورت طبق رابطه‌ی ۷ خواهیم داشت:

$$N_{c,max}^* = 5/14 \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \quad (7)$$

همان‌طورکه در شکل ۵ مشاهده می‌شود، شیب هر یک از منحنی‌ها در این حالت تابعی از نسبت c_{ut}/c_{ub} است و البته تمامی منحنی‌ها با نزدیک شدن H/B صفر به عدد $5/14$ می‌رسند، که این مورد با نتایج توری نیز هم‌خوانی کامل دارد. رابطه‌ی ۸ جهت تعیین شیب نمودار ارائه شده است:

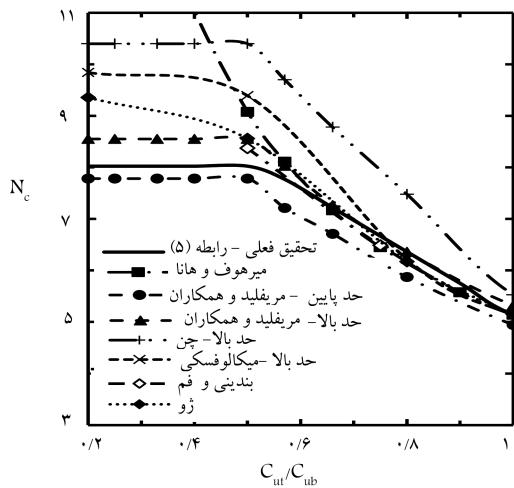
$$Slope = 5/14 \times 0.75 \left(\frac{c_{ut}}{c_{ub}} - 1 \right)^{-0.75} \quad (8)$$

شکل ۶، برآورد رابطه‌ی ۸ را در برای شیب اندازه گرفته شده برای هر c_{ut}/c_{ub} نمایش می‌دهد. ضریب تشخیص این رابطه برابر با 994° است.

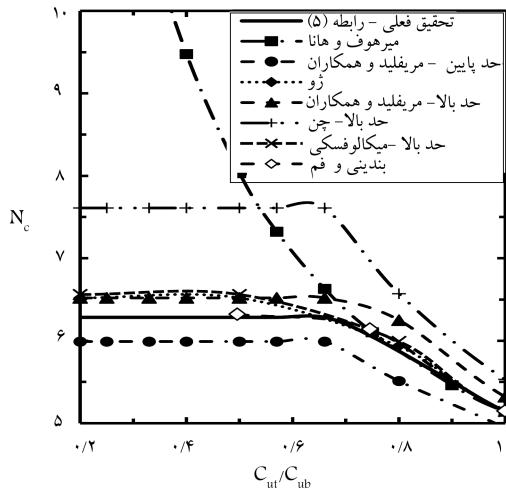
در نتیجه، برای تعیین ظرفیت باربری نهایی در حالت خاک سخت روی خاک نرم با جایگذاری روابط ۷ و ۸ در رابطه‌ی ۶ و تبدیل N_c^* به N_c ، از رابطه‌ی ۹ می‌توان استفاده کرد:

$$\frac{N_c}{5/14} = \min \left\{ \left[1 + 0.75 \left(\frac{c_{ut}}{c_{ub}} - 1 \right)^{-0.75} \left(\frac{H}{B} \right) \right] \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} \right), 1 \right\} \quad (9)$$

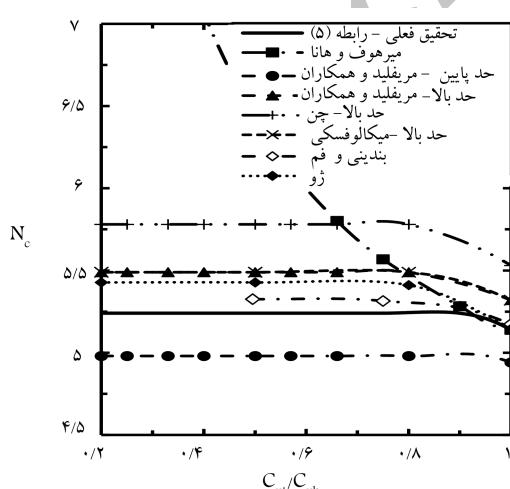
دقیق شود که ضریب c_{ut}/c_{ub} جهت تبدیل N_c^* به N_c در رابطه‌ی ۷ نمایان شده است و طرفین رابطه به عدد $5/14$ تقسیم شده‌اند. طبق مقایسه‌ی انجام شده بین



شکل ۷. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک نرم روی خاک سخت برای $H/B = 0, 125$



شکل ۸. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک نرم روی خاک سخت برای $H/B = 0, 25$



شکل ۹. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک نرم روی خاک سخت برای $H/B = 0, 5$

در نهایت مقدار ضریب N_c با حل دستگاه معادلات ۱۳ و ۱۴ و پیدا کردن کمیته‌ی رابطه‌ی ۱۰ میسر می‌شود:

$$\frac{\partial N_c}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_c}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

اگر این معادلات برای خاک نک لایه‌ی یکنواخت حل شوند، مقدار ۵/۵۳ برای ضریب N_c بدست می‌آید، که ۸٪ بیش از مقدار دقیق تئوریک آن (۵/۱۴) است. برخی پژوهشگران در مطالعه‌ی خود روابطی نیمه تجربی را برای محاسبه‌ی ظرفیت باربری هر دو حالت خاک نرم روی سخت و سخت روی نرم ارائه کرده‌اند. برای حالت خاک سخت روی نرم، رابطه‌ی ۱۵ جهت محاسبه‌ی N_c ارائه شده است:^[۶]

$$N_c = \frac{q_u}{c_{ut}} = 5, 14 \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} \right) + 2 \left(\frac{c_a}{c_{ut}} \right) \left(\frac{H}{B} \right) \quad (15)$$

بخش دوم رابطه‌ی ۱۵ مربوط به اثر گسیختگی سوراخ‌کننده‌ی واقع شده در لایه‌ی بالایی است و ضریب c_a از ۱ (برای خاک همگن) تا ۰, ۱ برای حالت لایه‌ی بالایی بسیار سخت ($c_{ut}/c_{ub} = 5$) متغیر است. همچنین برای حالت خاک نرم روی خاک سخت نیز رابطه‌ی ۱۶ را ارائه کرده‌اند:^[۶]

$$N_c = \frac{q_u}{c_{ut}} = 5, 14 + 5, 14 \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} - 1 \right) \left(1 - \frac{H}{H_f} \right)^r \geq 5, 14 \quad (16)$$

که در آن، H عمق لایه‌ی بالایی و H_f عمق سطح گسیختگی زیر شالوده است، که طبق توصیه‌ی آن‌ها، این پارامتر برای خاک‌های رسی برابر با عرض شالوده است.^[۲۰]

۱۴. حالت خاک نرم روی خاک سخت

طبق مقایسه‌های انجام شده بین نتایج این پژوهش، رابطه‌ی ۵، و نتایج سایر پژوهشگران،^[۱۲, ۲۳, ۹, ۷, ۲, ۳] به این مشاهدات می‌رسیم:

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، ظرفیت باربری نهایی شالوده در این حالت یا فقط به نسبت H/B وابسته است ($N_{c,max}$) و یا تابع هر دو نسبت c_{ut}/c_{ub} و H/B است. با توجه به شکل‌های ۷ الی ۹ واضح است که نتایج تفاضل محدود و رابطه‌ی ۵ در صورتی که ظرفیت باربری شالوده فقط تابع H/B باشد، به میانگین حدود بالا و پایین مریفیلد و همکاران،^[۲] بسیار نزدیک هستند، در حالی که در خارج از این ناحیه (قسمت شیبدار شکل ۲) نتایج تفاضل عددی و رابطه‌ی ۴ با کاهش H/B به حد بالای ظرفیت باربری ارائه شده در مریفیلد و همکاران،^[۲] و میکالوفسکی،^[۱] نزدیک می‌شوند (شکل‌های ۷ و ۸) و البته به نظر می‌آید که برآورد چن،^[۲۱] از حد بالای ظرفیت باربری نسبت به مریفیلد و همکاران،^[۲] و میکالوفسکی،^[۱] دقت کمتری دارد.

در مقایسه با نتایج المان محدود، همان‌طور که در شکل‌های ۷ الی ۹ مشاهده می‌شود، زو^[۱۲] به طور کلی مقدادر بزرگ‌تری را برای ظرفیت باربری پیش‌بینی کرده است، که این مقدار در برخی موارد از حد بالای ارائه شده‌ی مریفیلد و همکاران،^[۲] نیز فراتر رفته است. در مقابل نتایج ارائه شده‌ی بندینی و فم،^[۱] و این پژوهش بسیار نزدیک هستند. این تذکر لازم است که محدودیت اصلی در پژوهش بندینی و فم،^[۱] عدم بررسی c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از ۵/۰ است، که

نتایج تفاضل محدود حدوداً برابر میانگین حدود بالا و پایین ارائه شده‌ی مریفیلد و همکاران،^[۲] هستند.

همچنین در مقایسه‌ی حدود بالای ارائه شده می‌توان گفت که نتایج میکالوفسکی،^[۴] برای c_{ut}/c_{ub} های نزدیک به ۱ عملکرد بهتری نسبت به مریفیلد و همکاران،^[۲] و چن،^[۷] دارد و نتایج آن به نتایج تفاضل محدود نزدیک است، اما با افزایش c_{ut}/c_{ub} نتایج مریفیلد و همکاران،^[۲] و میکالوفسکی،^[۴] عملکرد نسبتاً مشابهی دارند. نتایج المان محدود ژو،^[۱۳] و بندهنی و فم،^[۱۴] نیز به طور کلی بیشترین همبستگی را با نتایج پژوهش حاضر دارند و در بیشتر موارد، مقدار بیشتری برای ظرفیت باربری شالوده پیش‌بینی کرده‌اند. البته این تذکر لازم است که بندهنی و فم،^[۱۴] نتایج خود را برای $H/B > 1$ ارائه نکرده‌اند.

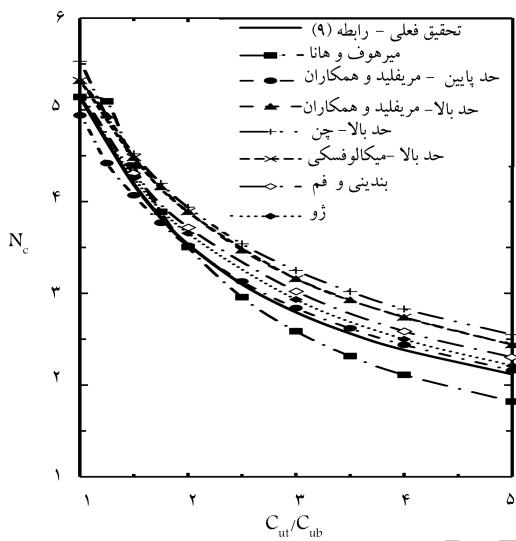
همان‌طورکه در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود، رابطه‌ی ۱۵ در H/B های کوچک با افزایش c_{ut}/c_{ub} نتایج تفاضل محدود و رابطه‌ی ۹ بسیار نزدیک حدود پایین ارائه شده‌ی مریفیلد و همکاران،^[۲] هستند، اما در H/B های بزرگ‌تر (شکل‌های ۱۳ و ۱۴)

به خصوص در حالت $H/B = ۰,۱۲۵$ در صورت برونویابی نتایج، خطای ایجاد می‌کند.

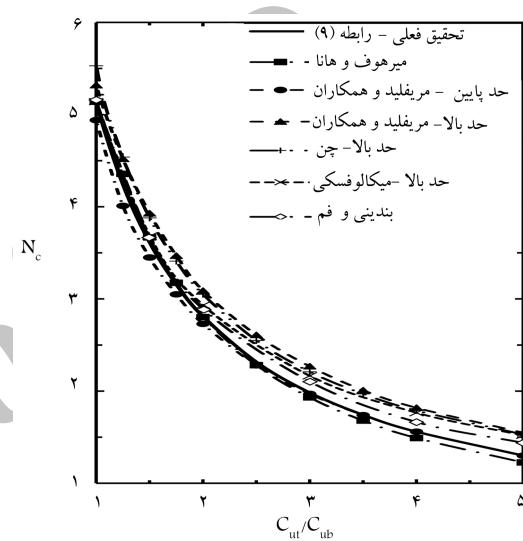
به طورکلی می‌توان گفت رابطه‌ی ارائه شده‌ی میرهوف و هانا،^[۹] تخمین خوبی را از ظرفیت باربری برای قسمت شبیه دار شکل ۲ ارائه می‌دهد، اما با توجه به تعریف نشدن حد بالای ظرفیت باربری مانند آنچه در رابطه‌ی ۴ تعریف شده است، خطای رابطه‌ی ۱۶ برای c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از $۰,۱۶$ بسیار زیاد است.

۲.۴. حالت خاک سخت روی خاک نرم

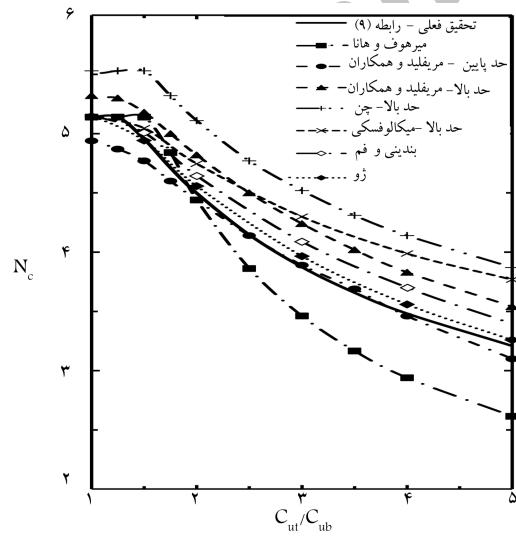
همان‌طورکه در شکل‌های ۱۰ الی ۱۲ مشاهده می‌شود، برای H/B های کوچک با افزایش c_{ut}/c_{ub} نتایج تفاضل محدود و رابطه‌ی ۹ بسیار نزدیک حدود پایین ارائه شده‌ی مریفیلد و همکاران،^[۲] هستند، اما در H/B های بزرگ‌تر (شکل‌های ۱۳ و ۱۴)



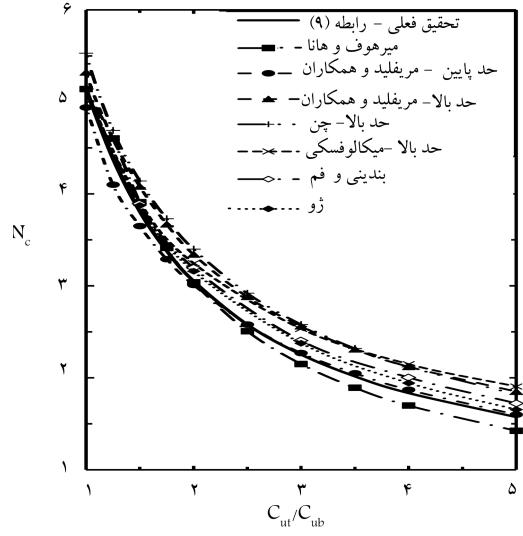
شکل ۱۲. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۰,۱۲۵$.



شکل ۱۵. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۰,۱۲۵$.



شکل ۱۳. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۱$.



شکل ۱۴. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۱,۲۵$.

جهت تعیین ظرفیت باربری استفاده می‌شود:

$$\frac{N_c}{5,14} = \min \left\{ \left[1 + 0,75 \left(\frac{c_{ut}}{c_{ub}} - 1 \right)^{0,75} \left(\frac{H}{B} \right) \right] \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} \right), 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{N_c}{5,14} = \min \left\{ \left[1 + 0,75 \left(\frac{125}{25} - 1 \right)^{0,75} \left(\frac{4}{4} \right) \right] \left(\frac{25}{125} \right), 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{N_c}{5,14} = \min (0,62, 1)$$

$$\Rightarrow N_c = 5,14 \times 0,62 = 3,19$$

$$q_u = c_{ut} \times N_c$$

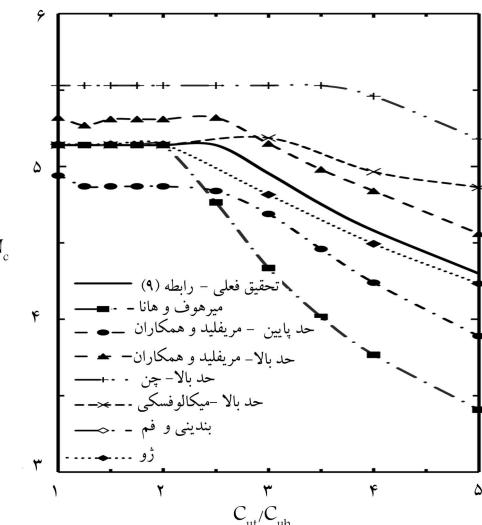
$$\Rightarrow q_u = 125 \times 3,19 = 398,75 \text{ kPa}$$

در نتیجه، روابط ارائه شده در این پژوهش ظرفیت باربری را حدوداً ۳۹۹ کیلوپاسکال و مریفیلد و همکاران^[۲] حد بالای ۴۴۳ کیلوپاسکال (۱۱٪ خطأ) و حد پایین ۳۸۸ کیلوپاسکال (۲٪ خطأ) را برآورد می‌کند. طبق میکالوفسکی^[۲] حد بالای ظرفیت باربری ۴۷۱ کیلوپاسکال (۱۸٪ خطأ) و طبق چن^[۷] ۴۸۷ کیلوپاسکال (۲۲٪ خطأ) برآورد شده است. رابطه‌ی نیمه تجزیی ارائه شده در میرهوف و هانا^[۹] نیز ظرفیت باربری را ۳۲۶ کیلوپاسکال (۱۸٪ خطأ) برآورد می‌کند، که بسیار کمتر از نتایج این پژوهش و حدود پایین ارائه شده در مریفیلد و همکاران^[۲] است. چن^[۱۰] و بندینی و فم^[۱۱] نیز ظرفیت باربری را به ترتیب ۴۰۸ (۲۰٪ خطأ) و ۴۲۴ (۶٪ خطأ) کیلوپاسکال برآورد کرده‌اند، که بسیار به نتایج این پژوهش نزدیک است.

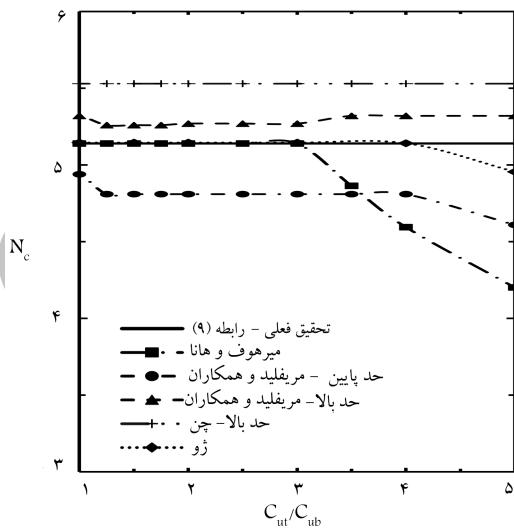
۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش ابتدا ظرفیت باربری شالوده‌های نواری بر روی خاک‌های دو لایه‌ی رسی با استفاده از روش تفاضل محدود در نرم افزار FLAC محاسبه و در ادامه، با توجه روند تغییر نتایج، رابطه‌ی ۵ برای حالت خاک سخت روی خاک سخت و رابطه‌ی ۹ برای حالت خاک سخت روی خاک نرم ارائه شده است. مقایسه‌های انجام‌شده بین برآورد این روابط از ظرفیت باربری و نتایج این پژوهش^[۷,۱۲] نشان‌دهنده‌ی دقت بالای این روابط است. در حالی که سایر پژوهشگران^[۷,۱۲] حدودی از ظرفیت باربری را مشخص کرده‌اند و نظری در مورد مقدار دقیق آن نداده‌اند. در این میان میرهوف و هانا^[۲] با ارائه‌ی روابط نیمه تجزیی به حل این مستعلمه پرداخته‌اند، اما طبق مقایسه‌های انجام‌شده، روابط ارائه شده میرهوف و هانا^[۹] فقط در c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از ۲/۵ و بزرگ‌تر از ۰/۶ دقت دارند و با فاصله‌گرفتن از این محدوده دقت خود را از دست می‌دهند و در نتیجه قابل اطمینان نیستند. در این میان نتایج ارائه شده ژو^[۱۳] و بندینی و فم^[۱۱] به نتایج این پژوهش نسبتاً نزدیک هستند، ولی با وجود استفاده از روش مشترک توسط این دو پژوهش، تفاوت‌هایی بین نتایج این دو پژوهشگر به چشم می‌خورد، که نشان‌دهنده‌ی خطای مدل‌سازی در روش پژوهش دست‌کم یکی از این دو پژوهشگر است.

جنیه‌ی مثبت دیگر این روابط سادگی آن‌هاست. به نحوی که با یک ماشین حساب ساده و با صرف زمان اندکی می‌توان به کمک این روابط ظرفیت باربری را با دقت بالایی برآورد کرد. روابط ارائه شده در این پژوهش می‌توانند به صورت گسترشده و کاربردی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های سطحی واقع شده بر روی خاک‌های دو لایه‌ی رسی مورد استفاده قرار گیرند.



شکل ۱۴. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = 1,5$.



شکل ۱۵. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = 2$.

رابطه‌ی ۹ بسیار نزدیک است، اما با افزایش H/B (شکل‌های ۱۳ الی ۱۵) از دقت رابطه‌ی ۱۵ کاسته و نسبت به سایر پژوهش‌های انجام‌شده، ظرفیت باربری نهایی کمتری برای c_{ut}/c_{ub} های بزرگ‌تر از ۲/۵ پیش‌بینی شده است.

۵. مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی با استفاده از رابطه‌ی ۹ حل و همچنین نتایج آن با نتایج سایر پژوهشگران برای این مثال خاص مقایسه شده است.

مثال: ظرفیت باربری نهایی یک شالوده‌ی نواری به عرض ۴ متر را که بر یک خاک رسی دو لایه قرار گفته است، محاسبه کنید. مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی لایه‌ی بالایی برابر با ۱۲۵ کیلوپاسکال و عمق آن برابر ۴ متر است. مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی لایه‌ی زیرین نیز برابر ۲۵ کیلوپاسکال است.

جواب: با توجه به اینکه لایه‌ی بالایی سخت‌تر از لایه‌ی زیرین است، از رابطه‌ی ۹

پابنوهای

1. fast lagrangian analysis of continua
2. limiting equilibrium
3. punching failure

منابع (References)

1. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York, USA (1943).
2. Davis, E.H. and Booker, J.R. "The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays", *Geotechnique*, **23**(4), pp. 551-563 (1973).
3. Merifield, R.S., Sloan, S.W. and Yu, H.S. "Rigorous plasticity solutions for the bearing capacity of two-layered clays", *Geotechnique*, **49**(4), pp. 471-490 (1999).
4. Michalowski, R.L. "Collapse loads over two-layer clay foundation soils", *Soils and Foundations*, **42**(1), pp. 1-7 (2002).
5. Button, S.J. "The bearing capacity of footings on a two-layer cohesive subsoil", in *Proc. 3rd International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Zurich (1953).
6. Reddy, A.S. and Srinivasan, R.J. "Bearing capacity of footings on layered clays", *J. of Soil Mechanics and Foundations, Division, ASCE*, **93**(2), pp. 83-99 (1967).
7. Chen, W.F., *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands (1975).
8. Brown, J. and Meyerhof, G.G. "An experimental study of ultimate bearing capacity of layered clay foundations", in *Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Engineering*, Mexico, pp. 45-51 (1969).
9. Meyerhof, G.G. and Hanna, A.M. "Ultimate bearing capacity of foundations on layered soils under inclined load", *Canadian Geotechnical Journal*, **15**(4), pp. 565-572 (1975).
10. Zhu, M. and Michalowski, R.L. "Bearing capacity of rectangular footings on two-layer clays", in *Proc. of 16th Int. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Osaka (2005).
11. Merifield, R.S. and Nguyen, V.Q. "Two and three-dimensional bearing-capacity solutions for footings on two-layered clays", *Geomech. and Geoengineering: an International Journal*, **1**(2), pp. 151-162 (2006).
12. Huang, M. and Qin, H. "Upper-bound multi-rigid-block solutions for bearing capacity of two-layered soils", *Computers and Geotechnics*, **36**(3), pp. 525-529 (2009).
13. Zhu, M. "Bearing capacity of strip footings on two-layer clay soil by finite element method", in *ABAQUS Users' Conference*, Boston, pp. 777-787 (2004).
14. Bandini, P. and Pham, H.V. "Bearing capacity of embedded strip footings in two-layered clay soils", in *Geo-Frontiers Congress*, Dallas, pp. 332-341 (2011).
15. Yu, L., Liu, J., Kong, X. and Hu, Y. "Three-dimensional large deformation FE analysis of square footings in two-layered clays", *J. Geotech. Geoenvir. Eng.*, **137**(1), pp. 52-58 (2011).
16. Sloan, S.W. "Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming", *International Journal of Numerical Analysis Methods in Geomechanics*, **12**(1), pp. 61-67 (1988).
17. Sloan, S.W. and Kleeman P.W. "Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields", *Comp. Methods Application in Mech. Eng.*, **127**(1-4), pp. 293-314 (1995).
18. FLAC, Fast Lagrangian Analysis of Continua User's Manual, Itasca Consulting Group, Minneapolis, MN (2005).
19. Bowles, J., *Foundation Analysis and Design*, 5th ed., McGraw-Hill, Peoria, Illinois (1996).
20. Meyerhof, G.G. "Influence of roughness of base and ground-water conditions on bearing capacity of foundations", *Geotechnique*, **5**(3), pp. 227-242 (1955).