

توسعه‌ی روش دیفرانسیل کوادراچر در شبیه‌سازی جریان تک‌فاز در محیط متخلخل مخازن هیدروکربنی

Original Article

اشکان صالحی (کارشناس ارشد)

سیدحامد معراجی* (استادیار)

محمد واقفی (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

در نوشتار حاضر، توسعه‌ی روش نوین دیفرانسیل کوادراچر در حوزه‌ی شبیه‌سازی عددی مخازن نفتی و جریان سیال در محیط متخلخل ارائه شده است. جریان سیال در مخازن نفتی از یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی پیروی می‌کند که برای حل آن از روش دیفرانسیل کوادراچر (DQM) استفاده می‌شود. در این راستا، روش دیفرانسیل کوادراچر که بر روی یک شبکه پیاده‌سازی شده است، کاملاً تشریح شده است. جهت حل عددی معادلات، از روش دیفرانسیل کوادراچر و تفاضل مرکزی به ترتیب جهت گسسته‌سازی مشتقات مکانی و زمانی استفاده شده است. برای ارزیابی و حل عددی، چند مسئله‌ی نمونه‌ی یک بعدی و دو بعدی حل و نتایج با حل تحلیلی و داده‌های روش تفاضل محدود مقایسه شده است. نتایج حاصل، حاکی از تطابق خوب نتایج به‌دست آمده با نتایج حل تحلیلی است. همچنین حل حاصل از روش تفاضل محدود، نشانگر سرعت بیشتر در رسیدن به دقت موردنظر و هزینه‌ی محاسباتی کمتر است.

واژگان کلیدی: حل عددی، مخازن نفتی، روش دیفرانسیل کوادراچر، محیط متخلخل.

salehi.ashkan68@gmail.com
h.meraji@pgu.ac.ir
vaghefi@pgu.ac.ir

۱. مقدمه

شبیه‌سازی مخازن نفتی فرایندی است که در طی آن با استفاده از معادلات حاکم بر جریان درون محیط متخلخل (بقای جرم - بقای ممتوم و...)، یک دسته معادلات دیفرانسیل جزئی به دست می‌آید و سپس به بررسی و حل معادلات مذکور پرداخته می‌شود. حل معادلات دیفرانسیل به‌دست آمده به روش تحلیلی با توجه به پیچیدگی هندسه و خواص سنگ و سیال مخزن، دشوار و گاهی نیز غیرممکن است. تاکنون به طور معمول از روش‌های عددی تفاضل محدود و در برخی موارد روش حجم محدود و المان محدود برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر جریان سیال در محیط متخلخل استفاده شده است. در مورد شبیه‌سازی عددی مخزن می‌توان به مطالعاتی در سال ۱۹۷۸ اشاره کرد، که شاخصی برای فشار بلوک چاه در شبیه‌سازی عددی مخزن در جریان‌های تک‌فازی ارائه شده است.^[۱] همچنین در سال ۱۹۸۸، از روش المان مرزی (BEM)^۱ استفاده و نشان داده شد که با استفاده از روش مذکور، جواب‌های دقیق‌تری در مرزهای فشار ثابت و خطوط جریان پایدار در مخازن دوبعدی همگن به‌دست می‌آیند.^[۱] برخی پژوهشگران نیز در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۲، به مقایسه‌ی حل عددی یک مخزن به روش‌های گرین، تفاضل محدود، و روش‌های مورد استفاده‌ی نرم‌افزارهای تجاری پرداختند و نشان دادند که روش گرین (GEM)^۲ با استفاده از شبکه‌های درشت نیز به جواب‌های قابل قبولی

امروزه منابع هیدروکربنی، نقش بسیار مهمی در تولید انرژی موردنیاز جهان ایفا می‌کنند و از سوی دیگر، درآمد حاصل از منابع ذکر شده، در اقتصاد کشورهای نفت‌خیز پراهمیت است. نیاز کشورهای صنعتی به منابع هیدروکربنی برای تأمین انرژی و کشورهای نفت‌خیز به درآمد حاصل از آن، توجه زیادی به بهره‌برداری از آن‌ها را به خود جلب کرده است. اجرای هرگونه عملیات بر روی مخزن (تولید، تزریق، حفر چاه و...) نیازمند شناخت قابل قبولی از شرایط سنگ و سیال و مکانیزم جریان در آن دارد. شناخت خواص سنگ و سیال مخزن از طریق آزمایش با دقت قابل قبولی امکان‌پذیر است؛ اما شناخت مکانیزم جریان، چگونگی بازیابی و راه‌های افزایش ضریب بازیابی با آزمایش در مقیاس مخزن عملاً غیرممکن است. استفاده از تجربیات پیشین برای پیشبرد یک پروژه هر چند می‌تواند اطلاعات زیادی را در اختیار مجری آن طرح قرار دهد، اما با توجه به خاص بودن شرایط یک مخزن، به‌تنهایی برای اجرای پروژه کافی نیست. بنابراین شبیه‌سازی مخزن و جریان درون آن ضروری است.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۹/۱۰/۱۳۹۵، اصلاحیه ۲۴/۴/۱۳۹۶، پذیرش ۵/۸/۱۳۹۶.

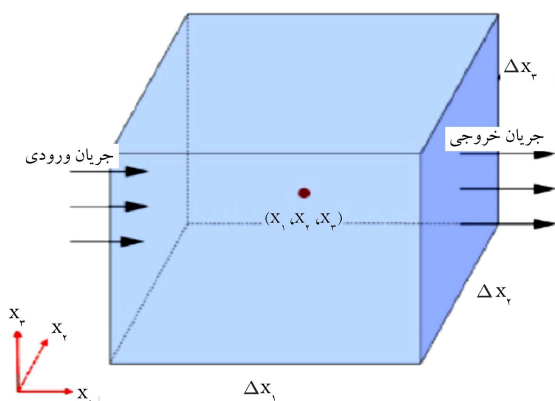
DOI:10.24200/J30.2018.1939.2026

قبل تعیین می‌شود. واضح است که تمامی عملیات ذکر شده بر مبنای تقریب چندجمله‌یی است. بنابراین مطابق با آن، روش DQ مرتبط با عنوان روش دیفرانسیل کوادراچر بر مبنای چندجمله‌یی (PDQ) نام‌گذاری شده است که تاکنون در حل مسائل گوناگون مهندسی استفاده شده است. در سال ۲۰۰۶، روش PDQ مدل‌سازی امواج بلند استفاده و نشان داده شد که روش DQ، ثبات بی قید و شرط دارد و نیاز به تلاش محاسباتی کمتر نسبت به سایر روش‌های عددی دارد.^[۱۵] در زمینه‌ی کاربرد روش DQ در حل مسائل جریان آب زیرزمینی می‌توان به پژوهشی در سال ۲۰۰۹ جهت محاسبه‌ی پروفیل سطح آب بین دو کانال زهکش زیرزمینی اشاره کرد.^[۱۶] علاوه بر این در سال ۲۰۱۱، با استفاده از روش PDQ به حل ۳ نوع مسئله‌ی جریان آبخوان یک‌بعدی شامل جریان آبخوان بسته با شرایط مرزی وابسته به زمان و نشت از آبخوان‌های باز و بسته‌ی ناهمگن پرداخته شده است که نتایج روش PDQ با نتایج حاصل از حل تحلیلی و روش‌های ضمنی/صریح تفاضل محدود (FDM)^۷ مقایسه شده و تطابق خوبی به‌دست آمده است.^[۱۷]

همچنین در بررسی و حل معادلات ناویاستوکس با استفاده از روش DQ (۲۰۱۳)، نتایج به‌دست آمده بیانگر سادگی و در عین حال مؤثر بودن روش DQ در حل معادلات مذکور بود.^[۱۸] در سال ۲۰۱۶، نیز در بررسی و تحلیل حرارتی تأثیر یک نانوسیال در طول یک سیلندر تحت میدان مغناطیسی با روش DQ، اثر پارامترهای مرتبط از جمله پارامتر مغناطیسی، کسر حجمی جامد نانوذرات و نوع نانوسیال در جریان انتقال حرارت، عدد ناسلت، و ضریب اصطکاک پوست مطالعه شد.^[۱۹] در نوشتار حاضر، ابتدا پدیده‌ی حرکت سیال تراکم‌ناپذیر و نسبتاً تراکم‌پذیر در محیط متخلخل و معادلات حاکم بر آن مطالعه و پس از تشریح روش PDQ و مراحل اجرای آن در حل انواع معادلات دیفرانسیل به گسسته‌سازی معادلات و شبیه‌سازی جریان تک‌فاز در مخازن نفتی دوبعدی پرداخته شده است.

۲. معادلات حاکم

در بخش حاضر، معادلات حاکم بر جریان تک‌فاز بررسی شده است. معادلات حاکم بر جریان در محیط‌های متخلخل عبارت از معادله‌ی بقای جرم و معادله‌ی داریسی هستند. در شکل ۱، جریان ورودی و خروجی در یک سلول مکعبی شکل مشاهده می‌شود.



شکل ۱. جریان در یک سلول مکعبی.

می‌رسد و همچنین می‌توان روش گرین را برای محیط‌های ناهمگن به کار برد.^[۲۰] همچنین در سال ۲۰۰۶، شبیه‌سازی عددی مخازن رودخانه‌یی به کمک روش اجزاء محدود ارائه و توزیع فشار برای مخازن حاوی کانال‌های عمودی و افقی به دست آورده شد.^[۵] در معرفی یک مدل و الگوریتم آن برای شبیه‌سازی عددی مخازن با نفوذپذیری پایین در سال ۲۰۱۱، نشان داده شد که در نظر گرفتن نشت غیرخطی در مقیاس‌های بزرگ، جواب‌های بسیار نزدیک و خوبی نسبت به داده‌های میدانی دارد.^[۶] همچنین در بررسی یک الگوریتم دقیق برای شبیه‌سازی مخازن نفتی با مدل نفت سیاه به روش حجم محدود (۲۰۱۴) نشان داده شد که با استفاده از روش خطی مناسب، مشکلات محاسباتی کمتری در حل معادلات رخ می‌دهد.^[۷] در سال ۲۰۱۴، نیز فرمولاسیون جبری روش حجم محدود چندمقیاسی برای حل جریان تراکم‌ناپذیر در محیط متخلخل ناهمگن استفاده شده است.^[۸] در پژوهش دیگری (۲۰۱۵) نیز به تحلیل و بررسی ویژگی‌های جریان غیرخطی در مخازن دریایی با نفوذپذیری کم و با چاه افقی فشار ثابت به روش المان محدود پرداخته و نتایج حاصل از مدل المان محدود با نتایج روش دارسی مقایسه شده است.^[۹] همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۱۶)، روش خطوط جریان برای شبیه‌سازی سیلاب‌زنی در مخازن را توسعه دادند و برای بررسی دقت روش مذکور، روند سیلاب‌زنی در یک مخزن شکسته را با استفاده از مدل تخلخل دوگانه در نظر گرفتند و نتایج آن را با نتایج نرم‌افزارهای تجاری مقایسه و دقت و بازده شبیه‌ساز ارائه‌شده برای شبیه‌سازی جریان دو فازی در مخازن را ثابت کردند.^[۱۰] در سال ۲۰۱۶، نیز اثر گردآیدان فشار درجه دوم در معادله‌ی جریان در یک مخزن یک بعدی با در نظر گرفتن شرایط مرزی، که بر مبنای قانون دارسی است، با روش تفاضل محدود بررسی شد و راه‌حلی برای برطرف کردن مشکلات مرزی در این‌گونه مخازن به‌دست آمد.^[۱۱]

همچنین در پژوهش دیگری (۲۰۱۷)، حل عددی معادلات حاکم بر جریان غیرقابل امتزاج دو فاز در محیط متخلخل با روش حجم محدود ارائه شد و معادلات حاکم با ترکیب معادلات جرم با قانون دارسی که جریان سیال در محیط متخلخل را توصیف می‌کند، به‌دست آمدند و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از روش فشار ضمنی و اشباع صریح (IMPES)^۲ حل و روش مذکور برای مخازن ناهمگن نیز بسط داده شد.^[۱۲]

ارائه‌ی روش‌های جدیدی که سرعت هم‌گرایی و دقت بالاتری نسبت به دیگر روش‌های قدیمی دارند، بسیار حائز اهمیت است. یکی از روش‌های عددی که در سال‌های اخیر به آن توجه شده است، روش دیفرانسیل کوادراچر (DQM)^۴ است. روش DQ، برای اولین بار در سال ۱۹۷۰ ارائه شد.^[۱۳] در روش کوادراچر، مشتقات تابع در یک نقطه‌ی دامنه با استفاده از مجموع وزنی مقادیر تابع همه‌ی نقاط دامنه، که در یک راستا قرار دارند، تخمین زده می‌شود. روش DQ به دلیل کارایی و دقت بالا و همچنین نیاز به استفاده از تعداد نقاط کمتر برای گسسته‌سازی دامنه‌ی محاسباتی در مقایسه با دیگر روش‌های عددی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. در ابتدا استفاده از روابط جبری ساده برای محاسبه‌ی ضرایب وزنی مشتق مرتبه‌ی اول معرفی شد. در سال ۱۹۹۰، دستاورد مهمی در محاسبه‌ی ضرایب وزنی ارائه شد، که در آن همه‌ی روش‌های موجود در تعیین ضرایب وزنی، تحت آنالیز تقریب مرتبه‌ی بالای چندجمله‌یی و آنالیز فضای بردار خطی^۵ جمع‌بندی شده‌اند.^[۱۴] در روش کلی اخیر که روش به‌کار رفته در پژوهش حاضر است، ضرایب وزنی مشتقات مرتبه‌ی اول با استفاده از یک فرمول‌بندی ساده‌ی جبری، بدون هیچ‌گونه محدودیتی در انتخاب نقاط گره‌یی تعیین می‌شوند. علاوه بر آن، ضرایب وزنی مشتقات مرتبه‌ی دوم و بالاتر نیز توسط روابطی با فرایند مشابه

۳. روش دیفرانسیل کوادراچر

روش دیفرانسیل کوادراچر (DQM) در اوایل دهه ۱۹۷۰ ارائه شد.^[۱۳] روش دیفرانسیل کوادراچر، یک روش گسسته‌سازی عددی جهت تقریب مشتقات است که از ایده‌ی انتگرال کوادراچر مرسوم گرفته شده است. اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ به اندازه‌ی کافی هموار و تعداد N نقطه‌ی گره‌یی با مختصات به صورت $a = x_1, x_2, \dots, x_N = b$ وجود داشته باشد، مشتق m ام در راستای x تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $x(i)$ ، توسط روش دیفرانسیل کوادراچر به صورت رابطه‌ی ۸ تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N w_{ij}^{(m)} f(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

که در آن، x_j نقاط گسسته در حوزه‌ی محاسباتی، $f(x_j)$ و $w_{ij}^{(m)}$ مقادیر تابع در آن نقاط و ضرایب وزنی برای مشتق m ام مربوط به آن هاست. نکته‌ی اصلی در روش DQ، تعیین ضرایب وزنی است. جهت تعیین ضرایب وزنی در روش DQ، پژوهشگران متعدد روش‌های مختلفی توسعه داده‌اند که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، تعیین ضرایب وزنی براساس تقریب معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) توسط یک چندجمله‌ی بی‌درجه بالاست، که به آن روش DQ بر مبنای تقریب چندجمله‌یی (PDQ) گفته می‌شود. در سال ۱۹۹۷،^[۱۴] با در نظر گرفتن چند نوع چندجمله‌یی پایه، روابط ۹ الی ۱۲ جهت تعیین ضرایب وزنی مشتقات اول، A_{ij} و ضرایب وزنی مشتقات دوم B_{ij} ارائه شده است:

$$A_{ij} = \frac{M^{(1)}(x_i)}{(x_i - x_j) \cdot M^{(1)}(x_j)}, \quad \text{for } j \neq i \quad (9)$$

$$A_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{ij} \quad (10)$$

$$B_{ij} = 2 \cdot A_{ij} \left(A_{ii} - \frac{1}{x_i - x_j} \right), \quad \text{for } j \neq i \quad (11)$$

$$B_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{ij} \quad (12)$$

که در آن، $M^{(1)}(x_i)$ از رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$M^{(1)}(x_i) = \prod_{k=1, k \neq i}^N (x_i - x_k) \quad (13)$$

این تذکر لازم است که برای محاسبه‌ی مشتقات توابع دو بعدی $f(x, y)$ در راستای x و یا y در هر نقطه، مانند آنچه که در متن بیان شد، برای هر راستا عمل می‌شود.

۱.۳. گسسته‌سازی معادلات و شرایط مرزی در مختصات کارتزین

معادله‌ی سیال در محیط متخلخل دوبعدی (رابطه‌ی ۵) با استفاده از روش دیفرانسیل کوادراچر به صورت رابطه‌ی ۱۴ گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a} \right)^2 k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b} \right)^2 k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q = \phi c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (14)$$

معادله‌ی بقای جرم در سلول، مطابق رابطه‌ی ۱ محاسبه می‌شود:

$$\sum Mass_{in} - \sum Mass_{out} = \sum Mass_{accumulation} \quad (1)$$

که در آن، جرم ورودی: $Mass_{in} = \rho u_x A_{xx}$

جرم خروجی: $Mass_{out} = \rho u_x A_x|_{x+dx}$

تغییرات جرم در حجم کنترل: $Mass_{Accumulation}$

با بسط دادن رابطه‌ی ۱ و جای‌گذاری مقادیر معادله، رابطه‌ی مذکور به صورت رابطه‌ی ۲ نوشته می‌شود:

$$[\rho u_x A_x|_x - \rho u_x A_x|_{x+dx}] + [\rho u_y A_y|_y - \rho u_y A_y|_{y+dy}] = (\rho \phi \Delta x \Delta y) |_{t+dt} - (\rho \phi \Delta x \Delta y) |_t \quad (2)$$

که در آن، u_x و u_y سرعت جریان در راستای x و y ، A سطح مقطع، ρ چگالی سیال و ϕ تخلخل محیط است. با تقسیم دو طرف معادله بر $(\rho \Delta x \Delta y \Delta t)$ و مشتق گرفتن از ۳ ترم (یعنی $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$) معادله‌ی پیوستگی در محیط متخلخل به صورت رابطه‌ی ۳ به دست می‌آید:

$$- \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) \quad (3)$$

که در آن، سرعت جریان در راستای x و y با استفاده از معادله‌ی دارسی، مطابق رابطه‌ی ۴ است:

$$u_x = - \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4)$$

$$u_y = - \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی دارسی در معادله‌ی پیوستگی و در نظر گرفتن جمله‌ی چاه، معادله‌ی دوبعدی جریان یک فازی به رابطه‌ی ۵ تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu B} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + q = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (5)$$

که در آن، k_x نفوذپذیری سیال در راستای x ، k_y نفوذپذیری سیال در راستای y ، P فشار نفت، μ گرانیوی سیال، B ضریب حجمی سازند، ϕ تخلخل و q دبی تولید یا تزریق است. با ثابت در نظر گرفتن دمای مخزن، رابطه‌ی ۳ به صورت رابطه‌ی ۶ نوشته می‌شود:^[۲۰]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) + q = \phi c_t \frac{\partial P}{\partial t} \quad (6)$$

که در آن، c_t ضریب تراکم‌پذیری کلی سازند است.

برای پیاده‌سازی شرایط چاه در پژوهش حاضر، از معادله‌ی پیسمن که یکی از روش‌های مرسوم در مدل‌سازی چاه است، استفاده شده است. طبق معادله‌ی پیسمن، دبی چاه برای مخزن دوبعدی با ضخامت و نفوذپذیری ثابت از رابطه‌ی ۷ به دست می‌آید:^[۲۱]

$$q = \frac{2\pi \rho k L}{\mu \ln(r_e/r_w) + s} (p_{bh} - p) \quad (7)$$

به طوری که در آن، p_{bh} فشار ته چاه، L طول چاه در سلول، s ضریب سطح، r_w شعاع چاه و r_e شعاع معادل چاه روش پیسمن است که در حالت نفوذپذیری همگن، $r_e = 0.208L$ ، r_e تعریف می‌شود.

Δt در طرفین معادله، رابطه‌ی ۱۸ به صورت رابطه‌ی ۱۹ نوشته می‌شود:

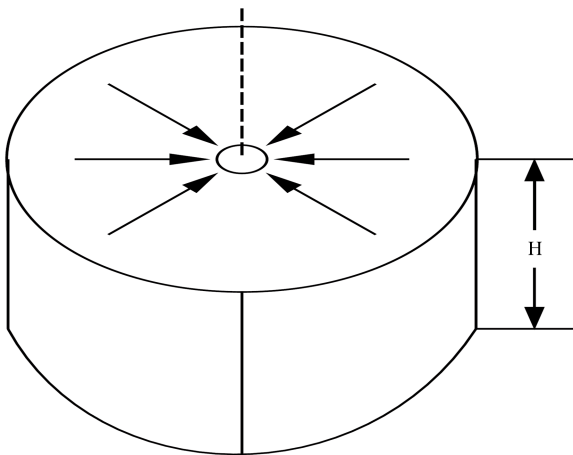
$$p^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varphi c t} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i = p^n, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

برای حل مسئله در روش کوادراچر از زمان صفر شروع و از مقدار پارامترها در هر گام زمانی n ، فقط جهت گسسته‌سازی مشتقات زمانی استفاده و برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی، از مقدار پارامترها در گام زمانی $n+1$ استفاده می‌شود؛ بنابراین، روابط به دست آمده حاصل از گسسته‌سازی معادلات، یک دستگاه معادلات خطی را تشکیل می‌دهند، که مقدار هر پارامتر برای زمان t_{n+1} و یا گام زمانی $n+1$ به‌طور ضمنی از طریق حل دستگاه معادلات خطی ذکر شده به دست می‌آید. با قرار دادن $\theta = 0.5$ و ضرب Δt در طرفین معادله و نوشتن ترم‌های مربوط به زمان $n+1$ در یک طرف معادله‌ی فرم کرانک - نیکلسون، رابطه‌ی ۱۶ به صورت رابطه‌ی ۲۰ نوشته می‌شود:

$$p^{n+1} - \frac{1}{\varphi} \Delta t \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i = p^n + \frac{1}{\varphi} \Delta t \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i \quad (20)$$

روش حل شبه ضمنی کرانک - نیکلسون مشابه با روش حل ضمنی است، با این تفاوت که در آن برای حل مسئله از مقدار پارامترها در هر گام زمانی n علاوه بر گسسته‌سازی مشتقات زمانی، در گسسته‌سازی مشتقات مکانی نیز در کنار مقادیر پارامترها در گام زمانی $n+1$ استفاده می‌شود.

۲.۳. گسسته‌سازی معادلات و شرایط مرزی در مختصات استوانه‌یی معادله‌ی سیال غیردائمی در مختصات استوانه‌یی (شکل ۲) با فرض جریان افقی



شکل ۲. جریان شعاعی یک بعدی.

که در آن، $k = 1, 2, \dots, N$ است. گسسته‌سازی شرایط مرزی مشتقی در مرزهای بسته به صورت روابط ۱۵ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a} \sum_{l=1}^{N_x} A_{1l}^{(x)} p_{kl} &= 0 \\ -\frac{1}{a} \sum_{l=1}^{N_x} A_{N_x l}^{(x)} A_{N_x i}^{(x)} p_{kl} &= 0 \\ -\frac{1}{b} \sum_{l=1}^{N_y} B_{1l}^{(y)} p_{kl} &= 0 \\ -\frac{1}{b} \sum_{l=1}^{N_y} B_{N_y i}^{(y)} p_{kl} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

فرم کلی گسسته‌سازی شده‌ی رابطه‌ی ۱۴ به صورت رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آید، که در آن مشتق زمانی به روش تفاضل محدود پیشرو مرتبه‌ی اول، گسسته‌سازی شده است:

$$\begin{aligned} \theta \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i \\ + (1-\theta) \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i \\ = \phi c t \left[\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \right]_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن، با قرار دادن $\theta = 0$ ، فرم ضمنی، $\theta = 0.5$ فرم صریح و $\theta = 1$ فرم شبه ضمنی کرانک - نیکلسون به دست می‌آید. همان‌طور که در قسمت قبل اشاره شد، با قرار دادن $\theta = 0$ در رابطه‌ی ۱۶، فرم صریح رابطه‌ی مذکور به صورت رابطه‌ی ۱۷ نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i \\ = \phi c t \left[\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \right]_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

که در آن، n گام زمانی، i شماره‌ی گره و N تعداد کل نقاط گره‌یی در حوزه‌ی مسئله است. با قرار دادن $\theta = 0$ در رابطه‌ی ۱۶، فرم ضمنی معادله به صورت رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{a} \frac{\partial k}{\partial x} \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{a}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_x} A_{jl}^{(y)} p_{kl} + \frac{1}{b} \frac{\partial k}{\partial y} \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(x)} p_{kl} + \left(\frac{1}{b}\right)^r k \sum_{l=1}^{N_y} B_{jl}^{(y)} p_{kl} + q \right]_i \\ = \phi c t \left[\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} \right]_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (18)$$

با قرار دادن ترم‌های مربوط به زمان $n+1$ در یک طرف معادله و ضرب کردن

دو راستا با یکدیگر برابر است و با توجه به همین موضوع جریان به صورت یک بعدی در مختصات استوانه‌یی در در نظر گرفته شده است. برای حل عددی مسئله‌ی اول به روش DQ از رابطه‌ی ۲۲ استفاده شده است. شرایط اولیه و مرزی مسئله مطابق رابطه‌های ۲۳ و ۲۴ است. مقادیر ثابت فشار اولیه و دبی تولید در جدول ۱ ارائه شده‌اند. در لحظه‌ی اول، فشار اولیه‌ی مخزن یکنواخت و برابر ۳۶۰۰ psia است. سنگ مخزن و سیال در مثال ذکر شده با نرخ ثابتی تراکم پذیر هستند، و تراکم پذیری کلی از مجموع تراکم پذیری سنگ و تراکم پذیری سیال به دست آمده و مقادیر آن‌ها نیز در جدول ۱ ارائه شده است.

مسئله‌ی اول، برای تعداد گره‌های مختلف با روش عددی حل شد، و با توجه به نتایج به دست آمده، در روش عددی با در نظر گرفتن تعداد ۲۱ گره، جواب‌های با دقت قابل قبول و بسیار نزدیک به جواب‌های دقیق مسئله به دست آمد. در شکل ۳، نتایج روش عددی برای تعداد گره‌های ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ۲۱ به همراه نتایج روش حل تحلیلی با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

در راستای مقایسه‌ی روش‌های حل، مسئله‌ی اول با سه روش: حل صریح، ضمنی و کرانک نیکلسون حل شد، که نتایج روش‌های حل ضمنی و کرانک نیکلسون در آن تقریباً دقیق و مشابه یکدیگر و نتایج روش حل صریح با خطای زیادی همراه بود. در شکل ۴، نتایج هر سه روش با جواب‌های تحلیلی مسئله مقایسه شده است. در جدول ۲، فشار مخزن برای مدت ۴ روز در زمان‌های مختلف با یکدیگر

به صورت رابطه‌ی ۲۱ ارائه شده است: [۲۲]

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r}, \chi = \frac{k}{\varphi \mu c_t} \quad (21)$$

که در آن، معادله‌ی فشار فقط تابع فاصله‌ی r و زمان t است که صورت گسسته‌سازی شده‌ی آن به روش دیفرانسیل کوادراچر به صورت رابطه‌ی ۲۲ است:

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N_r} B_{ki}^{(r)} p_i + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{N_r} A_{ki}^{(r)} p_i, \quad k = 1, 2, \dots, N_r \quad (22)$$

همان‌طور که در بخش پیش بیان شد، A و B ضرایب وزنی روش DQ برای مشتق مرتبه‌های اول و دوم هستند. شرط اولیه‌ی معادله در این حالت همانند مختصات کارتزین است و روابط آن به صورت رابطه‌ی ۲۳ بیان می‌شود:

$$p(r, 0) = p_0, \quad 0 \leq r < \infty \quad (23)$$

که در آن، p_0 فشار اولیه‌ی مخزن است. شرایط مرزی نیز در مختصات استوانه‌یی طبق رابطه‌ی ۲۴ توصیف می‌شود:

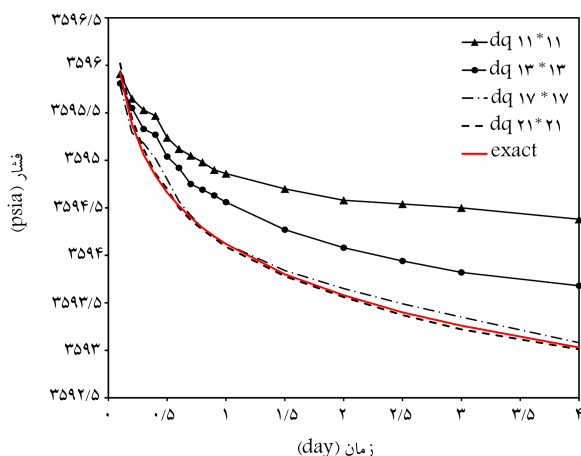
$$p(r, t) = p_0, \quad r \rightarrow \infty, t \geq 0$$

$$r \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{Q\mu}{2\pi kH}, \quad r \rightarrow 0, t > 0 \quad (24)$$

که کلیه‌ی پارامترهای رابطه‌ی مذکور در بخش ۲ تعریف شده است.

جدول ۱. مقادیر پارامترها و مشخصات مخزن مسئله‌ی اول.

| مقدار | واحد | متغیر | |
|----------|----------|-----------|-------------------|
| ۳۰۰ | STB/D | Q | دبی تولید |
| ۱/۰۶ | cp | μ | گرانروی |
| ۳۰۰ | md | k | نفوذپذیری |
| ۱۰۰ | ft | H | ضخامت |
| ۰/۲ | fraction | φ | تخلخل |
| ۳۶۰۰ | psia | p_0 | فشار اولیه |
| ۰/۱۸۷۵ | ft | r_w | شعاع چاه |
| ۸۱۰۰ | ft | x_{max} | طول در راستای x |
| ۸۱۰۰ | ft | y_{max} | طول در راستای y |
| ۰/۰۰۰۰۱۴ | ۱/psi | c_t | تراکم پذیری کلی |



شکل ۳. نتایج روش DQ در نقطه‌ی $r = r_w$ با تعداد گره‌های مختلف در مسئله‌ی اول.

۴. مسائل و صحت‌سنجی

روش DQ توضیح داده شده در بخش ۲ برای حل سه مسئله‌ی نمونه استفاده شده است که نتایج هر کدام در ادامه ارائه شده است. ابتدا با حل مثال یک بعدی در مختصات استوانه‌یی، که حل تحلیلی آن در مراجع موجود است، کارایی روش DQ نشان داده شده است. در ادامه، یک مغزه‌ی یک بعدی در مختصات کارتزین شبیه‌سازی شده است. سپس در مثال بعدی، مسئله‌ی مرسوم در مخازن نفتی مشهور به Five spot در حالت جریان تک‌فاز ارائه شده است. با توجه به اینکه حل تحلیلی و ریاضی برای مسئله‌ی مذکور وجود ندارد، مسئله با روش تفاضل محدود (به‌عنوان یک روش استاندارد) برای تعداد گره‌های بسیار زیاد و گام زمانی بسیار کوچک شبیه‌سازی شد و به‌عنوان حل دقیق در نظر گرفته شده است. در ادامه، با مقایسه‌ی نتایج روش DQ با حل دقیق، به بیان مزایا و معایب روش عددی مورد مطالعه پرداخته شده است که به تفصیل در بخش مرتبط ارائه شده است.

۱.۴. مسئله‌ی اول

برای اعتباربخشی به روش DQ، یک مثال یک بعدی، که حل تحلیلی آن طبق رابطه‌ی ۲۵ است، ارائه شده است. [۲۲]

$$p(r, t) = p_0 - \frac{Q\mu}{2\pi kH} \ln\left(\frac{2.245t\chi}{r^2}\right) \quad (25)$$

که در آن، پارامتر χ مطابق رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید:

$$\chi = \frac{k}{\varphi \mu c_t} \quad (26)$$

تعریف و مقادیر پارامترهای روابط مذکور و مشخصات مخزن و شرایط چاه در جدول ۱ ارائه شده است. با توجه به همگن بودن مخزن در مثال اول، نفوذپذیری در

جدول ۳. شرایط مرزی به کار رفته در مسئله‌ی دوم.

| شرط مرزی | مرز |
|----------------------|----------------------|
| $P = 20 \text{ bar}$ | $(x = 0)$ |
| $P = 5 \text{ bar}$ | $(x = 3 \text{ cm})$ |

جدول ۴. مشخصات مخزن مسئله‌ی دوم.

| مقدار | واحد | متغیر | |
|----------|----------|-----------|-----------------|
| ۱ | cp | μ | گرانروی |
| ۰٫۶ | md | k | نفوذپذیری |
| ۰٫۲ | fraction | φ | تخايلخ |
| ۱۰ | bar | p_0 | فشار اولیه |
| ۱۰۰ | cm | x_{max} | طول مغزه |
| ۰٫۰۰۰۰۱۴ | ۱/bar | c_t | تراکم پذیری کلی |

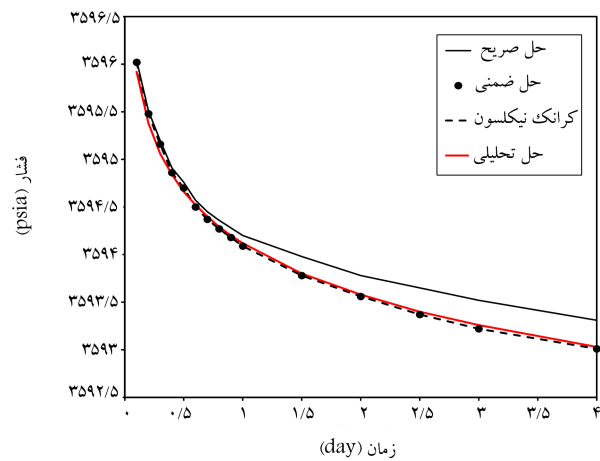
آن یک مغزه با مقطع ثابت ۱۰۰ سانتی‌متر مربع به طول ۳۰ سانتی‌متر حاوی نفت است، که از سمت چپ، جریان نفت با فشار نسبی ۵ بار وارد آن می‌شود. مرز سمت راست با فشار نسبی ثابت ۲۰ بار است. در لحظه‌ی اول، فشار کل مغزه، یکنواخت و برابر با ۱۰ بار است. شرایط مرزی مسئله‌ی دوم در جدول ۳ و سایر مشخصات مغزه در جدول ۴ ارائه شده است.

برای مقایسه‌ی نتایج روش به کاررفته در مسئله‌ی دوم، مغزه با روش استاندارد تفاضل محدود ارائه‌شده‌ی چن، [۲۱] حل شده و مبنای مقایسه قرار گرفته است. با توجه به اینکه سنگ مخزن در مسئله‌ی دوم با نرخ ثابتی تراکم‌پذیر بود، لذا مسئله‌ی دوم با در نظر گرفتن اندازه‌ی گام زمانی برابر $s^{-5} 10^{-5}$ حل شده است. در شکل‌های ۵ الی ۷، نمودار فشار - طول برای ۰٫۶، ۱۵ و ۴۰ گره به استفاده از دو روش DQ و تفاضل محدود مشاهده می‌شود. با افزایش تعداد گره‌ها، دقت روش DQ در رسیدن به جواب دقیق بیشتر است. ولی تغییر چندانی در جواب‌ها مشاهده نمی‌شود که نشان‌دهنده‌ی مستقل بودن جواب از شبکه است.

به منظور بررسی تأثیر اندازه‌ی گام زمانی در دقت جواب، مسئله‌ی دوم با ۴ گام زمانی مختلف در زمان $s^{-4} 10^{-4}$ با روش ضمنی حل شد و نتایج آن در شکل ۸ مشاهده می‌شود. مطابق شکل ۸، با افزایش گام زمانی از $s^{-8} 10^{-8}$ به $s^{-6} 10^{-6}$ ، تأثیری در دقت جواب مشاهده نمی‌شود. اما با بزرگ‌تر کردن گام زمانی به $s^{-5} 10^{-5}$ ، تا حدودی دقت جواب کم می‌شود و انحراف از جواب در نقاط مرزی مشهود است. با بزرگ‌تر کردن گام زمانی به $s^{-8} 10^{-8}$ ، یعنی با محاسبه‌ی جواب در یک گام، دقت جواب به شدت کاهش می‌یابد.

۳.۴. مسئله‌ی سوم

در بخش کنونی، یک چهارم از مسئله‌ی پنج چاهی موسوم به Five Spot در حالت جریان تک فاز بررسی شده است. [۲۳] در مسئله‌ی سوم، یک مخزن دوبعدی با فرض وجود سنگ و سیال تراکم‌پذیر و در حالت مرزهای فشار بسته، شبیه‌سازی شده است. با توجه به پیچیدگی مسئله، حل تحلیلی و دقیق برای آن وجود ندارد و مسئله‌ی سوم با روش تفاضل محدود برای شبکه‌ی بسیار ریز و گام زمانی بسیار کوچک حل شده و نتایج آن به‌عنوان حل دقیق، مبنای مقایسه قرار گرفته است. در لحظه‌ی اول، فشار کل مخزن یکنواخت و برابر با ۸۱٫۶۳ بار بوده است. برای حل



شکل ۴. نتایج روش DQ در نقطه‌ی $r = r_w$ و تعداد گره ۲۱ برای روش‌های حل مختلف در مسئله‌ی اول.

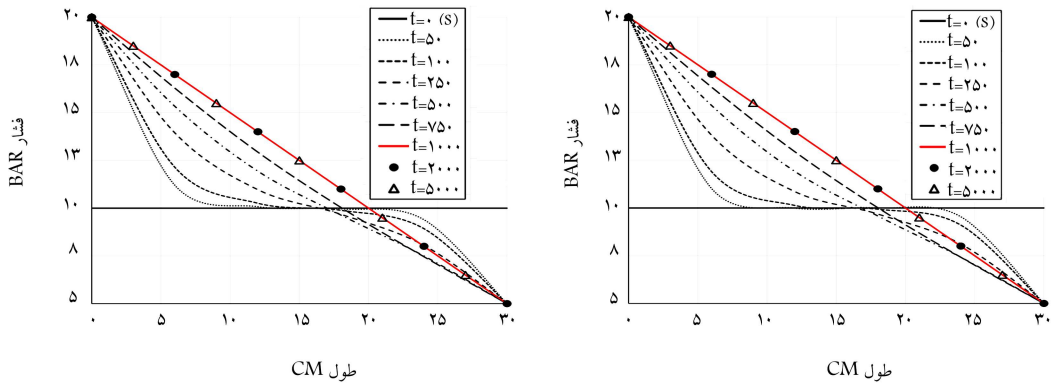
جدول ۲. مقایسه‌ی فشار حل تحلیلی و حل عددی DQ در نقطه‌ی $r = r_w$ مسئله‌ی اول.

| اختلاف فشار | فشار (psia) | | زمان | |
|-------------|-------------|-----------|--------|------|
| | روش DQ | حل تحلیلی | ثابته | زمان |
| -۰٫۳۱ | ۳۵۹۵٫۶۱ | ۳۵۹۵٫۹۲ | ۸۶۴۰ | ۰٫۱ |
| -۰٫۱۳ | ۳۵۹۵٫۲۵ | ۳۵۹۵٫۳۸ | ۱۷۲۸۰ | ۰٫۲ |
| ۰٫۰۷ | ۳۵۹۵٫۱۳ | ۳۵۹۵٫۰۶ | ۲۵۹۲۰ | ۰٫۳ |
| ۰٫۱۳ | ۳۵۹۴٫۹۷ | ۳۵۹۴٫۸۴ | ۳۴۵۶۰ | ۰٫۴ |
| ۰٫۰۸ | ۳۵۹۴٫۷۴ | ۳۵۹۴٫۶۶ | ۴۳۲۰۰ | ۰٫۵ |
| ۰ | ۳۵۹۴٫۵۲ | ۳۵۹۴٫۵۲ | ۵۱۸۴۰ | ۰٫۶ |
| -۰٫۰۵ | ۳۵۹۴٫۳۵ | ۳۵۹۴٫۴۰ | ۶۰۴۸۰ | ۰٫۷ |
| -۰٫۰۷ | ۳۵۹۴٫۲۲ | ۳۵۹۴٫۲۹ | ۶۹۱۲۰ | ۰٫۸ |
| -۰٫۰۷ | ۳۵۹۴٫۱۳ | ۳۵۹۴٫۲۰ | ۷۷۷۶۰ | ۰٫۹ |
| -۰٫۰۶ | ۳۵۹۴٫۰۶ | ۳۵۹۴٫۱۲ | ۸۶۴۰۰ | ۱٫۰ |
| -۰٫۰۳ | ۳۵۹۳٫۷۷ | ۳۵۹۳٫۸۰ | ۱۲۹۶۰۰ | ۱٫۵ |
| ۰ | ۳۵۹۳٫۵۸ | ۳۵۹۳٫۵۸ | ۱۷۲۸۰۰ | ۲٫۰ |
| ۰٫۰۴ | ۳۵۹۳٫۴۴ | ۳۵۹۳٫۴۰ | ۲۱۶۰۰۰ | ۲٫۵ |
| ۰٫۰۴ | ۳۵۹۳٫۳۰ | ۳۵۹۳٫۲۶ | ۲۵۹۲۰۰ | ۳٫۰ |
| ۰٫۰۵ | ۳۵۹۳٫۰۸ | ۳۵۹۳٫۰۳ | ۳۴۵۶۰۰ | ۴ |

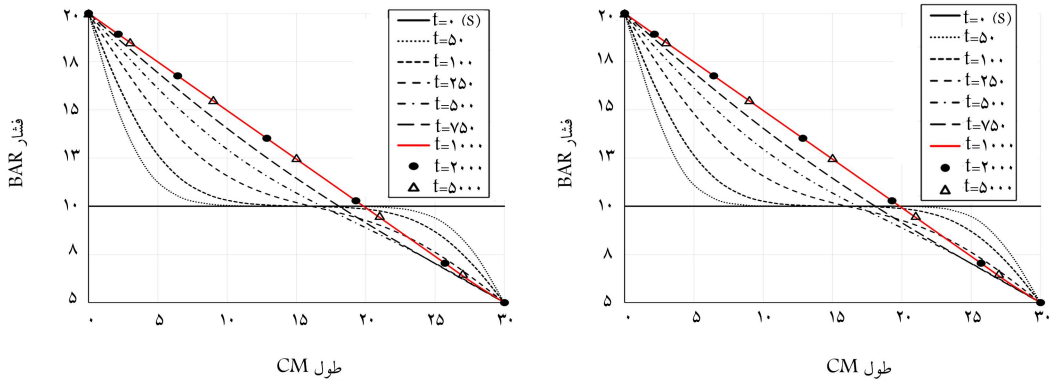
مقایسه و اختلاف فشار روش عددی و تحلیلی در ستون آخر مشخص شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده در مسئله‌ی اول مشاهده می‌شود که روش DQ، دقت بالایی دارد و جواب‌ها در نقاط مختلف مخزن و در زمان‌های مختلف، خطای بسیار کم و قابل قبولی دارند.

۲.۴. مسئله‌ی دوم

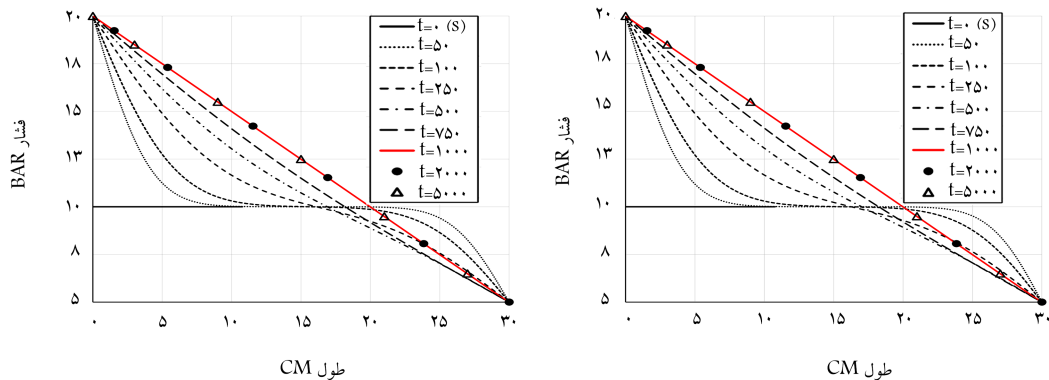
مسئله‌ی دوم از نوع جریان غیردائمی یک بعدی در مختصات کارتزین است. محیط



شکل ۵. نمودار فشار - مکان مساله دوم با استفاده از ۶ گره روش DQ (سمت راست) و روش تفاضل محدود (سمت چپ).



شکل ۶. نمودار فشار - مکان مسئله‌ی دوم با استفاده از ۱۵ گره در: روش (DQ سمت راست) و روش تفاضل محدود (سمت چپ).



شکل ۷. نمودار فشار - مکان مسئله‌ی دوم با استفاده از ۴۰ گره در: روش (DQ سمت راست) و روش تفاضل محدود (سمت چپ).

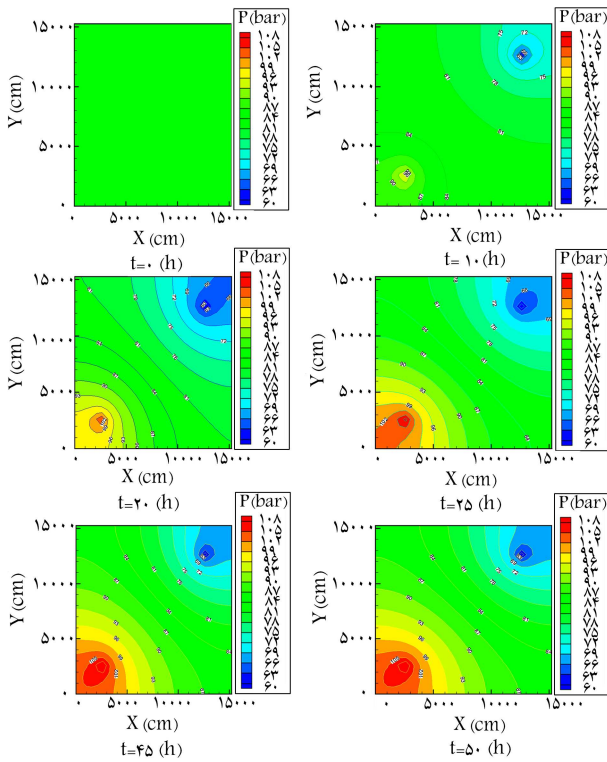
شبکه‌ی 40×40 ارائه شده است. پاسخ فشار چاه‌های تولید و تزریق و نیز پاسخ مشتق آن در مرز با فشار ثابت به روش دیفرانسیل کوادراچر و تفاضل محدود در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود، که با توجه به دقت در کانتورهای رسم شده، توانایی بالای روش DQ در رسیدن به پاسخ‌های تقریباً دقیقاً با استفاده از تعداد گره‌های اندک مشاهده می‌شود.

در شکل ۱۲، کانتور فشار با استفاده از شبکه‌ی 185×185 روش تفاضل محدود که به عنوان Fine Grid در نظر گرفته شده است، مشاهده می‌شود. با مقایسه‌ی کانتورهای به دست آمده از روش DQ با کانتور به دست آمده از Fine Grid مشاهده می‌شود که روش DQ با در نظر گرفتن تعداد گره‌های اندک به

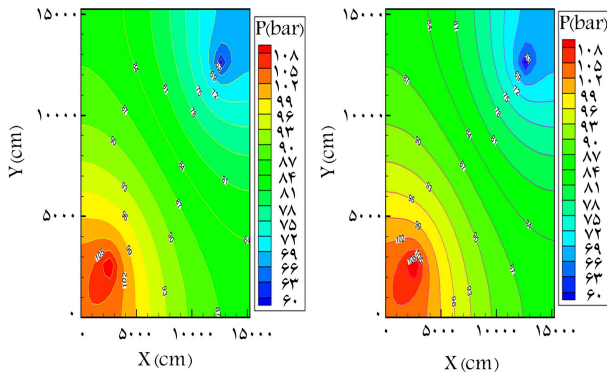
مسئله‌ی سوم، به روش دیفرانسیل کوادراچر از رابطه‌ی ۱۶ استفاده و شرط مرزی مسئله مطابق رابطه‌ی ۱۵ در آن لحاظ شده است. در مسئله‌ی سوم، از مدل پسمن (رابطه‌ی ۷) جهت شبیه‌سازی چاه تزریق و تولید استفاده و پارامترهای مربوط به آن در جدول ۵ ارائه شده است.

در مثال ذکر شده، یک چاه تزریق با دبی ثابت و یک چاه تولید با فشار ته‌چاهی ثابت وجود دارد، که مشخصات و مختصات کامل آن‌ها در جدول ۶ ارائه شده است. شرایط مرزی به کار رفته در مسئله‌ی سوم، به صورت مرزهای بسته بوده و روابط آن در جدول ۷ ارائه شده است.

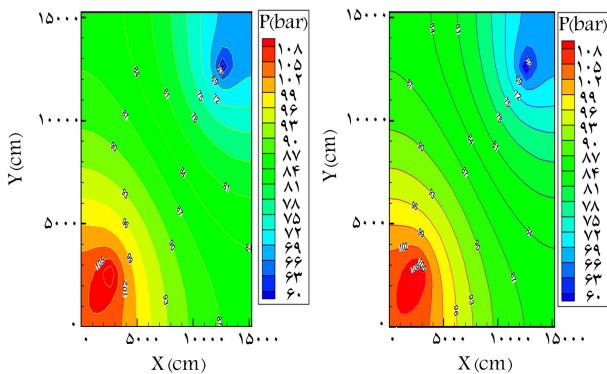
در شکل ۹، تغییرات کانتور فشار در زمان‌های مختلف با استفاده از DQ برای



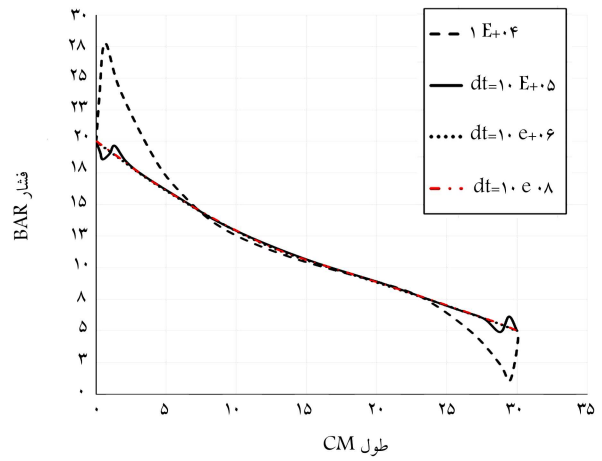
شکل ۹. تغییرات کانتور فشار مسئله‌ی سوم در زمان‌های مختلف با روش DQ (شبکه‌ی ۴۰ × ۴۰).



شکل ۱۰. کانتور فشار مسئله‌ی سوم با استفاده از شبکه‌ی ۲۰ × ۲۰ در: روش DQ (سمت راست) و روش تفاضل محدود (سمت چپ).



شکل ۱۱. کانتور فشار مسئله‌ی سوم با استفاده از شبکه‌ی ۴۰ × ۴۰ در: روش DQ (سمت راست) و روش تفاضل محدود (سمت چپ).



شکل ۸. تأثیر اندازه‌ی گام زمانی در دقت جواب.

جدول ۵. مشخصات مخزن و شرایط چاه مسئله‌ی سوم.

| مقدار | واحد | متغیر | |
|----------|----------|-----------|-------------------|
| ۰ | fraction | s | ضریب سطح |
| ۱ | cp | μ | گرانروی |
| ۵۰ | md | k | نفوذپذیری |
| ۱۰۰ | ft | L | ضخامت |
| ۰٫۲ | fraction | φ | تخلخل |
| ۸۱٫۶۳ | bar | p_0 | فشار اولیه |
| ۵۴ | bar | p_b | فشار ته چاه |
| ۰٫۵ | ft | r_w | شعاع چاه |
| ۵۰۰ | ft | x_{max} | طول در راستای x |
| ۵۰۰ | ft | y_{max} | طول در راستای y |
| ۰٫۰۰۰۰۰۲ | ۱/bar | c_t | تراکم‌پذیری کلی |

جدول ۶. مشخصات چاه‌های تولید و تزریق در مسئله‌ی سوم.

| مشخصات | مختصات | | نوع چاه |
|------------|----------|----------|---------------------|
| | $Y (ft)$ | $X (ft)$ | |
| ۵۰۰° STB/D | ۸۲٫۷ | ۸۲٫۷ | چاه تزریق دبی ثابت |
| ۲۰۰° bar | ۴۲۰٫۳ | ۴۲۰٫۳ | چاه تولید فشار ثابت |

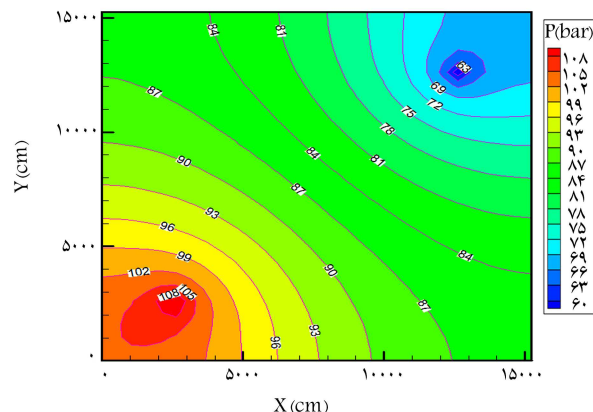
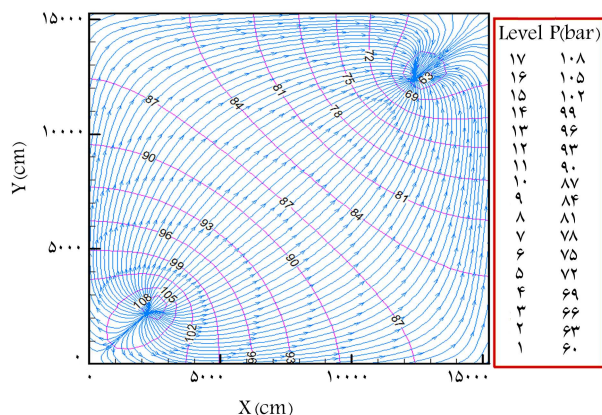
جدول ۷. شرایط مرزی به کار رفته در مسئله‌ی سوم.

| شرط مرزی | مرز |
|-------------------------------------|----------------|
| $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ | $(x = 0, y)$ |
| $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ | $(x = 500, y)$ |
| $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ | $(x, y = 0)$ |
| $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ | $(x, y = 500)$ |

جدول ۸. نتایج به دست آمده از DQM و FDM در مسئله‌ی سوم.

| درصد اختلاف فشار | | قدرمطلق اختلاف فشار | | فشار (bar) | | | مختصات | |
|------------------|--------|---------------------|--------|-----------------|---------------|---------------|--------|-------|
| FDM | DQM | FDM | DQM | FDM (FINE GRID) | FDM (۳۰ × ۳۰) | DQM (۱۵ × ۱۵) | Y | X |
| ۰/۱۱۳۱ | ۰/۳۵۸۷ | ۰/۱۱۸۶ | ۰/۳۷۶۲ | ۱۰۴/۸۹۰۲ | ۱۰۴/۷۷۱۶ | ۱۰۴/۵۱۴ | ۰ | ۰ |
| ۰/۶۱۱۰ | ۰/۲۶۰۶ | ۰/۶۴۵۶ | ۰/۲۷۵۳ | ۱۰۵/۶۶۴۷ | ۱۰۶/۳۱۰۳ | ۱۰۵/۳۸۹۴ | ۱۵۲۴ | ۱۵۲۴ |
| ۰/۸۴۴۴ | ۰/۵۰۸۷ | ۰/۸۸۵۰ | ۰/۵۳۳۲ | ۱۰۴/۸۱۲۱ | ۱۰۵/۶۹۷ | ۱۰۴/۲۷۸۹ | ۳۰۴۸ | ۳۰۴۸ |
| ۲/۳۱۱۵ | ۰/۰۰۲۹ | ۲/۲۱۴۶ | ۰/۰۰۲۸ | ۹۵/۸۰۶۵۷ | ۹۸/۰۲۱۱۴ | ۹۵/۸۰۳۸ | ۴۵۷۲ | ۴۵۷۲ |
| ۳/۱۳۳۳ | ۰/۰۸۴۷ | ۲/۸۳۳۴ | ۰/۰۷۶۶ | ۹۰/۴۲۹۱۹ | ۹۳/۲۶۲۶۲ | ۹۰/۵۰۵۷۵ | ۶۰۹۶ | ۶۰۹۶ |
| ۳/۷۹۰۴ | ۰/۱۱۸۵ | ۳/۲۵۵۴ | ۰/۱۰۱۸ | ۸۵/۸۸۵۸۷ | ۸۹/۱۴۱۲۹ | ۸۵/۹۸۷۶۷ | ۷۶۲۰ | ۷۶۲۰ |
| ۴/۵۳۱۶ | ۰/۰۵۴۱ | ۳/۶۸۵۷ | ۰/۰۴۴۰ | ۸۱/۳۳۳۱۹ | ۸۵/۰۱۸۹۲ | ۸۱/۳۷۷۲۲ | ۹۱۴۴ | ۹۱۴۴ |
| ۵/۷۳۵۷ | ۰/۴۹۴۱ | ۴/۳۵۳۵ | ۰/۳۷۵۰ | ۷۵/۹۰۰۲۱ | ۸۰/۲۵۵۶۴ | ۷۵/۵۲۷۰۹ | ۱۰۶۶۸ | ۱۰۶۶۸ |
| ۹/۳۴۱۷ | ۲/۷۱۲۷ | ۶/۱۹۸۳ | ۱/۷۹۹۹ | ۶۶/۳۵۰۷۳ | ۷۲/۵۴۹۰۳ | ۶۴/۵۵۰۸۳ | ۱۲۱۹۲ | ۱۲۱۹۲ |
| ۷/۶۵۹۹ | ۵/۹۸۶۰ | ۵/۱۲۲۳ | ۴/۰۰۳۰ | ۶۶/۸۷۱۸۴ | ۷۱/۹۹۴۱۴ | ۷۰/۸۷۴۸ | ۱۳۷۱۶ | ۱۳۷۱۶ |
| ۸/۹۶۷۹ | ۵/۴۷۴۲ | ۶/۰۵۶۴ | ۳/۶۹۷۰ | ۶۷/۵۳۴۴۷ | ۷۳/۵۹۰۹۱ | ۷۱/۲۳۱۴۵ | ۱۵۲۴۰ | ۱۵۲۴۰ |
| ۴/۲۷۶۴ | ۱/۴۵۹۶ | ۳/۲۱۵۴ | ۱/۰۲۵۹ | | | | | |
| ۹/۳۴۱۷ | ۵/۹۸۶۰ | ۶/۱۹۸۳ | ۴/۰۰۳۰ | | | | | |

میانگین
بیشینه



شکل ۱۳. خطوط جریان مسئله‌ی سوم با استفاده از روش DQ شبکه‌ی ۴۰ × ۴۰.

شکل ۱۲. کانتور فشار مسئله‌ی سوم با استفاده از FDM (fine grid).

همراه مختصات نقاط ارائه شده است. قدرمطلق اختلاف فشار در هر دو روش مذکور نسبت به فشار دقیق نقاط (Fine Grid) و درصد اختلاف فشار نقاط در ستون‌های مجزا ارائه شده است. در دو سطر پایانی، جدول‌های میانگین و بیشینه‌ی اختلاف فشار محاسبه شده است. در جدول ۹، میانگین و بیشینه‌ی خطای فشار روش DQ برای شبکه‌های مختلف ارائه شده است. در تمام حالت‌ها، میانگین و بیشینه‌ی اختلاف فشار نقاط در روش DQ در محدوده‌ی قابل قبول است. در شکل ۱۴، نتایج حاصل از روش‌های DQ، FDM و حالت Fine Grid با یکدیگر مقایسه شده است. به طور واضح مشخص است که در بیشتر نقاط، جواب‌های روش DQ بسیار نزدیک و منطبق بر حل دقیق است.

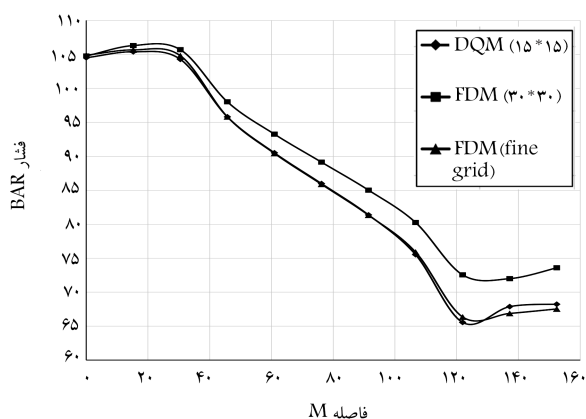
جواب‌های تقریباً دقیق نزدیک می‌شود که نمایانگر کارایی روش دیفرانسیل کوادراچر در هم‌گرایی و رسیدن به دقت موردنظر است. در شکل ۱۳، نمودار خطوط جریان با استفاده از روش DQ مشاهده می‌شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت، مسیر حرکت سیال در مخزن از سمت چاه تزریق به طرف چاه تولید بوده و تمرکز خطوط جریان در اطراف چاه‌های تولید و تزریق بیشتر شده است، که این امر به دقتی و دقت بالا در نمودار به دست آمده نمایان است. همچنین صحت اعمال شرایط مرزی شار برابر با صفر در مرزهای مخزن، با توجه به مماس بودن خطوط جریان بر مرزها اثبات می‌شود.

در جدول ۸، برای شبکه‌های ۱۵ و ۴۰ گره، فشار در ۱۱ نقطه‌ی مختلف روی محور قطری مخزن با استفاده از روش DQ و روش تفاضل محدود به

جدول ۹. میانگین و بیشینهی اختلاف فشار DQM و FDM در مسئلهی سوم.

| درصد میانگین اختلاف فشار نسبت به FINE GRID | بیشینهی اختلاف فشار | | میانگین اختلاف فشار | | GRID | |
|--|---------------------|--------|---------------------|--------|--------|----|
| | FDM | DQM | FDM | DQM | | |
| | FDM | DQM | FDM | DQM | | |
| ۵/۴۵۶۸ | ۲/۵۰۰۲ | ۸/۵۵۴۲ | ۷/۲۳۵۶ | ۱۰/۳۳۷ | ۱/۷۵۸۲ | ۷ |
| ۴/۹۹۴۹ | ۱/۴۵۹۶ | ۷/۴۴۲۸ | ۴/۰۰۳۰ | ۳/۲۱۵۴ | ۱/۰۲۵۹ | ۱۵ |
| ۴/۲۷۶۴ | ۱/۰۰۹ | ۶/۱۹۸۳ | ۵/۱۴۸۹ | ۳/۲۱۵۴ | ۰/۷۰۹۵ | ۳۰ |
| ۱/۳۸۳۱ | ۰/۴۶۷۸ | ۲/۷۸۵۶ | ۱/۲۲۷۶ | ۳/۸۷۳۹ | ۰/۳۲۸۹ | ۴۰ |

محیط متخلخل با سنگ و سیال تراکم‌پذیر که حل تحلیلی آن قبلاً ارائه شده است، با روش DQ شبیه‌سازی و نتایج به‌دست آمده از روش DQ با نتایج تحلیلی و دقیق مقایسه و صحت‌سنجی شده است. همچنین تأثیر اندازه‌ی شبکه و روش حل در فرآیند شبیه‌سازی بررسی شد. با بررسی و مقایسه‌ی نتایج مسئله‌ی مذکور مشاهده شد که حتی با انتخاب تعداد اندک گره در روش دیفرانسیل کوادراچر، جواب‌های تقریباً دقیق و بسیار نزدیک به نتایج دقیق به‌دست می‌آید. در واقع می‌توان بیان کرد که روش DQ حجم محاسبات را برای رسیدن به جواب‌های دقیق تا حد زیادی کاهش می‌دهد. در مسئله‌ی دوم شبیه‌سازی، یک مغزه‌ی یک بعدی در مختصات کارتزین و تأثیر گام زمانی در حل مسئله بررسی شد. در مثال مذکور نیز مشاهده شد که روش دیفرانسیل کوادراچر با حجم محاسباتی بسیار کم به جواب موردانتظار می‌رسد. در مسئله‌ی سوم، که محیط آن یک چهارم از مسئله‌ی پنج چاهی است، یک چاه تولید و تزریق در محیط مسئله وجود دارد، باتوجه به پیچیدگی مسئله و نبودن حل تحلیلی، مسئله در ابتدا با روش تفاضل محدود برای شبکه‌ی بسیار ریز و گام زمانی کوچک به‌عنوان یک روش استاندارد حل و به‌عنوان جواب دقیق در نظر گرفته شده است. در ادامه، با حل مسئله به روش DQ، کانتورهای فشار و خطوط جریان برای مسئله در حالت‌های مختلف ارائه شد. در تمامی حالات مشاهده می‌شود که روش DQ با انتخاب تعداد اندک نقطه در جهات افقی و عمودی، نتایج قابل قبولی ارائه می‌دهد و به‌عنوان یک روش با دقت بالا و حجم محاسباتی اندک در این زمینه می‌تواند استفاده و در مطالعات آتی به آن توجه شود.



شکل ۱۴. نمودار نتایج حاصل از روش‌های FDM، DQ و Fine Grid.

۵. نتیجه‌گیری

در دهه‌های اخیر، جریان سیالات در محیط متخلخل به‌طور گسترده‌ی بحث و بررسی شده است. در گذشته، حل‌های تحلیلی با انجام ساده‌سازی‌هایی در شرایط مرزی و خصوصیات سنگ ارائه شده است. در پژوهش حاضر، روش عددی دیفرانسیل کوادراچر برای حل معادله‌ی جریان سیال تک فاز در محیط متخلخل استفاده شده است. ابتدا یک مسئله به‌صورت جریان یک بعدی در مختصات استوانه‌ی برای

پانویس‌ها

1. boundary element method (BEM)
2. green element method (GEM)
3. implicit pressure explicit saturation (IMPES)
4. differential quadrature method (DQM)
5. linear vector space analysis
6. polynomial-based differential quadrature (PDQ)
7. finite difference method (FDM)

منابع (References)

1. Peaceman, D.W. "Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation (includes associated paper 6988)", *Society of Petroleum Engineers Journal*, **18**(3), pp. 183-194 (1978).
2. Numbere, D.T. and Tiab, D. "An improved streamline-generating technique that uses the boundary (integral) element method", *SPE Reservoir Engineering*, **3**(3), pp. 1061-1068 (1988).
3. Archer, R.A. and Horne, R.N. "Green element method

- and singularity programming for numerical well test analysis”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **26**(6), pp. 537-546 (2002).
4. Archer, R.A. and Horne, R.N. “The Green element method for numerical well test analysis”, *SPE Annual Technical Conference and Exhibition. Society of Petroleum Engineers* (2000).
 5. Liu, F.-P., Wang, X.-S., Wang, J. and et al. “A numerical simulation of channel reservoirs containing vertical and horizontal wells”, *Journal of Hydrodynamics, Ser. B*, **18**(5), pp. 527-536 (2006).
 6. Xu, Q., Liu, X., Yang, Zh. and et al. “The model and algorithm of a new numerical simulation software for low permeability reservoirs”, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **78**(2), pp. 239-242 (2011).
 7. Mosharaf Dehkordi, M., Taghizadeh Manzari, M., Ghafouri, H. and Fatehi, R. “A general finite volume based numerical algorithm for hydrocarbon reservoir simulation using black oil model”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **24**(8), pp. 1831-1863 (2014).
 8. Wang, Y., Hajibeygi, H. and Tchelepi, H.A. “Algebraic multiscale solver for flow in heterogeneous porous media”, *Journal of Computational Physics*, **259**, pp. 284-303 (2014).
 9. Xu, J., Jiang, R. and Teng, W. “Nonlinear flow characteristics and horizontal well pressure transient analysis for low-permeability offshore reservoirs”, *Mathematical Problems in Engineering*, **2015**, 13 p. (2015).
 10. Ahmadpour, M., Siavashi, M. and Doranehgard, M.H. “Numerical simulation of two-phase flow in fractured porous media using streamline simulation and IMPES methods and comparing results with a commercial software”, *Journal of Central South University*, **23**(10), pp. 2630-2637 (2016).
 11. Liu, W., Yao, J., Chen, Zh. and et al. “Effect of quadratic pressure gradient term on a one-dimensional moving boundary problem based on modified Darcy’s law”, *Acta Mechanica Sinica*, **32**(1), pp. 38-53 (2016).
 12. Singh, A., Manjunath Reddy, N. and Tiwari, P. “Petroleum Reservoir Simulation of Two-Phase Flow”, *Fluid Mechanics and Fluid Power-Contemporary Research*, Springer India, pp. 947-956 (2017).
 13. Bellman, R., Kashef, B.G. and Casti, J. “Differential quadrature: A technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, **10**(1) pp. 40-52 (1972).
 14. Shu, C. and Du, H. “Free vibration analysis of laminated composite cylindrical shells by DQM”, *Composites Part B: Engineering*, **28**(3), pp. 267-274 (1997).
 15. Hashemi, M.R., Abedini, M.J. and Malekzadeh, P. “Numerical modeling of long waves in shallow water using Incremental differential quadrature method”, *Ocean Engineering*, **33**(13), pp. 1749-1764 (2006).
 16. Robati, A. and Barani, G.A. “Modeling of water surface profile in subterranean channel by differential quadrature method (DQM)”, *Applied Mathematical Modelling*, **33**(3), pp. 1295-1305 (2009).
 17. Kaya, B. and Arisoy, Y. “Differential quadrature solution for one-dimensional aquifer flow”, *Mathematical and Computational Applications*, **16**(2), pp. 524-534 (2011).
 18. Meraji, S.H., Ghaheri, A. and Malekzadeh, P. “An efficient algorithm based on the differential quadrature method for solvi navier-stokes equations”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **71**(4), pp. 422-445 (2013).
 19. Ghasemi, S.E., Hatami, M., Salarian, A. and et al. “Thermal and fluid analysis on effects of nanofluid outside of a stretching cylinder with magnetic field using Differential Quadrature Method”, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **54**(2), pp. 517-528 (2016).
 20. Aziz, K. and Settari, A. “Petroleum reservoir simulation”, Elsevier Applied Science (1979).
 21. Peaceman, D.W. “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation”, *SPE Journal*, **18**(3), pp. 183-194 (1978).
 22. Chen, Z., Huan, G. and Ma, Y. “Computational methods for multiphase flows in porous media”, *Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)*, pp.569 (2006).
 23. Healy, R.W. and Russell, T.F. “Solution of the advection-dispersion equation in two dimensions by a finite-volume Eulerian-Lagrangian localized adjoint method”, *Advances in Water Resources*, **21**(1), pp. 11-26 (1998).