

حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی به‌ازاء فعالیت چندین منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوهای زمانی دلخواه در حالات ۱ و ۲ بعدی با استفاده از روش تابع گرین

ندا مشهدگره (دانشجوی دکتری)

مهدی مظاهری* (استادیار)

جمال محمدولی سامانی (استاد)

گروه سازه‌های آبی، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی عمران شریف، تابستان ۱۳۹۶ (۹۱-۷۷-۲ شماره ۲/۱ ص. ۷۷-۹۱)

در پژوهش حاضر با استفاده از روش تابع گرین، حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی با ضرائب ثابت (سرعت و ضریب پراکندگی) در حالات ۱ و ۲ بعدی، به‌ازاء ترکیبات متفاوت شرایط مرزی در دامنه‌ی نامحدود، نیمه‌محدود، و محدود در رودخانه و برای شرایطی که بیش از یک منبع آلاینده با الگوهای زمانی دلخواه فعال باشند، تعیین شده است. همچنین به‌منظور تسریع در همگرایی سری‌های ایجادشده، با تعریف یک پارامتر بی بعد و استفاده از مفهوم تابع گرین زمان کوتاه و زمان زیاد، حالت زمان کم تابع گرین برای مسئله‌ی مربوط با استفاده از اصول ریاضی استخراج شده است. در ادامه، حل‌های تحلیلی پیشنهادی با حل‌های تحلیلی پژوهشگران پیشین، داده‌های واقعی و مثال‌های فرضی ارزیابی و شاخص‌های آماری محاسبه شده است. نتایج، رضایت‌بخش بودن عملکرد حل‌های تحلیلی را نشان داده است. با توجه به بررسی‌های انجام‌شده در پژوهش حاضر می‌توان اذعان کرد که کامل‌ترین مجموعه‌ی حل‌های تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی برای ترکیبات متفاوت شرط مرزی قابل کاربرد در رودخانه با استفاده از روش تابع گرین در پژوهش حاضر ارائه شده است.

واژگان کلیدی: معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش، روش تابع گرین، شرایط مرزی، منابع آلاینده، الگوی زمانی دلخواه.

۱. مقدمه

انتشار آلودگی در رودخانه‌ها از مهم‌ترین مسائل و مشکلات موجود در محیط زیست است. معادله‌ی حاکم بر انتقال آلودگی در محیط‌های آبی اعم از رودخانه‌ها و جریان‌ات زیرسطحی، در حالات ۱، ۲ و ۳ بعدی، معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش (ADRE) است. این معادله یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی است. استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی علاوه بر پیش‌بینی حرکت ابر آلودگی، صحت‌سنجی نتایج مدل‌های عددی را امکان‌پذیر می‌سازد.^[۱] فرم کلی این معادله در حالت ۲ بعدی به‌صورت رابطه‌ی ۱ است:^[۲]

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right] - kc \pm \varphi(x, y, t) \quad (1)$$

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۳/۲۶، اصلاحیه ۱۳۹۴/۸/۲۶، پذیرش ۱۳۹۴/۹/۸.

n.mashhadgarme@modarres.ac.ir
m.mazaheri@modares.ac.ir
samani.j@modares.ac.ir

که در آن، t زمان، x و y مؤلفه‌های مکانی در امتداد طول و عرض کانال، u و v به‌ترتیب سرعت میانگین در مقطع رودخانه در جهت طولی و عرضی (m/s) ، D_x و D_y به‌ترتیب ضریب پراکندگی طولی و عرضی (m^2/s) ، k ثابت نرخ واکنش و $c = c(x, y, t)$ غلظت که به‌صورت تابعی از زمان و مکان تعریف می‌شود و $\varphi(x, y, t)$ عبارت از چشمه^۲ یا چاهک^۳ است. به‌منظور تعیین پاسخ معادله‌ی جابه‌جایی - پراکندگی - واکنش (ADRE) در حالات ۱ و ۲ بعدی، روش‌های متفاوتی توسط پژوهشگران اتخاذ شده است؛ که بیشتر آن‌ها برای شرایط مرزی ساده و در موارد پیچیده‌تر، فقط برای یک منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی با الگوهای زمانی بسیار ساده نظیر الگوی زمانی ثابت، پله‌یی و نمایی است. لازم به ذکر است حل‌های تحلیلی ارائه‌شده بیشتر در محیط متخلخل هستند و مطالعات مرتبط با حل‌های تحلیلی برای جریان‌ات سطحی مانند رودخانه‌ها محدود است. حل تحلیلی معادله‌ی انتقال با روش‌های جداسازی متغیرها^۴ و جانشینی ریاضی^۵ از قدیمی‌ترین روش‌های

مرزی در حالات چند بعدی را با توجه به قانون حاصل ضرب راه حل ها^{۱۰} به دست آورد.^[۱۷] در ادامه، به حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی در قالب مسئله های مجزا در مجاری روباز پرداخته شده است. در این راستا، ابتدا شرایط مرزی به تفکیک تعریف شده است.

۱.۲. معرفی انواع شرط مرزی

شرایط مرزی از عوامل اصلی در تعیین توابع گرین به شمار می روند. معادله ۲ مربوط به شرط مرزی، عبارت است از:

$$s_i \frac{\partial c}{\partial x} + q_i(t)c(x, t) = h_i(t) \quad \text{at} \quad x = x_i \quad (2)$$

که در آن، s_i و $q_i(t)$ ضرایبی هستند که با توجه به خصوصیات دامنه ی حل می توانند به صورت ثابت یا متغیر باشند. همچنین $h_i(t)$ تابع زمانی مربوط به شرط مرزی در نقطه ی مرزی x_i است، که از جنس غلظت است.^[۱۸] با توجه به معادله ی ۲، شرایط مرزی به ۳ صورت بیان می شوند:

۱. شرط مرزی دیریشلت^{۱۱} (شرط نوع اول): معادله ی مرتبط شامل مقدار تابع در نقاط مرزی و به صورت رابطه ی ۳ است:

$$c(x, t)|_{x=x_i} = h_i(t) \quad (3)$$

۲. شرط مرزی نیومن^{۱۲} (شرط نوع دوم): معادله ی مرتبط شامل مقدار مشتق تابع در روی مرز و به صورت رابطه ی ۴ است:

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=x_i} = i_i(t) \quad (4)$$

که در آن، $i_i(t)$ تابع زمانی غلظت مربوط به شرط مرزی نیومن است، که بعد آن برابر با بعد غلظت بر متر است.

۳. شرط مرزی رابین^{۱۳} (شرط نوع سوم): معادله ی حاصل به صورت ترکیبی از ۲ حالت فوق است و به صورت حاصل جمع آن ها بیان می شود. تحت شرایطی که $s_i \neq 0$ باشد، شرط مرزی رابین براساس رابطه ی ۲ به صورت رابطه ی ۵ است:

$$\left[s_i \frac{\partial c}{\partial x} + q_i(t)c \right] \Big|_{x=x_i} = h_i(t) \quad (5)$$

که در آن، $q_i(t)$ بی بعد و s_i دارای بعد معکوس متر L^{-1} است. نمادگذاری استفاده شده در مطالعه ی حاضر بر مبنای شرایط مرزی است. به این صورت که شرط مرزی دیریشلت با شماره ی ۱، نیومن با شماره ی ۲ و شرط مرزی رابین با شماره ی ۳ نشان داده شده است. مرز بی نهایت نیز با شماره ی صفر لحاظ شده است. مثلاً X_{12} بیانگر مسئله در دامنه ی محدود در حالت ۱ بعدی در جهت طولی با شرط مرزی دیریشلت در بالادست و نیومن در پایین دست خواهد بود.

در پژوهش حاضر، حل تحلیلی معادله ی انتقال آلودگی با ضرایب ثابت مدنظر قرار داده شده است. لذا فرضیات اساسی عبارت است از:

- سرعت و ضریب پراکندگی در طول کانال اصلی مقادیری ثابت هستند.
- دبی تخلیه ی آلاینده در مقایسه با دبی کانال اصلی ناچیز است.
- اصل سوپرپوزیسیون (اصل بر هم نهی) برقرار است.

حل هستند، که پژوهشگران مورد استفاده قرار داده اند.^[۱۵-۱۶] در زمینه ی حل تحلیلی معادله ی انتقال با تبدیل های انتگرالی می توان به پژوهشی اشاره کرد که در آن به حل تحلیلی معادله ی انتقال در حالت ۱ بعدی در محیط متخلخل برای شرایط مرزی نوع اول و سوم در ورودی با الگوی زمانی پیوسته، پله ای و نمایی و شرط اولیه به صورت یکنواخت در دامنه ی نیمه محدود و محدود پرداخته اند.^[۱۶] در پژوهش دیگری نیز با استفاده از شیوه های تبدیل های انتگرالی لاپلاس و فوریه به حل تحلیلی معادله ی انتقال غیرتعادلی^۶ در حالت ۱، ۲ و ۳ بعدی در محیط متخلخل با استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه پرداخته اند.^[۱۷] یکی دیگر از روش های حل تحلیلی معادله ی انتقال، روش تبدیل انتگرالی کلی، GITT^۷ است. این روش بر پایه ی روش توابع ویژه^۸ استوار است.^[۱۸] در این زمینه می توان به پژوهشی اشاره کرد که در آن راه حل تحلیلی معادله ی انتقال در محیط متخلخل و دامنه ی محدود با شرط مرزی نوع سوم با الگوی زمانی دلخواه در ورودی و شرط مرزی نوع دوم (تغییرات مکانی صفر غلظت)^۹ در خروجی با استفاده از GITT تعیین شده است.^[۱۹] در پژوهش دیگری با استفاده از ترکیب روش های تبدیل های جانشینی ریاضی و فرم کلاسیک شیوه ی تبدیل انتگرالی کلی، نتایج به صورت یک راه حل صریح بیان شده است.^[۱۰] در زمینه ی حل معادله ی انتقال با استفاده از روش تابع گرین مطالعات اندکی موجود است، که در محیط متخلخل انجام شده است. به عنوان نمونه در پژوهشی برای بررسی نحوه ی انتقال املاح در سفره ی آب زیرزمینی با فرض ماندگار و یکنواخت بودن جریان در محیط متخلخل و منبع آلاینده ی نقطه ای با مقدار ثابت، حل تحلیلی معادله ی انتقال تعیین شده است.^[۱۱] در مطالعه ی دیگری حل تحلیلی معادله ی ADRE در حالت تعادلی و غیرتعادلی در محیط متخلخل، در حالت سه بعدی با فرض صفر بودن غلظت ناشی از منبع آلاینده به دست آمده است.^[۱۲]

پژوهشگران دیگری حل تحلیلی معادله ی انتقال برای یک سفره ی آب زیرزمینی با ضخامت محدود و با فرض صفر بودن منبع آلاینده را با استفاده از روش تابع گرین تعیین کرده اند.^[۱۳] پژوهشگران اخیراً در پژوهشی به جمع آوری مجموعه یی از حل های تحلیلی معادله ی انتقال برای محیط رودخانه با ترکیب انواع شرط مرزی نوع اول، دوم و سوم در حالات ۱، ۲ و ۳ بعدی فقط برای یک منبع آلاینده ی نقطه ای با مقدار ثابت با استفاده از تبدیل لاپلاس پرداخته اند.^[۱۴]

در پژوهش حاضر، راه حل تحلیلی معادله ی ADRE، برای ترکیبات متفاوت شرط مرزی در دامنه های نیمه محدود و محدود و در حالات ۱ و ۲ بعدی، برای شرایطی که چندین منابع آلاینده با الگوهای زمانی نامنظم و دلخواه در طول مسیر وجود دارند، با استفاده از روش تابع گرین به دست خواهد آمد. با توجه به جستجوهای انجام شده به نظر می رسد کامل ترین مجموعه یی حل های تحلیلی معادله ی ADRE برای هر ترکیب دلخواه از شرایط مرزی و به ازاء فعالیت چندین منبع آلاینده با الگوهای بارگذاری نامنظم نسبت به زمان در دامنه های نامحدود، نیمه محدود و محدود و در حالات ۱ و ۲ بعدی به همراه تشریح کامل کاربرد ترکیبات متفاوت شرایط مرزی در رودخانه در پژوهش حاضر ارائه شده است.

۲. مبانی و روش ها

روش تابع گرین یک ابزار قدرتمند به منظور تعیین راه حل معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن است. این روش فقط برای حل معادلاتی به کار می رود که عملگر دیفرانسیلی آن ها اصل بر هم نهی را ارضاء کند.^[۱۵، ۱۶] با استفاده از این روش می توان شرایط مرزی و اولیه ی متفاوتی را در مسئله اعمال کرد. همچنین می توان حل مسائل مقدار

$$BC2^* : \alpha_2 G(l, \tau) + \beta_2 G_\xi(l, \tau) = 0 \quad (14)$$

$$0 < \xi < l, \quad 0 < \tau < \infty$$

که در آن‌ها، L^* عملگر الحاقی است و از رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial \tau} - u \frac{\partial}{\partial \xi} - D \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k \quad (15)$$

همچنین $\delta(0)$ تابع دلتای دیراک^{۱۶}، پارامترهای x و t بیانگر مکان و زمان شروع بارگذاری در طول کانال و τ و ξ متغیرهای آزاد انتگرال‌گیری و نشان‌دهنده‌ی موقعیت زمانی و مکانی هر نقطه‌ی دلخواه از دامنه‌ی حل هستند. منظور از $BC1^*$ و $BC2^*$ شرایط مرزی الحاقی به ترتیب در بالادست و پایین دست دامنه است $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ و β_2 ضرایب مربوط به شرایط مرزی الحاقی هستند. با حل مسئله‌ی مقدار مرزی الحاقی (روابط ۱۲ الی ۱۴) تابع گرین حاصل می‌شود. باید توجه داشت که برای استخراج تابع گرین با توجه به دامنه‌ی موردنظر از روش توابع ویژه یا روش تصویری^{۱۷} در ترکیب با سایر روش‌های حل معادلات دیفرانسیلی استفاده می‌شود.^[۱۶، ۱۷] لازم به ذکر است که طبق فرمول‌بندی ارائه‌شده، داده‌های ورودی در حل‌های تحلیلی ارائه‌شده عبارت است از: میانگین سرعت، ضریب پراکندگی، نرخ واکنش، غلظت مربوط به شرط اولیه، غلظت مربوط به شرایط مرزی، تعداد منابع آلاینده به همراه موقعیت مکانی دقیق آن‌ها، الگوی زمانی تخلیه‌ی آن‌ها، نوع دامنه‌ی حل (نامحدود، نیمه‌محدود و محدود)، و مدت زمان موردنیاز برای شبیه‌سازی. همچنین داده‌های خروجی عبارت است از پروفیل غلظت حاصل در زمان‌های متفاوت و دلخواه و سری‌های زمانی غلظت در مکان‌های متفاوت در دامنه‌ی حل. به طور کلی فلوچارت مدل تحلیلی ارائه‌شده به صورت شکل ۱ است. در ادامه، مراحل حل تحلیلی معادله‌ی انتقال آلودگی در دامنه‌ی نیمه‌محدود و محدود بیان شده است.

۳.۲. حل معادله‌ی ADRE برای دامنه‌ی نیمه‌محدود در حالت یک بعدی در رودخانه

در این بخش، به حل معادله‌ی انتقال آلودگی در دامنه‌ی نیمه‌محدود پرداخته شده است. شرط مرزی در نظر گرفته‌شده برای معادله‌ی ۶ در دامنه‌ی نیمه‌محدود به صورت رابطه‌ی ۱۶ است:

$$BC(Upstream) : c(0, t) = h(t)$$

$$BC(Downstream) : \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{or} \quad c(\infty, t) = 0 \quad (16)$$

متقابلاً مسئله‌ی الحاقی برای تابع G مربوط به حل معادله‌ی ADRE در دامنه‌ی نیمه‌محدود برای مسئله‌ی $X1^0$ ، با توجه به معادلات ۱۳، ۱۴ و ۱۶ به صورت روابط ۱۷ و ۱۸ خواهد بود:^[۱۶، ۱۷]

$$L^* G = -G_\tau - uG_\xi - DG_{\xi\xi} + kG = \delta(\xi - x, \tau - t) \quad (17)$$

$$G(\xi, \tau) = 0 \quad (18)$$

$$0 < \xi < \infty, \quad 0 < \tau < \infty$$

معادله‌ی ۱۷، یک معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن جزئی، خطی و از مرتبه‌ی دوم است. پاسخ این معادله (تابع گرین) با توجه به شرط مرزی داده‌شده در رابطه‌ی ۱۸، با استفاده از تبدیل فوریه و روش تصویری به دست می‌آید.^[۲۰، ۲۱] تابع گرین نهایی برای

۲.۲. تعریف مسئله و استخراج حل تحلیلی معادله‌ی ADRE در مجاری باز با استفاده از روش تابع گرین

معادله‌ی ADRE در حالت ۱ بعدی با ضرایب ثابت در رودخانه، برای دامنه‌ی محدود به طول l ، با شرط اولیه‌ی معلوم (IC)^{۱۴} به صورت $f(x)$ در $t = 0$ کلی‌ترین صورت مربوط به شرایط مرزی (BC)^{۱۵} در $x = l$ و $x = 0$ و عبارت منبع $\phi(x, t)$ عبارت از روابط ۶ الی ۹ است:

$$Lc = c_t + uc_x - Dc_{xx} + kc = \phi(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty \quad (6)$$

$$IC = c(x, 0) = f(x) \quad (7)$$

$$BC(upstream) : \alpha_1 c(0, t) + \beta_1 c_x(0, t) = h_1(t) \quad (8)$$

$$BC(downstream) : \alpha_2 c(l, t) + \beta_2 c_x(l, t) = h_2(t) \quad (9)$$

که در آن‌ها، D و u به ترتیب سرعت، ضریب پراکندگی و ثابت نرخ واکنش هستند. $f(x)$ تابع مربوط به شرط اولیه، α_1 و α_2 ضرایب ثابت بی بعد و β_1 و β_2 ضرایب ثابت با بعد L^{-1} هستند، $h_1(t)$ و $h_2(t)$ به ترتیب الگوی زمانی مربوط به غلظت واردشده از مرز بالادست و غلظت خارج شده از نقطه‌ی $x = l$ است. همچنین L عملگر دیفرانسیلی است که از رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \quad (10)$$

که در آن‌ها، به لحاظ قوانین حل معادلات دیفرانسیل ریاضی $\alpha_1 + \beta_1 \neq 0$ و $\alpha_2 + \beta_2 \neq 0$ است. براساس تئوری اصلی گرین، صورت کلی فرم انتگرالی راه‌حل معادله‌ی ۶ به صورت رابطه‌ی ۱۱ خواهد بود:^[۱۹]

$$c(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G \phi d\xi d\tau + \int_0^\infty [(Gc)|_{\tau=0}] d\xi - \int_0^t \{ [(uG + DG_\xi)c - DGc_\xi]|_{\xi=l} - [(uG + DG_\xi)c - DGc_\xi]|_{\xi=0} \} d\tau \quad (11)$$

که در آن، G تابع گرین متناظر با مسئله‌ی اصلی است، که فرم اصلی نمایش آن به صورت $G(\xi, \tau; x, t)$ است. به لحاظ فیزیکی مفهوم تابع گرین مرتبط با معادله‌ی انتقال آلاینده عبارت است از توزیع غلظت ایجادشده در مکان ξ و در زمان τ که به علت اعمال مقدار غلظت واردشده با شدت واحد با الگوی زمانی پالسی در مکان x و زمان t است.^[۱۹، ۱۶، ۱۵] تابع گرین اساساً پاسخ یک معادله‌ی دیفرانسیل خاص متناظر با معادله‌ی دیفرانسیل مسئله‌ی اصلی با شرایط مرزی همگن متناظر با شرایط مرزی ناهمگن مسئله‌ی اصلی است، که به ترتیب به نام‌های معادله‌ی دیفرانسیل الحاقی و شرط مرزی الحاقی نام‌گذاری شده است. مهم‌ترین ویژگی شرایط مرزی الحاقی به دست آمده، همگن بودن آن‌هاست که حل معادله‌ی دیفرانسیل الحاقی را تسهیل می‌کند. با داشتن تابع گرین، راه حل نهایی معادله‌ی دیفرانسیل برای هر ترکیب دلخواه شرط مرزی به صورت یک معادله‌ی انتگرالی به دست می‌آید. فرمول‌بندی کلی مسئله‌ی الحاقی به صورت روابط ۱۲ الی ۱۴ است:^[۲۰-۱۵]

$$L^* G = -G_\tau - uG_\xi - DG_{\xi\xi} + kG = \delta(\xi - x, \tau - t) \quad (12)$$

$$BC1^* : \alpha_1 G(0, \tau) + \beta_1 G_\xi(0, \tau) = 0 \quad (13)$$

۴.۲. حل معادله ADRE برای دامنه‌ی محدود در حالت یک

بعدی در رودخانه

در این بخش حل تحلیلی معادله‌ی ADRE در دامنه‌ی محدود در رودخانه مدنظر قرار دارد. با توجه به اینکه طول مشخص و محدودی از دامنه‌ی حل موردنظر است، لذا دو شرط مرزی، یکی در بالادست و دیگری در پایین دست وجود خواهد داشت. بنابراین فرم کلی مسئله‌ی مقدار مرزی شامل معادلات ۶ الی ۹ خواهد بود. لذا در ادامه، با حل مسئله‌ی مقدار مرزی الحاقی (معادلات ۱۲ الی ۱۴)، صورت کلی تابع گرین را به ازاغ کامل‌ترین نوع شرط مرزی در بالادست و پایین دست استخراج کرده و نهایتاً برای ترکیبات متفاوت شرط مرزی حل نهایی تعیین می‌شود. بنابراین با حل مسئله‌ی الحاقی (معادلات ۱۲ الی ۱۴) در دامنه‌ی محدود به طول l ، به وسیله‌ی اعمال تبدیل لاپلاس و معکوس آن روی معادلات مذکور، استفاده از روش جداسازی متغیرها، بسط سری فوریه و حل مسئله‌ی اشتورم لیوویل حاصل شده، فرم کلی تابع گرین به صورت رابطه‌ی ۲۱ به دست خواهد آمد: [۱۹، ۱۵]

$$G(\xi, \tau; x, t) = H(t - \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left[- \left(D\lambda_n + \frac{u^2}{4D} + k \right) (t - \tau) \right] \cdot \exp \left(- \frac{u(\xi - x)}{2D} \right) \varphi_n(x) \varphi_n(\xi) \quad (21)$$

که در آن، $\varphi_n(\xi)$ توابع ویژه و λ_n مقادیر ویژه هستند، که توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه $\{\varphi_n(\xi), \lambda_n\}$ ، از مسئله‌ی اشتورم لیوویل محاسبه می‌شود. [۲۰] تعیین مقادیر λ_n ، $\varphi_n(\xi)$ مستقیماً تحت تأثیر نوع شرط مرزی و ترکیبات آن در بالادست و پایین دست دامنه است، که برای ترکیبات متفاوت شرایط مرزی با یکدیگر متفاوت خواهد بود. بعد از تعیین تابع گرین با توجه به شرایط مرزی مورد استفاده، راه حل نهایی معادله‌ی ADRE در دامنه‌ی محدود، از طریق جایگذاری تابع گرین به دست آمده در رابطه‌ی ۱۱ به دست می‌آید. در این بخش به عنوان نمونه به حل مسئله‌ی X_{12} در دامنه‌ی محدود پرداخته شده است. معادله‌ی ADRE به همراه شرایط مرزی در این مسئله به صورت روابط ۲۲ الی ۲۴ است:

$$Lc = c_t + uc_x - Dc_{xx} + kc = \phi(x, t) \quad (22)$$

$$BC1 : c(x, 0) = h_1(t) \quad (23)$$

$$BC2 : c_x(l, t) = i_2(t) \quad (24)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < \infty$$

لازم به ذکر است که در روابط ۲۳ و ۲۴، منظور از $BC1$ و $BC2$ شرایط مرزی مسئله‌ی اصلی است. منظور از مسئله‌ی گرین الحاقی مرتبط با X_{12} شامل معادله‌ی الحاقی و شرایط مرزی الحاقی به صورت روابط ۲۵ الی ۲۷ خواهد بود:

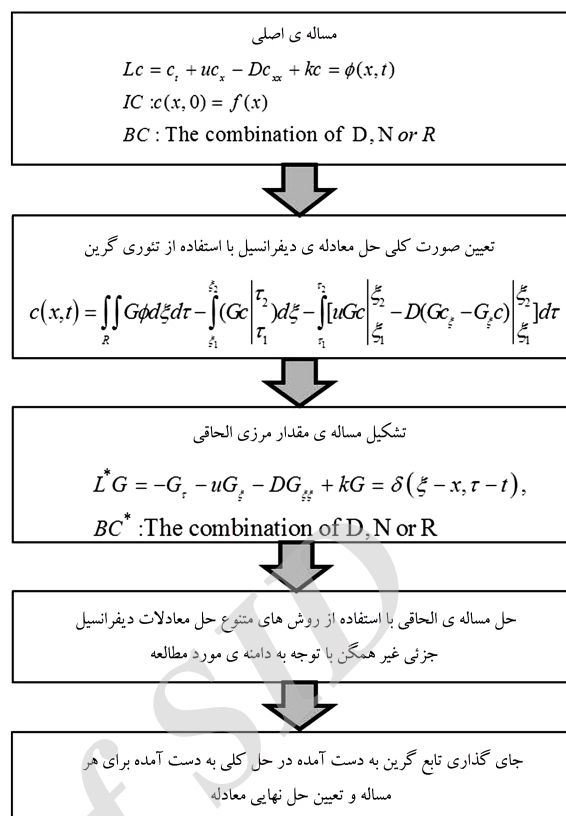
$$L^*G = -G_\tau - uG_\xi - DG_{\xi\xi} + kG = \delta(\xi - x, \tau - t) \quad (25)$$

$$BC1^* : G(0, \tau) = 0 \quad (26)$$

$$BC2^* : uG(l, \tau) + DG_\xi(l, \tau) = 0 \quad (27)$$

$$0 < \xi < l, \quad 0 < \tau < \infty$$

حل معادله‌ی فوق با استفاده از روش تابع ویژه و حل یک تابع جدید غیر جبری انجام می‌شود. [۱۷-۲۳، ۱۹] نهایتاً فرم نهایی تابع گرین با فرض آنکه $\mu = \frac{u}{2D}$ ، از رابطه‌ی



شکل ۱. فلوجارت کلی روش تابع گرین در حل معادله‌ی ADRE.

X_{10} از رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$G(\xi, \tau; x, t) = \frac{H(t - \tau) \exp(-k(t - \tau))}{\sqrt{4\pi D(t - \tau)}} \times \left\{ \exp \left[- \frac{[\xi - x + u(t - \tau)]^2}{4D(t - \tau)} \right] - \exp \left[\frac{ux}{D} - \frac{[\xi + x + u(t - \tau)]^2}{4D(t - \tau)} \right] \right\} \quad (19)$$

که در آن، $H(t - \tau)$ تابع هویساید^{۱۸} یا تابع بله‌بی واحد نام دارد. لذا فرم انتگرالی راه حل نهایی معادله‌ی ADRE در دامنه‌ی نیمه محدود با شرط مرزی دیریشلت در بالادست (X_{10}) با توجه به معادله‌ی ۱۱ و با در نظر گرفتن تأثیر فیزیک مسئله در مقدار تابع گرین در بی نهایت، به صورت رابطه‌ی ۲۰ خواهد بود: [۱۵، ۲۱]

$$c(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(\xi, \tau) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^\infty G(\xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^t DG_\xi(0, \tau) h(\tau) d\tau \quad (20)$$

که در آن تابع گرین از رابطه‌ی ۱۹ جایگذاری خواهد شد. در ادامه، تابع گرین برای X_{10} ، X_{20} و X_{30} راه حل نهایی آن‌ها در جدول ۱ به عنوان توابع کتابخانه‌بی معرفی شده‌اند.

جدول ۱. حل‌های تحلیلی به دست آمده برای معادله ADRE در محیط نامحدود و محیط نیمه محدود با ۳ شرط مرزی نوع اول، دوم و سوم در حالت یک بعدی.

دامنه	مسئله	شرط مرزی الحاقی	تابع گرین مناسب	حل تحلیلی نهایی
نامحدود	--	--	$G(\xi, \tau; x, t) = U(\xi, \tau; x, t)$	$c(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau; x, t) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^t G(\xi, 0; x, t) f(\xi) d\xi$
نیمه محدود	$D(X1^0)$	$G(\xi, \tau; x, t) = 0$	$G(\xi, \tau; x, t) = U(\xi, \tau; x, t) - \exp\left(\frac{ux}{D}\right) U(\xi, \tau; -x, t)$	$c(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau; x, t) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^t G(\xi, 0; x, t) f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^t DG_{\xi}(\xi, \tau; x, t) h(\tau) d\tau$
نیمه محدود	$N(X2^0)$	$G(\xi, \tau; x, t) = 0$	$G(\xi, \tau; x, t) = U(\xi, \tau; x, t) + \exp\left(\frac{ux}{D}\right) U(\xi, \tau; -x, t) + \frac{u}{\tau D} H(t - \tau) \exp\left(-\frac{u}{D} \zeta\right) \exp(-k(t - \tau)) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \xi - u(t - \tau)}{\sqrt{\tau D(t - \tau)}}\right)$	$c(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau; x, t) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^t G(\xi, 0; x, t) f(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^t DG(\xi, \tau; x, t) i(\tau) d\tau$
نیمه محدود	$R(X3^0)$	$G(\xi, \tau; x, t) = 0$	$G(\xi, \tau; x, t) = U(\xi, \tau; x, t) + \exp\left(\frac{ux}{D}\right) U(\xi, \tau; -x, t) + H(t - \tau) \left(\frac{u}{\tau D} + \nu\sigma\right) \exp(-\sigma x) \exp\left[-\left[\xi - (\sigma D - k)(t - \tau)\right] \left(\sigma + \frac{u}{D}\right) \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi + x - (u + \nu\sigma D)(t - \tau)}{\sqrt{\tau D(t - \tau)}}\right]\right]$	$c(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} G(\xi, \tau; x, t) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^t G(\xi, 0; x, t) f(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^t \frac{D}{\beta} G(\xi, \tau; x, t) h(\tau) d\tau$

$$* U(\xi, \tau; x, t) = \frac{H(t - \tau) \exp(-k(t - \tau))}{\sqrt{\tau D(t - \tau)}} \exp\left[-\frac{[\xi - x + u(t - \tau)]^2}{\tau D(t - \tau)}\right]$$

۲۸ به دست می آید:

۵.۲. تقسیم بندی زمانی توابع گرین

تقسیم بندی زمانی یکی از راه‌هایی است که سبب افزایش سرعت همگرایی سری‌های نامحدود متناسب با شرایط زمانی و مکانی مسئله در مقایسه با استفاده فقط از یک سری واحد می‌شود. در بسیاری از مسائل مربوط به انتقال ماده‌ی آلاینده در دامنه‌ی محدود در رودخانه، تابع گرین مربوطه با توجه به تأثیر مقدار زمان به دو صورت زمان کوتاه و زمان کم نوشته می‌شود که از نظر ریاضی معادل یکدیگرند. اما با توجه به میزان تغییرات زمانی مورد بررسی، استفاده از یک صورت ریاضی تابع گرین در رابطه‌ی انتگرالی بر دیگری ترجیح داده می‌شود. فرم زمان کم تابع گرین با استفاده از تبدیل لاپلاس استخراج می‌شود و در مواردی به کار می‌رود که تغییرات زمانی خیلی کوتاه و یا طول دامنه زیاد باشد. همچنین فرم زمان زیاد تابع گرین با استفاده از روش جداسازی متغیرها تعیین شده و در مواردی که تغییرات زمانی (بازه‌های زمانی) زیاد و یا طول دامنه کم باشد، مورد استفاده قرار می‌گیرند. معیار تعیین کم یا زیاد بودن تغییرات زمانی در استفاده از فرم مناسب تابع گرین در مسائل انتقال آلاینده در دامنه‌ی محدود در رودخانه، عدد بی بعدی است که به صورت رابطه‌ی ۳۰ تعریف می‌شود: [۱۷، ۱۵]

$$R = D \frac{(t - \tau)}{l^2} \quad (30)$$

که در آن، $(t - \tau)$ نیز اختلاف زمانی بین زمان تزریق آلاینده با زمان مورد نظر جهت تعیین غلظت است. یکسان بودن بسیاری از اصول حاکم بر معادله‌ی انتقال حرارت و انتقال آلاینده سبب می‌شود تا با شبیه‌سازی محیط‌های مورد مطالعه بتوان عدد بی بعدی R را استخراج کرد. رابطه‌ی ۲۸، حالت زمان زیاد^{۱۹} تابع گرین است. این رابطه فقط برای مواردی که عدد R بیش‌تر از ۲۵/۰ باشد، مناسب است. در غیر این

$$G(\xi, \tau; x, t) = H(t - \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(\lambda_n + \mu^2)}{l(\lambda_n + \mu^2) + \mu} \exp\left(-D\left(\lambda_n + \mu^2 + \frac{k}{D}\right)(t - \tau) - \mu(\xi - x)\right) \sin(\sqrt{\lambda_n} \xi) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \quad (28)$$

راه حل نهایی مسئله‌ی $X12$ با توجه به تابع گرین به دست آمده به صورت رابطه‌ی ۲۹ خواهد بود:

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^l G \phi d\xi d\tau + \int_{-\infty}^t G(\xi, 0; x, t) f(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^t [-DG(l, \tau; x, t) i(\tau) - DG_{\xi}(\xi, \tau; x, t) h(\tau)] d\tau \quad (29)$$

همان‌گونه که در رابطه‌ی ۲۹ مشاهده می‌شود، تابع گرین حاصل شده به صورت یک سری بی نهایت است. در چنین مواردی مسئله‌ی افزایش سرعت همگرایی سری مذکور اهمیت زیادی می‌یابد. زیرا در اغلب موارد به منظور تأمین صحت مقدار سری به اندازه‌ی مورد نیاز، تعداد زیادی از جملات سری لازم است، لذا سرعت همگرایی سری کند خواهد شد. بنابراین مفهوم جدیدی به نام تقسیم بندی زمانی تابع گرین مطرح می‌شود.

$$+ \int_0^{\infty} G_{Diffusion}(\xi, 0) \exp(-\mu\xi) f(\xi) d\xi \} \quad (40)$$

در ادامه، حل تحلیلی به ازاء تعدادی از ترکیبات کاربردی متفاوت شرط مرزی (جدول ۲) به همراه صورت زمان زیاد و زمان کم تابع گرین (جدول ۳) معرفی شده است. ارائه‌ی این جدول به‌عنوان توابع کتابخانه‌ی مربوط به حل تحلیلی معادله ADRE به همراه تفکیک صورت زمان زیاد و زمان کم تابع گرین به ازاء ترکیبات متفاوت شرط مرزی، نوآوری مهمی در پژوهش حاضر به شمار می‌آید.

۶.۲. تعمیم راه‌حل به ازاء فعالیت چند منبع آلاینده با الگوهای

زمانی دلخواه در حالت ۱ بعدی در رودخانه

با توجه به رابطه‌ی ۱۱، راه حل نهایی حاصل شده، متشکل از ۳ قسمت است: عبارت اول از سمت راست بیان‌گر تأثیر عبارت منبع، عبارت دوم تأثیر شرط اولیه و عبارت سوم تأثیر شرایط مرزی است. منظور از منابع آلاینده در پژوهش حاضر، منابع آلاینده‌ی نقطه‌ی است. منبع آلاینده‌ی نقطه‌ی، منبعی است که مساحت آن (مساحتی که تخلیه از آن صورت می‌گیرد)، در مقایسه با مساحت محیطی که منبع در آن تخلیه می‌شود، بسیار ناچیز باشد.^[۲۱] اگر منابع آلاینده شامل n_s منبع آلاینده‌ی نقطه‌ی باشد، می‌توان آن‌ها را به صورت رابطه‌ی ۴۱ نشان داد:^[۲۲]

$$\phi(x, t) = \sum_{i=1}^{n_s} W_i(t) \delta(x - x_i) \quad (41)$$

که در آن، $W_i(t)$ برابر با تابع شدت تخلیه منبع آلاینده‌ی نقطه‌ی i ام و x_i برابر با مختصات مکانی آن است. از طرفی با جایگذاری رابطه‌ی ۴۱ در رابطه‌ی ۱۱ و استفاده از خاصیت انتقال تابع دلتای دیراک^[۲۲]، رابطه‌ی ۴۲ به دست خواهد آمد:

$$c(x, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} \int_0^t W_i(\tau) G(x_i, \tau; x, t) d\tau}_{Source Term} + IC.Term + BC.Terms \quad (42)$$

که در آن، منظور از IC.Term جملات مربوط به تأثیر شرط اولیه و منظور از BC.Terms جملات مربوط به تأثیر شرایط مرزی با توجه به نوع ترکیب شرایط مرزی موردنظر در دامنه است. نهایتاً راه حل نهایی معادله انتقال آلودگی در حالت ۱ بعدی و با وجود بیش از یک منبع آلاینده‌ی نقطه‌ی فعال در طول کانال، با داشتن مشخصات محل ورود منبع آلاینده و مشخص بودن الگوی زمانی بارگذاری از رابطه‌ی ۴۲ محاسبه خواهد شد. مطابق با رابطه‌ی ۴۲ تأثیر عبارت منبع برای چندین منبع آلاینده‌ی فعال برابر است با مجموع اثر تک تک منابع آلاینده‌ی نقطه‌ی فعال و این تعریف همان اصل برهم نهی را تداعی می‌کند.

۷.۲. حل تحلیلی معادله‌ی ADRE در حالت ۲ بعدی

در صورتی‌که رودخانه عریض و در نتیجه طول اختلاط کامل جانبی چشم‌گیر باشد، باید از صورت ۲ بعدی معادلات جریان و انتقال آلودگی استفاده شود. در بخش حاضر، روند کلی حل معادله‌ی انتقال در حالت ۲ بعدی با استفاده از روش تابع گرین شرح داده شده است. در این راستا از قانون حاصل ضرب حل‌ها استفاده شده است. براساس این قانون در سیستم کارترین، اگر شرایط مرزی الحاقی تابع گرین

صورت (عدد R کوچک‌تر از ۰٫۲۵) از فرم زمان کوتاه τ^0 تابع گرین استفاده شود. استخراج فرم زمان کوتاه تابع گرین استخراج صورت زمان کوتاه تابع گرین برای مسئله‌ی X_{12} نیز با استفاده از تابع گرین مربوط به معادله‌ی پخشیدگی^[۲۱] با شرط مرزی نوع اول در بالادست و شرط مرزی نوع سوم در پایین‌دست (مسئله‌ی $X_{Diffusion 13}$) و استفاده از یک تبدیل مناسب (اعمال رابطه‌ی ۳۱ روی مسئله‌ی X_{12} روابط ۲۲ الی ۲۴) امکان‌پذیر است:

$$\eta = -k - \frac{u^2}{4D}, \quad \mu = \frac{u}{2D}, \quad (31)$$

$$c(x, t) = w(x, t) \exp(\eta t + \mu x)$$

لذا مسئله‌ی X_{12} (روابط ۲۲ الی ۲۴) به معادله‌ی پخشیدگی با شرایط مرزی ارائه‌شده در روابط ۳۲ الی ۳۵ ($X_{Diffusion 13}$) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \exp(-\eta t - \mu x) \phi(x, t) \quad (32)$$

$$IC : w(x, 0) = f(x) \exp(-\mu x) \quad (33)$$

$$BC1 : w(0, t) = \exp(-\eta t) h_1(t) \quad (34)$$

$$BC2 : \mu w(l, t) + w_x(l, t) = \exp(-\eta t - \mu l) i_2(t) \quad (35)$$

به این ترتیب حل مسئله‌ی X_{12} با تعیین راه‌حل مسئله‌ی $X_{Diffusion 13}$ امکان‌پذیر خواهد بود. مسئله‌ی الحاقی متناظر با $X_{Diffusion 13}$ عبارت خواهد بود از (روابط ۳۶ الی ۳۸):

$$-G_{Diffusion} - DG_{Diffusion} \xi = \delta(\xi - x, \tau - t) \quad (36)$$

$$BC1^* : G_{Diffusion}(0, t) = 0 \quad (37)$$

$$BC2^* : \mu G_{Diffusion}(l, t) + G_{Diffusion} \xi(l, t) = 0 \quad (38)$$

که در آن‌ها، $G_{Diffusion}$ تابع گرین مربوط به معادله‌ی پخشیدگی تحت شرایط مرزی نشان داده‌شده در رابطه‌های ۳۷ و ۳۸ است. با توجه به معادلات مذکور، مسئله الحاقی متناظر با $X_{Diffusion 13}$ به صورت $X_{Diffusion 13}$ $G_{Diffusion}$ در می‌آید. صورت تقریبی زمان کوتاه $X_{Diffusion 13}$ از رابطه‌ی ۳۹ به دست می‌آید:^[۲۳]

$$G_{Diffusion}(\xi, \tau; x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(2l-x-\xi)^2}{4D(t-\tau)}\right) - \mu \exp(\mu(2l-x-\xi) + \mu^2 D(t-\tau)) \right) \cdot \text{erfc}\left(\frac{2l-x-\xi}{\sqrt{4D(t-\tau)}} + \mu\sqrt{D(t-\tau)}\right) \quad (39)$$

که در آن، $\text{erfc}(\cdot)$ تابع مکمل خطا نام دارد. راه‌حل نهایی X_{12} براساس فرم زمان کوتاه تابع گرین نیز به صورت رابطه‌ی ۴۰ خواهد بود:

$$c(x, t) = \exp(\eta t + \mu x) \left\{ \int_0^t \int_0^{\infty} G_{Diffusion} \phi \exp(-\eta\tau - \mu\xi) d\xi d\tau + \int_0^t [DG_{Diffusion}(l, \tau) \exp(-\eta\tau - \mu l) i_2(\tau) + DG_{Diffusion} \xi(0, \tau) \exp(-\eta\tau) h_1(\tau)] d\tau \right\}$$

جدول ۲. حل‌های تحلیلی به دست آمده برای معادله‌ی ADRE در دامنه‌ی محدود به ازاء ترکیبات متفاوت شرایط مرزی در بالادست و پایین دست دامنه‌ی حل در حالت یک بعدی.

دامنه	مسئله‌ی اصلی	شرایط مرزی الحاقی	تابع گرین	حل تحلیلی نهایی
	$D - D(X11)$	$G(\circ, \tau) = \circ$ $G(l, \tau) = \circ$	۱	$c(x, t) = \int_{\circ}^t \int_{-\infty}^l G(\xi, \tau) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{\circ}^l G(\xi, \circ) f(\xi) d\xi$ $- \int_{\circ}^t [DG_{\xi}(l, \tau) h_{\tau}(\tau) - DG_{\xi}(\circ, \tau) h_{\tau}(\tau)] d\tau$
	$D - N(X12)$	$G(\circ, \tau) = \circ$ $uG(l, \tau) + DG_{\xi}(l, \tau) = \circ$	۲	$c(x, t) = \int_{\circ}^t \int_{\circ}^l G \phi d\xi d\tau + \int_{\circ}^l G(\xi, \circ) f(\xi) d\xi$ $- \int_{\circ}^t [-DG(l, \tau) i_{\tau}(\tau) - DG_{\xi}(\circ, \tau) h_{\tau}(\tau)] d\tau$
محدود	$N - N(X22)$	$uG(\circ, \tau) + DG_{\xi}(\circ, \tau) = \circ$ $uG(l, \tau) + DG_{\xi}(l, \tau) = \circ$	۳	$c(x, t) = \int_{\circ}^t \int_{\circ}^l G \phi d\xi d\tau + \int_{\circ}^l G(\xi, \circ) f(\xi) d\xi$ $+ \int_{\circ}^t [DG(l, \tau) i_{\tau}(\tau) - DG(\circ, \tau) i_{\tau}(\tau)] d\tau$
	$R - N(X32)$	$(u + \sigma_1 D)G(\circ, \tau) + DG_{\xi}(\circ, \tau) = \circ$ $uG(l, \tau) + DG_{\xi}(l, \tau) = \circ,$ $\sigma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$	۴	$c(x, t) = \int_{\circ}^t \int_{-\infty}^l G(\xi, \tau) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_{\circ}^l G(\xi, \circ) f(\xi) d\xi$ $+ \int_{\circ}^t [DG(l, \tau) i_{\tau}(\tau) - \frac{D}{\beta_1} G(\circ, \tau) h_{\tau}(\tau)] d\tau$
	$N - N(X22)$ (diffusion)	$G_{\xi}(\circ, \tau) = \circ$ $G_{\xi}(l, \tau) = \circ$	۵	$c(x, t) = \int_{\circ}^t \int_{\circ}^l G \phi d\xi d\tau + \int_{\circ}^l G(\xi, \circ) f(\xi) d\xi$ $+ \int_{\circ}^t [DG(l, \tau) i_{\tau}(\tau) - DG(\circ, \tau) i_{\tau}(\tau)] d\tau$

شرایط مرزی الحاقی نیز با قراردادن شرایط مرزی مسئله‌ی اصلی در فرم انتگرالی حل نهایی مسئله‌ی اصلی به دست می‌آید. فرم انتگرالی حل نهایی مسئله‌ی اصلی با انجام عملیات جبری، در حالت ۲ بعدی از رابطه‌ی ۴۸ به دست می‌آید:

$$c(x, y, t) = \int_{\circ}^t \int_{v_1}^{v_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} G \phi d\xi dv d\tau + \int_{v_1}^{v_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} (Gc)|_{\tau=\circ} d\xi dv$$

$$+ \int_{\circ}^t \int_{v_1}^{v_2} [D(Gc_{\xi} - G_{\xi}c) - uGc] \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} dv d\tau$$

$$+ \int_{\circ}^t \int_{\xi_1}^{\xi_2} [D(Gc_v - G_v c) - \nu Gc] \Big|_{v_1}^{v_2} d\xi d\tau \quad (48)$$

که در آن، ξ ، v و τ متغیرهای انتگرال‌گیری و x ، y و t جزء ثابت‌ها هستند. تابع گرین در این حالت به صورت $G(\xi, v, \tau; x, y, t)$ است. با توجه به قانون ضرب راه‌حل‌ها در سیستم کارتزین، تابع گرین در حالت ۲ بعدی از رابطه‌ی ۴۹ به دست می‌آید:

$$G(\xi, v, \tau; x, y, t) = X(\xi, \tau; x, t)Y(v, \tau; y, t) \quad (49)$$

که در آن، $X(\xi, \tau; x, t)$ تابع گرین در جهت طولی و $Y(v, \tau; y, t)$ تابع گرین در جهت عرضی در حالت ۱ بعدی است. با توجه به شرط مرزی در حالت ۱ بعدی در جهت x و y ، تابع گرین متناسب با آن از بین توابع کتابخانه‌ی ارائه شده در جدول‌های ۱ و ۳ تعیین، سپس با ضرب توابع گرین حاصل در یکدیگر (رابطه‌ی ۴۹)، تابع گرین در حالت ۲ بعدی به دست آورده و در رابطه‌ی ۴۸ قرار داده شده است تا حل نهایی به دست آید.

همگن باشند، تابع گرین در حالت چند بعدی از حاصل ضرب توابع گرین تعیین شده در حالت ۱ بعدی در یکدیگر به دست می‌آید. [۱۷، ۱۶، ۲۱] صورت دیفرانسیلی کلی معادله‌ی ADRE در حالت ۲ بعدی به همراه شرایط مرزی در دامنه‌ی مستطیلی در مجاری روباز به صورت روابط ۴۳ و ۴۴ است:

$$Lc = c_t + uc_x + vc_y - D(c_{xx} + c_{yy}) = \phi(x, y, t) \quad (43)$$

$$BC : \alpha c + \beta c_n = f \quad (44)$$

که در آن، L عملگر دیفرانسیلی اصلی است که از رابطه‌ی ۴۵ به دست می‌آید:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} - D \nabla^2 + k,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (45)$$

همچنین معادله‌ی ۴۴، بیان‌گر حالت کلی شرط مرزی در دامنه‌ی مورد نظر است. α و β ضرایب ثابت، c_n مشتق تابع غلظت در جهت عمود بر مرز مورد نظر و تابع f مربوط به الگوی غلظت ورودی و خروجی از مرز است. براساس تئوری گرین در این حالت نیز مسئله‌ی الحاقی به صورت رابطه‌ی ۴۶ است:

$$L^*G = \delta(\xi - x, v - y, \tau - t) \quad (46)$$

همچنین L^* اپراتور الحاقی در دامنه‌ی ۲ بعدی است، که به صورت رابطه‌ی ۴۷ تعریف می‌شود:

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial x} - v \frac{\partial}{\partial y} - D \nabla^2 + k,$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (47)$$

جدول ۳. توابع گرین مربوط به حل‌های تحلیلی معادله ADRE در دامنه‌ی محدود، به آراء ترکیبات متفاوت شرط مرزی در حالت یک بعدی.

ردیف	مسئله اصلی	فرم زمان کوتاه تابع گرین	فرم زمان زیاد تابع گرین
۱	D - D(X۱۱)	$\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{u^{\tau}}{\sqrt{D}} - k\right)(t-\tau)\right) - \frac{u}{\sqrt{D}}(\xi - x) \cdot \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+\tau n l)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi+\tau n l)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) \right], \quad n = 1, 2, \dots$	$H(t-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \exp\left[-D\left(\frac{n^{\tau} \pi^{\tau}}{l^{\tau}} + \mu^{\tau} + \frac{k}{D}\right)(t-\tau) - \mu(\xi - x)\right] \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)$ <p>$\mu = \frac{u}{\sqrt{D}}$</p>
۲	D - N*(X۱۲)	$\frac{1}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(\tau l - x - \xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) \right) - \mu \exp(\mu(\tau l - x - \xi) + \mu^{\tau} D(t-\tau)) \operatorname{erfc}\left(\frac{\tau l - x - \xi}{\sqrt{\tau D(t-\tau)}} + \mu \sqrt{D(t-\tau)}\right)$	$H(t-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(\lambda_n + \mu^{\tau})}{l(\lambda_n + \mu^{\tau}) + \mu} \cdot \exp\left(-D(\lambda_n + \mu^{\tau} + \frac{k}{D})(t-\tau) - \mu(\xi - x)\right) \sin(\sqrt{\lambda_n} \xi) \sin(\sqrt{\lambda_n} x)$ <p>Eigen Value : $\tan(l\sqrt{\lambda}) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu}$</p>
۳	N - N**(X۲۲)	$\frac{1}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(\tau l - x - \xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) \right) + \mu \exp(-\mu^{\tau}(x + \xi) + \mu^{\tau} D(t-\tau)) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \xi}{\sqrt{\tau D(t-\tau)}} - \mu(\sqrt{D(t-\tau)})\right) - \mu \exp(\mu(\tau l - x - \xi) + \mu^{\tau} D(t-\tau)) \operatorname{erfc}\left(\frac{\tau l - x - \xi}{\sqrt{\tau D(t-\tau)}} - \mu \sqrt{D(t-\tau)}\right)$	$G(\xi, \tau; x, t) = H(t-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau l}{l^{\tau} \mu^{\tau} + n^{\tau} + \pi^{\tau}} \cdot \exp\left(-D\left(\frac{n^{\tau} \pi^{\tau}}{l^{\tau}} + \frac{l^{\tau} \mu^{\tau}}{l^{\tau}} + \frac{k}{D}\right)(t-\tau) - \mu(\xi - x)\right) \cdot \left[\frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) - \mu \sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) \right] \cdot \left[\frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) - \mu \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right]$ <p>Eigen Value : $\tan(l\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n^{\tau} \pi^{\tau}}{l^{\tau}}, n = 1, 2, 3, \dots$</p>
۴	R - N*** (X۳۲)	$\frac{1}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(\tau l - x - \xi)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) \right) + (\sigma_1 + \mu) \exp(-(\sigma_1 + \mu)(x + \xi)) + (\sigma_1 + \mu)^{\tau} D(t-\tau) \operatorname{erfc}\left(\frac{x + \xi}{\sqrt{\tau D(t-\tau)}} - (\sigma_1 + \mu)(\sqrt{D(t-\tau)})\right) - \mu \exp(\mu(\tau l - x - \xi) + \mu^{\tau} D(t-\tau)) \operatorname{erfc}\left(\frac{\tau l - x - \xi}{\sqrt{\tau D(t-\tau)}} + \mu \sqrt{D(t-\tau)}\right),$ <p>$\sigma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$</p>	$H(t-\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau \psi_{1n}}{\psi_{\tau n} + \psi_{\tau n}} \exp\left[-D(\lambda_n + \mu^{\tau} + \frac{k}{D})(t-\tau) - \mu(\xi - x)\right] \cdot \left[\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} x) - (\mu + \sigma_1) \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \right] \cdot \left[\sqrt{\lambda_n} \cos(\sqrt{\lambda_n} \xi) - (\mu + \sigma_1) \sin(\sqrt{\lambda_n} \xi) \right]$ <p>$\psi_{1n} = [\lambda_n + \mu(\mu + \sigma_1)]^{\tau} + \lambda_n \sigma_1^{\tau}$ $\psi_{\tau n} = l[\lambda_n + \mu(\mu + \sigma_1)]^{\tau} \cdot \psi_{1n}$ $\psi_{\tau n} = -\sigma_1[\lambda_n^{\tau} + \lambda_n \sigma_1(\mu + \sigma_1) - \mu(\mu + \sigma_1)^{\tau}]$</p> <p>Eigen Value : $\tan(l\sqrt{\lambda}) = \frac{-\sqrt{\lambda} \sigma_1}{\lambda + \mu(\mu + \lambda)}$</p>
۵	N - N(X۲۲) (diffusion)	$\frac{H(t-\tau)}{\sqrt{\pi D(t-\tau)}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+\tau n l)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi+\tau n l)^{\tau}}{\sqrt{D}(t-\tau)}\right) \right]$	$H(t-\tau) \left\{ \frac{1}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \exp\left[-\frac{n^{\tau} \pi^{\tau}}{l^{\tau}} D(t-\tau)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\}$

* تحت شرایطی که از فرم زمان کم تابع گرین در مسئله‌ی X۱۲ استفاده شود، پاسخ نهایی به این صورت به دست خواهد آمد:

$$c(x, t) = \exp(\eta t + \mu x) \left\{ \int_0^t \int_0^l G_{Diffusion} \phi \exp(-\eta \tau - \mu \xi) d\xi d\tau + \int_0^l G_{Diffusion}(\xi, 0) \exp(-\mu \xi) f(\xi) d\xi + \int_0^t [DG_{Diffusion}(l, \tau) \exp(-\eta \tau - \mu l) i_{\tau}(\tau) + DG_{Diffusion}(\xi, 0, \tau) \exp(-\eta \tau) h_1(\tau)] d\tau \right\}$$

** تحت شرایطی که از فرم زمان کم تابع گرین در مسئله‌ی X۲۲ استفاده شود، پاسخ نهایی به این صورت به دست خواهد آمد:

$$c(x, t) = \exp(\eta t + \mu x) \left\{ \int_0^t \int_0^l G_{Diffusion} \phi \exp(-\eta \tau - \mu \xi) d\xi d\tau + \int_0^l G_{Diffusion}(\xi, 0) \exp(-\mu \xi) f(\xi) d\xi + \int_0^t [DG_{Diffusion}(l, \tau) \exp(-\eta \tau - \mu l) i_{\tau}(\tau) - DG_{Diffusion}(0, \tau) \exp(-\eta \tau) i_1(\tau)] d\tau \right\}$$

*** تحت شرایطی که از فرم زمان کم تابع گرین در مسئله‌ی X۳۲ استفاده شود، پاسخ نهایی به این صورت به دست خواهد آمد:

$$c(x, t) = \exp(\eta t + \mu x) \left\{ \int_0^t \int_0^l G_{Diffusion} \phi \exp(-\eta \tau - \mu \xi) d\xi d\tau + \int_0^l G_{Diffusion}(\xi, 0) \exp(-\mu \xi) f(\xi) d\xi + \int_0^t [DG_{Diffusion}(l, \tau) \exp(-\eta \tau - \mu l) i_{\tau}(\tau) - \frac{D}{\beta_1} G_{Diffusion}(0, \tau) \exp(-\eta \tau) h_1(\tau)] d\tau \right\}$$

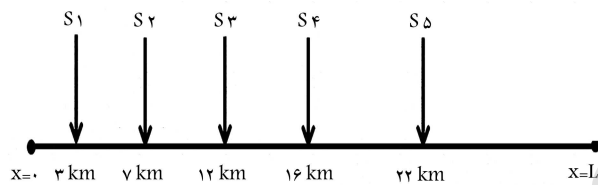
راه‌حل‌های حاصل از مدل‌های عددی MIKE۱۱ و MIKE۲۱ در حالات ۱ و ۲ بعدی استفاده شده است.

لازم به ذکر است که معادله‌ی ADRE در نرم‌افزار MIKE۱۱ با الگوی عددی تمام‌ضمنی ۲۳ تقاضا محدود ۲۴ با تقریب مشتق مرکزی در مکان ۲۵ با هدف کاهش مقدار پراکندگی عددی تولیدشده حل می‌شود. همچنین الگوی حل عددی در نرم‌افزار MIKE۲۱ براساس الگوی رو ۲۶ است. [۲۵، ۲۴] همچنین به منظور ارزیابی عملکرد حل‌های تحلیلی ارائه‌شده در حالات واقعی از داده‌های واقعی استفاده شده است. در ادامه، شاخص‌های آماری شامل ضریب همبستگی (R^2)، جذر میانگین مربع خطاها (RMSE)، میانگین خطای مطلق (MAE) و میانگین خطای نسبی (MRE) محاسبه شده است، که نتایج این شاخص‌ها، رضایت‌بخش بودن عملکرد حل‌های تحلیلی حاصل را نشان می‌دهند. خلاصه‌ی ارزیابی‌های انجام‌شده در جدول ۵ ارائه شده است.

به‌عنوان نمونه نتایج ارزیابی X_{12} (دامنه‌ی محدود ۱ بعدی) و X_{22Y22} (دامنه‌ی محدود ۲ بعدی) با استفاده از مدل‌های عددی و داده‌های واقعی ارائه شده است.

۱.۳. مثال اول: ارزیابی حل تحلیلی مسئله X_{12}

در مثال اول، ۵ منبع آلاینده در یک کانال مستطیلی با شیب ۰/۷۰۰۰۵ در نظر گرفته شده است. شکل ۲، موقعیت منابع آلاینده را نسبت به ابتدای کانال اصلی نشان



شکل ۲. موقعیت منابع آلاینده در مسئله (X_{12}).

جدول ۴. ترکیب شرایط مرزی و کاربرد آن‌ها در مجاری روباز.

ردیف	شرط مرزی		کاربرد
	بالادست	پایین دست	
۱	دیریشلت	بی‌نهایت	در دامنه‌ی نیمه‌محدود و در شرایطی که مقدار غلظت در مرز بالادست اندازه‌گیری شده است.
۲	رابین	بی‌نهایت	در دامنه‌ی نیمه‌محدود، وقتی که مقدار غلظت انتقال یافته به سمت بالادست از مرز بالادست (دائر پدیده‌ی پخشیدگی) اهمیت داشته باشد و مقدار آن از مقدار غلظت اندازه‌گیری شده کسر و مقدار غلظت خالص ورودی از مرز وارد شود.
۳	دیریشلت	دیریشلت	در دامنه‌ی محدود، در شرایطی که غلظت در بالادست و پایین دست اندازه‌گیری شود و معلوم باشد.
۴	دیریشلت	نیومن	در دامنه‌ی محدود، وقتی که مقدار غلظت در مرز بالادست اندازه‌گیری شود، ولی مقدار غلظت مشخصی در پایین دست وجود ندارد. به عبارت دیگر، تغییرات غلظت در پایین دست ثابت است.
۵	نیومن	نیومن	وقتی که مقدار غلظت در بالادست و پایین دست اندازه‌گیری نشود و یا تغییرات غلظت در مرز بالادست و پایین دست ثابت است.
۶	رابین	نیومن	در دامنه‌ی محدود، وقتی که مقدار غلظت انتقال یافته به سمت بالادست از مرز بالادست در اثر پدیده‌ی پخشیدگی، از مقدار غلظت اندازه‌گیری شده کسر شود و بنابراین مقدار غلظت خالص ورودی به‌عنوان شرط مرزی بالادست لحاظ می‌شود. همچنین مقدار غلظت در پایین دست نیز مشخص نیست.
۷	رابین	رابین	وقتی مقدار غلظت در بالادست و پایین دست مشخص است، اما مقدار غلظت انتقال یافته به بالادست در اثر پدیده‌ی پخشیدگی نیز مهم است و از مقدار غلظت اندازه‌گیری شده در مرزها کسر و نهایتاً مقدار غلظت خالص در مرزها وارد می‌شود.

۸.۲. تعمیم راه‌حل به ازاء فعالیت چند منبع آلاینده با الگوهای

زمانی دلخواه در حالت ۲ بعدی

عبارت منبع در حالت ۲ بعدی برای n_s منبع آلاینده‌ی نقطه‌یی فعال با شدت $W(\tau)$ به صورت رابطه‌ی ۵۰ تعریف می‌شود: [۲۳]

$$\phi(x, y, t) = \sum_{i=1}^{n_s} W_i(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \quad (50)$$

که در آن، x_i و y_i مختصات مربوط به محل ورود غلظت ناشی از منبع آلاینده‌ی i ام هستند. مشابه با حالت ۱ بعدی، با جایگذاری رابطه‌ی ۵۰ در رابطه‌ی ۴۸ و استفاده از خاصیت انتقال تابع دلتای دیراک، می‌توان رابطه‌ی ۵۱ را نوشت:

$$c(x, y, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_s} \int_0^t W_i(\tau) G(x_i, y_i, \tau; x, y, t) d\tau}_{Source Term} + BC.Terms \quad (51)$$

به این ترتیب با داشتن مختصات دقیق محل ورود منابع آلاینده و الگوی زمانی تخلیه‌ی هر یک از آن‌ها می‌توان توزیع زمانی و مکانی غلظت را برای هر ترکیب شرط مرزی با استفاده از رابطه‌ی ۵۱ تعیین کرد. در ادامه، ترکیبات متفاوت از شرط مرزی به همراه کاربرد آن‌ها در جدول ۴ ارائه شده است.

۳. نتایج و بحث

به منظور ارزیابی حل‌های تحلیلی حاصل‌شده، از حل‌های ارائه‌شده‌ی پژوهشگران پیشین، مثال‌های فرضی، داده‌های واقعی و روش‌های عددی استفاده شده است. با توجه به اینکه در چنین حالاتی راه‌حل تحلیلی وجود ندارد، لذا برای ارزیابی

جدول ۵. خلاصه‌ی ارزیابی حل‌های تحلیلی پیشنهادی و نتایج حاصل‌شده.

دامنه‌ی مورد نظر	شرایط مرزی	صحت سنجی با	تعداد و وضعیت منبع آلاینده	ملاحظات
		حل تحلیلی و ن‌گناختن و آلوز	منبع آلاینده ورودی از مرز با الگوی زمانی پیوسته، پله‌یی و نمایی	RMSE(g/l) = ° MRE = ° R ² = %۱۰۰
دامنه‌ی نیمه‌محدود	شرط دیریشلت در بالادست (X ^{۱۰})	MIKE۱۱	دو منبع آلاینده خارجی در طول کانال با الگوی زمانی نامنظم	RMSE(g/l) = °/۰۰۲ MRE = %۳/۲۵۵ R ² = %۱۰۰
		داده‌های واقعی مربوط به رودخانه‌ی آتاباسکا	غلظت ورودی از مرز توسط دستگاه اندازه‌گیری شده است	RMSE(ppb) = °/۲۶۵ MRE = %۲۰/۴ R ² = %۸۵/۶۲
	شرط رابین در بالادست (X ^{۳۰})	حل تحلیلی و ن‌گناختن و آلوز	منبع آلاینده ورودی از مرز با الگوی زمانی پیوسته، پله‌یی و نمایی	RMSE(g/l) = ° MRE = ° R ² = %۱۰۰
دامنه‌ی محدود	شرط دیریشلت در بالادست و نیومن در پایین دست (X ^{۱۲})	MIKE۱۱	۵ منبع آلاینده‌ی خارجی با الگوهای زمانی نامنظم در دامنه	RMSE(g/l) = ۱/۶۸۴ × ۱۰ ^{-۳} MRE = %۸/۳۶ R ² = %۹۹/۲۳
دامنه در جهت طولی و عرضی محدود	شرط نیومن در بالا و پایین دست و ساحل راست و چپ (X ^{۲۲۲۲})	MIKE۲۱	۳ منبع آلاینده با الگوهای زمانی دلخواه در دامنه	RMSE(g/l) = °/۰۵۲ MRE = %۹/۶۶ R ² = %۹۹/۱۲

جدول ۶. مشخصات جریان و آلاینده‌ی تخلیه‌شده در مسئله‌ی X^{۱۲}.

پارامتر	L (km)	U (m/s)	B (m)	D (m ² /s)	Q (m ³ /s)	Δt (s)	Δx (m)
مقدار	۳۰	۰/۹۴	۲۰	۲۰	۳۷	۶۰	۱۰۰

جدول ۷. شاخص‌های آماری مقایسه نتایج حل تحلیلی و روش عددی در مسئله‌ی X^{۱۲}.

شاخص‌های خطا	RMSE (g/l)	MAE (g/l)	MRE (%)	R ² (%)
سری زمانی در ۹ کیلومتری	۰/۴۸۳ × ۱۰ ^{-۳}	۰/۳۶۲ × ۱۰ ^{-۳}	۶/۰۹	۹۹/۸
سری زمانی در ۱۵ کیلومتری	۱/۵۲ × ۱۰ ^{-۳}	۱/۱۶۴ × ۱۰ ^{-۳}	۹/۲	۹۹/۱۳
سری زمانی در ۲۶ کیلومتری	۳/۰۵ × ۱۰ ^{-۳}	۲/۲۷۵ × ۱۰ ^{-۳}	۹/۸	۹۸/۷۷

می‌دهد. مشخصات جریان و کانال شامل طول کانال (L)، سرعت متوسط (U)، عرض کانال (B)، دبی جریان (Q)، گام زمانی (Δt)، و گام مکانی (Δx) در روش عددی مطابق با جدول ۶ است.

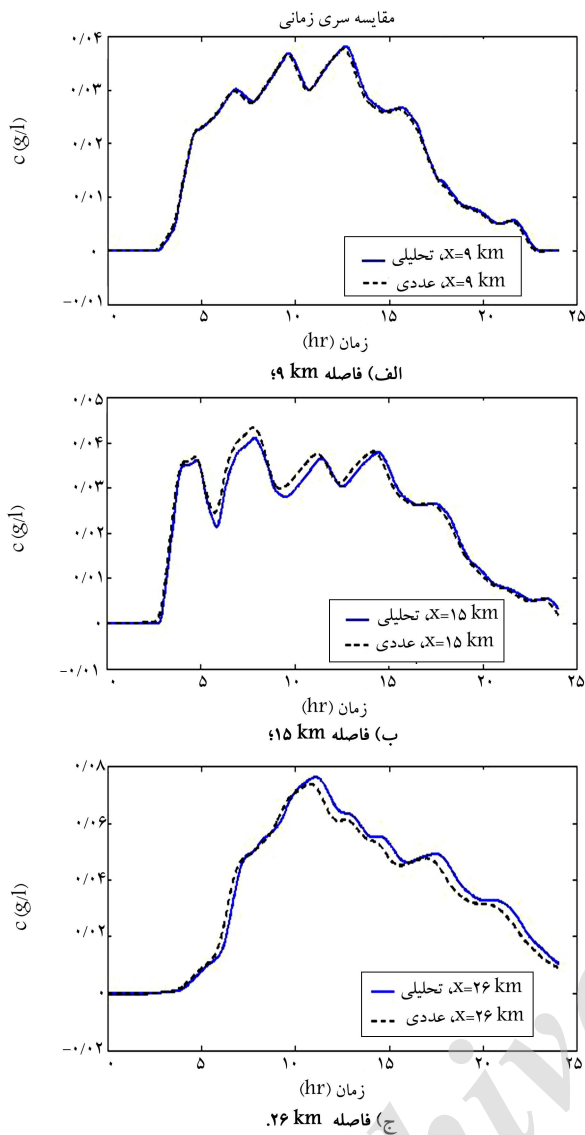
دبی تخلیه‌ی آلاینده از منابع آلاینده‌ی S_۱ تا S_۵ به ترتیب برابر ۰/۲، ۰/۱۵، ۰/۳، ۰/۴ و ۰/۵ مترمکعب بر ثانیه است. الگوی زمانی تخلیه‌ی منابع آلاینده S_۱ تا S_۵ مطابق شکل ۳ است. نتایج حاصل از حل تحلیلی مسئله (X^{۱۲}) در نقاطی به فواصل ۹، ۱۵ و ۲۶ کیلومتر از ابتدای کانال مطابق شکل ۴ است. مقادیر شاخص‌های آماری نیز در جدول ۷ محاسبه شده‌اند.

همان‌طور که در شکل ۴ ملاحظه می‌شود، نتایج به‌دست آمده از روش عددی انطباق بسیار خوبی با نتایج حاصل از راه‌حل تحلیلی پیشنهادی دارد. با توجه به

شکل ۴ با افزایش فاصله از ابتدای کانال میزان اختلاف نتایج حاصل از راه‌حل تحلیلی افزایش می‌یابد. زیرا با افزایش فاصله، خطاهای قطع بسط سری تیلور مربوط به گسسته‌سازی مشتقات زمانی و مکانی در روش عددی، به صورت تجمعی زیاد می‌شود. لذا با افزایش فاصله از ابتدای کانال مقادیر R²، MAE، MRE و RMSE به ترتیب کاهش، افزایش، افزایش و افزایش یافته‌اند. بنابراین باید گام‌های زمانی و مکانی انتخابی در روش عددی به قدری ریز باشند تا خطای حاصل‌شده به کمترین حد برسد. پروفیل‌های غلظت در ۶، ۱۲ و ۲۰ ساعت مطابق شکل ۵ به‌دست آمده‌اند. نمودارهای شکل ۵ نیز انطباق مطلوب بین نتایج روش عددی با حل تحلیلی پیشنهادی را نشان می‌دهند. همان‌طور که در پروفیل‌های شکل ۵ مشخص است، در نقاطی از نمودار، پرش‌هایی به شکل پله مشاهده می‌شود. نقاط مربوط به این پرش‌ها مربوط به محل ورود منابع آلاینده‌ی S_۱ تا S_۵ هستند. نهایتاً غلظت حاصل از هر ۵ منبع آلاینده از محیط خارج خواهد شد.

۲.۳. مثال دوم: ارزیابی حل تحلیلی مسئله‌ی X^{۲۲۲۲}

در این بخش به ارزیابی حل تحلیلی مسئله‌ی X^{۲۲۲۲} با وجود ۳ منبع آلاینده‌ی فعال در دامنه‌ی حل پرداخته شده است. آرایش قرارگیری منابع آلاینده در دامنه مطابق شکل ۶ است. همچنین سرعت در جهت طول (u) و در جهت عرض



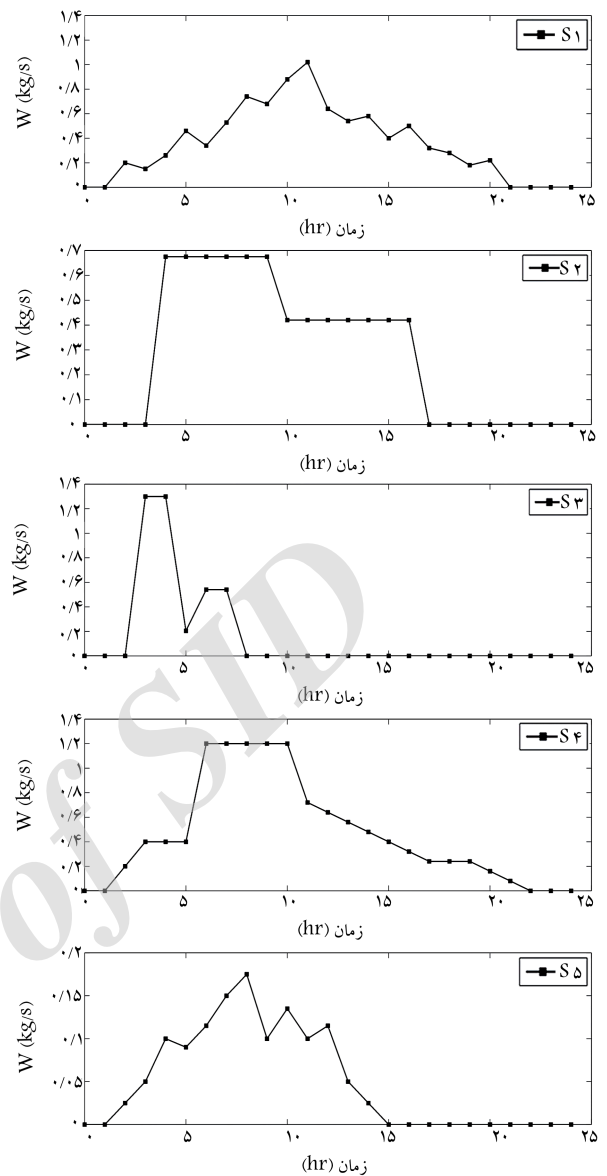
شکل ۴. مقایسه‌ی سری زمانی غلظت فاصله‌های ۹، ۱۵ و ۲۶ کیلومتر از ابتدای کانال مربوط به مسئله‌ی ۱۲ X.

جدول ۸. مشخصات جریان و آلاینده‌ی تخلیه شده در مسئله‌ی (X۲۲۲۲۲)

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۵	B (km)	۱۰	l (km)
۰٫۳	ν (m/s)	۰٫۴	u (m/s)
۳۷	Q (m ^۳ /s)	۱۵	D (m ^۲ /s)
۱۰۰	Δx (m)	۶۰	Δt (s)

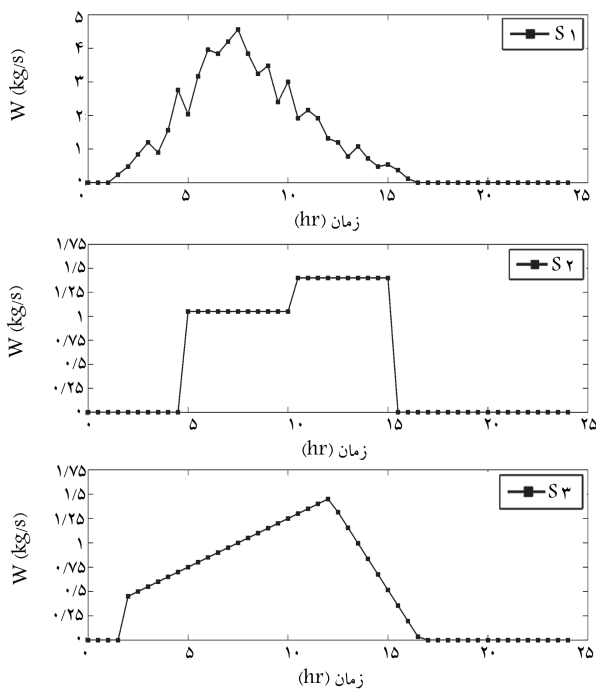
جدول ۹. شاخص‌های خطای حاصله از ارزیابی حل (X۲۲۲۲۲) با روش عددی.

R^2	MRE	MAE	RMSE	شاخص
(%)	(%)	(mg/L)	(mg/L)	
۹۹٫۳۲	۹٫۳۳	۰٫۰۱۸	۰٫۰۲۵	سری زمانی در موقعیت $y = 4$ km و $X = 6.5$ km
۹۸٫۹۲	۹٫۹۹	۰٫۰۴۱	۰٫۰۷۹	سری زمانی در موقعیت $y = 5$ km و $X = 9$ km

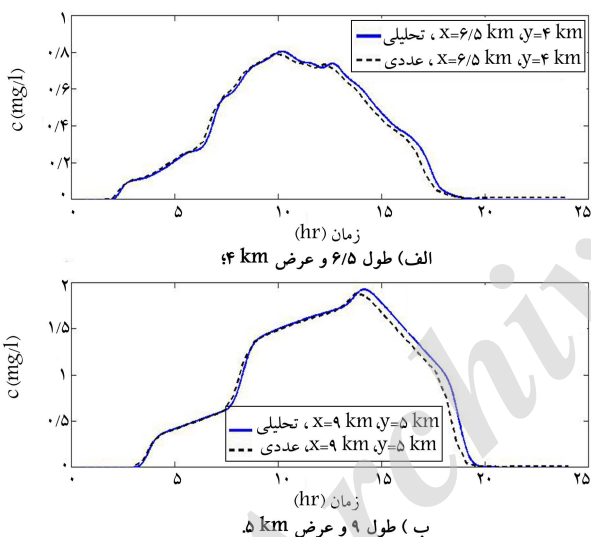


شکل ۳. الگوهای زمانی غلظت تخلیه شده توسط منابع آلاینده‌ی S۱، S۲، S۳، S۴ و S۵ در مسئله‌ی ۱۲ X.

(ν) و مشخصات منابع آلاینده مطابق با جدول ۸ و شکل ۷ است. لازم به ذکر است با توجه به مسئله‌ی اصلی شرط مرزی در ۴ طرف دامنه، شرط مرزی نیومن است. همچنین ضریب پراکندگی در این مسئله در جهت طولی و عرضی یکسان در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از ارزیابی حل تحلیلی پیشنهادی با روش عددی مطابق با شکل ۸ است. نتایج حاصل از محاسبه‌ی شاخص‌های خطا طبق جدول ۹ است.



شکل ۷. الگوی زمانی غلظت تخلیه شده توسط منابع آلایندهی S1، S2 و S3 در حالت ۲ بعدی در مسئلهی (X22Y22).

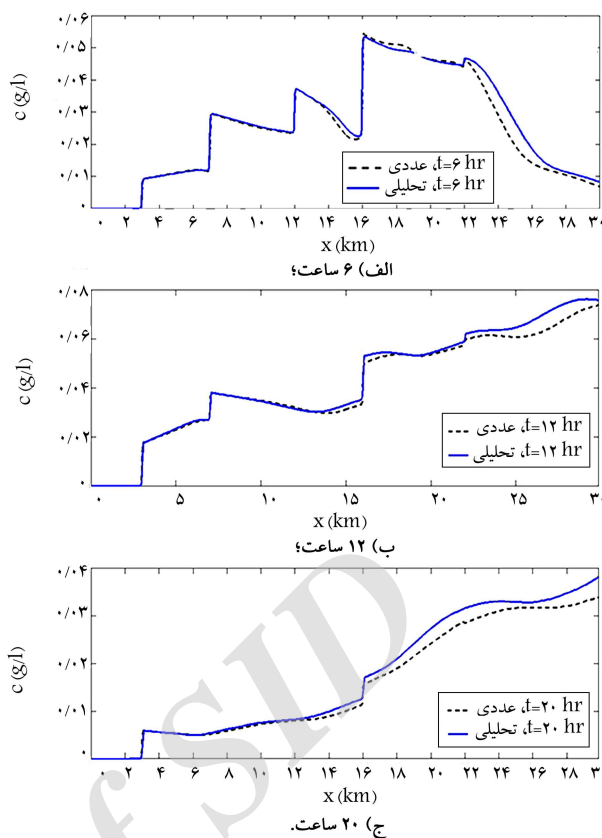


شکل ۸. مقایسهی سری زمانی غلظت در طول ۶٫۵ و عرض ۴ کیلومتر، طول ۹ و عرض ۵ کیلومتر از مبدأ مختصات، مربوط به مسئلهی (X22Y22).

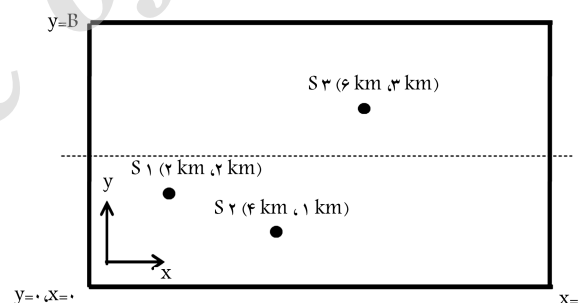
هم روند بودن نتایج حاصل شده مشخص است. با توجه به شکل های ۹ و ۱۰ در زمان ۱۳ ساعت بعد از بارگذاری، خطوط کانتور بیشترین فشردگی را دارند، که بیانگر بالای بودن گرادیان مکانی غلظت در این نواحی است. با طی زمان مجموعهی غلظت وارد شده توسط هر ۳ منبع آلاینده تحت تأثیر عامل پراکنندگی قرار می گیرد و گرادیان مکانی غلظت کاهش می یابد.

۳.۳. ارزیابی حل تحلیلی مسئله با استفاده از داده های واقعی رودخانه

به منظور نشان دادن عملکرد حل های تحلیلی ارائه شده در حالات واقعی، از داده های



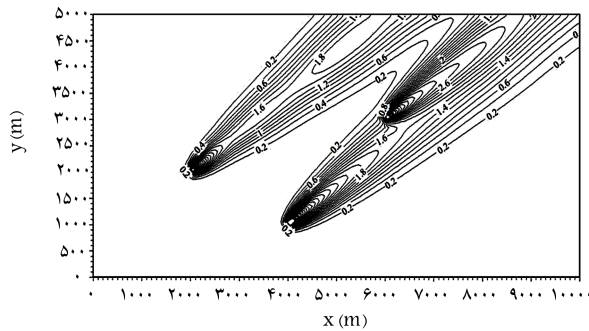
شکل ۹. مقایسهی پروفیل غلظت در ۶، ۱۲ و ۲۰ ساعت پس از شروع بارگذاری در مسئلهی X12.



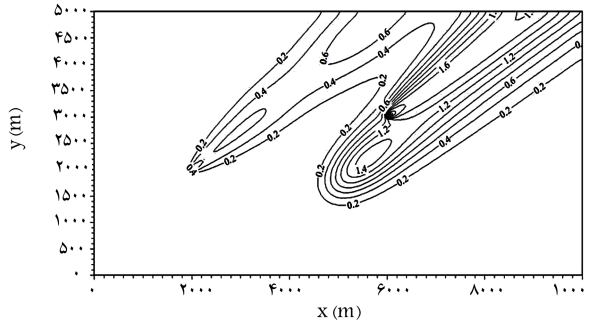
شکل ۱۰. شماتیک نحوهی آرایش منابع آلاینده در حالت دوبعدی در کانال مربوط به مسئلهی (X22Y22).

با توجه به شکل ۸ الف و ۸ ب نتایج حل تحلیلی و روش عددی تطابق مطلوبی با هم دارند. با توجه به شکل ۸، با افزایش فاصله در جهت طولی و عرضی از مبدأ مختصات دامنهی مورد مطالعه (شکل ۶)، میزان اختلاف بین نتایج حاصل شده از روش عددی و حل تحلیلی افزایش می یابد. زیرا با افزایش فاصله از ابتدای کانال، خطاهای ناشی از گسسته سازی مشتقات زمانی و مکانی در روش عددی در جهت x و y ، به صورت تجمعی زیاد می شود. لذا هر چه گام های زمانی و مکانی در روش عددی ریزتر انتخاب شود، خطا کمتر خواهد بود. شاخص های آماری محاسبه شده در جدول ۹ عملکرد مساعدی را گزارش می کنند. کانتورهای غلظت حاصل از حل تحلیلی و عددی در شکل ۹ ارائه شده است. کانتورهای غلظت حاصل از روش عددی مطابق شکل ۱۰ است.

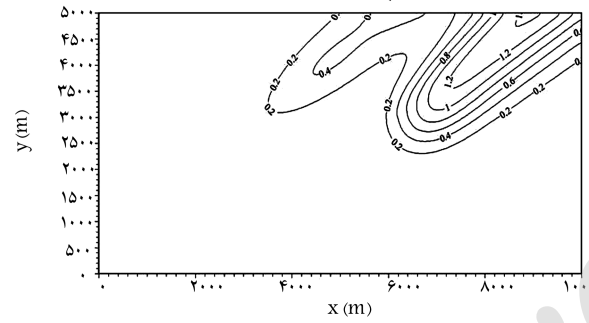
با مقایسهی پروفیل های به دست آمده توسط حل پیشنهادی و مدل عددی،



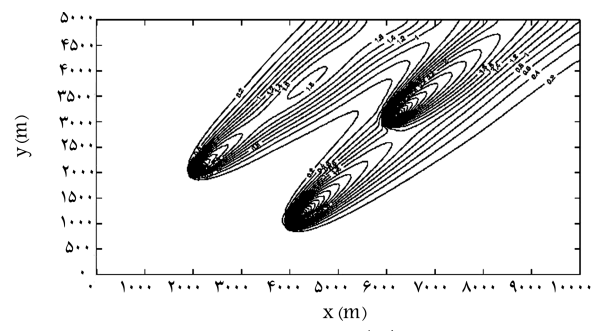
الف) ۱۳ ساعت؛



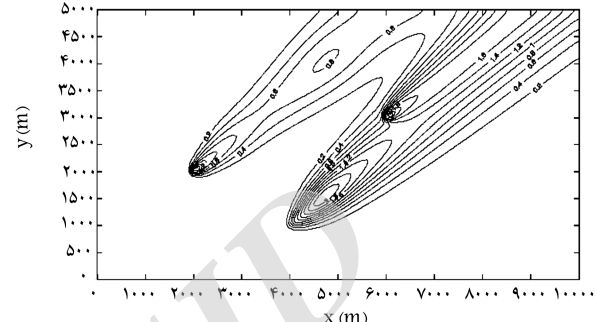
ب) ۱۵/۵ ساعت؛



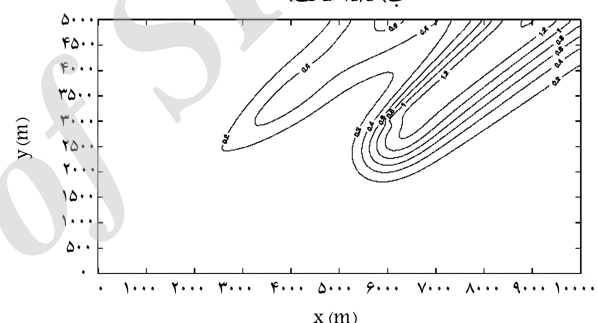
ج) ۱۶/۵ ساعت.



الف) ۱۳ ساعت؛



ب) ۱۵/۵ ساعت؛



ج) ۱۶/۵ ساعت.

شکل ۱۰. کانتورهای غلظت به دست آمده در مسئله $X_{22}Y_{22}$ حاصل از مدل عددی در ۱۳، ۱۵/۵ و ۱۶/۵ ساعت بعد از بارگذاری.

شکل ۹. کانتورهای غلظت به دست آمده در مسئله $X_{22}Y_{22}$ با استفاده از حل پیشنهادی در ۱۳، ۱۵/۵ و ۱۶/۵ ساعت بعد از بارگذاری.

شده است. موقعیت رودخانه، محل تزریق مادهی ردیاب و ایستگاه‌های اندازه‌گیری مطابق شکل ۱۱ است.

برای ارزیابی حل مذکور باید بازه‌ی از رودخانه انتخاب شود که تغییرات عرض و در نتیجه تغییرات سرعت در آن ناچیز باشد. با توجه به این نکته، بازه‌ی ۱۶۲۷۵ تا ۲۰۶۲۵ متری به عنوان بازه‌ی مناسب انتخاب شده است. لازم به ذکر است که سری زمانی غلظت در مقطع ۱۶۲۷۵ متری فقط در ۵۵/۸۵ متری از ساحل چپ موجود است، که مطابق با شکل ۱۲ است. لذا غلظت اندازه‌گیری شده در فاصله‌ی ۵۵/۸۵ متری از ساحل چپ و فاصله‌ی ۱۶۲۷۵ متری از محل تزریق آلاینده به عنوان شرط مرزی ورودی (دیریشلت) به مدل بعدی در دامنه‌ی نیمه‌محدود با شرط مرزی دیریشلت در بالادست (X_{10}) داده شده و غلظت در مقطع ۲۰۶۲۵ متری با استفاده از حل تحلیلی به دست آمده و با مقادیر غلظت اندازه‌گیری شده در آن مقطع مقایسه شده است. لازم به ذکر است که در هنگام آزمایش دبی رودخانه ثابت و مساوی ۳۶۳/۶ متر مکعب بر ثانیه و جریان رودخانه دائمی بوده است. همچنین متوسط سرعت جریان در بازه‌ی مذکور برابر با ۱/۲۸ متر بر ثانیه بوده و مقدار ضریب پراکنندگی نیز با استفاده از رابطه‌ی فیشر^[۱۳] برابر با ۱/۴۲ مترمربع بر

واقعی برای ارزیابی استفاده شده است. برای این منظور حل تحلیلی مربوط به معادله‌ی انتقال در دامنه‌ی نیمه‌محدود با شرط مرزی دیریشلت در بالادست (X_{10}) انتخاب شده است. با توجه به اینکه حل‌های ارائه شده به ازاء سرعت و ضریب پراکنندگی ثابت صادق هستند، لذا در تعمیم به حالات واقعی فقط در شرایطی که جریان ماندگار و تغییرات عرض رودخانه و در نتیجه تغییرات سرعت در امتداد طول رودخانه ناچیز باشد، می‌توان با استفاده از حل‌های مذکور تخمین اولیه‌ی بسیار خوبی از وضعیت توزیع غلظت به دست دست آورد.

در سال ۱۹۹۸، به منظور بررسی فرایند انتقال و پخش بر روی رودخانه‌ی آتاباسکا^[۲۷]، مطالعه‌ی میدانی شامل اندازه‌گیری‌های مربوط به پارامترهای جریان و خصوصیات هیدرولیکی انجام شده است.^[۲۶] بازه‌ی مورد بررسی رودخانه‌ی آتاباسکا ۲۶ کیلومتر طول و عرض متوسط ۱۵۰ متر دارد. به منظور انجام آزمایش ماده‌ی ردیاب در رودخانه، ۱۰ لیتر ماده‌ی رنگی فلوروسن ۲۰٪ (که حاوی ۲/۳ کیلوگرم جرم بوده است)، در ساحل راست رودخانه به صورت سریع و مستقیم به رودخانه تزریق شده است. بعد از تزریق ناگهانی، در ۴ مقطع رودخانه به فواصل ۴۷۲۵، ۱۱۸۵۰، ۱۶۲۷۵ و ۲۰۶۲۵ متر از محل تزریق سری‌های زمانی غلظت اندازه‌گیری

جدول ۱۰. شاخص‌های خطای حاصل از ارزیابی حل با داده‌های واقعی.

مقدار	شاخص	مقدار	شاخص
۲۰٫۴	MRE (%)	۰٫۲۶۵	RMSE (ppb)
۸۵٫۶۲	R ^۲ (%)	۰٫۱۳۹	MAE (ppb)

پایین بودن مقدار MRE نیز به عنوان میانگین خطای نسبی شاهد این ادعاست. لازم به ذکر است با توجه به محدودیت‌های ذکر شده در رابطه با کاربردهای حل تحلیلی با ضرایب ثابت (سرعت و ضریب پراکندگی) در شرایط مربوط به رودخانه‌ی واقعی، شاخص‌های خطا نشان‌دهنده‌ی عملکرد مطلوب حل تحلیلی پیشنهادی است. در رابطه با توجیه مقدار خطا نیز واضح است که در شرایط مربوط به رودخانه‌ی واقعی تغییرات مربوط به عرض رودخانه و در نتیجه تغییرات سرعت، صرف نظر کردن از تأثیر عدم اختلاط کامل غلظت در عرض، ثابت نبودن ضریب پراکندگی در امتداد طولی و عرضی، و البته عدم لحاظ تأثیر نواحی نگه‌داشت موقت در رودخانه همه با هم سبب بروز خطا و اختلاف نتایج حالت واقعی با حالت ایده‌آل و قابل محاسبه با حل تحلیلی شده است، که با لحاظ تمام این عوامل به نظر می‌رسد عملکرد حل تحلیلی به دست آمده مساعد بوده است.

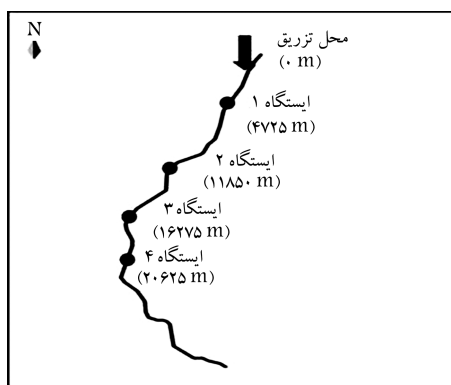
۴. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، حل تحلیلی معادله‌ی ADRE به ازا فعالیت بیش از یک منبع آلاینده با الگوی زمانی نامنظم در دامنه‌ی نیمه‌محدود و محدود برای ترکیبات مختلف شرط مرزی در حالت ۱ و ۲ بعدی با تأکید بر محیط رودخانه با استفاده از روش تابع گرین به دست آمده است. تعیین حل تحلیلی معادله‌ی ADRE برای چند منبع آلاینده‌ی فعال با الگوهای زمانی نامنظم و تفکیک و استخراج فرم زمان کوتاه و زمان زیاد تابع گرین در محیط رودخانه، ارائه‌ی جدول کاملی از فهرست توابع کتابخانه‌ی به همراه معرفی صورت زمان زیاد و زمان کم تابع گرین آن‌ها (با معرفی عدد بی‌بعد R) به منظور تسریع همگرایی حل و ارائه‌ی حل تحلیلی معادله‌ی ADRE مربوط به هر ترکیب متفاوت از شرط مرزی با ذکر کاربرد آن‌ها در رودخانه‌ها جزء نوآوری‌های مهم پژوهش حاضر هستند. حل‌های تحلیلی ارائه شده می‌توانند در مواردی که سرعت و ضریب پراکندگی در کانال ثابت است، جایگزین حل‌های عددی باشند. همچنین راه‌حل‌های مذکور به دلیل دقت و سرعت بالای محاسباتی نسبت به حل‌های عددی، انعطاف‌پذیری فوق‌العاده در اعمال شرط مرزی، شرط اولیه و همچنین اعمال غلظت ناشی از منابع آلاینده‌ی نقطه‌یی، با الگوهای پیچیده و عدم ایجاد مشکلات مربوط به پایداری فیزیکی، در فرایند شبیه‌سازی و بهینه‌سازی، عملکرد مناسب‌تری خواهند داشت. نهایتاً، ارزیابی راه‌حل‌های تحلیلی به ازا فعالیت چندین منبع آلاینده با الگوهای زمانی نامنظم، انجام شده است. نتایج حاصل شده توانمندی و دقت حل‌های پیشنهادی را رضایت‌بخش ارزیابی کرده‌اند.

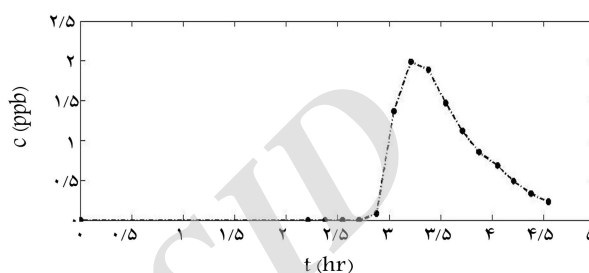
پانوشته‌ها

1. advection-dispersion-reaction equation (ADRE)
2. source
3. sink
4. separation of variables method

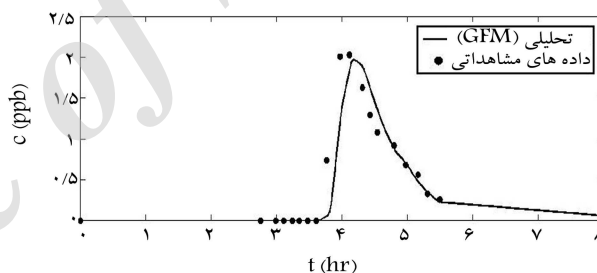
5. mathematical substitutions method
6. non-equilibrium
7. generalized integral transform technique
8. eigen functions
9. zero gradient
10. product solution



شکل ۱۱. شمایی از رودخانه‌ی آتاباسکا به همراه محل تزریق و ایستگاه‌های اندازه‌گیری.



شکل ۱۲. سری زمانی غلظت اندازه‌گیری شده در مقطع عرضی واقع در فاصله‌ی ۱۶۲۷۵ متری از محل تزریق.



شکل ۱۳. مقایسه‌ی مقادیر غلظت به دست آمده از حل تحلیلی با داده‌های واقعی.

ثابته به دست آمده است. نمودار حاصل شده در شکل ۱۳ نشان داده شده است. نتایج حاصل از محاسبه‌ی شاخص‌های خطا مطابق با جدول ۱۰ است. با توجه به شکل ۱۳ و شاخص‌های آماری اندازه‌گیری شده در جدول ۱۰ به نظر می‌رسد نتایج به دست آمده از حل، همبستگی مطلوبی با نتایج واقعی دارد. بالا بودن مقدار ضریب همبستگی محاسبه شده در جدول ۱۰، نشان‌دهنده‌ی تشابه در روند نتایج حاصل از حل تحلیلی و مقادیر واقعی بوده و پایین بودن مقادیر MAE و RMSE نسبت به مقدار بیشینه‌ی غلظت به دست آمده (۲٫۰۲۸ ppb)، نشان‌دهنده‌ی ناچیز بودن اختلاف میان نتایج حاصل و ناچیز بودن خطاست، که البته

11. dirichlet
12. Neumann
13. Robin
14. initial condition (IC)
15. boundary condition (BC)
16. Dirac Delta function
17. image method

۱۸. این تابع به نام الیور هویساید نام‌گذاری شده و طبق تعریف عبارت است از:

$$H(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < a \\ 1, & \text{if } x > a \end{cases}$$

19. large time
20. small time
21. diffusion
22. $\int_b^c f(x)\delta(x - a)dx = f(a), \quad b < a < c$
23. fully implicit
24. finite difference
25. central space
26. Roe scheme
27. Athabasca

منابع (References)

1. Park, E. and Zhan, H. "Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer", *Journal of Contaminant Hydrology*, **53**(1), pp. 41-61 (2001).
2. Batu, V., *Applied Flow and Solute Transport Modeling in Aquifers: Fundamental Principles and Analytical and Numerical Methods*, CRC Press (2005).
3. Chapra, S.C., *Surface Water-Quality Modeling*, **1**, McGraw-Hill, New York (1997).
4. Mikhailov, M.D. and Özisik, M.N., *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*, Dover Publications (1984).
5. Marshall, T.J. and Holmes, J.W., *Soil Physics*, Cambridge University Press (1979).
6. Ogata, A. and Banks, R.B., *A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media*, US Government Printing Office Washington, DC (1961).
7. Van Genuchten, M.T. and Alves, W., *Analytical Solutions of the one-Dimensional Convective-Dispersive Solute Transport Equation*, Technical Bulletin, 152 p. (1982).
8. Leij, F.J., Toride, N. and Van Genuchten, M.T. "Analytical solutions for non-equilibrium solute transport in three-dimensional porous media", *Journal of Hydrology*, **151**(2), pp. 193-228 (1993).
9. Cotta, R.M., *The Integral Transform Method in Computational Heat and Fluid Flow*, in Institution of Chemical Engineers Symposium Series, Hemisphere Publishing Corporation (1994).
10. Chen, J.-S. and Liu, C.-W. "Generalized analytical solution for advection-dispersion equation in finite spatial domain with arbitrary time-dependent inlet boundary condition", *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, **8**(2), pp. 4099-4120 (2011).
11. Pérez Guerrero, J., Pimental, L.C.G. and Skaggs, T.H. "Analytical solution of the advection-diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**(13), pp. 3297-3304 (2009).
12. Leij, F.J., Priesack, E. and Schaap, M.G. "Solute transport modeled with Green's functions with application to persistent solute sources", *Journal of Contaminant Hydrology*, **41**(1), pp. 155-173 (2000).
13. Leij, F.J. and Van Genuchten, M.T. "Analytical modeling of nonaqueous phase liquid dissolution with Green's functions", *Transport in Porous Media*, **38**(1-2), pp. 141-166 (2000).
14. Genuchten, M.T., Leij, F.J., Skaggs, T.H., Toride, N., Bradford S.A. and Pontedeiro, E.M. "Exact analytical solutions for contaminant transport in rivers", *Journal of Hydrology and Hydromechanics*, **61**(3), pp. 250-259 (2013).
15. Cole, K.D., Beck, J.V., Haji-Sheikh, A. and Litkouhi, B., *Heat Conduction Using Green's Functions*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington DC (1992).
16. Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations: With Fourier Series and Boundary Value Problems*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ (1987).
17. Xu, Z., Travis, J.R. and Breitung, W., *Green's Function Method and Its Application to Verification of Diffusion Models of Gaflow Code*, Forschungszentrum Karlsruhe (2007).
18. Polyanin, A.D., *Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, Chapman & Hall/CRC (2002).
19. Greenberg, M.D., *Application of Green's Functions in Science and Engineering*, Prentice-Hall, New York (1971).
20. Tyn Myint, U. and Debnath, L., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, North Holland (2007).
21. Roach, G.F., *Green's Functions*, Cambridge University Press (1982).
22. Kiusalaas, J., *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*, Cambridge University Press (2010).
23. Fischer, H.B., *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press (1979).
24. Danish Hydraulic Institute (DHI), *MIKE 11 FM—Users' Manual*, Horsholm, Denmark (2007).
25. Danish Hydraulic Institute (DHI), *MIKE 21 FM—Users' Manual*, Horsholm, Denmark (2007).
26. Putz, G. and Smith, D.W., *Two - Dimensional Modeling of Effluent Mixing in the Athabasca River Downstream of Weldwood of Canada Ltd. Hinton, Alberta*, Project Report of Alberta University, Edmonton (2000). www.ualberta.ca/sfm/.