

# بررسی توانمندی روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته برای حل مسائل انتقال حرارت از طریق برآورد خطا

مجتبی لبیب‌زاده\* (استادیار)

رجب مدرسی (کارشناس ارشد)

محمد نیسی‌پور (کارشناس ارشد)

گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۴)  
دوری ۲ - ۳۱، شماره‌ی ۲/۳، ص. ۳۰-۳۱

گسسته‌سازی مسئله در بسیاری از روش‌های بدون شبکه به معادلات انتگرالی منجر می‌شود، که حل آنها نیازمند انتگرال‌گیری عددی و معرفی نقاط گوس و وزن‌های مربوط همراه با شبکه‌بندی است. اما در میان این روش‌ها، روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته می‌تواند مراحل انتگرال‌گیری برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب را حذف کند و در عین سادگی، دقت بالا، و هزینه‌ی محاسباتی پایین، در مفهوم واقعی بدون شبکه باشد. هدف از این پژوهش، برآورد خطای حل عددی روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته برای مسائل انتقال حرارت هدایتی است. بدین منظور، ۲ مثال عددی دو بُعدی توسط این روش حل شده‌اند و پس از آن با استفاده از مفهوم کمینه‌ی مربعات باقیمانده، برآورد خطا، توزیع، و محل آن بررسی شده است. نتایج حاصل، گواه بر قابلیت بالای خطایابی درونی این روش بدون شبکه در حل شاخه‌ی دیگری از علوم مهندسی (انتقال حرارت هدایتی) است.

**واژگان کلیدی:** روش بدون شبکه، کمینه‌ی مربعات گسسته، انتقال حرارت هدایتی، برآورد خطا.

labibzadeh\_m@scu.ac.ir  
rajab\_modaresi@yahoo.com  
m.naisipour@scu.ac.ir

## ۱. مقدمه

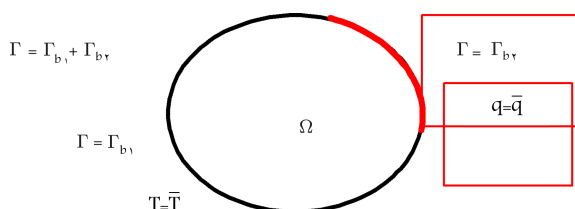
مربعات است، با عنوان کمینه‌ی مربعات گسسته<sup>۹</sup>،<sup>[۸]</sup> ارائه شده است. از مزایای روش مذکور عدم نیاز به انتگرال‌گیری، تقارن ماتریس ضرایب و سادگی به کارگیری آن است.

برآوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی اِبراری کارآمد، به منظور اطمینان از جهت‌گیری درست حل و برآورد دقت نتایج به دست آمده هستند. اگر قسمت‌هایی از مسئله که نیاز به دقت بیشتری دارند، مشخص شوند، می‌توان با یک فرایند مناسب، حجم محاسبات را تا حد زیادی کم کرد. هر فرایند نظریف تطبیقی شامل دو بخش اصلی است: ۱. برآوردکننده‌ی خطا<sup>۱۰</sup>، ۲. اِبراری برای فرایند نظریف. برآوردکننده‌ی خطا، مقدار خطا را در هر نقطه تخمین می‌زند و فرایند نظریف براساس اطلاعات برآوردکننده‌ی خطا مشخص می‌کند که چه قسمت‌هایی از حوزه‌ی مسئله نیاز به نظریف دارند. تاکنون چند برآوردکننده‌ی خطا در روش‌های بدون شبکه ارائه شده‌اند. از جمله می‌توان به فرایند نظریف تطبیقی در روش نقاط محدود<sup>[۹]</sup> فرایند حل مجدد با استفاده از روش المان گسسته<sup>۱۱</sup>، به صورت تطبیقی<sup>[۱۰]</sup> تولید یک برآوردکننده‌ی خطا در روش اجزاء محدود افراز واحد با استفاده از مفهوم افراز واحد و فرایند کمینه‌ی مربعات متحرک (MLS)<sup>[۱۱]</sup>،<sup>[۱۲]</sup> روش اقتباسی براساس سلول‌های زمینه‌ی برای برآورد خطا در روش‌های بدون شبکه متکی بر شبکه‌بندی زمینه‌ی<sup>[۱۲]</sup>، و غیره اشاره کرد. هسته‌ی اصلی این روش یک سلول برآوردکننده‌ی خطاست. در این روش مقدار

امروزه توجه بسیاری از پژوهشگران به روش‌های بدون شبکه<sup>۱</sup> معطوف شده است. روش‌های بدون شبکه طی سال‌های اخیر به مجموعه‌ی روش‌های عددی افزوده و افق جدید و وسیعی در زمینه‌های پژوهش‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی گشوده شده است. استفاده از روش‌های بدون شبکه هنوز به گستردگی روش اجزاء محدود در مسائل مهندسی نیست، ولی چه بسا فعلاً این روش‌ها شرایطی مشابه با زمانی که روش اجزاء محدود شروع به گسترش کرد، را سپری می‌کنند. در دهه‌ی گذشته، روش‌های بدون شبکه‌ی متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل معرفی شده‌اند. اولین بار از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۲</sup> به منظور مدل‌سازی پدیده‌های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده‌ی ابرهای غباری استفاده شده است.<sup>[۱]</sup> مطالعات متعددی در زمینه‌ی روش‌های بدون شبکه وجود دارد، به طوری که پس از انتشار نوشتار روش اجزاء پخشی<sup>۳</sup>،<sup>[۲]</sup> روش‌های زیادی به نام روش‌های بدون شبکه مانند روش بدون شبکه‌ی گالرکین<sup>۴</sup>،<sup>[۳]</sup> روش ذرات هسته‌ی باز تولیدشونده (RKPM)<sup>[۴]</sup>،<sup>[۵]</sup> روش اجزاء محدود افراز واحد (PUFEM)<sup>[۵]</sup>،<sup>[۶]</sup> روش ابرهای اچ پی<sup>[۶]</sup>،<sup>[۷]</sup> روش پتروف گالرکین محلی (MLPG)<sup>[۷]</sup>،<sup>[۸]</sup> و غیره ارائه شده‌اند. همچنین در سال‌های اخیر، یک روش جدید بدون شبکه، که کاملاً مبتنی بر فرایند کمینه‌ی

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۴/۲، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱۱/۲۳، پذیرش ۱۳۹۳/۱/۱۶



شکل ۱. شرایط مرزی شتابیک در انتقال حرارت هدایتی.

ضریب انتقال هم‌زفتی در فضای اطراف است. در این مطالعه، فقط انتقال حرارت از طریق هدایتی یا رسانایی بررسی می‌شود، لذا شرایط مرزی از نوع رابطه‌ی ۴ را در نظر گرفته نشده است. رابطه‌ی ۱ را می‌توان به صورت شکل ۱ و بر حسب باقیمانده (رابطه‌ی ۵) نوشت:

$$R_{\Omega} = \sum_{k=1}^{n_d} (L(T) + f) \quad (5)$$

که در آن،  $n_d$  تعداد کل نقاط استفاده شده برای گسسته‌سازی دامنه‌ی مسئله ( $\Omega$ ) است و  $L$  یک عملگر دیفرانسیلی مرتبه‌ی ۲ است (رابطه‌ی ۶):

$$L(\cdot) = L_1(\cdot) + L_2(\cdot) \quad (6)$$

که در آن  $L_1$  و  $L_2$  از رابطه‌ی ۷ به دست می‌آیند:

$$L_1 = k_x \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial x^2}, \quad L_2 = k_y \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial y^2} \quad (7)$$

و  $f$  از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$f = \rho Q \quad (8)$$

روابط ۲ الی ۴ با توجه به یادداشت ذیل این روابط بر حسب باقیمانده به صورت روابط ۹ و ۱۰ نوشته می‌شوند:

$$R_{\Gamma_{b_1}} = \sum_{k=1}^{n_{b_1}} (T - \bar{T})_k \quad \text{on } \Gamma_{b_1} \quad (9)$$

$$R_{\Gamma_{b_2}} = \sum_{k=1}^{n_{b_2}} (L'(T) - \bar{q})_k \quad \text{on } \Gamma_{b_2} \quad (10)$$

که در آن‌ها،  $n_{b_1}$  و  $n_{b_2}$  به ترتیب تعداد نقاط بر روی مرزهای ۱ و ۲ هستند.

$$L'(T) = L'_1(T) + L'_2(T) \quad \text{on } \Gamma_{b_2} \quad (11)$$

که در آن  $L'_1$  و  $L'_2$  از روابط ۱۲ و ۱۳ به دست می‌آیند:

$$L'_1 = n_x \cdot k_x \frac{\partial (\cdot)}{\partial x} \quad (12)$$

$$L'_2 = n_y \cdot k_y \frac{\partial (\cdot)}{\partial y} \quad (13)$$

در رابطه‌ی ۱۴، اصل کمینه‌ی مربعات بر حوزه‌ی مسئله و مرزها ارائه شده است:

$$I = \sum_{k=1}^{n_d} [L(T) + f]_k^2 + \sum_{k=1}^{n_{b_1}} \alpha_1 [T - \bar{T}]_k^2 + \sum_{k=1}^{n_{b_2}} \alpha_2 [L'(T) - \bar{q}]_k^2 \quad (14)$$

خطا در یک سلول به جای یک نقطه محاسبه می‌شود. خطای یک سلول از اختلاف بین نورم ۱۳ انرژی سلول موردنظر و نورم انرژی در یک سلول مرجع، که از طریق انتگرال‌گیری گوسی محاسبه شده است، به دست می‌آید. همچنین یک شاخص خطا برای روش بدون شبکه‌ی گالرکین ارائه شده است، [۱۳] که در آن از این اصل که جواب‌ها در نقاط گوس دقت بیشتری دارند، استفاده شده است.

در این مطالعه، ابتدا روش کمینه‌ی مربعات گسسته برای مسائل انتقال حرارت هدایتی ۱۴ دو بُعدی، پایدار و بدون چشمه‌ی حرارتی ارائه شده است، که به گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌پردازد. از قابلیت‌های این روش می‌توان به دقت بالا، سادگی، هزینه‌ی محاسباتی پایین و عدم نیاز به انتگرال‌گیری اشاره کرد. البته از عیوب این روش می‌توان به مشکل بودن اعمال شرایط مرزی نیومن (شرایط مرزی شامل مشتقات تابع جواب) اشاره کرد. همچنین از کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی متحرک وزنی برای دستیابی به مقادیر تابع شکل استفاده شده است. برای صحت‌یابی فرمول‌بندی روش کمینه‌ی مربعات گسسته، ۲ مسئله‌ی انتقال حرارت هدایتی حل و با جواب‌های دقیق مقایسه شده‌اند. در ادامه، یک برآوردکننده‌ی خطا برای این روش ارائه و خطای حل برآورد شده است.

## ۲. فرمول‌بندی روش کمینه‌ی مربعات گسسته

روش‌های معمول گالرکین، کمینه‌ی مربعات، هم‌مکانی و روش‌های زیرحوزه‌ی همگی به خانواده‌ی روش‌های باقیمانده‌ی وزنی متعلق است و اختلاف آنها فقط منتج از معیارهای مختلف وزن‌دهی به معادلات باقیمانده‌هاست. در تمامی این روش‌ها باقیمانده‌ی وزنی غالباً بر روی حوزه‌ی انتگرال‌گیری انجام و سپس برابر صفر قرار داده می‌شود. انتگرال‌گیری بر روی حوزه، خود منجر به تولید معادلات انتگرالی می‌شود، که برای حل این معادلات از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود.

در این بخش بنا به اهمیت کاربرد روش کمینه‌ی مربعات گسسته به نحوه‌ی دستیابی به مقادیر تابع شکل با استفاده از کمینه‌ی مربعات متحرک و همچنین گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش کمینه‌ی مربعات پرداخته شده است. [۱۴]

### ۲.۱. گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل و شرایط مرزی به روش

#### کمینه‌ی مربعات گسسته

معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی در حالت دو بُعدی و پایدار را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱ نوشت:

$$k \nabla^2 T(X) + \rho Q = 0 \quad (1)$$

که در آن،  $k$  و  $\rho$  به ترتیب ضریب هدایت حرارتی و چگالی هستند.  $Q$  چشمه‌ی حرارتی در واحد سطح و  $\Omega$  نشان‌دهنده‌ی محیط حل مسئله است. همچنین  $X = [x \quad y]^T$  بردار مختصات است. شرایط مرزی به این قرار است (روابط ۲ الی ۴):

$$T = \bar{T} \quad \text{on } \Gamma_{b_1} \quad (2)$$

$$n k \nabla T = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_{b_2} \quad (3)$$

$$n \cdot k \nabla T = h(T_a - T) \quad \text{on } \Gamma_{b_3} \quad (4)$$

که در آن‌ها،  $\bar{T}$  و  $\bar{q}$  به ترتیب دمای معین و شار حرارتی بر روی مرزهای  $\Gamma_{b_1}$  و  $\Gamma_{b_2}$  هستند.  $T_a$  دمای محیط است.  $n$  بردار یک‌ه‌ی برون‌سوی نرمال<sup>۱۵</sup> مرز و  $h$

هدف در روش کمینه‌ی مربعات متحرک، کمینه‌سازی تابع ۲۱ است:

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m W_x(x_k - x) [u_k - p^T(x)a(x)]^2 \quad (21)$$

که در آن،  $u_k$  پارامترگره‌ی  $u$  (در اینجا دمای تقریبی) در  $x = x_k$  و  $W_x(x_k - x)$  تابع وزنی است.  $m$  تعداد نقاط موجود در دامنه‌ی پشتیبان نقطه‌ی موردنظر یعنی  $x_k$  است. در این حالت تابع وزنی برای هر نقطه‌ی دلخواه در حوزه‌ی مسئله به صورت متحرک یا انتقالی تعیین می‌شود و لذا توانایی درون‌یابی پیوسته، در حوزه‌ی مسئله‌ی موردنظر را دارد. توابع وزنی و خصوصیات آن در بند بعدی معرفی شده‌اند. مشکل اصلی در این حالت تولید تابع وزنی متحرکی است که بتواند تغییر در اندازه را به‌طور پیوسته برای هر نقطه‌ی مانند  $x_k$  و با تعدادی از نقاط مشخص در هر مرتبه از محاسبه هماهنگ کند. بدین منظور می‌توان تصور کرد تابع وزنی، خاصیت تقارن به صورت رابطه‌ی ۲۲ دارد:

$$W_x(x_k - x) = W_x(x - x_k) \quad (22)$$

با به‌کارگیری تابع وزنی متناظر با هر نقطه مانند  $x_k$ ، رابطه‌ی ۲۳ را داریم:

$$W_k(x_k - x) = W_k(x - x_k) \quad (23)$$

بنابراین هدفی که باید کمینه شود به صورت رابطه‌ی ۲۴ است:

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n W_k(x - x_k) [u_k - p^T(x)a(x)]^2 \quad (24)$$

که در آن،  $n$  تعداد نقاط در همسایگی  $x$  به‌گونه‌ی است که اندازه‌ی تابع وزنی در آن نقاط مخالف صفر است (رابطه‌ی ۲۵) و نیز  $u_k$  پارامترگره‌ی  $u$  در  $x = x_k$  است. در این حالت تابع وزنی در نقطه‌ی  $x_k$  استوار است و در نقاط دیگر ارزیابی می‌شود.

$$w_k(x_k - x) \neq 0 \quad (25)$$

با مشتق‌گیری از تابع هدف  $J(x)$  نسبت به  $a(x)$  به منظور کمینه‌سازی آن و با مرتب‌سازی، روابط ۲۶ و ۲۷ را خواهیم داشت:

$$a(x) = A^{-1}(x) \sum_{j=1}^n B_j(x) u_j \quad (26)$$

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u_j \quad (27)$$

با تعریف ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به صورت روابط ۲۸ و ۲۹، روابط ۳۰ و ۳۱ را خواهیم داشت:

$$A(x) = \sum W_k(x - x_k) P(x_k) P^T(x_k) \quad (28)$$

$$B_j(x) = W_j(x - x_k) P(x_j) \quad (29)$$

$$Pa = u = \sum_{k=1}^n N_k u_k \quad (30)$$

$$P(A^{-1} B u_k) = N_k u_k \quad (31)$$

حال می‌توان تابع شکل را به صورت رابطه‌ی ۳۲ نشان داد:

$$N_k(x) = P A^{-1} B_k \quad (32)$$

همچنین مشتقات تابع شکل و ماتریس  $A$  و  $B$  به راحتی با معلوم‌بودن خود توابع به‌دست می‌آیند.

که در آن،  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  ضرایب پناستی بر مرزهای ۱ و ۲ هستند. همان‌طور که در قبل اشاره شد، مقادیر بزرگ این ضرایب منجر به اعمال دقیق شرایط مرزی می‌شود. می‌توان گفت که این ضرایب نوعی وزن هستند که موجب جواب کمینه‌ی خطای ممکن می‌شود. در محاسبات، مقدار  $\alpha_1$  برابر  $10^5$  و مقدار  $\alpha_2$  برابر  $10^6$  در نظر گرفته شده است. مقادیر ضرایب پناستی باید به‌گونه‌ی انتخاب شوند که ماتریس ضرایب خراب نشود و برنامه اعلام خطا نکند.

برای رساندن مقادیر باقیمانده به میزان کمینه و در نتیجه رسیدن به جواب دقیق‌تر باید از رابطه‌ی ۱۴، نسبت به مقادیر گرهبی مشتق گرفت. با این کار به دستگاه معادلات خطی ۱۵ می‌رسیم:

$$K^T T = F \quad (15)$$

که در آن،  $T = [T_1, T_2, \dots, T_N]^T$  و  $K$  و  $F$  به ترتیب بردار مجهولات، ماتریس ضرایب و بردار بار معلوم هستند، و  $K$  و  $F$  از طریق روابط ۱۶ و ۱۷ محاسبه می‌شوند:

$$K_{ij} = \sum_{k=1}^{n_d} [L(N_i)]^T L(N_j) + \alpha_1 \sum_{k=1}^{n_{b1}} [N_i]^T N_j + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n_{b2}} [L'(N_i)]^T L'(N_j) \quad (16)$$

$$f_i = \sum_{k=1}^{n_d} L(N_i) f + \alpha_1 \sum_{k=1}^{n_{b1}} N_i \bar{T} + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n_{b2}} L'(N_i) \bar{q} \quad (17)$$

که در آن‌ها،  $N_i$  ها همان توابع شکل در روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته هستند، که با روش کمینه‌ی مربعات متحرک  $16$ ، ساخته می‌شوند. ماتریس ضرایب  $K$  یک ماتریس مربعی با ابعاد  $n_d \times n_d$  است ( $n_d$  تعداد کل نقاط است). همچنین این ماتریس متقارن نیز هست، که حل آن را توسط روش‌های سریع‌تر ممکن می‌سازد.

## ۲.۲. کمینه‌ی مربعات متحرک وزنی برای محاسبه‌ی مقادیر توابع

### شکل

این روش حدود سال ۱۹۶۰ میلادی توسط شپارد،<sup>[۱۵]</sup> به منظور درون‌یابی هموار سطحی برای نقاط با مقادیر متغیر به‌کار رفته است و اساس کاربرد آن دستیابی به تقریب‌های کاملاً پیوسته است. تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک<sup>[۱۶]</sup> برای کلیه‌ی نقاطی که تعیین مقدار مجهول در آن با درون‌یابی مد نظر است، به‌کار گرفته می‌شود. البته به‌کارگیری توابع وزنی علاوه بر تعیین مقادیر مجهول، توانایی هموارسازی مشتقات را نیز دارد و نکته‌ی قابل توجه آنکه چنین مشتقاتی فقط به تابع چندجمله‌ی موضوعی مرتبط هستند. تابع تقریب را به صورت رابطه‌ی ۱۸ فرض کنید:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n p_i^T(x) a_i(x) \equiv p^x a(x) \quad (18)$$

که در آن،  $a_i(x)$  بردار ضرایب تابع چندجمله‌ی است که مقادیر آن با به‌کارگیری الگوریتم مناسب تعیین می‌شوند. بردار متغیرهای چندجمله‌ی هستند که در حالت خطی یک و دو بعدی به صورت رابطه‌ی ۱۹ هستند:

$$P = (1, x), \quad P = (1, x, y) \quad (19)$$

همچنین در حالت غیرخطی (مرتبه‌ی دوم) یک و دو بعدی به صورت رابطه‌ی ۲۰ است:

$$P = (1, x, y, x^2, xy, y^2), \quad P = (1, x, x^2) \quad (20)$$

### ۱.۲.۲. توابع وزنی

توابع وزنی در حالت کلی باید این مشخصه‌ها را داشته باشند: [۱۶]

-- پیوسته و مثبت و قابل تفکیک در حوزه‌های تأثیر مسئله باشند و مقدار بزرگ‌تر از صفر در داخل حوزه و مقدار صفر در خارج از حوزه داشته باشند. همچنین سطح زیر منحنی تابع وزنی در یک زیرحوزه‌ی معادل واحد باشد (خاصیت نرمال).

-- اندازه‌ی تابع وزنی برای یک نقطه، مقدار بزرگ‌تری نسبت به مقدار آن در سایر نقاط آن زیرحوزه داشته باشد.

-- تعداد نقاط موجود در یک حوزه‌ی تأثیر (زیرحوزه) که مقادیر تابع وزنی در آن محاسبه می‌شود، باید بزرگ‌تر یا مساوی درجه‌ی تابع پایه (تعداد جملات تابع چندجمله‌یی) باشند.

با به کارگیری حوزه‌ی اثر دایره‌یی و در صورتی که پارامتر  $S$  معرف فاصله‌ی دو نقطه از یکدیگر،  $r$  معرف شعاع تأثیر زیرحوزه،  $w(r)$  تابع وزنی،  $S_{max}$  متناظر با اندازه‌ی حوزه و  $r = \frac{S}{S_{max}}$  در فرمول‌بندی کلی باشند، سه تابع وزنی مطرح در روش‌های بدون شبکه شامل توابع نمایی، اسپیلاین مرتبه‌ی ۳ و اسپیلاین مرتبه‌ی ۴ به صورت روابط ۳۳ الی ۳۵ هستند: تابع وزنی نمایی:

$$W(r) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2}, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (33)$$

تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی سوم  $W(r)$ :

$$W(r) = \begin{cases} \frac{1}{6} - 4r^2 + 4r^3, & r \leq \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} - 4r + 4r^2 - \frac{1}{6}r^3, & \frac{1}{6} < r \leq 1 \\ 0, & r \geq 1 \end{cases} \quad (34)$$

تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی چهارم:

$$W(r) = \begin{cases} 1 - 6r^2 + 8r^3 - 3r^4, & r \leq 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases} \quad (35)$$

در این پژوهش از تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی سوم استفاده شده است.

### ۳. مروری بر انتقال حرارت<sup>۱۹</sup>

در ترمودینامیک مکانیزم انتقال گرما و روش‌های محاسبه‌ی نرخ انتقال گرما مورد تجزیه و تحلیل قرار نمی‌گیرد. لذا ترمودینامیک فقط حالت تعادلی سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهد و لازمه‌ی حالت تعادلی معادله نبود گرادیان دماست. به عبارت دیگر، انتقال گرما ذاتاً غیرتعادلی است؛ لذا هدف ما از مطالعه‌ی انتقال گرما، پاسخ‌گویی به زمان لازم برای رسیدن به تعادل سیستم و تغییرات دما برحسب زمان و شدت انتقال گرما در هر لحظه از زمان و مکان است. بنابراین انتقال حرارت به صورت انرژی انتقال‌یافته از یک سیستم به سیستم دیگر در اثر وجود اختلاف دما بین دو سیستم تعریف می‌شود. بنابراین به زبان ساده‌تر، انتقال حرارت ناشی از وجود اختلاف دماست. پس نیروی محرکه‌ی انتقال حرارت گرادیان دماست. لذا نرخ انتقال حرارت در یک جهت مشخص به میزان اختلاف دما بر واحد طول بستگی دارد و هر چه اختلاف دما بین دو سیستم زیادتر باشد، نرخ انتقال حرارت زیادتر می‌شود. انتقال حرارت کلاً به ۳ روش هدایت<sup>۲۰</sup>، جابه‌جایی (همرفتی)<sup>۲۱</sup> و تابشی<sup>۲۲</sup> صورت

می‌گیرد. در بیشتر مسائل کاربردی انتقال حرارت به صورت ترکیبی از ۲ یا ۳ روش ذکر شده است.

### ۱.۳. انتقال حرارت هدایتی

اگر دمای ناحیه‌یی از جسم از ناحیه‌یی دیگر از آن بالاتر باشد، حرارت از ناحیه‌ی گرم‌تر به سمت ناحیه‌ی سردتر جریان می‌یابد. این پدیده را هدایت گویند. در این پدیده انتقال انرژی حرارتی به صورت جریان الکترون‌های آزاد و با انتقال انرژی ارتعاشی ذرات جسم به ذرات مجاور در دمای پایین‌تر است. در این روش واسطه‌ی انتقال حرارت (جامدات، سیال و گاز) ساکن است، لذا شدت انتقال حرارت هدایتی (مقدارگرما‌ی منتقل‌شده در زمان واحد) متناسب با شیب دما در جسم و اندازه‌ی سطح عبور است. بنابراین هدایت حرارتی با قانون فوریه به صورت رابطه‌ی ۳۶ بیان می‌شود:

$$q = -kA \frac{dT}{dx} \quad (36)$$

که در آن،  $q$  مقدار حرارت منتقل‌شده در واحد زمان  $\left(\frac{J}{s}\right)$  است.

بنابراین قانون فوریه بیان‌گر مکانیزم انتقال حرارت به روش هدایتی است. از طرفی قانون فوریه مبتنی بر تجربه‌ی بشری است، نه به صورت تئوری تحلیلی؛ ضمناً علامت منفی بیان‌گر جهت کاهش انتقال دماست، به عبارت روشن‌تر، گرما نمی‌تواند از جای سرد به جای گرم نقل مکان کند (قانون دوم ترمودینامیک). قانون فوریه برای تمامی حالات (پایدار، ناپایدار) معتبر است. حال با توجه به رابطه، اگر گرادیان دما ثابت باشد، انتقال حرارت تابع ضخامت نخواهد بود؛ زیرا به ازاء هر ضخامتی، مقدار انتقال حرارت ثابت خواهد بود.

### ۲.۳. معادله‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی در حالت‌های ۲ و ۳ بُعدی

جریان حرارت در اجسامی که بیش از یک بُعد دارند، به صورت حرارت هدایت‌شده به داخل و یا خارج حجم المان در سه جهت محورهای مختصات خواهد بود. لذا برای المان یا حجم  $dx, dy, dz$  با فرض ثابت بودن  $K$  (ضریب هدایت حرارتی  $\frac{W}{m \cdot C}$ ) معادله‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی سه بُعدی،<sup>[۱۷]</sup> به صورت رابطه‌ی ۳۷ خواهد بود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} + \frac{d^2T}{dz^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt} \quad (37)$$

که در آن،  $\alpha$  ضریب نفوذ حرارت و  $q$  شدت حرارت تولیدی در داخل جسم است. معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی در حالت دو بُعدی، پایدار و بدون چشمه‌ی حرارتی به صورت رابطه‌ی ۳۸ معرفی می‌شود:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = 0 \quad (38)$$

که در آن،  $T$  توزیع دما برحسب  $x$  و  $y$  ( $^{\circ}C$ ) است. لذا از معادله‌ی ۳۸ در حل مثال‌های عددی با استفاده از روش DLSSM استفاده شده است.

### ۴. برآورد خطا برای روش کمینه‌ی مربعات گسسته

#### (DLSSM)

جواب تقریبی حاصل از یک روش عددی، دو نوع خطای اصلی دارد. اولین آن‌ها خطای تقریب تابع جواب است، که با استفاده از توابع آزمون انجام می‌شود. واضح

است. به این صورت که مقدار جواب محاسبه شده از روش پیشنهادی در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله قرار داده شده است و باقیمانده‌ی آن در تعیین تابع خطای تقریبی به کار می‌رود.

در روش بدون شبکه‌ی DLSM از مقدار تابع  $I$ ، که در رابطه‌ی ۴۰ آمده است، به عنوان معیاری برای خطا در هر نقطه استفاده می‌شود. واضح است که هر چه مقدار  $I$  کمتر باشد، مقدار خطا نیز کمتر خواهد بود. رابطه‌ی ۴۱ را می‌توان هم روی تمام حوزه‌ی مسئله و هم بر روی یک سالول voroni و همچنین یک نقطه محاسبه کرد. رابطه‌ی ۴۲ برآوردکننده‌ی خطا در یک نقطه را نشان می‌دهد. برای سنجش درستی برآوردکننده‌ی خطای ارائه شده، ۲ مثال از مسائل انتقال حرارت هدایتی که جواب‌های تحلیلی دارند، با استفاده از روش DLSM حل شده‌اند و خطای محاسبه شده توسط جواب دقیق (خطای دقیق) و خطای برآورد شده با روش DLSM برای آن محاسبه و مقایسه شده است. خطای دقیق در هر نقطه از رابطه‌ی ۴۳ به دست می‌آید و خطای روش DLSM در هر نقطه از رابطه‌ی ۴۴ به دست می‌آید، که در آن،  $T_k$  دمای تقریبی و  $\hat{T}_k$  دمای دقیق در نقطه‌ی  $k$ ام هستند.

$$E_{Estimate}^{Total} = \left[ \frac{I}{N} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (41) \quad (N \text{ تعداد کل نقاط گره‌ی})$$

$$E_{Estimate}^k = (I)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

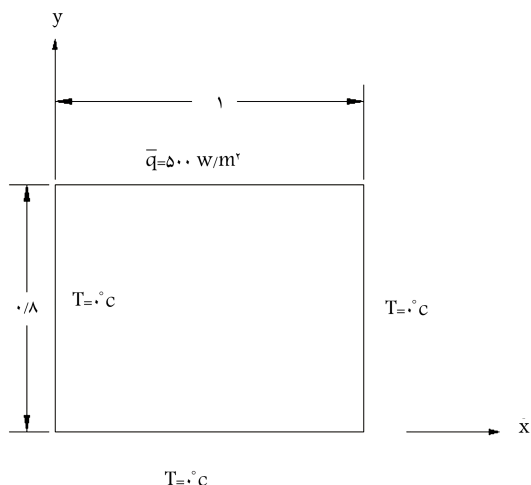
$$E_{Exact}^{Total} = \left( \frac{\sum_{k=1}^N [(T_k - \hat{T}_k)^T (T_k - \hat{T}_k)]}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

$$E_{Estimate}^k = ((T_k - \hat{T}_k)^T (T_k - \hat{T}_k))^{\frac{1}{2}} \quad (44)$$

## ۵. مثال‌های عددی

### ۱.۵. انتقال حرارت در صفحه‌ی مستطیلی با شار حرارتی ثابت

به عنوان اولین مسئله، یک صفحه‌ی مستطیلی به ابعاد  $1 \times 0.8$  متر در نظر گرفته شده است (شکل ۲). ضریب انتقال حرارت در این مسئله  $K = 1.2 \frac{W}{m^2 \cdot C}$  در



شکل ۲. هندسه‌ی مسئله.

است که اگر در مناطقی که تابع جواب، تغییرات بیشتری دارد، نقاط بیشتری به کار رود، این خطا کاهش می‌یابد، که این همان فرایند نظریه‌ی ۲۳ است. خطای دوم، خطای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل و معادلات مرزی است. بخشی از این خطا ناشی از محدودیت ذخیره‌سازی اطلاعات در هر مرحله از فرایند محاسبات است، به این معنی که معادلات در تمام حوزه و در بی‌نهایت نقطه تعریف شده‌اند، اما در فرایند گسسته‌سازی معادلات، به دلیل محدودیت حافظه و زمان، در نقاط محدودی تعریف می‌شوند. بخش دیگری از این خطا به شیوه‌ی گسسته‌سازی معادلات مربوط می‌شود. بخشی از خطای دوم را، که مربوط به محدودیت ذخیره‌سازی اطلاعات است، می‌توان با توجه به پیشرفت روزافزون رایانه‌ها و استفاده از فرایند نظریه‌ی به میزان کمیته رساند.

### ۱.۴. منابع خطا در روش DLSM

اولین منبع خطا در روش بدون شبکه DLSM حاصل از تقریب تابع با استفاده از توابع آزمون‌ی است (رابطه‌ی ۳۹):

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i) \bar{u}_i \quad (39)$$

طبق رابطه‌ی ۳۹، در روش‌های بدون شبکه برای محاسبه‌ی مقدار تابع در یک نقطه‌ی فرضی مانند  $x_k$  از درون‌یابی مقادیر گره‌ی استفاده می‌شود، که این امر یکی از منابع به وجود آورنده‌ی خطاست. زیرا لزوماً این تابع درون‌یاب بر تابع جواب منطبق نمی‌شود. واضح است که هر چه تعداد نقاط گره‌ی افزایش یابد، مقدار این خطا کمتر خواهد شد. دومین عامل ایجاد خطا در روش DLSM از رابطه‌ی ۴۰ (مجموع مربعات باقیمانده) نشأت می‌گیرد:

$$I = \sum_{k=1}^{nd} [R_{\Omega}]_k^2 + \sum_{k=1}^{nb_1} \alpha_1 [R_{\Gamma_{b_1}}]_k^2 + \sum_{k=1}^{nb_2} \alpha_2 [R_{\Gamma_{b_2}}]_k^2 \quad (40)$$

مشاهده می‌شود که فقط تعداد محدودی از نقاط در تشکیل تابع  $I$  نقش دارند. بنابراین محدود بودن تعداد نقاط در تشکیل تابع  $I$  را نیز می‌توان به عنوان یکی دیگر از عوامل به وجود آورنده‌ی خطا نام برد. به منظور کاهش خطا در این حالت باید تعداد نقاط را افزایش داد.

### ۲.۴. برآورد خطا

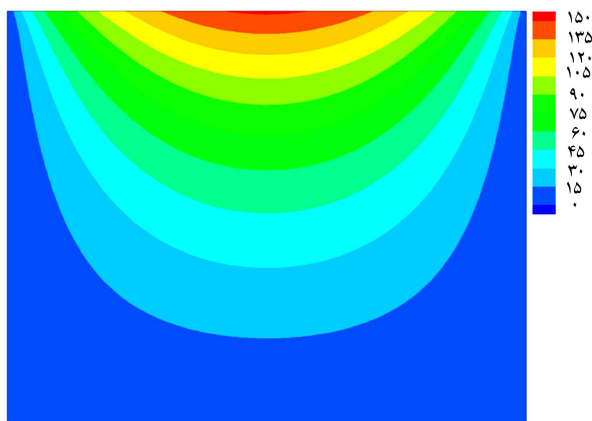
بسیاری از روش‌های برآورد خطا، که براساس روش اجزاء محدود ارائه شده‌اند، قابل کاربرد در روش‌های بدون شبکه نیستند. برای مثال، برآوردکننده‌ی خطای روش رایج  $Z, Z^{[19,18]}$  نیازمند نقاط بهینه یا ابر همگراست، که معمولاً بر روی نقاط گوس المان‌ها قرار دارند. پیدا کردن این نقاط بهینه در اجزاء محدود مرتبه‌ی بالا، سخت و در روش‌های بدون شبکه با شبکه‌ی پس‌زمینه، بسیار سخت‌تر است. به‌طور کلی، روش‌های برآورد خطا را می‌توان به ۳ گروه تقسیم کرد:

۱. روش‌های مبتنی بر باقیمانده،<sup>[۲۰]</sup>

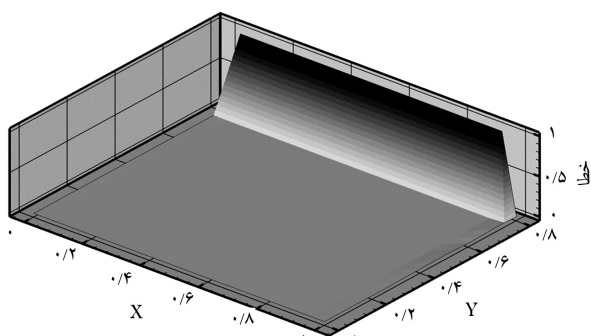
۲. روش‌های مبتنی بر هموارسازی یا برازش،<sup>[۲۱]</sup>

۳. روش‌های مبتنی بر شیب و تغییرات جواب.<sup>[۲۲]</sup>

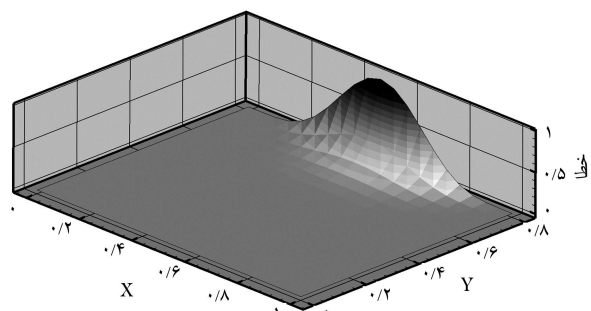
به بیان کلی، روش‌های مبتنی بر باقیمانده، که باقیمانده‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله را به‌عنوان معیار خطا در نظر می‌گیرند، تئوری استوار و درستی دارند و کاربردشان ساده است. در این نوشتار از روش‌های مبتنی بر باقیمانده استفاده شده



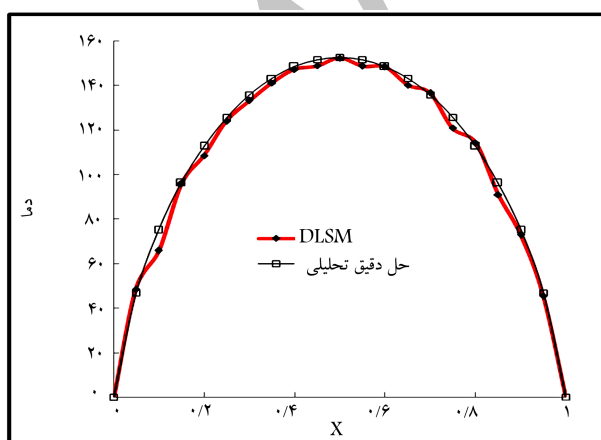
شکل ۵. کانتور جواب دقیق.



شکل ۶. توزیع خطای برآوردشده (خطای تقریبی).



شکل ۷. توزیع خطای دقیق.



شکل ۸. مقایسه‌ی جواب DLSM و جواب دقیق روی خط  $y = 0.8$ .

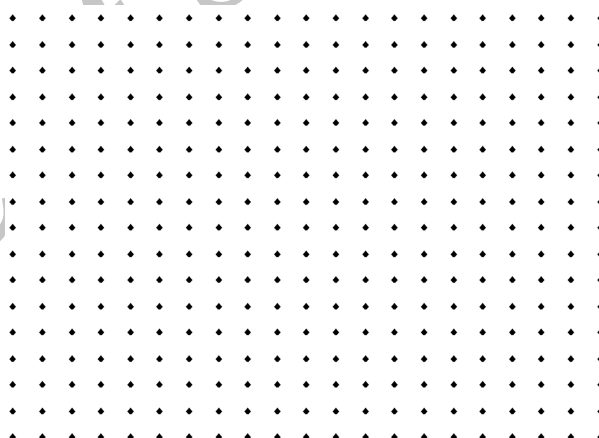
نظر گرفته شده است. مرز بالا تحت شار حرارتی به میزان  $\frac{w}{m^2} = 50^\circ$  قرار دارد. سایر مرزها در دمای ثابت صفر  $^\circ C$  قرار دارند. منبع حرارتی در حوزه‌ی مسئله وجود ندارد. جواب دقیق مسئله به صورت رابطه‌ی ۴۵ است: [۲۳]

$$T(x, y) = \frac{4qa}{k\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sinh \left\{ \left[ \frac{(2m+1)\pi}{a} \right] y \right\} \sin \left\{ \left[ \frac{(2m+1)\pi}{a} \right] x \right\}}{\cosh \left\{ \left[ \frac{(2m+1)\pi}{a} \right] b \right\} (2m+1)^2} \quad (45)$$

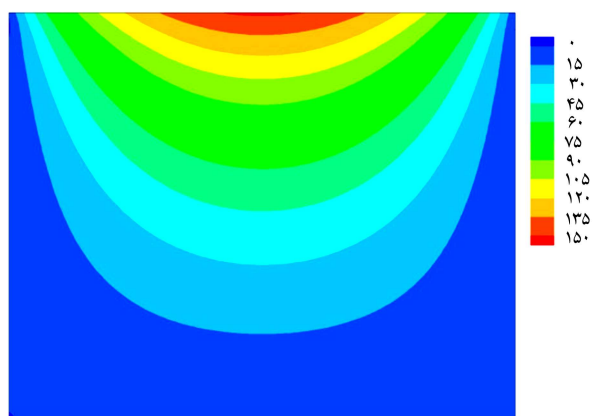
آرایش نقاط برای حل مسئله در شکل ۳ نشان داده شده است. برای حل از ۳۵۷ نقطه که به طور منظم پخش شده‌اند، استفاده شده است. در شکل‌های ۴ و ۵ جواب روش DLSM با جواب دقیق مقایسه شده است.

کانتورهای جواب در واقع توزیع دما  $T(x, y)$  بر سطح جسم را نشان می‌دهند. رنگ‌های روشن‌تر، نشان‌دهنده‌ی دمای بالاتر هستند.

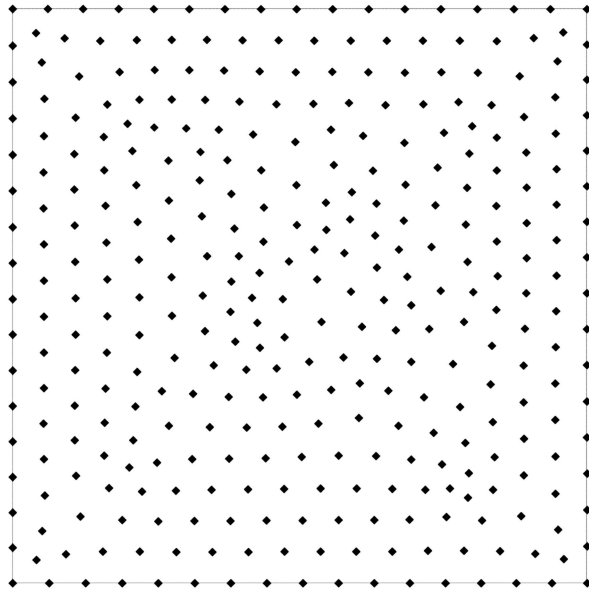
در شکل‌های ۶ و ۷ نیز به ترتیب توزیع خطای برآوردشده (خطای محاسبه‌شده با روش پیشنهادی و توزیع خطای واقعی مسئله ارائه شده است. نقاط تیره‌تر خطای بیشتر را نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که روش پیشنهادی فقط توزیع و محل خطای بیشتر را نشان می‌دهد و مقدار آن را برآورد نمی‌کند. در شکل ۸، جواب دقیق با جواب روش عددی پیشنهادی روی خط  $y = 0.8$  مقایسه شده است.



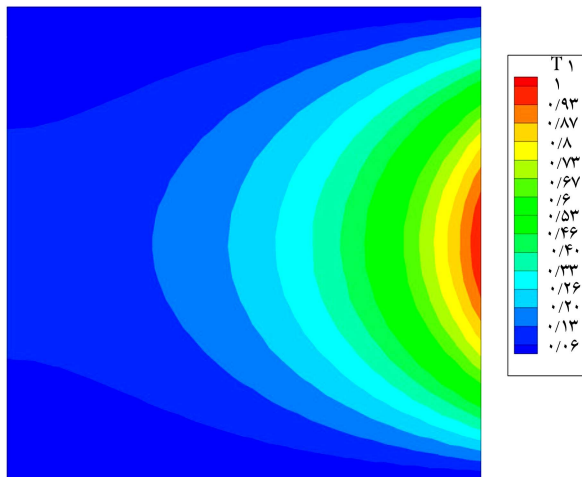
شکل ۳. آرایش منظم نقاط.



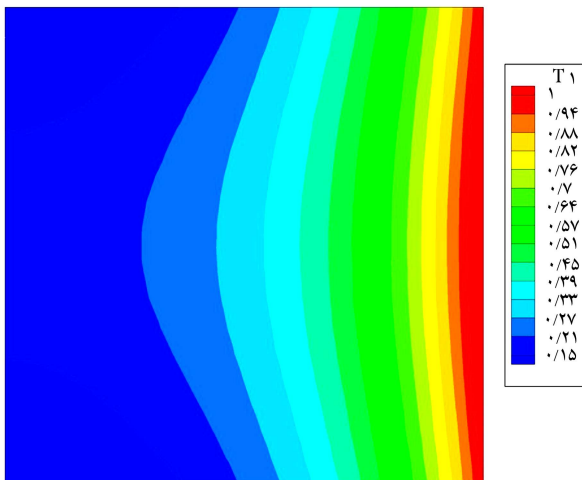
شکل ۴. کانتور جواب روش DLSM.



شکل ۱۰. توزیع نامنظم نقاط گره‌بی.



شکل ۱۱. کانتور جواب روش DLSSM.



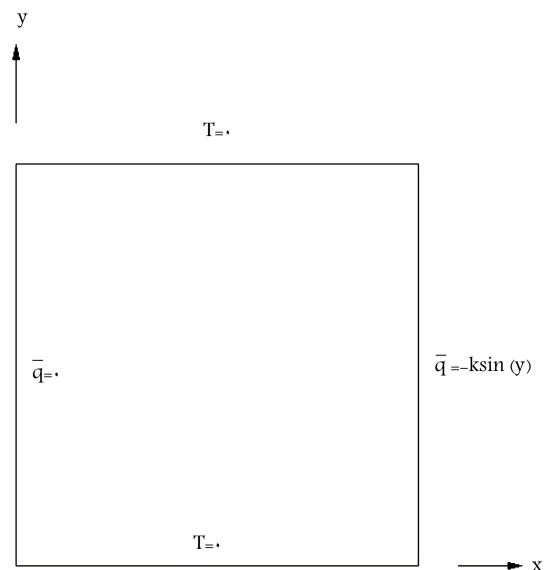
شکل ۱۲. کانتور جواب دقیق.

۲.۵. انتقال حرارت در صفحه‌ی مستطیلی با شار حرارتی سینوسی  
 به‌عنوان دومین مثال، یک صفحه‌ی مستطیلی به ابعاد  $\pi \times \pi$  در نظر گرفته شده است. ضریب انتقال حرارت در این مسئله  $k = 50 \frac{W}{m \cdot C}$  در نظر گرفته شده است. مرز بالا تحت شار حرارتی سینوسی به میزان  $q_x = -k \sin(y)$  قرار دارد. سایر مرزها در دمای ثابت صفر  $^{\circ}C$  قرار دارند. شرایط مرزی و هندسه در شکل ۹ نشان داده شده است. منبع حرارتی در حوزه‌ی مسئله وجود ندارد. جواب دقیق مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۴۶ است: [۲۴]

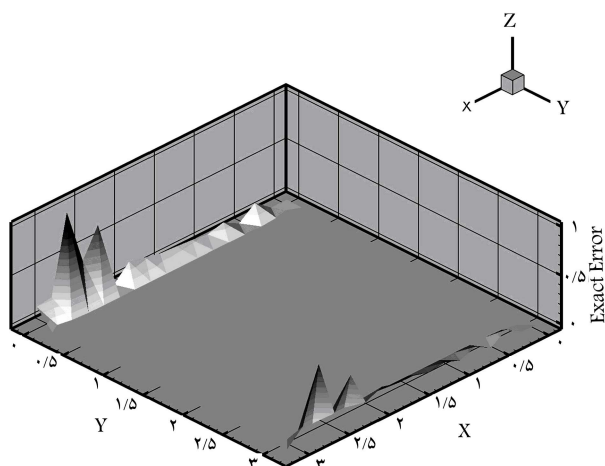
$$T(x, y) = \frac{\cosh(x) \sin(y)}{\sinh(\pi)} \quad (46)$$

توزیع نقاطی که برای حل مسئله استفاده شده است، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. برای حل از ۳۳۹ نقطه، که به‌طور نامنظم پخش شده‌اند، استفاده شده است. در شکل‌های ۱۱ و ۱۲، جواب روش DLSSM با جواب دقیق مقایسه شده است. مطابق شکل ۱۳، مقادیر جواب DLSSM در خطوط بالا و پایین صفحه با مقادیر جواب دقیق متفاوت هستند. لذا در آن نواحی خطا وجود دارد. شکل ۱۴، نیز جواب DLSSM و جواب دقیق را در راستای خط  $y = \pi/2$  مقایسه می‌کند و مبین نزدیک بودن مقادیر جواب روش DLSSM و جواب دقیق در این ناحیه از مسئله است. شکل ۱۵، این مسئله را به‌خوبی نشان می‌دهد. این شکل در واقع توزیع خطای برآوردشده (خطای محاسبه‌شده با روش پیشنهادی) به صورت بی‌بعد و محل خطا را نشان می‌دهد. اما مقدار آن را برآورد نمی‌کند. جهت نشان‌دادن قابلیت روش خطایابی به کار رفته در این مطالعه در شناسایی محل خطا، مقدار دقیق خطا در شکل ۱۶ ترسیم شده است. با مقایسه‌ی دو شکل ۱۵ و ۱۶، توانایی بالای روش بدون شبکه‌ی کمیته‌ی مربعات گسسته در تعیین محل خطا بدون اطلاع از جواب دقیق آشکار می‌شود. نقاط تیره‌تر خطای بیشتر را نشان می‌دهد. مجدداً یادآوری می‌شود که روش پیشنهادی فقط توزیع و محل خطای بیشتر را نشان می‌دهد و مقدار و درصد آن را برآورد نمی‌کند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطاهای برآوردشده در هر ۲ مسئله، توزیعی



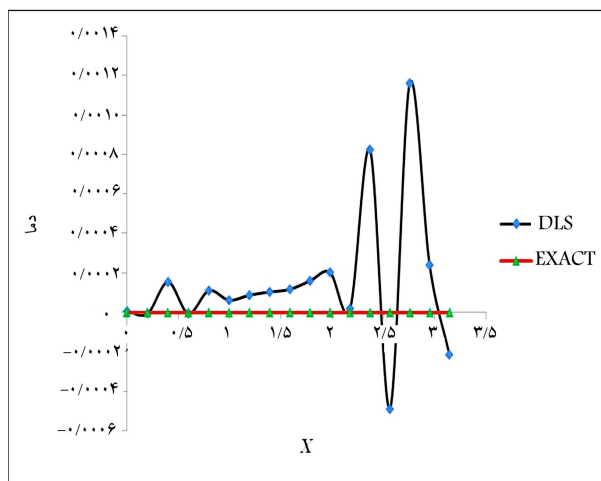
شکل ۹. هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی.



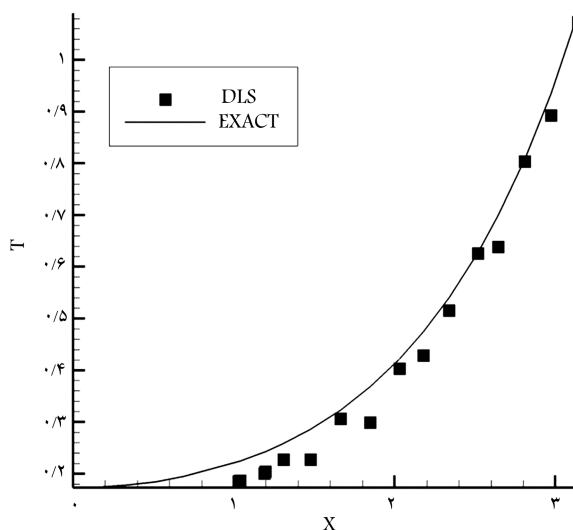
شکل ۱۶. توزیع خطای دقیق.

نسبتاً مشابه با خطای دقیق دارند. البته در مسئله‌ی اول به دلیل اینکه توزیع نقاط یکنواخت است، تفاوت خطای برآوردشده‌ی پیشنهادی با خطای دقیق بیشتر از مسئله‌ی دوم است، که در آن نقاط به صورت غیریکنواخت پخش شده‌اند. توجه به این نکته لازم است که این روش برآورد خطا، توزیع مناسبی از خطا را ارائه می‌دهد، اما مقدار و درصد خطا را مشخص نمی‌کند. برآورد خطا به ما کمک می‌کند که محل خطا را شناسایی کنیم و با استفاده از فرایند نظریف تطبیقی، بهترین آرایش برای تعداد مشخصی از نقاط صورت گیرد تا در سرحد امکان، جواب تقریبی به جواب دقیق نزدیک‌تر شود و خطای روش پیشنهادی کاهش یابد. به همین دلیل برآورد خطا به عنوان معیار خطا نقش بسزایی در فرایند جابه‌جایی نقاط ایفا می‌کند. در این مطالعه به منظور تبدیل معادلات ریاضی به یک برنامه‌ی کامپیوتری، از زبان برنامه‌نویسی FORTRAN استفاده شده است. این برنامه شامل این زیربرنامه‌هاست:

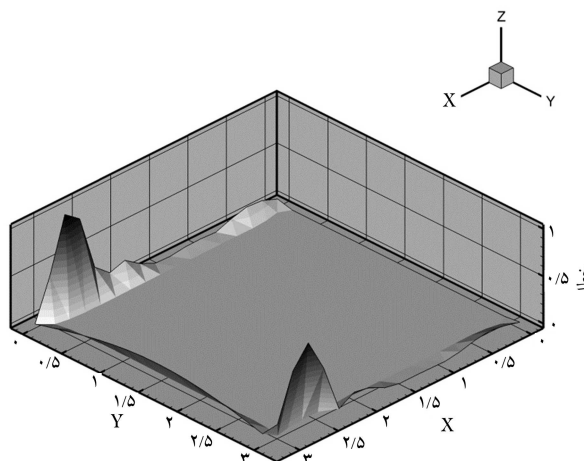
۱. زیربرنامه‌ی خواندن فایل ورودی: این زیربرنامه، مختصات نقاط و شرایط مرزی را از یک فایل متنی می‌خواند و در آرایه‌های مخصوص هر کدام ذخیره می‌کند.
۲. زیربرنامه‌ی تشکیل توابع شکل: این زیربرنامه براساس روابط توابع شکل کیمیهی مربعات گسسته و مشتقات (اول و دوم) آنها را محاسبه و ذخیره می‌کند.
۳. زیربرنامه‌ی تشکیل ماتریس ضرایب و بردار معلومات دست راست: این زیربرنامه ماتریس ضرایب را برای روش کیمیهی مربعات گسسته می‌سازد. همچنین بردار دست راست نیز می‌سازد و هر دو آرایه به زیربرنامه‌ی حل دستگاه معادلات خطی فرستاده می‌شوند.
۴. زیربرنامه‌ی حل دستگاه معادلات خطی: که یک زیربرنامه‌ی داخلی نرم‌افزار FORTRAN است و براساس روش LU دستگاه معادلات را حل و جواب را به صورت یک بردار ارائه می‌کند.
۵. زیربرنامه‌ی برآورد خطا: برآورد خطای حل یا همان تابع  $I$  در این زیربرنامه براساس روابط همین فصل در هر نقطه محاسبه می‌شود.
۶. زیربرنامه‌ی تولید فایل‌های خروجی متنی: این زیربرنامه کلیه‌ی اطلاعات خروجی از جمله دمای به دست آمده در هر نقطه و خطای برآوردشده را به صورت فایل متنی در فرمت قابل خواندن برای نرم‌افزار TECPLOT ارائه می‌کند و در نهایت، این اطلاعات توسط نرم‌افزار TECPLOT از حالت عددی به نمودار و کانتور تبدیل می‌شوند.



شکل ۱۳. مقایسه‌ی جواب تحلیلی و تقریبی بر روی ضلع تحتانی ( $y = 0$ ) و ضلع فوقانی ( $y = \pi$ ).



شکل ۱۴. مقایسه‌ی جواب تحلیلی و تقریبی در خط  $y = \pi/2$ .



شکل ۱۵. توزیع خطای برآوردشده (خطای تقریبی).



## ۶. نتیجه‌گیری

گرفته است. بر این اساس با استفاده از برآوردکننده‌های خطا، می‌توان توزیع و محل خطا را مشخص کرد و با استفاده از فرایند تطریف تطبیقی، با تغییر آرایش نقاط و افزودن نقاط بیشتر در محل‌هایی که توزیع خطا در آنجا بیشتر است، دقت جواب‌ها را بالا برد. با توجه به اینکه روش بدون شبکه‌ی کمیته‌ی مربعات گسسته به‌عنوان یک روش عددی نوپا شناخته می‌شود، نگارندگان بر این قصد بوده‌اند که گوشه‌ی دیگری از توانایی‌های این روش بدون شبکه را در حوزه‌ی مهندسی انتقال حرارت نشان دهند. می‌توان در مسائل پیچیده‌ی مهندسی انتقال حرارت، که جواب دقیق ندارند، به روش DLSM اعتماد کرد. در واقع نکته‌ی مهم و نوآوری این مطالعه آن است که نشان دهد در مسائل انتقال حرارت، که جواب دقیق در دست نیست، می‌توان با استفاده از روش DLSM مسئله را حل کرد. سپس برآورد خطا به روش شرح داده‌شده انجام و از روی آن با اصلاح آرایش نقاط شبکه و حل مجدد به جواب دقیق به میزان دلخواه نزدیک شده. به عبارت دیگر، هدف اصلی بررسی و نمایش توانمندی بالای روش بدون شبکه‌ی کمیته‌ی مربعات گسسته در خطایابی درونی است. بنابراین پیشنهاد می‌شود که از برآوردکننده‌های خطای دیگر برای تخمین خطا در مسائل حرارت هدایتی و نیز از روش DLSM برای مسائل انتقال حرارت همرفتی (جاب‌جایی) و تشعشعی استفاده شود و دقت و کارایی روش مذکور مورد بررسی قرار گیرد. همچنین می‌توان در کارهای بعدی، براساس برآوردکننده‌ی خطای ارائه‌شده در این مطالعه، قابلیت تطریف تطبیقی را به روش DLSM برای حل مسائل انتقال حرارت افزود.

در این نوشتار، ابتدا توضیحاتی در مورد روش بدون شبکه‌ی کمیته‌ی مربعات گسسته (DLSM)، شامل نحوه‌ی تولید توابع شکل و گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله ارائه شده است، که از مزایای مهم این روش، می‌توان به سادگی به‌کارگیری، دقت بالا، مقارن و نواری بودن ماتریس ضرایب و عدم نیاز به انتگرال‌گیری برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب اشاره کرد. یکی از مشخصه‌ها و مزایای اصلی روش DLSM، قابلیت استفاده از نقطه‌گذاری به صورت کاملاً دلخواه در آن است، که باعث کم هزینه‌شدن فرایند تطریف تطبیقی در این روش بدون شبکه، نسبت به روش اجزاء محدود می‌شود. استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل نیازمند آگاهی از محل و اندازه‌ی نسبی خطاهاست. برآوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی، ابزاری کارآمد برای اطمینان از جهت‌گیری درست حل و تخمین دقت نتایج هستند. در روش‌های بدون شبکه، ناپوستگی بین المانی وجود ندارد و جواب‌ها همواره حالت هموار روی کل حوزه‌ی مسئله دارند. به عبارتی می‌توان گفت برآورد خطا بر پایه‌ی شیوه‌ی هموارسازی تنش، که در اجزاء محدود استفاده می‌شود، را نمی‌توان عیناً در روش‌های بدون شبکه به‌کار برد. صحت فرمول‌بندی حل مسئله با روش DLSM، با مقایسه‌ی حل دقیق معتبر به اثبات رسیده است. همچنین یک برآوردکننده خطای مبتنی بر باقیمانده، برای ۲ مسئله‌ی انتقال حرارت هدایتی مورد استفاده قرار

## پانویس‌ها

## منابع (References)

1. meshless
2. smooth particle hydrodynamic
3. diffuse element
4. element free Galerkin
5. reproducing kernel particle method (RKPM)
6. partition of unity finite element (PUFEM)
7. HP-clouds
8. meshless local petrov Galerkin
9. DLSM
10. error estimate
11. discrete element method
12. moving least square
13. Norm
14. heat conduction
15. outward unit normal vector
16. moving least square (MLS)
17. moving least square
18. cubic spline
19. heat transfer
20. heat conduction
21. heat convection
22. net radiation
23. refinement
1. Gingold, R.A. and Moraghan, J.J. "Smooth particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars", *Man. Not. Roy. Astron. Soc.*, **181**, pp. 375-389 (1977).
2. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. "Generalizing the finite element method diffuse approximation and diffuse element", *Coput. Mech.*, **10**(5), pp. 307-318 (1992).
3. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. "Element-free Galerkin methods", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**(2), pp. 229-256 (1994).
4. Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y. "Reproducing kernel particle methods", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **20**(8-9), pp. 1081-1106 (1995).
5. Melenk, J.M. and Babuska, I. "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **139**(1-4), pp. 289-314 (1999).
6. Duarte, A. and Oden, J.T. "HP clouds a meshless method to solve boundary value problems", Technical Report 95-05, Texas Institute for Computational and

- Applied Mathematics, University of Texas at Austin (1996).
7. Atluri, S.N., Kim, H.G. and Cho, J.Y. "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods", *Comput. Mech.*, **24**(5), pp. 348-372 (1999).
  8. Afshar, M.H. and Arzani, H. "Solving Poisson's equations by the discrete least square meshless method", *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, **42**, pp. 23-32 (2004).
  9. Orkisz, J., *Meshless Finite Difference Method II. Adaptive Approach*, Idelsohn S., Oñate E., Dvorkin E. (Eds.), Computation Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain (1998).
  10. Laouar, T. and Villon, P., *Adaptive Analysis for the Diffuse Element Method*, Idelsohn S., Oñate E., Dvorkin E. (Eds.), Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain (1998).
  11. Duarte, C.A. and Oden, J.T., *An h-p Adaptive Method Using Clouds*, TICAM Report 96-97 (1996).
  12. Liu, G.R. and Tu, Z.H. "An adaptive procedure based on background cells for meshless methods", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**(17-18), pp. 1923-1943 (2002).
  13. Gavete, L., Falcon, S. and Ruiz, A. "An error indicator for the element free Galerkin method", *Eur. J. Mech. A/Solids.*, **20**(2), pp. 327-341 (2000).
  14. Arzani, H., Afshar, M.H. and Najmaiee, M. "Discrete least square meshless method for solving differential equations", *Engineering International Journal of Science and Industry of Iran University*, **18**(2), pp. 1-9 (2006).
  15. Shepard, D. "A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data", In ACM National Conference, pp. 517-524 (1968).
  16. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P. "Meshless method: An overview and recent development", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **139**(1-4), pp. 3-47 (1996).
  17. Incropera, F., Dewett, D. and Posti, B., *Introduction to Heat Transfer*, Academic Books, P., 4th Edn., pp. 1-140 (2008).
  18. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "The superconvergent path recovery and a posteriori error estimate, Part 1: The recovery technique", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**(7), pp. 1331-1364 (1995).
  19. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "The superconvergent path recovery and a posteriori error estimate. Part 2: Error estimate and adaptivity", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **33**(7), pp. 1365-1382 (1995).
  20. Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. "Error estimates for adaptive finite element computations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **15**(4), pp. 736-754 (1978).
  21. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **24**(2), pp. 337-357 (1987).
  22. Stein, E. and Rust, W. "Mesh adaptations for linear 2D finite-element discretizations in structural mechanics, especially in thin shell analysis", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **36**(1), pp. 107-129 (1991).
  23. Budak, B.M., Samarskii, A.A. and Tikhenev, A.H., *A Collection of Problems on Mathematical Physics*, Translated by ARM Robson, Pergamon Press, New York, pp. 331, 332 & 456 (1967).
  24. Bradaran, G.H. and Mahmoodabadi, M.J. "Analysis of tow dimensional steady-state heat conduction problems by MLPG method", *Majlesi Journal of Mechanical Engineering*, **4**(4), pp.47-56 (Summer 2011).

Archive