مهندسی عمران شریف (پاییز ۱۳۹۴)
دوره‌ی ۲ - ۳۱، شماره‌ی ۳/۲، ص. ۱۰۳-۱۱۲، (یادداشت فنی)

Research Note

# بررسی رفتار برشی و مدل‌کردن تیرهای عمیق بتن مسلح به روش اجزاء محدود

**قادر صدقی متنق (دانشجوی کارشناسی ارشد)**
**مجید برقیان* (دانشیار)**
**مسعود فرزام (استادیار)**
**دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه تبریز**

در این نوشتار رفتار چند تیر عمیق بتنی مسلح به روش اجزاء محدود مطالعه و با نتایج مدل‌های آزمایشگاهی گزارش‌شده‌ی عربزاده و لئونارد ـ والتر مقایسه شده است. تیرهای عمیق بتنی در سدها، اسکله‌های دریایی، بدنه‌ی مخازن مستطیلی، پل‌ها و ساختمان‌های بلند کاربرد دارند. این تیرها توسط آیین‌نامه‌های مختلف، براساس نسبت دهانه (یا دهانه‌ی برشی) به عمق تیر (به طور متداول ۲/۵) تعریف می‌شوند. در این نوشتار، نتایج تحلیل این تیرها با استفاده از برنامه‌ی NAOC (نوشته‌شده به زبان بیسیک) که قادر به درنظرگرفتن عواملی مانند حالت خمیری بتن در فشار، ترک‌خوردگی بتن درکشش، خردشدن بتن در فشار و حالت خمیری میلگردهاست، ارائه شده‌اند. در قسمت تحلیل غیرخطی، نتایج شامل منحنی بار ـ تغییرمکان قائم، الگوی ترک‌خوردگی و بار نهایی برای تیرهای عمیق ارائه شده‌اند. مقایسه‌ی نتایج برنامه با نتایج آزمایشگاهی موجود، دقت، کارایی و قدرت برنامه را در ارزیابی مقاومت برشی تیرهای عمیق آشکار ساخته است.

**واژگان کلیدی:** تیر عمیق بتن مسلح، مقاومت برشی، عناصر محدود، حالت خمیری، تحلیل غیرخطی.

ghader_sedghi@yahoo.com
barghian@tabrizu.ac.ir
mafarzam@tabrizu.ac.ir

## ۱. مقدمه

تیرهای عمیق به دلیل هندسه‌یی که دارند، رفتارشان مشابه یک عضو دو بُعدی است و در شرایط تنش مسطح قرار می‌گیرند. به همین دلیل مقطع صفحه‌یی قبل از خمش، بعد از خمش الزاماً صفحه باقی نمی‌ماند، زیرا توزیع کرنش خطی نیست و مقادیر تغییرشکل برشی در مقابل تغییرمکان خمشی خالص برخلاف تیرهای معمولی قابل صرف‌نظرکردن نیست. در نتیجه، نمودار تنش حتی در حالت ارتجاعی و ترک‌نخورده، غیرخطی است. شدت و توزیع تنش تیرهای عمیق از قوانین و روابط مربوط به تیرهای معمولی پیروی نمی‌کند.[۱] در شکل ۱، توزیع تنش برای یک تیر عمیق و مسیر تنش عمودی برای بارگذاری از بالا نشان داده شده است.[۲]

از دیدگاه‌های برشی و خمشی، نسبت دهانه‌ی خالص به عمق مؤثر برای تعریف تیرهای عمیق متفاوت است. براساس آئین‌نامه‌ی ACI ۳۱۸-۰۲، تیر عمیق به عضوی اطلاق می‌شود که در یک وجه بارگذاری شده باشد و در وجه مقابل روی تکیه‌گاه قرار گرفته باشد؛ به صورتی که بتوان اعضای فشاری را در عضو بین بارها و تکیه‌گاه‌ها در نظر گرفت. به علاوه تیر، یکی از این شرایط را داشته باشد:

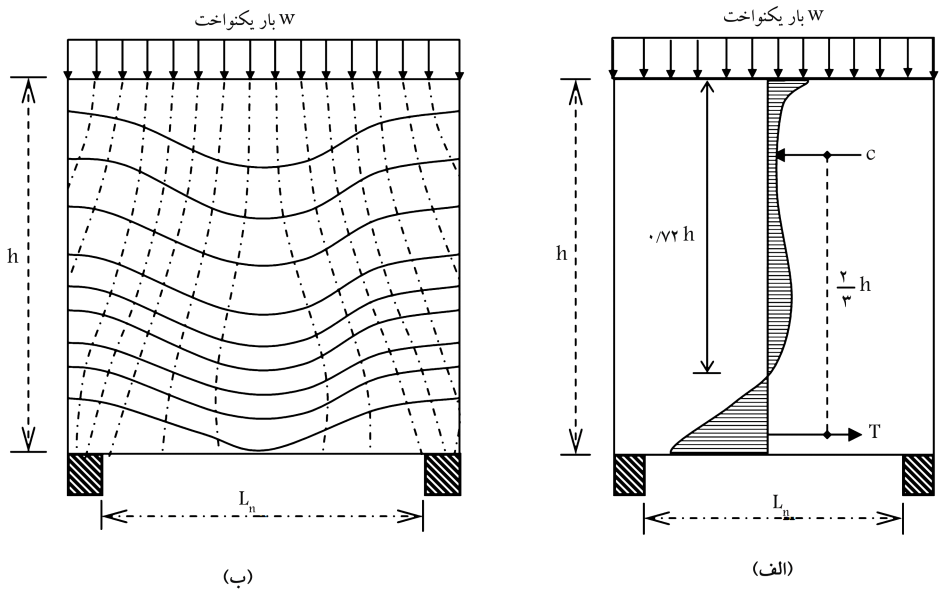
دهانه‌های آزاد تیر کوچک‌تر یا مساوی ۴ برابر عمق کلی تیر باشد، یا بر روی تیر، بارهای متمرکزی در محدوده‌ی دو برابر عمق تیر از وجه تکیه‌گاه وارد شده باشد.[۳] این تذکر لازم است که تعریف ACI۳۱۸-۰۲ از تیر عمیق، نسبت به نسخه‌های قبلی آئین‌نامه متفاوت است. در نسخه‌های قبلی آیین‌نامه به جای ارضاء شروط ذکرشده، شرط نسبت دهانه به ارتفاع مقطع کوچک‌تر یا مساوی ۵ قید شده بود.

آئین‌نامه‌ی بتن ایران (آبا) از تیر عمیق با عنوان «قطعات خمشی با ارتفاع زیاد یا تیر تیغه‌ها» نام برده است. آبا برای این تیرها شرط نسبت ارتفاع مقطع به دهانه‌ی آزاد بزرگ‌تر از دو پنجم برای دهانه‌های یک‌سره و یا بزرگ‌تر از چهار پنجم را برای دهانه‌های ساده ذکر کرده است.[۴]

در پژوهشی در سال ۲۰۱۲،[۵] لنگر ترک‌خوردگی و مدول گسیختگی در تیرهای عمیق و غیرعمیق بررسی و مقایسه شده است، که در آن ۸ تیر عمیق بتنی خودتراکم با مقاومت بالا (HSSCC) و ۹ تیر بتنی غیرعمیق با مقاومت بالا (HSC) مورد آزمایش قرارگرفته و از طریق نتایج آیین‌نامه‌های ACI ۳۱۸-۹۵ و CSA-۹۴ نشان داده شده است که مدول گسیختگی برای تیرهای عمیق HSSCC و تیرهای غیرعمیق HSC تفاوت عمده‌یی دارند. این تفاوت به‌علت مکانیسم‌های مختلف انتقال بار و مقاومت بالای بتن در تیرهای عمیق است. بر این اساس، برای محاسبه‌ی مدول گسیختگی در تیرهای عمیق آیین‌نامه‌ی ACI ۳۱۸-۹۵ و برای تیرهای غیرعمیق آیین‌نامه‌ی CSA-۹۴ را توصیه کرده‌اند.

* نویسنده مسئول
*تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۴/۱۶، اصلاحیه ۱۳۹۲/۹/۲۰، پذیرش ۱۳۹۲/۱۱/۲۷.*

Archive of SID
www.SID.ir




شکل ۱. توزیع تنش برای یک تیر عمیق و مسیر تنش عمودی برای بارگذاری از طرف بالا.[۲]

در پژوهش دیگری در همان سال،[۶] تیرهای بتنی عمیق با استفاده از نرم‌افزارهای CAST [۱] بررسی شده است، همچنین چندین تیر عمیق بتنی با استفاده از مدل بازوهای فشاری و کششی و براساس پیوست A آیین‌نامه‌ی ACI ۳۱۸-۰۵ طراحی و قالب‌بندی شده است و این تیرها در آزمایشگاه تحت آزمایش بارگذاری دو نقطه‌یی قرار گرفته‌اند، و خیز و بار و کرنش تیرها در شرایط کنترل‌شده اندازه‌گیری شده است. مقایسه‌ی کرنش‌های خمشی تحلیلی با نتایج حاصل از آزمایش، حاکی از صحت مدل‌سازی تحلیلی بوده است.

پژوهشگرانی نیز در مطالعه‌ی خود در سال ۲۰۱۱، آزمایش‌های عددی برای تحلیل غیرخطی ۸ تیر عمیق بتنی مسلح انجام داده‌اند.[۷] آن‌ها مدل پانل‌های استرینگر را برای تحلیل غیرخطی تیرهای عمیق ارائه و با بتن ترک‌خورده به‌صورت مصالح ارتوتروپیک [۲] برخورد و از روابط ساختاری برای مدل‌کردن پاسخ غیرخطی مصالح استفاده کرده‌اند. همچنین از طریق مقایسه با نتایج مطالعات تجربی موجود، توانایی مدل‌های پانل و سخت‌کننده را برای یافتن بار نهایی ارزیابی کرده‌اند. پایداری و کارآیی عددی و پتانسیل برنامه از طریق مثال‌های تحلیل‌شده آشکار شده است.

همچنین برخی پژوهشگران در پژوهش خود (۲۰۱۱)، تیرهای عمیق بتنی جفت‌شده با نسبت دهانه‌ی برشی کوتاه و مسلح با آرماتورهای برشی رکابی متداول را مطالعه و نتیجه گرفته‌اند که این تیرها تحت بارگذاری متناوب رفت و برگشتی با شیوه‌ی گسیختگی ترد همراه با شکل‌پذیری کم هستند.[۸] همچنین مطالعات تجربی آن‌ها نشان داد که صفحات فولاد مقیدشده‌ی جانبی (LRSP) می‌توانند به منزله‌ی تقویت‌کننده‌ی تیرهای جفت‌شده‌ی عمیق موجود به‌کار روند.

در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۱،[۹] مقاومت برشی تیرهای عمیق بتن مسلح در دو حالت ترمیم و تقویت‌شده با الیاف پلیمری مرکب (CFRP) بررسی شد، که در آن با مقایسه‌ی ۳ نمونه‌ی تقویت‌شده با ۳ نمونه‌ی بدون تقویت مشخص شد که ورق‌های CFRP تک‌جهته به‌صورت نواری و روی وجوه کناری با زاویه‌ی ۴۵ درجه (به دلیل توزیع ۱۰۰٪ الیاف، عمود بر وجه برش)، بهترین شیوه‌ی تقویت است و تا ۶۱٪ مقاومت را افزایش می‌دهند و در صورتی که برای ترمیم تیرهایی که در اثر بارگذاری اولیه دچار شکست هستند، استفاده شوند، ظرفیت برشی نسبت به نمونه‌ی شاهد (بدون تقویت) تا حدود ۷٪ افزایش می‌یابد.

برخی پژوهشگران (۲۰۱۰) نیز رفتار تیرهای عمیق با بازشوی جان را با استفاده از تحلیل اجزاء محدود (با استفاده از نرم‌افزار ANSYS) به منظور بررسی خیز تیر و بارگسیختگی مورد ارزیابی قرار دادند و اثر متغیرهایی مانند: اندازه‌ی بازشو (کوچک یا بزرگ)، محل بازشو (واقع در دهانه‌ی برشی داخلی یا خارجی) و درنهایت، شکل بازشو (مربعی یا دایروی) را بر روی رفتار تیر عمیق بررسی کردند.[۱۰]

در مطالعه‌ی دیگری (۲۰۰۷) نیز مدلی برای رفتار برشی تیرهای پیوند بتنی (که عملکردی مشابه تیرهای عمیق بتنی دارند) ارائه شد، که این مدل قادر به درنظرگرفتن اثرات هم‌زمان برش و خمش و نیروی محوری بود. مدل ارائه‌شده شامل یک فنر غیرخطی برشی، یک فنر محوری و چند فنر غیرخطی برای منظورکردن اثر تغییرشکل‌های خمشی بود. آن‌ها از طریق آزمایش ۶ عدد تیر پیوند با آرماتورگذاری‌های مختلف و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آزمایش با نتایج حاصل از مدل‌سازی‌های ریاضی نشان داده شد که مدل پیشنهادی، تطابق خوبی با نتایج آزمایش‌ها دارد.[۱۱]

همچنین برخی پژوهشگران در مطالعه‌ی خود (۲۰۰۸)، تیرهای عمیق بتنی پیوسته، که بازشوهای جان در نقاط مختلف داشتند، را به منظور ارزیابی مقاومت برشی آزمایش کردند. در مجموع ۵ نمونه با بازشدگی جان دایره‌یی‌شکل درآزمایشگاه قالب‌بندی و مورد آزمایش قرار گرفتند. از طریق آزمایش مشخص شد که مقاومت برشی نمونه‌های با بازشوی جان در حدود ۹۰٪ مقاومت برشی نمونه‌های بدون بازشوی جان است. به‌طورکلی، دهانه‌های با بازشوی جان سختی کمتری در مقایسه با دهانه‌های بدون بازشوی جان دارند. بازشدگی جان در تیرهای عمیق که نسبت دهانه به بازشوی ۱ دارند، ممکن است در نواحی بازشوی فشاری واقع نشود؛ اما باید در نواحی کششی آرماتورگذاری مناسب در اطراف بازشوها به منظور جلوگیری از گسترش ترک‌ها و گسیختگی انجام شود.[۱۲]

در مطالعه‌ی دیگری نیز (۲۰۰۸) از تحلیل غیرخطی اجزاء محدود برای



Archive of SID
www.SID.ir

پیش‌بینی بار و شکل گسیختگی تیرهای عمیق بتنی با بازشوی جان استفاده شده است. غیرخطی مصالح مرتبط با ترک‌خوردگی، جریان حالت خمیری، خردشدگی بتن و شرایط خمیری در فولادهای مسلح‌کننده (آرماتورها) در نظرگرفته شده و کارآیی مدل پیشنهادی با استفاده از تحلیل ۵ تیر عمیق بتنی مسلح با بازشوی جان نشان داده شده است.[۱۳]

همچنین پژوهشگران دیگری (۲۰۰۶)[۱۴] اثرات بازشدگی جان را در تیرهای عمیق بتن مسلح به‌صورت تحلیلی و تجربی ارزیابی کردند و ۳۲ تیر عمیق بتنی مسلح با مقاومت بالا یا بدون بازشدگی را تحت آزمایش بارگذاری دو نقطه‌یی قرار دادند. متغیرهای آزمایش شامل مقاومت بتن، نسبت دهانه‌ی برشی به عمق و پهنا، و عمق بازشو بود. نتایج آزمایش آن‌ها نشان داد که ایجاد ترک‌های قطری در بالا حتی مرتبط به سطح شیب‌دار اتصال مابین تکیه‌گاه و سطح شیب‌دار جان است. همچنین اثر مقاومت بتن در مقاومت برشی نهایی، به‌صورت قابل ملاحظه‌یی در تیرهای عمیق با بازشدگی در مقایسه با تیرهای عمیق توپُر کاهش می‌یابند.

در مطالعه‌ی دیگری (۲۰۰۵) نیز رفتار تیرهای عمیق بتن مسلح به روش اجزاء محدود مطالعه و ارزیابی‌های آزمایشگاهی برای نمونه‌ی تحلیلی انجام شد. تیرها با دهانه‌ی برشی به عمق حدوداً ۰/۵ تا ۱/۵ و عمق مؤثر ۴۰۰ تا ۱۴۰۰ میلی‌متر بودند. نسبت آرماتورگذاری جانبی در دهانه‌های برشی در حدود ۰٪، ۰/۴٪ و ۰/۸٪ بود. تحلیل شکست برای شبیه‌سازی تیرهای بتنی با استفاده از دیدگاه ترک‌های چرخشی گسترده[۳] به‌کار رفت و نتایج درستی تحلیل‌های اجزاء محدود در پیش‌بینی رفتار تیر عمیق در زمینه‌های بارگسیختگی، شکل گسیختگی و گسترش ترک‌ها نشان داده شد.[۱۵]

همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۰۵) یک سری تحلیل اجزاء محدود غیرخطی با نرم‌افزار DIANA برای پیش‌بینی بار نهایی و شکل گسیختگی ۳ نوع مختلف تیر عمیق دو دهانه‌ی پیوسته‌ی بتن مسلح انجام دادند. فقط یک متغیر، ضریب نگهداشت برشی در طول تحلیل در نظر گرفته شد و نتایج به‌دست‌آمده سازگاری خوبی با نتایج تجربی از خود نشان داد.[۱۶]

با توجه به بررسی‌های صورت‌گرفته‌ی ذکرشده، مطالعاتی که تاکنون بر روی رفتار تیرهای عمیق انجام شده است، عمدتاً مربوط به بررسی رفتار بار نهایی این تیرهاست. بنابراین در این پژوهش با تحلیل غیرخطی، رفتار دقیق تیر عمیق از مرحله‌ی صفر بارگذاری تا مرحله‌ی انهدام بررسی و ضمن محاسبه‌ی مقادیر کرنش، تنش و تغییرمکان در نقاط مختلف، بارهای ترک‌خوردگی، تسلیم و مقاومت نهایی نیز محاسبه شده‌اند. همچنین محدودیت برنامه‌های موجود، مانند: محدودیت در انتخاب انواع المان‌ها، نحوه‌ی میلگردگذاری (برای مثال عدم توانایی مدل‌کردن دقیق میلگردهای مایل و منحنی شکل)، وقت‌گیر و دشوار بودن ورود اطلاعات اولیه (به خاطر ورود اطلاعات از طریق فایل‌های کاملاً متنی و عدم وجود واسط گرافیکی برای ورود اطلاعات) از جمله عوامل احساس نیاز به یک برنامه‌ی تحلیل اجزاء محدود غیرخطی برای این تیرها بودند، که علاوه بر سهولت در ورود اطلاعات، سرعت تحلیل مناسب و دقت کافی در نتایج داشتند. در این پژوهش با ارائه‌ی برنامه ناوک[۴]، که به معنای تحلیل غیرخطی بتن[۵] است، تلاش شده است که گام مؤثری در این زمینه برداشته شود.

## ۲. اصول و مبانی برنامه‌ی NAOC

در این بخش اصول و مبانی حاکم بر تحلیل مسائل حالت تنش صفحه‌یی (که مسائل تیرهای عمیق نیز جزء این دسته از مسائل هستند) به اختصار توضیح داده شده است.

### ۱.۲. ماتریس‌های کرنش و خواص مصالح برای مسائل صفحه‌یی (حالت تنش ـ صفحه)

در این نوع مسائل، مؤلفه‌های تنش خارج از صفحه فرض می‌شود که برابر صفر باشند و ۳ مؤلفه‌ی دیگر تنش و ۴ مؤلفه‌ی کرنش وجود دارند (رابطه‌ی ۱):

$$\sigma_{۳۳} = \sigma_{۳۱} = \sigma_{۳۲} = ۰ \qquad (۱)$$

برای محاسبه‌ی کرنش می‌توان از روابط ۲ الی ۴ استفاده کرد:

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U\}^e \qquad (۲)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [B]_۱ & [B]_۲ & \cdots & [B]_{nen} \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} [U]_۱ & [U]_۲ & \cdots & [U]_{nen} \end{bmatrix}^T \qquad (۴)$$

هرکدام از درایه‌های $B$ و $U$ به‌صورت رابطه‌ی ۵ هستند:

$$[B]_j = \begin{bmatrix} N_{j,X۱} & ۰ \\ ۰ & N_{j,X۲} \\ N_{j,X۲} & N_{j,X۱} \end{bmatrix}, \quad \{U\}_j = \begin{Bmatrix} U_۱ \\ U_۲ \end{Bmatrix}_j \qquad (۵)$$

در تمامی فرمول‌ها از قانون اندیسی انیشتین استفاده شده است. در نهایت ماتریس خواص مصالح به‌صورت رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شود:[۱۷]

$$[D] = C_۱ \cdot \begin{bmatrix} ۱ & C_۲ & ۰ \\ C_۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & C_{۱۲} \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} C_۱ &= \tfrac{E}{۱-\nu^۲} \\ C_۲ &= \nu \\ C_{۱۲} &= \tfrac{۱-C_۲}{۲} \end{aligned} \qquad (۶)$$

### ۲.۲. المان بتن مسلح و قراردادن میلگرد در آن

فرض می‌شود که در نقاط مشترک بین بتن و فولاد، مؤلفه‌های کرنش یکسان باشند (در حالتی‌که بتن و فولاد نسبت به هم لغزش داشته باشند، زیاد تأثیر نخواهد گذاشت) و میلگردها فقط کرنش طولی داشته باشند. برای محاسبه‌ی کرنش طولی میلگرد می‌توان از رابطه‌ی ۷ استفاده کرد:

$$\varepsilon'_{۱۱} = \sum_{\alpha=۱}^{n_{en}} \langle B^\alpha_۱ \quad B^\alpha_۲ \rangle \begin{Bmatrix} U_{۱\alpha} \\ U_{۲\alpha} \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha=۱}^{n_{en}} \langle B^\alpha \rangle \begin{Bmatrix} U_{۱\alpha} \\ U_{۲\alpha} \end{Bmatrix} \qquad (۷)$$

با داشتن ماتریس کرنش میلگرد $<B^\alpha>$، ماتریس سختی میلگرد برحسب درجات آزادی المان و نیروی معادل تنش میلگرد در گره‌های المان به‌صورت روابط ۸ و ۹ قابل محاسبه است:

$$K^r_{\alpha\beta} = \int_{v_r} \{B^\alpha\}^T E \left\{B^\beta\right\} . dV = \begin{bmatrix} \int_{V_r} B^{\alpha^T}_۱ E B^\beta_۱ dV & \int_{V_r} B^{\alpha^T}_۱ E B^\beta_۲ dV \\ \int_{V_r} B^{\alpha^T}_۲ E B^\beta_۱ dV & \int_{V_r} B^{\alpha^T}_۲ E B^\beta_۲ dV \end{bmatrix} \qquad (۸)$$

$$F^r_\alpha = \int_{V_r} B_{\alpha^T} \sigma^r dV \qquad (۹)$$

کمیت‌های محاسبه‌شده باید به نقاط متناظر در المان بتنی اضافه شوند.[۱۷]



Archive of SID

www.SID.ir

### ۳.۲. مدل ترک‌خوردگی برای بتن

بتن از مصالحی است که مقاومت آن در کشش بسیار کم است. اگر تنش کششی در یک نقطه از مقاومت کششی بیشتر شود، بتن ترک می‌خورد. در نتیجه، سختی و مقاومت بتن کاهش می‌یابد. ایجاد ترک، رفتار غیرخطی بتن را به دنبال دارد. در تحلیل عناصر محدود برای سازه‌های بتن مسلح، مدل‌سازی ترک به دو روش مجزا و دوگانه انجام می‌شود. معیار ترک‌خوردگی دوگانه به علت ساده‌بودن آن در محاسبات کامپیوتری و از طرف دیگر، به خاطر اطمینان کافی برای تشخیص رفتار کلی سازه‌های بتنی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مدل، برای یک نقطه‌ی گوس که قبلاً ترک‌خورده است، تنش‌های (کرنش‌های) اصلی و جهات آن محاسبه می‌شود. اگر تنش (کرنش) اصلی بیشینه از مقدار حدی $f_t$ $(\varepsilon_t = f_t/E_t)$ تجاوز کند، یک ترک در صفحه‌ی عمود بر جهت این تنش (کرنش) شکل می‌گیرد. از این به بعد رفتار بتن، ایزوتروپیک نخواهد بود، بلکه اورتوتروپیک خواهد بود و محورهای محلی مصالح بر جهات اصلی منطبق می‌شود. برای یک نقطه که فعلاً در یک جهت ترک‌خورده است، تنش‌ها (کرنش‌ها) به این سیستم مختصاتی انتقال داده می‌شوند. تنش‌ها (کرنش‌ها) در صفحه‌ی ترک با مقدار $f_t$ مقایسه و وقوع دومین ترک امتحان می‌شود. در صورتی که تنش اصلی کوچک‌تر از مقدار $f_t$ بیشتر شود، ترک دوم عمود بر امتداد ترک اول فرض می‌شود و امتداد ترک‌های مذکور تا پایان ثابت باقی می‌ماند. به همین علت، این شیوه را روش ترک ثابت می‌نامند.

### ۴.۲. مدل انتقال برش

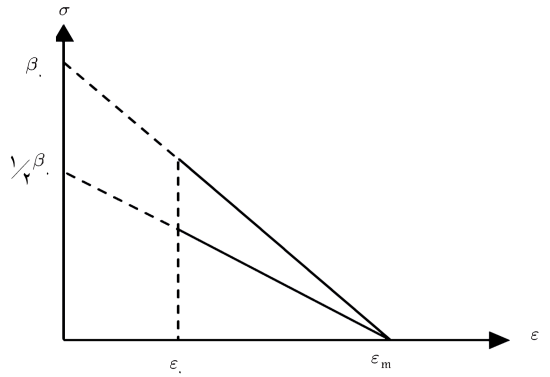
وقتی ترکی در بتن تشکیل شد، ظرفیت انتقال برش در سطوح ترک به قفل و بست دانه‌های بتن، عمل شاخه‌یی، و نیروی محوری موجود در میلگرد وابسته است. برای بتن ترک‌خورده، تنش برشی در صفحه با اعمال ضریب اصلاح $\beta$ کاهش می‌یابد (رابطه‌ی ۱۰):[۱۸]

$$\tau_{xy} = \beta.G\gamma_{xy} \qquad 0 < \beta < 1 \qquad (10)$$

ضریب $\beta$ به‌عنوان تابعی از کرنش کششی قائم بر صفحه‌ی ترک فرض می‌شود (شکل ۲). طبق یک قانون عمومی، مقادیر $0.5 < \beta$ برای شکست برشی مناسب است.

ـ برای بتنی که در یک جهت ترک خورده است (رابطه‌ی ۱۱):

$$\beta = \beta_0(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}) \qquad (11)$$




شکل ۲. مدل انتقال برش.

ـ برای بتنی که در دو جهت ترک خورده است (رابطه‌ی ۱۲):

$$\beta = \frac{\beta_0}{2}(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}) \qquad (12)$$

$\beta_0$ و $\varepsilon_m$ ضرایبی هستند که از آزمایش‌ها به‌دست می‌آیند. در این پژوهش، $\beta_0 = 0.2 - 0.5$ و $\varepsilon_m = 0.0035$ پیشنهاد شده است.

### ۵.۲. ماتریس خواص برای بتن ترک‌خورده

هنگامی که در یک المان مسئله‌ی جاری‌شدن یا ترک‌خوردگی شروع شود، ماتریس کشسانی مواد تغییر و سختی کاهش می‌یابد. المانی که ترک خورده است، باید قبل از ادامه‌ی تحلیل، سختی کاهش‌یافته‌ی مربوطه‌اش تصحیح شود. ماتریس خواص $D_{cr}$ نسبت به محورهای مصالح محاسبه و سپس به مختصات سراسری انتقال داده می‌شود. ماتریس خواص با فرض صفربودن ضریب پواسون برای یک نقطه‌ی ترک‌خورده، به‌صورت یک ماتریس قطری در می‌آید. کاهش مدول کشسانی در راستای عمود بر ترک (به مقدار صفر) باعث مثبت ـ معین نشدن ماتریس سختی می‌شود و مشکلات عددی را به دنبال خواهد داشت. برای غلبه بر آن از مدول سکانتی $E_r$ (به جای $E_c = 0$) استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۱۳):[۱۹]

$$E_r = \frac{\sigma(current)}{\varepsilon(current)} \leq E_c \qquad (13)$$

برای نقطه‌یی که در دو جهت ترک خورده است، ماتریس سختی مربوط به حالت ترک‌خوردگی به‌صورت رابطه‌ی ۱۴ است:

$$D_{cr} = \begin{bmatrix} E_{r1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{r2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{bmatrix} \qquad (14)$$

مدول‌های کشسانی راستای ترک، مقادیر مربوط به حالت ترک‌نخوردگی را حفظ می‌کنند. این بدان معنی است که برای نقطه‌یی که در یک جهت ترک خورده است، $E_{r1} = E_c$ است. معرفی ضریب $\beta$، تخمین منطقی مدول‌های برشی مؤثر را ممکن خواهد کرد.[۲۰] ماتریس $D$ تحت دوران $T$ به مختصات سراسری منتقل خواهد شد (روابط ۱۵ و ۱۶):

$$D = T^T D_{cr} T \qquad (15)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \frac{\sin 2\theta}{2} \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\frac{\sin 2\theta}{2} \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \qquad (16)$$

که در آن، $\theta$ زاویه‌ی بین خط قائم بر صفحه‌ی اولین ترک با جهت مثبت محور $X_1$ است.[۲۱]

### ۶.۲. معیارهای هم‌گرایی

در حقیقت تحلیل غیرخطی از یک سری حل‌های خطی در هر مرحله‌ی تکرار که مبتنی بر روش سختی اولیه یا نیوتن ـ رافسون (سختی مماسی) و فلسفه‌ی نیروی مانده است، تشکیل شده است. در روش‌های تکرار ـ افزایش، پس از پایان هر مرحله‌ی تکرار، معیار هم‌گرایی به‌کار می‌رود. در برنامه‌ی NAOC می‌توان از دو معیار CRI1 و CRI2 برای بررسی هم‌گرایی استفاده کرد.



Archive of SID
www.SID.ir

### ۱.۶.۲. معیار اول CRI۱

در این معیار نُرم نیروهای مانده با نُرم نیروهای وارده در هر افزایش مقایسه می‌شود (روابط ۱۷ و ۱۸):

$$R = \frac{||F_{RES}||}{||\Delta F||} < Toler \qquad (۱۷)$$

$$||F_{RES}|| = [\sum_{i=۱}^{n_{dof}} (F_i - G_i)^۲]^{\frac{۱}{۲}}, \qquad G_i = \int_{\Omega} B^T \sigma_i d\Omega \qquad (۱۸)$$

که در آن، $F_i$ و $G_i$ مؤلفه‌های نیروهای وارده و نیروی معادل تنش‌های داخلی در درجه‌ی آزادی موردنظر گره‌ی $i$ هستند. $n_{dof}$ تعداد کل درجات آزادی سازه است.

### ۲.۶.۲. معیار دوم CRI۲

در این معیار کار نیروهای مانده با کار نیروهای وارده مقایسه می‌شود (روابط ۱۹ و ۲۰):

$$W_{RES} = \sum_{i=۱}^{n_{dof}} (F_i - G_i).\Delta U_i, \qquad W_F = \sum_{i=۱}^{n_{dof}} (\Delta F_i).\Delta U_i \qquad (۱۹)$$

$$R = \frac{W_{RES}}{W_F} < Toler \qquad (۲۰)$$

که در آن، $F_i$، $G_i$ و $n_{dof}$ مشابه معیار اول تعریف می‌شوند. $\Delta U_i$ تغییرمکان‌های جزئی در درجه‌ی آزادی موردنظر برای گره‌ی $i$ و $\Delta F_i$ نیروی افزایشی است. مقدار $Toler$ توسط کاربر تعیین می‌شود، که معمولاً در محدوده‌ی ۰٫۰۰۱-۰٫۰۱ است.

## ۳. حل مثال‌های نمونه و مقایسه‌ی آن با نتایج تجربی

در این قسمت نتایج تحلیل تیرهای عمیق بتن مسلح بررسی شده‌اند.

### ۱.۳. نمونه‌ی اول: تیر عمیق بتن مسلح با دو تکیه‌گاه ساده

این تیر عمیق توسط لئونارد و والتر آزمایش شده است.[۲۲] ابعاد این نمونه ۱۰ × ۱۶۰ × ۱۶۰ سانتی‌متر است، و ابعاد میلگردها و بارگذاری آن در شکل ۳ مشاهده می‌شود. متغیرهای مورد استفاده در تحلیل نمونه به این شرح است:

بتن

$$f'_c = ۳۰٫۲\,(\mathrm{N/mm^۲}), \qquad E_c = ۲۱۰۰۰۰\,(\mathrm{N/mm^۲}),$$

$$\varepsilon_{crush} = ۰٫۰۰۳۵, \qquad \varepsilon_{crack} = ۰٫۰۰۰۱۵, \qquad \nu = ۰٫۲,$$

$$\beta = ۰٫۲۰, \qquad \varepsilon_{ult} = ۰٫۰۰۱۹$$

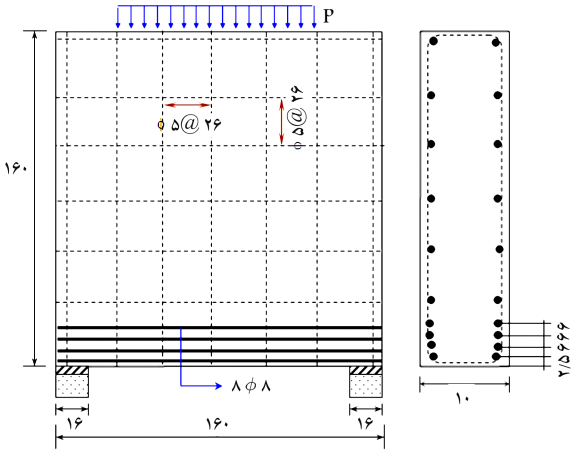
فولاد

$$Y = ۴۰۰\,(\mathrm{N/mm^۲}). \qquad E_s = ۲۱۰۰۰\,(\mathrm{N/mm^۲})$$

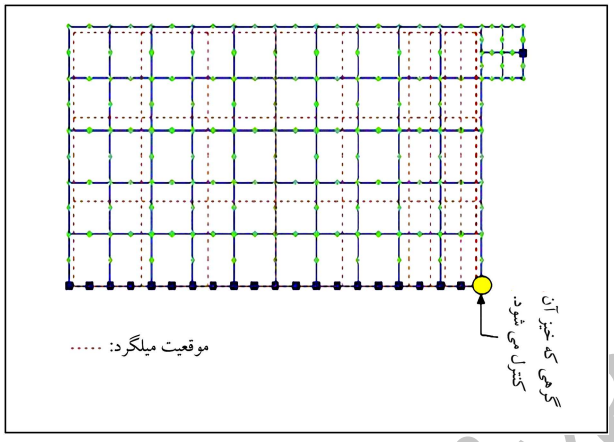
سایر اطلاعات مسئله:

معیار تسلیم: دراکر ـ پراگر؛ سخت‌شدگی: خمیری کامل؛ رفتار پس از ترک‌خوردگی: سخت‌شدگی کششی؛ معیار همگرایی: CRI۲؛ تلرانس (رواداری): ۰٫۰۱؛ تعداد افزایش‌ها: ۲۱.

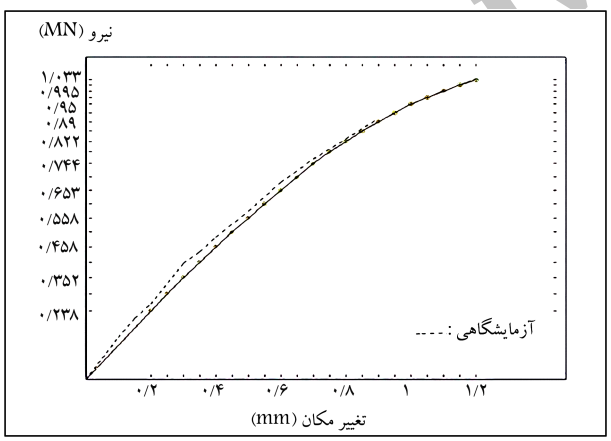
به علت تقارن، فقط نصف تیر برای تحلیل عددی به روش عناصر محدود انتخاب شده است. نصف تیر با ۱۹۹ گره و ۵۴ عضو ۸ گره‌یی (۵۰ عضو بتنی و ۴ صفحه‌ی فولادی در محل تکیه‌گاه) تحت شرایط تنش ـ صفحه مدل شده است. شکل ۴، الگوی قرارگرفتن میلگردها در داخل عضو را نشان می‌دهد. نمودار بار ـ خیز حاصل از تحلیل و حل آزمایشگاهی در شکل ۵ مشاهده می‌شود. از مقایسه‌ی این دو ملاحظه می‌شود که نتایج برنامه تطابق کاملاً خوبی با آزمایش دارد و هم‌چنین مدل پیشنهادی برای انتقال برش نیز مناسب است. نتایج این برنامه بهتر از تحلیل برنامه‌ی DIANA،[۲۲] است.




شکل ۳. بارگذاری و نحوه‌ی آرایش میلگردها برای نمونه‌ی WT۳ (ابعاد برحسب cm).



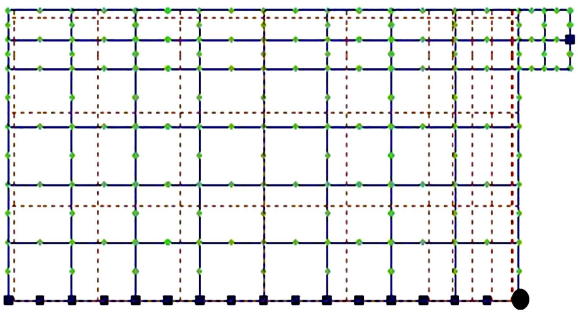

شکل ۴. الگوی قرارگیری میلگردها در داخل اعضا برای نمونه‌ی WT۳.



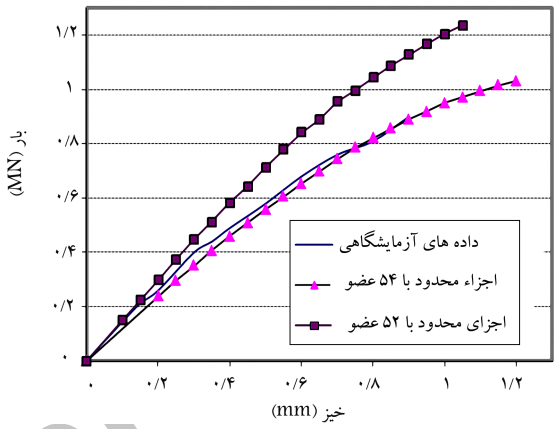

شکل ۵. نمودار بار ـ خیز حاصل از تحلیل WT۳.



Archive of SID
www.SID.ir



شکل ۶. مدل دیگر نمونه‌ی WT۳.



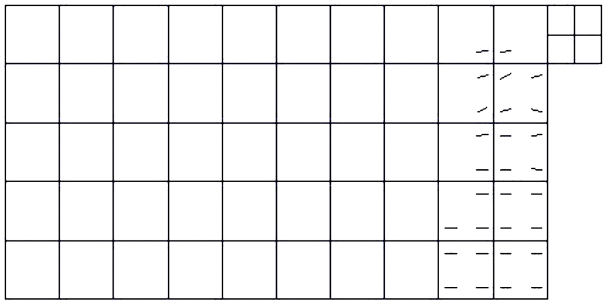

شکل ۷. نمودار مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی.

ترک‌های اولیه در تیر در نقطه‌یی نزدیک تکیه‌گاه و در بار حدود ۳۰۰ kN به وجود می‌آیند. با افزایش بار، ترک‌ها در کل دهانه و به طرف مرکز کشیده می‌شوند. ضابتدا بتن بالای تکیه‌گاه تسلیم می‌شود. در بار حدود۱۰۵۰ kN، میلگرد قائم کناری در بالای تکیه‌گاه شروع به تسلیم‌شدن (در فشار) می‌کند و سرانجام نمونه در بار ۱۱۱۶ kN در نقطه‌یی در قسمت بیرونی تیر (بالای تکیه‌گاه) خرد می‌شود. بارگسیختگی نیز به خوبی توسط برنامه تخمین زده شده است. نتایج تجربی، بار گسیختگی ۱۰۰۰ kN و ۱۲۹۰ kN را به ترتیب برای تکیه‌گاه سمت چپ و راست ارائه می‌دهد.

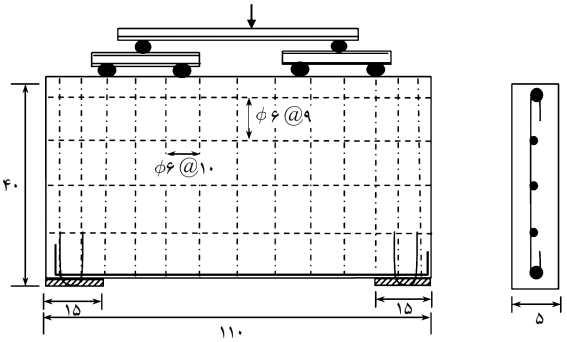
نحوه‌ی مدل‌سازی در روش عناصر محدود (برای به‌دست‌آوردن جواب صحیح) نیز مهم است. در شکل ۶، نمونه‌ی WT۳ به یک صورت دیگر مدل (۴۸ المان بتنی و ۴ المان فولادی ۸ گره‌یی برای صفحه‌ی تکیه‌گاهی) و نتایج حاصل از تحلیل در شکل ۷ ارائه شده است. با مقایسه‌ی نتایج، اهمیت مدل‌سازی مشخص می‌شود. نکته‌ی دیگر انطباق کاملاً خوب الگوی ترک‌خوردگی است. الگوی ترک‌خوردگی به‌ازاء ۷۵٪ بارگسیختگی در شکل ۸ ترسیم شده است.

## ۲.۳. نمونه‌های دوم: ۵ تیر عمیق بتن مسلح با نسبت دهانه‌ی خالص به ارتفاع برابر ۲

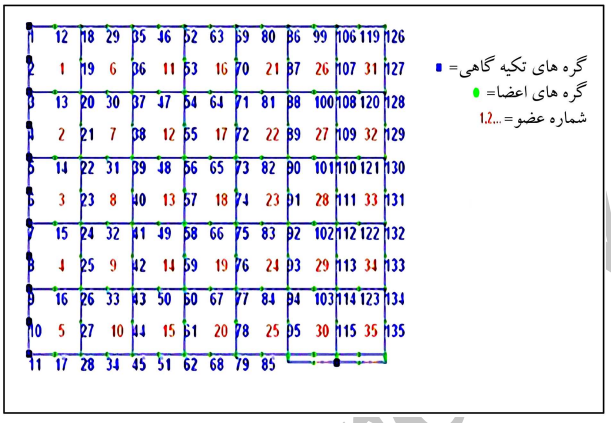
عربزاده، این تیرهای عمیق را به ابعاد ۵ × ۴۰ × ۱۱۰ سانتی‌متر آزمایش کرده است.[۲۳] مشخصات هندسی و نحوه‌ی مسلح‌کردن جان در تمام نمونه‌ها یکسان و فقط میلگردهای طولی در بالا و پایین با یکدیگر متفاوت هستند (برای بررسی اثر میلگردهای اصلی). در محل تکیه‌گاه از صفحات فولادی با ابعاد ۱ × ۵ × ۱۵



شکل ۸. الگوی ترک‌خوردگی برای مدل ۵۴ المانی به ازاء ۷۵٪ بار نهایی.




شکل ۹. بارگذاری و نحوه‌ی آرایش میلگردها (ابعاد برحسب cm).




شکل ۱۰. مدل عناصر محدود برای تیرهای DB۱ تا DB۵.

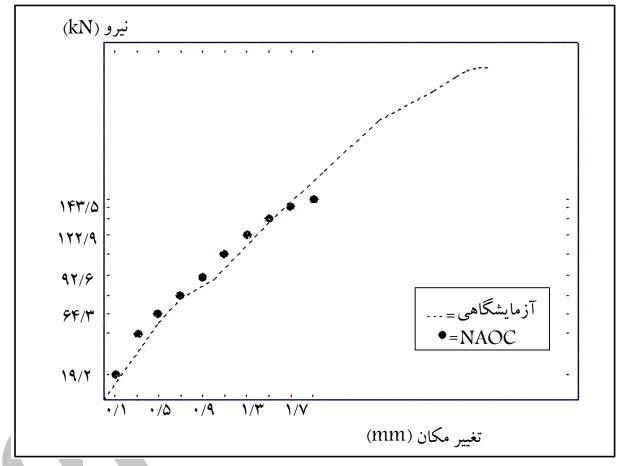
سانتی‌متر استفاده شده است، که هر یک به دو میلگرد U شکل جوش داده شده و به میلگردهای جان متصل شده‌اند. شکل ۹، ابعاد، بارگذاری و نحوه‌ی آرایش میلگردها را نشان می‌دهد. نمونه‌ها به ترتیب با نماد DB۱ تا DB۵ نام‌گذاری و مشخصات‌شان در جدول ۱ ارائه شده است. به‌علت تقارن، فقط نصف تیر برای تحلیل عددی انتخاب شده است. نصف تیر با ۱۴۵ گره و ۳۷ المان ۸ گره‌یی (۳۵ المان بتنی و ۲ صفحه‌ی فولادی در محل تکیه‌گاه) تحت شرایط تنش ـ صفحه مدل شده است. شکل ۱۰، مدل عناصر محدود برای تیرهای DB۱ تا DB۵ را نشان می‌دهد. نمودار تغییرمکان وسط تیر DB۱، در شکل ۱۱، برای مقایسه با نتایج تجربی ترسیم شده است. در شکل ۱۲، نتایج مقایسه‌ی مقاومت نهایی تیرها نشان داده شده است، که شامل نتایج برنامه، نتایج تجربی و نتایج روش‌های آیین‌نامه‌های مختلف است. مقایسه‌ی نتایج، دقت، کارآیی، و قدرت برنامه را برای تحلیل غیرخطی تیرهای عمیق به اثبات می‌رساند.



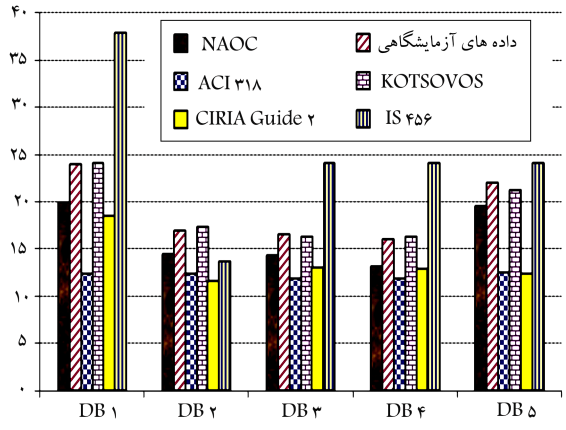
www.SID.ir

جدول ۱. مشخصات نمونه‌های DB۱ تا DB۵.

| نمونه | قطر میلگرد اصلی (mm) | | $f'_c$ | $f_t$ | $E_c$ | $Y_s$ | $E_s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | پایین | بالا | $N/mm^2$ | | | | |
| DB۱ | ۲۰ | ۲۰ | ۳۰٫۶ | ۳٫۲۳ | ۲۶۴۱۴ | | |
| DB۲ | ۱۲ | ۱۲ | ۳۰٫۶ | ۳٫۲۳ | ۲۶۴۱۴ | | |
| DB۳ | ۱۶ | ۱۶ | ۲۱٫۷ | ۱٫۹۸ | ۲۲۲۴۳ | ۴۱۰ | ۲٫۱ × ۱۰۵ |
| DB۴ | ۱۶ | ۱۲ | ۲۱٫۷ | ۱٫۹۸ | ۲۲۲۴۳ | | |
| DB۵ | ۱۶ | ۶ | ۳۳ | ۳٫۳۰ | ۲۷۴۳۰ | | |




شکل ۱۱. نمودار بار- خیز حاصل از تحلیل و داده‌های آزمایشگاهی.

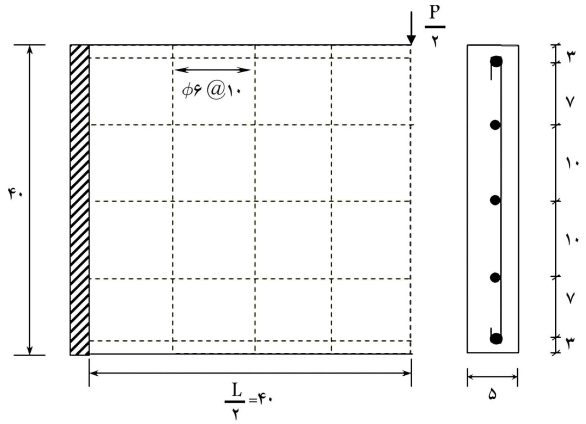



شکل ۱۲. مقایسه‌ی مقاومت نهایی تیرها.

با توجه به نتایج به‌دست‌آمده، تأثیر عوامل مختلف در مقاومت نهایی را می‌توان به این صورت بیان کرد:

۱. مقاومت بتن نقش مهمی در مقاومت نهایی دارد (از مقایسه‌ی تیر DB۱ با تیرهای DB۳ و DB۴).

۲. در شرایطی که میلگردهای افقی و قائم جان و همچنین مقاومت بتن در دو نمونه‌ی DB۱ و DB۲ یکسان هستند، میلگردهای افقی بالا و پایین نقش قابل توجهی در مقاومت نمونه‌ها دارند.




شکل ۱۳. بارگذاری و نحوه‌ی آرایش میلگردها برای تیر دو سرگیردار (ابعاد برحسب cm).

### ۳.۳. نمونه‌ی سوم: تیر عمیق بتن مسلح با دو تکیه‌گاه گیردار

این تیر عمیق (به ابعاد ۵ × ۴۰ × ۸۰ سانتی‌متر) را نیز عربزاده آزمایش کرده است.[۲۳] متغیرهای مورد استفاده در تحلیل تیر به این شرح هستند:

$$E_c = ۲۴۱۵۰\ (N/mm^2), \qquad \varepsilon_{crush} = ۰٫۰۰۳۵,$$
$$\nu_s = ۰٫۳, \qquad \nu_c = ۰٫۲, \qquad f_c = ۳۴\ (N/mm^2),$$
$$f_t = ۲٫۵۷\ (N/mm^2), \qquad E_S = ۱۹۷\ (N/mm^2)$$

میلگرد اصلی بالا و پایین: ϕ۱۶؛ مقاومت فشاری و کششی: ۳۹۲ $N/mm^2$؛ میلگرد جان: ϕ۶؛ مقاومت فشاری و کششی: ۳۱۳ $N/mm^2$.

به‌علت تقارن، فقط نصف تیر برای تحلیل عددی به روش عناصر محدود انتخاب شده است. نصف تیر در دو حالت یک‌بار با ۶۵ گره و ۱۶ المان ۸ گره‌یی و بار دیگر با ۲۲۵ گره و ۶۴ المان ۸ گره‌یی تحت شرایط تنش ـ صفحه مدل شده است. در شکل ۱۳، ابعاد، بارگذاری و نحوه‌ی آرایش میلگردها برای تیر دو سرگیردار نشان داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بار به‌صورت یک بار متمرکز در وسط تیر عمیق اعمال شده است. نحوه‌ی شماره‌گذاری گره‌ها و المان‌ها در شکل ۱۴، نتایج نرم‌افزار برای نمودار تغییرمکان وسط تیر در شکل ۱۵ و مقایسه‌ی جواب‌های برنامه با نتایج تجربی، که بیانگر تطبیق مناسب نتایج برنامه با نتایج مطالعات تجربی است، در شکل ۱۶ ارائه شده است.



Archive of SID
www.SID.ir

## ۴. نتیجه‌گیری

۱. تحلیل غیرخطی سازه‌های بتن مسلح به روش عناصر محدود را می‌توان از دو نظر حائز اهمیت دانست: پیچیدگی مسئله‌ی تحلیل تنش و تحلیل عددی به روش عناصر محدود. با درنظرگرفتن این عوامل و سایر مشکلات در برنامه‌نویسی، الگوریتم‌های مورد نیاز نوشته شده و با قراردادن آنها درکنار مهم، برنامه‌یی برای تحلیل غیرخطی تیرهای عمیق (NAOC) بسط داده شده است.

۲. در تحلیل مسائل با مصالح غیرخطی، استفاده از روش ماتریس سختی اولیه‌ی $KT_0$ مناسب است (هر چند که نرخ همگرایی پائینی دارد). این بدان جهت است که در این روش می‌توان از افزایش‌های نسبتاً بیشتر و در نتیجه درکاهش زمان کامپیوتری برای محاسبه‌ی ماتریس سختی سود جست.

۳. هر دو معیار CRI۱ و CRI۲ برای بررسی همگرایی مناسب هستند. در سازه‌های بتن مسلح بیشتر از معیار دوم (CRI۲) استفاده می‌شود. در انتخاب تلرانس همگرایی نیز باید دقت شود. بالابودن نرخ همگرایی به‌علت افزایش زمان محاسبه، غیراقتصادی و پایین‌بودن آن باعث خطای زیاد در نتایج خواهد شد. برای تحلیل تیرهای عمیق، تلرانس بین ۰/۰۱ و ۰/۰۰۱ نتایج خوبی ارائه می‌دهد.

۴. تا وقتی ترک‌ها به‌وجود نیامده‌اند، تنش‌ها به همان صورتی هستند که نظریه‌ی کشسان پیش‌بینی می‌کند. بعد از ترک‌خوردگی، تنش‌ها به‌طور چشمگیری از توزیع کشسان منحرف و اختلاف در جواب‌های روش خطی و غیرخطی زیادتر می‌شود.

۵. در تیرهای عمیق بتن مسلح، نحوه‌ی مدل‌کردن انتقال برش به‌علت عمل شاخه‌یی (dowel action) و نیروی محوری موجود در میلگردها کار مشکلی است، که در برنامه‌ی NAOC با استفاده از یک سری روابط منطقی، این امر تحقق یافته و نشان داده شده است که نتایج برنامه، انطباق خوبی با داده‌های تجربی دارند.

۶. تخمین نسبتاً دقیق بار گسیختگی، یکی دیگر از نتایج این برنامه به شمار می‌آید.

## فهرست علائم

$E_s$: مدول کشسانی فولاد؛

$E_c$: بتن مدول کشسانی؛

$f_t$: مقاومت کششی بتن؛

$f_c$: مقاومت فشاری نمونه‌ی استوانه‌یی بتن؛

$E_r$: مدول سکانتی؛

$\nu$: ضریب پواسون؛

$Y$: حد تسلیم فولاد؛

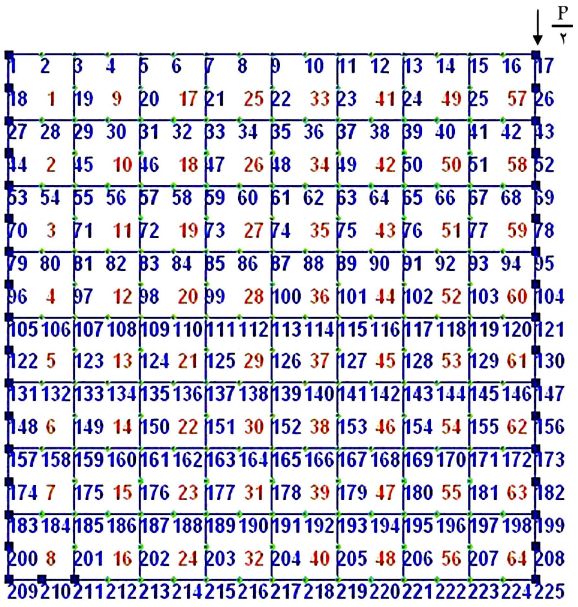
$\varepsilon, \gamma$: کرنش‌ها؛

$\varepsilon_m$: کرنش نهایی بتن؛

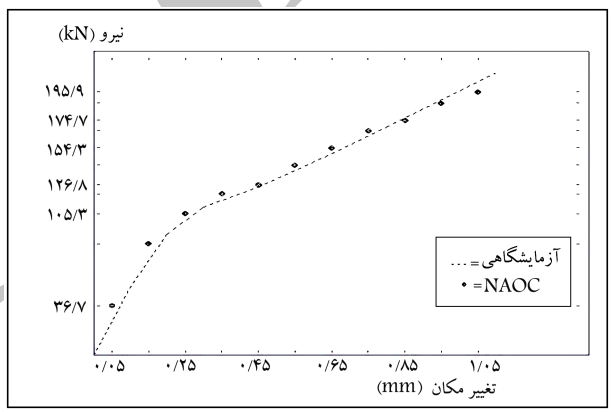
$\sigma$: تنش؛

$\beta$: ضریب برشی؛

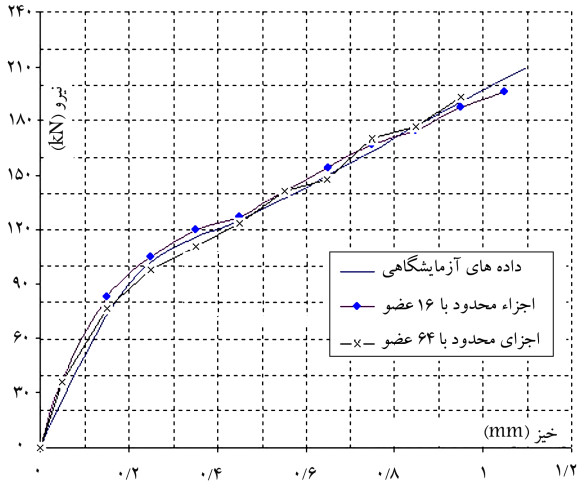
$G$: مدول برشی؛




شکل ۱۴. مدل عناصر محدود برای نمونه‌ی سوم.




شکل ۱۵. نمودار بار ـ خیز حاصل از تحلیل برنامه برای نمونه‌ی سوم (با ۱۶ عضو).




شکل ۱۶. مقایسه‌ی جواب‌های حاصل از تحلیل با داده‌های آزمایشگاهی.



Archive of SID
www.SID.ir

$\tau_{xy}$: تنش برشی؛
$N^{\alpha}$: تابع شکل گره $\alpha$؛
$N^{\alpha}_{r}$: مشتق تابع شکل در جهت $r$؛
$F^{r}_{\alpha}$: نیروی معادل تنش میلگرد در گره‌های المان؛
$\varepsilon_{11}$: کرنش طولی میلگرد در جهت مماس بر آن؛
$l_1, m_1$: کسینوس‌های هادی؛
$[T]$: ماتریس انتقال؛
$\{\varepsilon\}$: ماتریس کرنش المان؛
$[B]$: کرنش ماتریس درون‌یابی؛
$[U]$: ماتریس جابجائی؛
$[D]$: ماتریس خواص مصالح؛
$[K^{r}_{\alpha\beta}]$: ماتریس سختی میلگرد؛
$[B^{r}_{\alpha}]$: ماتریس کرنش میلگرد؛
$[D_{cr}]$: ماتریس خواص مصالح در حالت ترک‌خورده.

## پانوشت‌ها

1. computer aided strut and tie
2. Orthotropic
3. smeared
4. NAOC
5. nonlinear analysis of concrete

## منابع (References)


1. Ershadi, S. "The investigation of behavior and failure modes of simply supported deep beams with the span to depth ratio between 2 and 3", Iran University of Science & Technology, Master's thesis (1996).
2. Kong, F.K., *Reinforced Concrete Deep Beams*, Blakie and Son Ltd, Glasgow and London (1990).
3. ACI 318-02, *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary– ACI 318 R-02*, American concrete institute, Farmington Hills, MI, USA (1990).
4. Issue No. 120, Iranian Concrete Code (ABA), *Management and Planning Organization of Iran, Technical Activities and Code Development Section*, First Section, 7th Edition, Tehran, Iran (2004).
5. Mohamadhassani, M., Zamin Jummat, M. and Jameel, M. "Experimental investigation to compare the modulus of rupture in high strengthself compacting concrete deep beams and high strength concrete normal beams", *Construction and Building Materials*, **30**, pp. 265-273 (2012).
6. Shrikant, M., Patil, S.S. and Niranjan, B.R. "Analysis of deep beam using cast software and compression of analytical strain with experimental strain results", *International Journal of Computational Engineering Research*, **2**, pp. 181-185 (2012).
7. Wang, Q. and Hoogenboom, P.C.J. "Failure modes and serviceability of high strength self-compacting concrete deep beams", *Engineering Failure Analysis*, **18**(8), pp. 2272-2281 (2011).
8. Cheng, B. and Su, R.K.L. "Numerical studies of deep concrete coupling beams retrofitted with a laterally restrained steel plate", *Advances in Structural Engineering*, **14**(5), pp. 903-916 (2011).
9. Arabzade, A. and Mahanpoor, H. "The experimental study of the effects of FRP laminates on shear strength of RC fixed ended deep beams", *Modares Civil Engineering Journal (M.C.E.L)*, **11**(2), pp. 69-72 (2011).
10. Jahangiri, V. and Khaloo, A. "Behavior investigation of RC deep beams with web opening using finite elements method", 5th Congress of Civil Engineering, Mashhad, Iran (2010).
11. Riyazi, M. and Esfahani, M. "Modeling of coupling RC deep beams with conventional reinforcement in shear walls", *Journal of Technical Faculty*, **41**(4), pp. 47-60 (2007).
12. Lee, J.K., Li, C.G. and Lee, Y.T. "Experimental study on shear strength of reinforced concrete continuous deep beams with web opening", 14th World Conference on Earthquake Engineering, Beijing, China (12-17 October 2008).
13. Mohammad, K.I. "Prediction of behavior of reinforced concrete deep beams with web openings using finite elements", *Al-Rafidain Engineering*, **15**(4), pp. 73-87 (2007).
14. Yang, K.H., Eun, H.C. and Chung, H.S. "The influence of web openings on the structural behavior of reinforced high-strength concrete deep beams", *Engineering Structure*, **28**(13), pp. 1825-1834 (2006).
15. Salamy, M.R., Kobayashi, H. and Unjoh, Sh. "Experimental and analytical study on RC deep beams", *Asian Journal of Civil Engineering*, **6**(5), pp. 409-421 (2005).
16. Hassan Dirar, M.O.S. and Morley, T.C. "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete deep beams", *International Journal of Computational Plasticity*, **3**, pp. 68-76 (2005).
17. Vecchio, F.J. "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes", *Aci Structural Journal*, **86**(1), pp. 26-35 (1998).
18. Vecchio, F.J. "Finite element modeling of concrete expansion and confinement", *Journal of Structural Engineering ASCE*, **118**(9), pp. 2390-2406 (1993).
19. Gupta, A. and Rangan, B.V. "High strength concrete (HSC) structural walls", *Aci Structural Journal*, **95**(2), pp. 194-204 (1998).
20. Frantzeskakis, C. and Theillout, J.N. "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures with a




Archive of SID

www.SID.ir

particular strategy following the cracking process", *Computer & Structures*, **31**(3), pp. 395-412 (1989).

21. Cervenka, V. "Constitutive model for cracked reinforced concrete", *Aci Structural Journal*, **82**(6), pp. 887-882 (1985).
22. Van Mier, J.G.M. "Examples of non-linear analysis of reinforced concrete structures with DIANA", *Heron.*, **32**(3), pp.67-86 (1987).
23. Arabzadeh, A. "Analysis of some experimental results of deep beams using Truss Analogy method", *Journal of Science and Technology*, Shiraz University, **25**(1), pp. 27-34 (2001).

Archive of SID



www.SID.ir