

تحلیل تطبیقی اجزاء محدود به وسیله روش های تظریف h و توابع غنی ساز پوششی

حامد ارزانی* (دانشیار)

مهرشاد قربانزاده (دانشجوی کارشناسی ارشد)

الهام خوشیاور راد (دانشجوی دکتری)

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

در نوشتار حاضر، روش های نظریف h و غنی سازی با استفاده از توابع درون یاب پوشش برای اصلاح شبکه بندی و بهبود دقت جواب های مسائل کشسانی ارائه و به کمک برآوردکننده خطا، ابتدا نواحی با خطای بیش از حد مجاز شناسایی شده اند. سپس اصلاح شبکه بندی برای المان های موجود در نواحی مذکور، به وسیله روش نظریف h اعمال شده و بدین وسیله خطای حاکم بر کل حوزه مسئله کاهش یافته و در محدوده مجاز تعیین شده قرار گرفته است. در گام بعدی، به منظور بالا بردن دقت پاسخ ها در یک سطح عالی، نتایج به دست آمده از شبکه بندی نظریف شده بار دیگر بررسی و این بار گره های با خطای بالاتر از مقدار خطای مجاز تعیین شدند. در این مرحله، روش ارائه شده با استفاده از توابع درون یاب پوشش، نتایج موجود را اصلاح و پاسخ هایی با دقت مطلوب به دست داد. مقایسه ای جواب های حاصل از روش های پیشنهادی با روش های دیگر پژوهشگران و نیز جواب دقیق برای مثال هایی در حوزه کشسانی خطی، حکایت از کارایی و دقت قابل قبول روش های پیشنهادی دارد.

واژگان کلیدی: نظریف شبکه، اجزاء محدود غنی شده، تولید مش، توابع درون یاب پوشش، تحلیل تطبیقی.

۱. مقدمه

شروع پیدایش، فقط برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل عادی استفاده و با عنوان الگوریتم های پیش بینی کننده - اصلاح کننده شناخته می شوند. رویکرد برآوردکننده های پس روندهی خطا در روش اجزاء محدود برای معادلات دیفرانسیل بیضوی با شرایط مرزی، در سال ۱۹۸۶ آغاز شد.^[۱]

به طور مشابه در سال ۱۹۸۷، براساس اصول باز یافت تنش، روش ساده ای برای تخمین خطای کلی و محلی در حل اجزاء محدود و شکلی ساده از آنالیز تطبیقی به روش افزایش تعداد المان ارائه شد.^[۲] تمامی روش های ارائه شده به دنبال اصلاح موضعی حوزه مورد بررسی هستند. به عبارت دیگر، به جای تمام حوزه مسئله، فقط در زیرحوزه هایی که شدت ناپیوستگی در پاسخ آن ها زیاد است، از المان های کوچک تر استفاده می شود. از معایب روش های مذکور، می توان به بسیار ریز شدن شبکه بندی در نقاط با گرادینان بالای تنش اشاره کرد که در موارد خاص تأثیر اولیه ی روش های اشاره شده را در بهبود نتایج بسیار کاهش خواهد داد و یا در مسائلی که برای خطای مجاز، حد پایینی در نظر گرفته شده است، علی رغم اینکه تمام حوزه، نظریف نمی شود، ولی همان بخش هایی که نظریف می شوند، نیز به تعداد بالای المان جهت رسیدن به خطای مجاز نیاز خواهند داشت. در سال ۱۹۸۵، در راستای توسعه ای روش اجزاء محدود، روش عددی متیفلد که ترکیبی از روش اجزاء محدود استاندارد و روش عددی DDA (تحلیل تغییر شکل های ناپیوسته) است، ارائه شد.^[۳]

امروزه روش های عددی به عنوان راهکاری مؤثر برای تحلیل مسائل علمی شناخته می شوند. از جمله معروف ترین روش های عددی می توان به روش های: تفاضل های محدود، احجام محدود، نقاط محدود و المان های محدود اشاره کرد. فرایند تولید شبکه ای اجزاء محدود با تعداد و نوع المان مناسب و نیز مرتبه ای استفاده شده برای هر المان از چالش های پیش رو در روش مذکور است. انتخاب گزینه ای مناسب با هدف کاهش هزینه های محاسباتی به منظور گسسته سازی و افزایش دقت حل معادلات حاکم بر مسئله از دیگر مسائل مورد اهمیت در روش مذکور است. به این منظور استفاده از عملیات نظریف در روش المان محدود استاندارد مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است.^[۱] در روش نظریف h ، ابتدا به وسیله تخمین زندهی خطا، حوزه ای مسئله مورد نظر جست و جو و نواحی با ناپیوستگی زیاد در نتایج شناسایی و سپس اصلاح مرتبط با میزان خطا به کار گرفته می شود. در این زمینه رویکردهایی مانند برآورد خطا براساس نرم خطای انرژی و نرم خطای L_2 را می توان نام برد. روش های ذکر شده براساس نتایج به دست آمده از حل مسئله، توانایی تخمین خطای حاکم بر کل حوزه و تک تک المان ها را دارند. برخی از برآوردکننده های پس روندهی خطا در

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۲۳/۲/۱۳۹۶، اصلاحیه ۴/۳/۱۳۹۶، پذیرش ۲۱/۴/۱۳۹۶.

DOI:10.24200/J30.2018.2140.2106

تقریبی تنش برای یک المان طبق روش ارائه شده ی زینکوویچ و همکاران (۱۹۸۷)^[۲]، به صورت رابطه ی ۱ بیان می شود:

$$e_i = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

که در آن، σ تنش اصلاح شده، σ_h تنش به دست آمده از حل اجزاء محدود، D ماتریس کشسانی و Ω دامنه ی المان است. در نهایت، مجموع نرم خطای انرژی المان ها، نرم خطای انرژی کل دامنه را تشکیل می دهد (رابطه ی ۲):

$$e = \sum_{i=1}^{N_n} e_i \quad (2)$$

که در آن، e مقدار خطا برای کل حوزه و N_n تعداد کل المان هاست. به منظور ارائه ی معیاری برای مقایسه بین شبکه بندی های گوناگون از حالت نرمال شده ی خطا نسبت به انرژی کرنشی استفاده می شود. درصد خطای نسبی نرم انرژی با استفاده از حل تقریبی به صورت رابطه ی ۳ بیان می شود:

$$E = 100 \left(\frac{e}{U + e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

که در آن، E درصد خطای نرم انرژی کل حوزه و U انرژی کرنشی کل حوزه است که به صورت رابطه های ۴ و ۵ محاسبه می شود:

$$U_i = \left(\int_{\Omega} \epsilon^T D \epsilon d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} \sigma^T D^{-1} \sigma d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$U = \sum_{i=1}^{N_n} U_i \quad (5)$$

که در آن، U_i انرژی کرنشی هر المان و ϵ بردار کرنش گره یی برای هر المان هستند.

۳. حل تطبیقی در اجزاء محدود

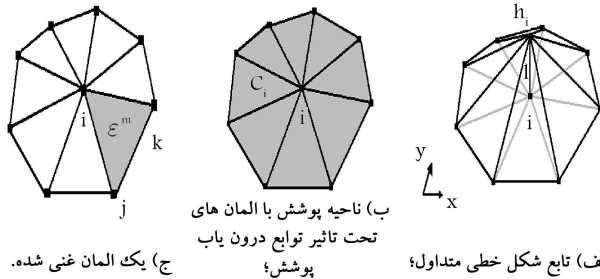
جواب های اولیه ی به دست آمده با روش اجزاء محدود استاندارد، معمولاً تحت تأثیر هندسه ی مدل است و گرادیان های شدید در آن ها مشاهده می شود. ساده ترین راهکار برای حل مشکل گرادیان بالا، ریز کردن شبکه بندی و یا بالا بردن درجه ی تابع تقریب در تمام حوزه است که این امر افزایش هزینه ی محاسباتی را پیش رو خواهد داشت. بنابراین به صرفه است قسمت هایی از حوزه ی مسئله که گرادیان بالا در پاسخ های خود دارند، شناسایی و بر روی آن ها تعریف شبکه انجام شود و راهکار دیگر، استفاده از المان های قدرتمند است. از این رو استفاده از روش های تطبیقی مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. تعریف تطبیقی راهکاری به منظور جلوگیری از افزایش بیش از اندازه ی درجه های آزادی، تعداد گره ها و تعداد المان های با مرتبه ی بالا است. به طور کلی روش های مختلفی برای حل تطبیقی در روش اجزاء محدود وجود دارد. در یک طبقه بندی متداول، تعریف شبکه ی اجزاء محدود به صورت دو گروه کلی است: گروه اول، با افزایش تعداد درجه های آزادی به وسیله ی اضافه کردن گره های جدید (روش اصلاح h) و گروه دوم، با بالا بردن مرتبه ی المان های موجود (روش اصلاح P)، اقدام به اصلاح شبکه می کند. در نوشتار حاضر از هر دو روش مذکور استفاده شده است. در ادامه، تشریح هر یک از روش به صورت خلاصه ارائه شده است.

در برخی پژوهش ها^[۹]، فرمولاسیون روش منیفلد برای مسائل دوبعدی و سه بعدی و همچنین مسائل با تغییر شکل های ناپیوسته ارائه شده است. مدل سازی مسائل با ترک و نیز گسترش ترک در حوزه، نیز توسط پژوهشگران دیگری توسعه داده شده است.^[۸] روش عددی منیفلد، یک روش مؤثر عددی برای حل مسائل در حوزه ی مکانیک جامدات است و در آن، شرایط مرزی و انتگرال گیری عددی به راحتی اعمال می شود. روش منیفلد برخلاف روش اجزاء محدود استاندارد با مشکل کمبود مرتبه ی ماتریس سختی کل مواجه است. بعدها روش های مختلفی برای غلبه بر مشکل مذکور ارائه شده است.^[۹] یکی از جدیدترین روش ها با الهام از روش عددی منیفلد که در سال های اخیر معرفی شده است،^[۱۰-۱۲] روش غنی سازی به وسیله ی توابع درون یاب پوشش است. در پژوهش های اخیر، به منظور بالا بردن نرخ همگرایی نتایج در روش پیشنهادی ایشان از شبکه بندی حوزه ی مسئله با المان های مرتبه ی پایین استفاده و نتایج آن برای المان های مثلثی ۳ گره یی و المان های هرمی ۴ گره یی در تحلیل های دوبعدی و سه بعدی ارائه شده است. مبنای روش مذکور، استفاده از اجزاء محدود غنی شده به وسیله ی توابع پوشش درون یاب بر روی هر المان بود که نتیجه ی آن افزایش نرخ همگرایی در پاسخ هاست. روش اخیر، قابلیت استفاده در المان های اعوجاجی را نیز دارد. تئوری کامل حاکم بر این روش در مراجع اشاره شده قابل دسترسی است. در اولین مرحله ی معرفی روش ارائه شده در پژوهش های اخیر، علی رغم دست یابی به نتایج با دقت کافی، استفاده از توابع درون یاب با معایبی همراه بود که از جمله ی آن می توان به اعمال مرتبه ی توابع به صورت دستی، عدم در دسترس بودن تعیین معیاری برای بیان خطا، بالا بودن درجه های آزادی و موارد مشابه را نام برد. در اقدام بعدی، تلاشی برای حل موارد ذکر شده ارائه شد، اما اصلاحات صورت گرفته، به تبدیل روش پیشنهادی ایشان برای تمام مسائل حوزه ی کشسانی منجر نشد. به عنوان نمونه، برای حل مسائل از همان ابتدا نیاز به شبکه ی تقریباً متراکمی بود، تا به وسیله ی آن از افزایش بی رویه ی مرتبه ی توابع درون یاب جلوگیری به عمل آید. مورد بسیار مهم دیگر، عدم ارائه ی فرمولاسیون جامع برای تمامی مسائل بود که به وسیله ی آن بتوان از مرتبه ی مناسب برای توابع درون یاب استفاده کرد.

نویسندگان نوشتار حاضر، بعد از بررسی مزایا و معایب روش استفاده از توابع درون یاب، به دنبال ارائه ی راهکاری برای حل تمام مسائل حوزه ی کشسانی به صورت خودکار بودند که معیار بیان خطای استاندارد برای گزینش المان ها را نیز داشته باشد و در ضمن سادگی روش هایی همچون تعریف، افزایش تعداد المان را نیز در خود جای دهد. خصوصیات روش پیشنهادی در بخش های آتی کاملاً ارائه شده است. از دیگر تلاش های صورت گرفته در راستای بالا بردن دقت نتایج در روش اجزاء محدود و در روش بدون شبکه که هر یک با رویکردی نوین به حل مسائل کشسانی می پردازند، می توان به روش های ارائه شده ی دیگری در سال های ۱۴۰۱ و ۱۶۰۲، اشاره کرد.^[۱۳-۱۵] در بخش دوم نوشتار حاضر، برآوردکننده ی خطای المانی و نحوه ی تخمین خطای حوزه ارائه شده است. بخش سوم، مربوط به حل تطبیقی در روش اجزاء محدود؛ بخش چهارم، مربوط به توابع درون یاب پوشش؛ بخش پنجم، مربوط به الگوریتم روش پیشنهادی بوده و در بخش ششم، مثال هایی در حوزه ی مسائل کشسان بررسی شده است. در نهایت، مقایسه یی بین نتایج روش پیشنهادی و روش سایر پژوهشگران ارائه شده است.

۲. معیار خطای انرژی و درصد خطای نسبی حوزه

یکی از حالت های استاندارد برای بیان خطا، نرم خطای انرژی است. نرم خطای انرژی



شکل ۱. توصیف نحوه‌ی ارتباط زیرحوزه‌های غنی شده با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش.

چندجمله‌هایی با مرتبه p صورت می‌گیرد. مقدار درون‌یابی شده‌ی مجهول u در گره i با توجه به ناحیه‌ی پوششی گره i در رابطه‌ی ۶ ارائه شده است:

$$P_i^p [u] = u_i + [\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{x}_i^T \quad \bar{x}_i \bar{y}_i \quad \bar{y}_i^T \quad \dots \quad \bar{y}_i^p] a_i \quad (6)$$

که در آن، متغیرهای (\bar{x}_i, \bar{y}_i) بیانگر فاصله از گره i و بردار a_i نشان‌دهنده‌ی درجه‌های آزادی اضافی مرتبط با گره i در ناحیه‌ی پوششی c_i است. با توجه به توضیحات ارائه شده، تقریب غنی‌سازی پوششی مربوط به متغیر میدانی u برای یک المان به صورت رابطه‌ی ۷ بیان می‌شود:

$$u = \sum_{m=1}^r h_m u_m + H_i a_i \quad (7)$$

که در آن H_i از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$H_i = h_i [\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{x}_i^T \quad \bar{x}_i \bar{y}_i \quad \bar{y}_i^T \quad \dots \quad \bar{y}_i^p] \quad (8)$$

با جمع مقادیر رابطه‌ی ۷ برای گره‌های موجود در یک المان و ادغام رابطه‌های ۷ و ۸، رابطه‌ی ۹ به صورت رابطه‌ی ۹ بازنویسی می‌شود:

$$u = \sum_{m=1}^r h_m P_i^p \quad (9)$$

به این ترتیب به جای استفاده از روش استاندارد درون‌یابی از روش درون‌یابی به‌وسیله‌ی $h_i P_i^p$ استفاده می‌شود که در آن P_i^p شامل مقادیر متداول متغیر میدانی u_i به اضافه‌ی درجه‌های آزادی مربوط به توابع پوشش است. برتری روش مذکور در آن است که علاوه بر مقادیر درون‌یابی به روش استاندارد می‌تواند با داشتن تابع غنی‌سازی پوشش به نتایج بهتری دست یابد.

یکی از مزایای اصلی روش درون‌یابی به‌وسیله‌ی آن است که فقط در مناطقی که دقت موردنظر تأمین نشده است، به افزایش مرتبه‌ی تابع پوشش می‌پردازد و در نواحی که دقت موردنیاز تأمین می‌شود، نیازی به استفاده از تابع غنی‌سازی نیست. لازم به ذکر است که تعیین مرتبه‌ی تابع غنی‌سازی، اهمیت بالایی دارد و اگر این مرتبه برابر صفر در نظر گرفته شود، درون‌یابی اضافی صورت نمی‌گیرد و همان نتایج درون‌یابی اجزاء محدود استاندارد به دست خواهد آمد.

۵. الگوریتم روش پیشنهادی

در بخش حاضر، نحوه‌ی عملکرد روش پیشنهادی ارائه شده است. در مرحله‌ی نخست، ابتدا درصد خطای نسبی حوزه طبق توضیحات ارائه شده در بخش ۲، تعیین

۱.۳. روش اصلاح شبکه‌ی h

در روش اصلاح شبکه‌ی h ، برای دستیابی به نتایج مطلوب، مرتبه‌ی المان ثابت است؛ ولی تعداد و ابعاد المان‌های موردنیاز به‌منظور گسسته‌سازی حوزه‌ی مسئله، تغییرات دارند. در یک شبکه‌ی اجزاء محدود، بعد از تعیین خطای هر المان، المان‌های با خطای بالاتر از محدوده‌ی مجاز شناسایی می‌شوند. در گام بعدی، المان‌های مذکور در فرایند نظریف قرار می‌گیرند. بدین منظور دو روش کلی نظریف تطبیقی و نظریف با المان‌بندی مجدد را می‌توان نام برد. برای روش نظریف تطبیقی، در هر مرحله موقعیت گره‌های موجود حفظ و تعدادی گره‌ی جدید در المان‌های شناسایی شده به حوزه‌ی مسئله اضافه می‌شوند. در هر گام از روش نظریف با المان‌بندی مجدد، ابتدا تمامی المان‌های موجود حذف و حوزه‌ی مسئله مجدداً با تعداد بیشتری گره، که تمرکز آن‌ها بر نواحی با خطای بالاتر است، گسسته‌سازی می‌شود. در پژوهش حاضر، به‌منظور نظریف تطبیقی جهت اصلاح شبکه و تولید المان‌های جدید، از روش شکستن بزرگ‌ترین راستا استفاده شده است. روش شکستن بزرگ‌ترین راستا برای تولید شبکه‌ی جدید، اولین بار در سال ۱۹۷۵، [۱۵] ارائه شده و روشی مبتنی بر المان‌های مثلثی است. روش مذکور در سال‌های اخیر به دلیل سادگی و کارایی بالا، به دفعات در حوزه‌های گوناگون، [۱۶، ۱۷] استفاده شده است.

۲.۳. روش اصلاح شبکه‌ی P

در روش اصلاح شبکه‌ی P ، ابعاد و تعداد المان‌ها ثابت است و اصلاح شبکه فقط از طریق افزایش مرتبه‌ی توابع تقریب، برای المان‌های با خطای بالاتر از حد مجاز صورت می‌پذیرد. در نوشتار حاضر، از روش پیشنهاد شده‌ی در سال ۲۰۱۳، [۱۰] جهت غنی‌سازی نقاط با خطای بیشتر از معیار تعیین شده استفاده شده است. در بخش ۴، روابط حاکم بر روش اصلاح شبکه‌ی P (توابع غنی‌سازی پوشش) ارائه شده است.

۴. غنی‌سازی به روش توابع درون‌یاب پوشش

در بخش حاضر، به‌طور خلاصه، فرمولاسیون اجزاء محدود غنی‌سازی شده با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش برای المان‌های مرتبه‌ی پایین اجزاء محدود توضیح داده شده است. اگر برای گسسته‌سازی یک حوزه از شبکه‌بندی با المان‌های استاندارد استفاده شده باشد، دقت پاسخ‌ها به نوع و ابعاد المان وابسته خواهد بود. در غنی‌سازی به روش توابع درون‌یاب پوشش، برای هر گره یک زیرحوزه‌ی پوششی در نظر گرفته می‌شود. هر زیرحوزه با یک تابع درون‌یاب با مرتبه‌ی مشخص است. در زیرحوزه‌های پوششی، از توابع مرتبه‌ی بالاتر نسبت به حالت استاندارد استفاده می‌شود که به دلیل در نظر گرفتن تأثیر گره‌های همسایه در یکدیگر، به حل‌هایی با دقت بالا منجر می‌شود. در شکل ۱ الف، تابع h_i یک درون‌یاب خطی برای گره i است که مقدار آن در گره i برابر ۱ و در سایر نقاط وابسته به گره i برابر صفر است و المان‌های متصل به گره i ، زیر حوزه‌ی گره i محسوب می‌شوند. استفاده از توابع خطی برای درون‌یابی زیرحوزه‌ها، تقریب‌های خطی با حجم کم محاسباتی و سرعت بالا را به دنبال خواهد داشت. ناحیه‌ی i که برای گره i توسط تابع خطی h_i درون‌یابی می‌شود، ناحیه‌ی پوشش گره i نامیده و با c_i نمایش داده می‌شود (شکل ۱ ب). برای المان مثلثی Am ، با ۳ گره i ، j و k (شکل ۱ ج)، ناحیه‌ی پوششی المانی برابر با اشتراک بین نواحی پوشش‌های c_i ، c_j و c_k است. بعد از تعیین ناحیه‌ی پوشش گره‌ها، نوبت به درون‌یابی ناحیه‌های پوششی خواهد رسید. درون‌یابی با استفاده از

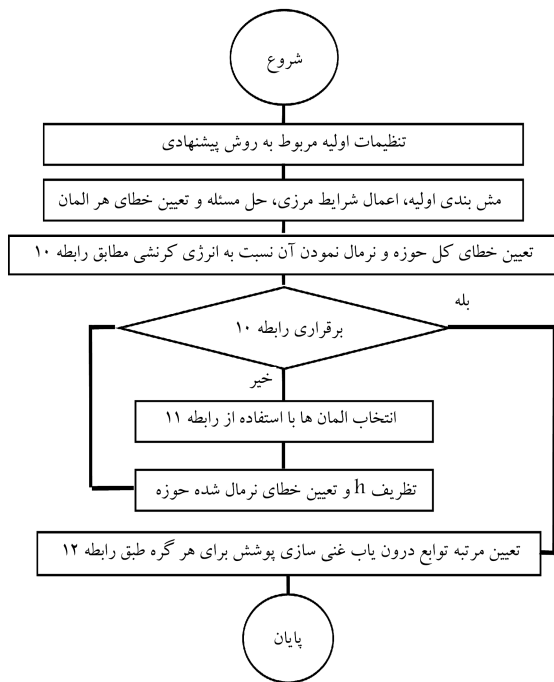
است. همان‌طور که اشاره شد، یکی از مزایای اصلی روش پیشنهادی، استفاده از تابع غنی‌سازی فقط در نواحی است که دقت موردنیاز آن تأمین نشده است. با توجه به میزان دقت حاصل در هر گره از توابع پوشش غنی‌ساز با مرتبه‌های مختلف استفاده می‌شود. این کار از افزایش بی‌رویه‌ی حجم محاسباتی جلوگیری می‌کند و فقط در نواحی با خطای زیاد، دقت را افزایش می‌دهد.

۶. مثال‌های عددی

در بخش کنونی، دو مثال استاندارد دو بعدی کشسانی از نوشتار تیموشنکو و گودیر (۲۰۱۰، ۱۸۱) با شرایط مرزی مرتبط ارائه و مطابق روش پیشنهادی نوشتار حاضر تحلیل شده‌اند. سپس نتایج حاصل با روش‌های سایر پژوهشگران مقایسه شده است. مثال اول، مربوط به تیر طره تحت بارگذاری در انتهای آزاد و مثال دوم، یک صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ دایره‌ی در مرکز که تحت بارگذاری یکنواخت کششی در طرفین صفحه است.

۱.۶. مثال تیر طره تحت بارگذاری در انتهای آزاد

در مثال حاضر، یک تیر طره تحت اثر نیرو با توزیع سهمی‌گون در انتهای تیر و شرایط مرزی مطابق شکل ۳ بررسی شده است. جواب تحلیلی این مسئله، که توسط



شکل ۲. فلوچارت روش پیشنهادی.



شکل ۳. شرایط حاکم بر تیر طره تحت نیرو با توزیع سهمی‌گون در انتهای آزاد.

و در صورت بیشتر بودن درصد خطای نسبی از ۲۰٪، نیاز به نظریف شبکه‌بندی با استفاده از روش نظریف h است. در روش تعیین خطا با معیار انرژی (روش ارائه شده‌ی زینکوویچ)^[۳] مقدار ۱۰٪ به‌عنوان یک مقدار مرز معرفی شده است. در نوشتار حاضر، به دلیل استفاده‌ی ترکیبی از روش و بالا بردن کارایی روش نهایی، مقدار ۲۰٪ استفاده شده است که یکی از دلایل انتخاب آن، جلوگیری از افزایش بی‌رویه‌ی تعداد المان‌ها در روش نظریف h بوده است. در روش ترکیبی، فقط مشخص شدن اولیه‌ی زیرحوزه‌های با گرادیان بسیار بالا در پاسخ‌ها کافی است و نیازی به استفاده از حد مجاز پایین برای گزینش المان‌ها نیست. زیرا بعد از اتمام این مرحله از نظریف، به استفاده از توابع درون‌یاب توجه می‌شود و با همین تعداد کم المان اضافه شده از مرحله‌ی قبل، در بخش‌هایی از حوزه که خطای بسیار زیاد دارند، می‌توان از مراتب پایین‌تری برای توابع درون‌یاب پوششی استفاده کرد و در عین حال به نتایج کاملاً مطلوبی دست یافت. این موضوع یکی از مزایای مهم روش پیشنهادی است، که به رفع نقصی که در استفاده‌ی فقط از روش نظریف h وجود دارد، اشاره می‌کند و از افزایش تعداد المان برای گسسته‌سازی حوزه به طور قابل ملاحظه‌ی جلوگیری به عمل می‌آورد (رابطه‌ی ۱۰):

$$if E < \gamma \rightarrow stop h - refinement \quad (10)$$

که در آن، E درصد خطای نسبی حوزه است که از رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید. در صورت عدم برقراری رابطه‌ی ۱۰، اصلاح شبکه به روش نظریف h موردنیاز است. به این منظور، ابتدا المان‌های با خطای بالاتر از مقدار تعیین شده در رابطه‌ی ۱۱ (۵۰٪ خطای بزرگ‌ترین المان) شناسایی و برای تولید المان‌های جدید (روش شکستن بزرگ‌ترین راستا) استفاده می‌شوند. بعد از تولید المان‌های جدید، مجدداً برقراری رابطه‌ی ۱۰ برای شبکه‌بندی به‌دست آمده بررسی می‌شود. در صورت برقراری رابطه‌ی ۱۰، برای کل حوزه مسئله، روش نظریف h متوقف می‌شود و در غیر این‌صورت بار دیگر با استفاده از رابطه‌ی ۱۱، المان‌های موجود گزینش و نظریف شبکه ادامه خواهد یافت. این روند تا برقراری رابطه‌ی ۱۰ بر روی کل حوزه مسئله تکرار می‌شود:

$$if e_i > \gamma \times \max(e_j) \rightarrow element i^{th} select for h - refinement \quad (11)$$

عبارت $\max(e_j)$ بیانگر بزرگ‌ترین مقدار خطای المانی در حوزه‌ی مورد بررسی است. در گام بعدی، روش پیشنهادی به دنبال استفاده از روش نظریف با استفاده از توابع غنی‌ساز پوشش است. لذا ابتدا با درون‌یابی مقادیر خطای المانی و تعیین آن به گره‌ها، خطای تمامی گره‌ها تعیین می‌شود. سپس با توجه به شرایط ارائه‌شده در رابطه‌ی ۱۲، مرتبه‌ی توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش مرتبط با هر گره تعیین و در غنی‌سازی استفاده می‌شود:

$$if \begin{cases} n_i \leq \gamma \times 0.3 \rightarrow p = 0 \\ 0.3 \times \gamma < n_i \leq 0.6 \times \gamma \rightarrow p = 1 \\ 0.6 \times \gamma < n_i \leq 0.8 \times \gamma \rightarrow p = 2 \\ n_i > 0.8 \times \gamma \rightarrow p = 0 \end{cases} \quad (12)$$

که در آن، مقدار n_i بیانگر خطای گره‌ی i ام، γ برابر ۵۰٪ بزرگ‌ترین خطای گره‌ی موجود، و p مرتبه‌ی تابع غنی‌سازی پوشش برای گره مورد بررسی است. در شکل ۲، فلوچارت روش پیشنهادی در نوشتار حاضر به‌منظور درک بهتر موضوع ارائه شده

مختلف جهت غنی‌سازی استفاده کند. مرتبه‌های تابع پوشش در نوشتار حاضر، بین ۰ تا ۳ هستند. درجه‌ی تابع غنی‌ساز متناسب با میزان خطای محاسبه‌شده انتخاب می‌شود. این روش می‌تواند بدون افزایش بی‌رویه‌ی حجم محاسبات، خطا را فقط در مناطقی که به میزان مطلوب دقت نرسیده‌اند، کاهش دهد. در واقع توابع غنی‌ساز فقط به این نقاط افزوده می‌شوند.

نتایج مربوط به حل مسئله‌ی ذکر شده در شکل ۵ مشاهده می‌شود. ستون ۱، مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل ۴د (آخرین مرحله‌ی نظریف h) و مقادیر ستون ۲ مربوط به شبکه‌بندی ارائه‌شده در شکل ۴د، همراه با اعمال توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش است. در شکل‌های ۵الف و ۵ب: تغییرمکان در جهت x ، در شکل‌های ۵ج و ۵د: تغییرمکان در جهت y ، در شکل‌های ۵ز و ۵و: توزیع تنش در جهت x و در شکل‌های ۵چ و ۵خ: توزیع تنش در جهت y ارائه شده است. در ستون ۱ از شکل ۵ جواب‌های به‌دست آمده در حوزه‌ی مجاز خطای تعیین شده برای گام اول قرار گرفته‌اند. در گام بعدی که مربوط به نتایج ستون ۲ از شکل ۵ است، روش پیشنهادی به دنبال دست‌یابی به جواب‌هایی با دقت بسیار بالاست و برای رسیدن به این امر، از روش دوم که استفاده از توابع غنی‌سازی درون‌یاب پوشش است، استفاده می‌کند.

در شکل‌های ۶ و ۷، به‌منظور نمایش بهتر اثر روش پیشنهادی بر روی اصلاح میدان تغییرمکانی حاکم بر حوزه‌ی مسئله به ترتیب تغییرمکان قائم و تغییرمکان افقی مربوط به راستای بالایی تیر طره (راستای AB طبق شکل ۳) ارائه شده است. در شکل‌های مذکور، روند بهبود نتایج در طی حل مسئله با روش پیشنهادی به وضوح نمایان است. ابتدا جواب به‌دست آمده از اجزاء محدود استاندارد با تعداد درجه‌های آزادی پایین‌تر نمایش داده شده است. سپس دو مرحله‌ی نظریف به روش h در جهت کاهش خطای حاکم بر حوزه، که در معادله‌ی ۱۱ معرفی شد، انجام و شرایط معادله‌ی مذکور ارضاء شده است. در انتها، با استفاده از توابع غنی‌ساز پوشش، مجدداً به اصلاح نتایج موجود تحت شرایط معادله‌ی ۱۲ پرداخته شده

تیموشنکو و گودیر معرفی شده است،^[۱۸] در روابط ۱۳ الی ۱۸ ارائه شده است.

$$u = (Py/\delta EI)[\alpha x(\nu L - x) + (\nu + v)(y^2 - c^2)] \quad (13)$$

$$V = (Py/\delta EI)[\alpha^2(\nu L - x) + \alpha\nu(L - x)y^2 + (\alpha + \delta\nu)c^2x] \quad (14)$$

$$\sigma_x = -Py(L - x) / I \quad (15)$$

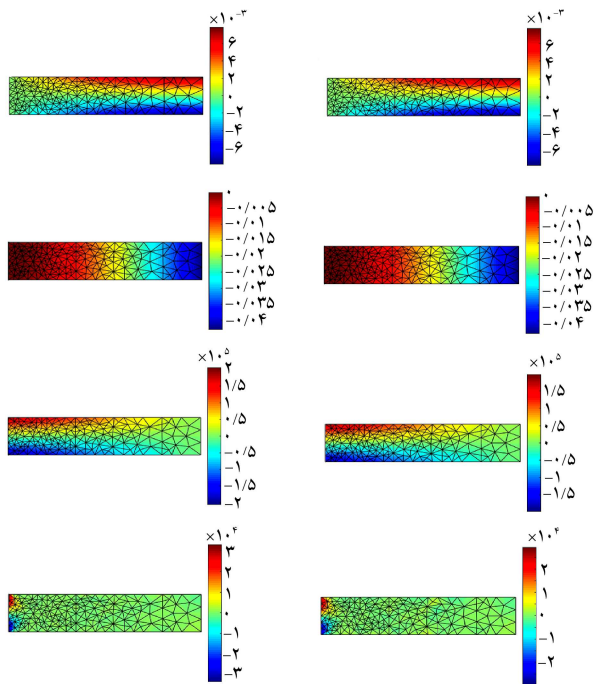
$$\sigma_y = 0 \quad (16)$$

$$\tau_{xy} = P(c^2 - y^2) / 2I \quad (17)$$

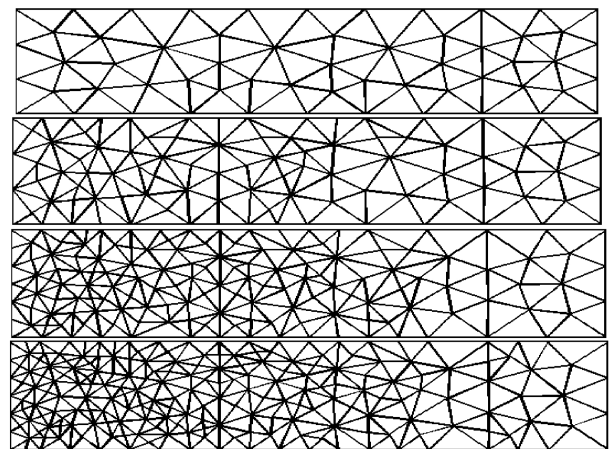
$$I = 2c^3 / 3 \quad (18)$$

در مرز سمت راست بار متمرکز با توزیع سهمی‌وار در جهت y وارد شده و در جهت x تنش مساوی صفر است. دو مرز بالا و پایین، مرزهای بدون تنش و در مرز سمت چپ شرط مرزی تغییرمکانی با استفاده از جواب تحلیلی منظور شده است. این مسئله با در نظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌یی و با فرض پواسون $\nu = 0.3$ حل شده است. در شکل ۴، شبکه‌بندی‌های محاسبه شده طی روند حل مسئله با روش پیشنهادی ارائه شده است. در شکل ۴الف، مش بندی اولیه و در شکل‌های ۴ب، ۴ج و ۴د توالی مراحل نظریف به روش h مشاهده می‌شود.

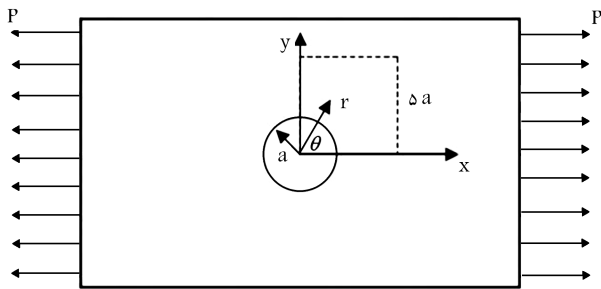
مطابق فلوجارت شکل ۲، بعد از تعیین خطا و مقایسه‌ی شرایط موجود در معادله‌ی ۱۱، المان‌های با خطای بالاتر از حد مجاز شناسایی می‌شوند. سپس اصلاح شبکه‌بندی با استفاده از روش نظریف h صورت می‌پذیرد. این تغییرات در شبکه‌بندی را می‌توان از مقایسه‌ی شبکه‌ی شکل ۴ب نسبت به شکل ۴الف مشاهده کرد. این روند تا ارضاء معادله‌ی ۱۰ ادامه می‌یابد. مرحله‌ی نهایی و پایانی شبکه‌بندی در شکل ۴د مشاهده می‌شود. در این مرحله، استفاده از روش نظریف h متوقف می‌شود. در گام بعدی، استفاده از روش غنی‌سازی P ارائه شده در قسمت ۴ وارد فرایند نظریف می‌شود. در این گام، ابتدا با درون‌یابی مقادیر خطای المانی و تعمیم آن به مقادیر گره‌یی، گره‌های با خطای بالاتر از حد مجاز شناسایی و با توجه به شرایط ارائه شده در معادله‌ی ۱۲، مرتبه‌ی توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش مرتبط با گره‌های مذکور تعیین و در غنی‌سازی استفاده می‌شود. همان‌طور که قبلاً مطرح شد، روش غنی‌سازی P می‌تواند در نقاط مختلف از توابع پوشش با مرتبه‌های



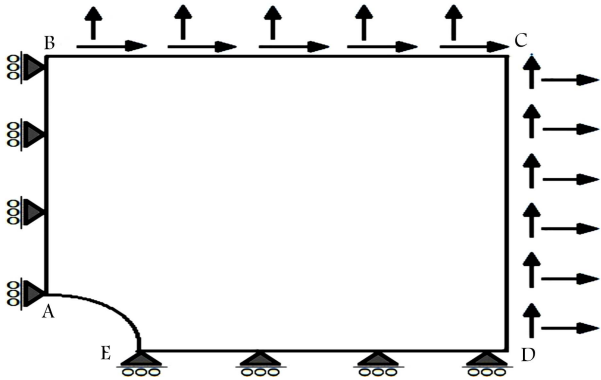
شکل ۵. نتایج مربوط به مثال سوم.



شکل ۴. شبکه‌بندی‌های ارائه‌شده طی روند حل مسئله به روش پیشنهادی.



شکل ۸. صفحه با سوراخ دایره‌یی، تحت اثر بار محوری گسترده.



شکل ۹. شرایط مرزی اعمال شده برای صفحه یا سوراخ دایره‌یی.

مرزی و نیرویی در شکل ۹ نشان داده شده است. برای مرزهای AB و ED شرط تقارنی، برای مرز AE شرط فیزیکی بدون تنش بار و برای مرزهای BC و CD شرط مرزی تششی به دست آمده از جواب دقیق مسئله استفاده شده است. جواب تحلیلی دقیق این مسئله که توسط تیموشنکو و گودیر ارائه شده است،^[۱۸] در روابط ۱۹ الی ۲۴ ارائه شده است.

$$u_r = \frac{t}{4G} \left[r \left(\frac{k-1}{2} + \cos(2\theta) \right) + \frac{c^2}{r} (1 + (1+K) \cos(2\theta)) - \frac{c^2}{r^2} \cos(2\theta) \right] \quad (19)$$

$$u_\theta = \frac{t}{4G} \sin(2\theta) \left[(1-k) \frac{c^2}{r} - r - \frac{c^2}{r^2} \right] \quad (20)$$

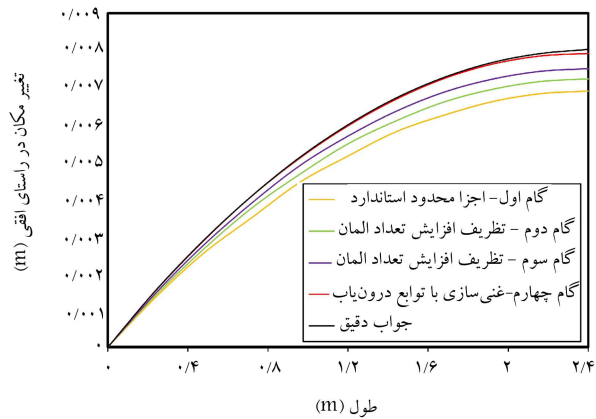
$$\sigma_x = t \left[1 - \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{3}{2} \cos(2\theta) + \cos(4\theta) \right) + \frac{3c^2}{2r^2} \cos(4\theta) \right] \quad (21)$$

$$\sigma_y = - \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \cos(2\theta) - \cos(4\theta) \right) \cos(4\theta) + \frac{3c^2}{2r^2} \cos(4\theta) \right] \quad (22)$$

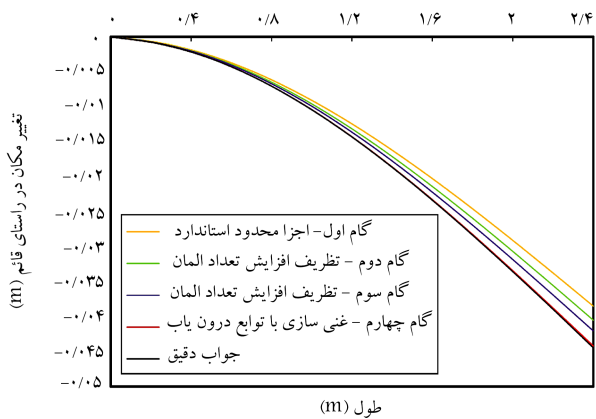
$$\tau_{xy} = -t \left[\frac{c^2}{r^2} \left(\frac{1}{2} \sin(2\theta) - \sin(4\theta) \right) - \frac{3c^2}{2r^2} \sin(4\theta) \right] \quad (23)$$

$$k = (3 - \nu) / (1 + \nu) \quad (24)$$

که در آنها، ν ضریب پواسون و G مدول برشی هستند. در این مسئله مقدار مدول کشسانی $E = 1 \times 10^7 Pa$ شدت بار وارده $t = 1(N/m)$ ضریب پواسون $\nu = 0.3$ و شعاع قسمت دایره‌یی شکل $a = 1m$ است. در شکل ۱۰، شبکه‌بندی‌های ارائه شده طی روند حل مسئله به روش پیشنهادی ارائه شده است.



شکل ۶. نتایج مربوط به تغییر مکان افقی راستای بالایی تیر طره.



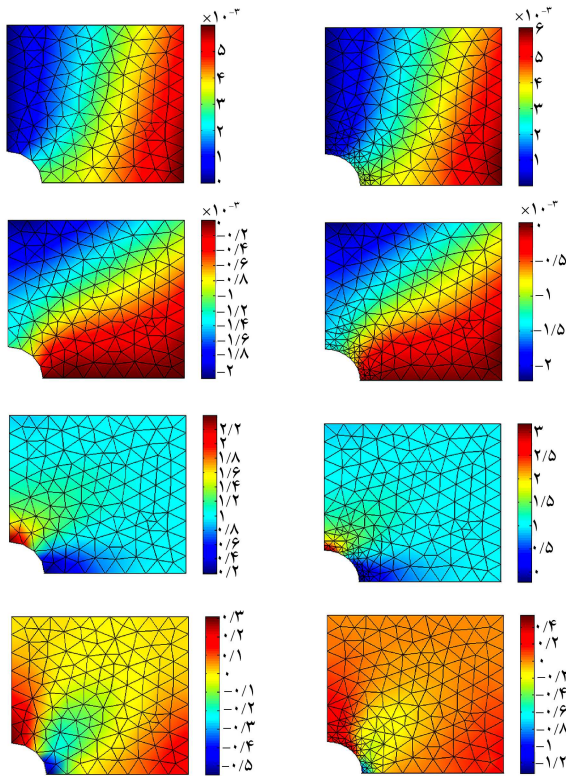
شکل ۷. نتایج مربوط به تغییر مکان قائم راستای بالایی تیر طره.

و نتیجه‌ی آن دست‌یابی به جواب‌های با دقت بالا و کیفیت بسیار مناسب بوده است.

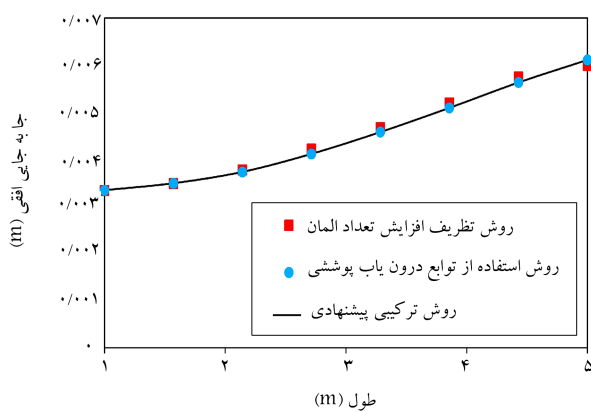
با توجه به نتایج به دست آمده از شکل ۵ مشاهده می‌شود که به وسیله‌ی دو راهکار مجزا ولی مرتبط، جواب‌های به دست آمده از حل مسئله اصلاح شده است. در کاتوره‌های نشان داده شده در ستون ۱ شکل ۵، نتایج آخرین مرحله‌ی نظریف به روش h و در ستون ۲، نتایج مربوط به روش درون‌یاب غنی‌ساز پوشش ارائه شده است. روش پیشنهادی برای دست‌یابی به نتایج نمایش داده شده در شکل ۵، ابتدا با درجه‌ی آزادی کمتر مسئله را تحلیل کرده و سپس با تمرکز بر نواحی با خطای زیاد به اصلاح شبکه‌بندی پرداخته است. نتیجه‌ی این رفتار در ستون ۱ شکل ۵ مشاهده می‌شود. این عمل دست‌یابی به توزیع بهتر کمیت مورد بررسی (تغییر مکان - تنش) را در پی داشته است. این تذکر لازم است که برای رسیدن به جواب‌های ذکر شده، فقط زیر حوزه‌های با خطای بالاتر از حد مجاز اصلاح شده‌اند و به همین دلیل از افزایش بی‌رویه‌ی درجه‌های آزادی جلوگیری شده است. این موضوع یکی از مزایای اصلی روش پیشنهادی است و در کاهش حجم محاسباتی، تأثیر به‌سزایی دارد.

۲.۶. صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ مرکزی

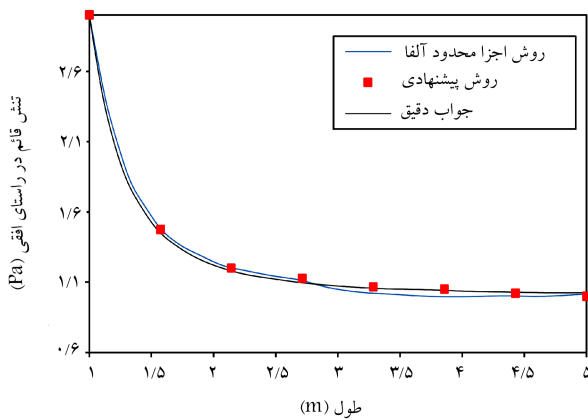
در مثال کنونی، یک صفحه‌ی بی‌نهایت با سوراخ دایره‌یی که تحت اثر نیروی گسترده‌ی محوری t قرار دارد، حل شده است. (شکل ۸) به دلیل بی‌نهایت بودن صفحه و با توجه به شرایط تقارنی فقط یک چهارم از ناحیه با ابعاد $5a$ مدل شده است. شرایط



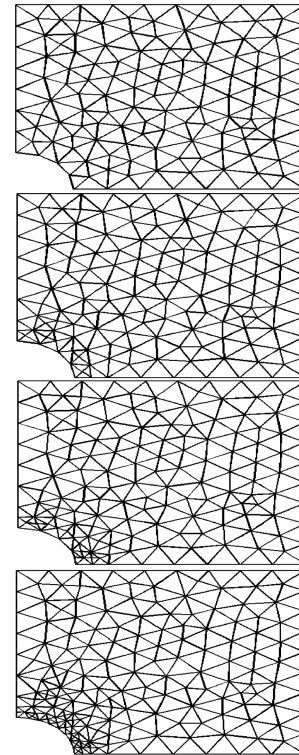
شکل ۱۱. نتایج مربوط به مثال اول.



شکل ۱۲. نتایج مربوط به تغییر مکان افقی لبه‌ی پایینی صفحه.



شکل ۱۳. نتایج مربوط به تنش قائم در راستای افقی در لبه‌ی سمت چپ صفحه.



شکل ۱۰. شبکه‌بندی‌های ارائه‌شده طی روند حل مسئله به روش پیشنهادی.

شکل ۱۰ الف، شبکه‌بندی اولیه با تعداد درجه‌های آزادی کم برای شروع حل مسئله به منظور گسسته‌سازی حوزه و شکل ۱۰ د، فرایند تکمیل شده‌ی نظریف h را نمایش می‌دهند.

نتایج مربوط به حل مسئله‌ی ذکر شده در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود. مقادیر ستون ۱ مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل ۱۰ الف (جواب اجزا محدود) و مقادیر ستون ۲ مربوط به شبکه‌بندی ارائه شده در شکل ۱۰ د با اعمال نظریف h و توابع درون‌یاب غنی‌سازی هستند. لازم به ذکر است که نتایج مذکور، بهترین جواب‌های به‌دست آمده از روش پیشنهادی هستند. در شکل‌های ۱۱ الف و ۱۱ ب: تغییر مکان در جهت x ، در شکل‌های ۱۱ ج و ۱۱ د: تغییر مکان در جهت y ، در شکل‌های ۱۱ ز و ۱۱ ا: توزیع تنش در جهت x ، و در شکل‌های ۱۱ چ و ۱۱ خ: توزیع تنش در جهت y ارائه شده‌اند.

در شکل ۱۲، نتایج مربوط به روش پیشنهادی، روش استفاده‌ی فقط از توابع پوششی و روش نظریف h به تنهایی برای تغییر مکان قائم راستای بالای تیر مشاهده می‌شود که مطابق آن هر سه روش به نتایج قابل قبولی دست یافته‌اند؛ اما با این تفاوت که در روش نظریف h با استفاده از ۷۸۳ المان و در روش توابع درون‌یاب با استفاده از به‌کارگیری مرتبه‌ی ۳ برای تمامی گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی حوزه به این نتایج رسیده‌اند و این در حالی است که روش ترکیبی اصلاح شده فقط از ۳۲۴ المان و اختصاص مرتبه‌های ۳ و ۲ به ترتیب به ۱۰ و ۳۰ درصد گره‌های تشکیل‌دهنده‌ی حوزه به نتایج ذکر شده دست یافته است. به منظور مقایسه‌ی روش پیشنهادی با روش سایر پژوهشگران، در شکل ۱۳ نتایج مربوط به تنش در راستای افقی برای لبه‌ی سمت چپ مثال مورد نظر بررسی شده است. مبانی و قوانین حاکم بر روش α -FEM در پژوهشی در سال ۲۰۱۰، ارائه شده است.^[۱۹] روش α -FEM با درجه‌ی آزادی ۷۸۴ و روش پیشنهادی با درجه‌ی آزادی کل برابر با ۷۵۰ بوده‌اند.

۷. نتیجه‌گیری

از مزایای روش پیشنهادی در نوشتار حاضر، می‌توان استفاده از نرم استاندارد تعیین خطا، روش تولید مش تطبیقی، فراگیر بودن آن برای تعداد بسیار زیادی از مسائل دوبعدی در حوزه‌ی کشسان که پیچیدگی‌های شدید در حوزه‌ی خود دارند و از همه مهم‌تر اتوماتیک بودن آن برای هر دو مرحله‌ی نظریف h و تعیین مرتبه‌ی توابع درون‌یاب غنی‌سازی پوشش اشاره کرد که با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان تلاش محاسباتی را به میزان قابل ملاحظه‌ی کاهش و دقت نتایج نهایی تحلیل را تا حد بسیار مطلوبی افزایش داد. برای نمایش عملکرد روش پیشنهادی، حل چند مسئله‌ی مختلف ارائه شده است.

در مطالعات پایه‌ی مورد مقایسه در نوشتار حاضر، از یک منطبق برای تعیین شرایط حاکم بر روش موردنظر خود استفاده شده است که فقط برای حل یک مسئله مناسب است و باید در هر مسئله با توجه به وضعیت موجود و شرایط حاکم محاسبه شود. در پژوهش حاضر تلاش شد تا در گام نخست از تعداد المان کمتر استفاده و بعد از آن یک شاخص واحد و قابل تعمیم برای تعیین مرتبه‌ی تابع پوشش غنی‌ساز معرفی شود. در واقع هدف نوشتار حاضر، ارائه‌ی روشی برای حل اتوماتیک فرایندهای محاسباتی بوده است که معایب ذکر شده در بخش مقدمه‌ی نوشتار حاضر مربوط به روش‌های پیشین را مرتفع سازد. از مهم‌ترین موارد اشاره‌شده، می‌توان به جلوگیری از افزایش بی‌رویه‌ی تعداد المان‌ها نسبت به فقط روش نظریف h و نیز استفاده از مراتب کمینه برای مرتبه‌ی توابع درون‌یاب پوششی اشاره کرد. در نتایج ارائه شده در بخش‌های پیشین، بهبود میدان تنش و جابه‌جایی حاکم بر حوزه‌ی مسئله به وضوح قابل رؤیت است. بررسی نتایج حل مثال‌های استاندارد و نتایج سایر پژوهشگران، حکایت از کارایی خوب روش پیشنهادی دارد. مقایسه‌ی نتایج مثال‌های پژوهش حاضر با روش‌های دیگر پژوهشگران، حکایت از تأمین دقت کافی موردنیاز با درجه‌های آزادی متعارف در روش اجزاء محدود دارد.

در روش اجزاء محدود استاندارد هیچ‌گونه ابزاری به جز قضاوت مهندسی، برای تعیین مناسب بودن تعداد و اندازه‌ی المان به‌منظور افزایش دقت پاسخ‌ها، در دسترس مهندسان نیست و انتخاب اندازه‌ی المان بیشتر براساس توصیه‌های داده شده صورت می‌گیرد که هر کدام نقص‌هایی دارند و نمی‌توانند برای تمامی مسائل در حوزه‌ی کشسان و فضای دوبعدی استفاده شوند. به‌عنوان مثال، ریز کردن یکنواخت شبکه، یکی از توصیه‌هایی است که علی‌رغم حصول نتایج مناسب، از نقطه‌نظر هزینه‌ی محاسباتی به هیچ‌عنوان توصیه نمی‌شود. در نوشتار حاضر، سعی شده است تا با معرفی روشی ترکیبی برای چالش پیش رو پاسخ مناسبی ارائه شود. به این منظور، ابتدا تخمین خطا به روش نرم L_2 معرفی و سپس، دو روش برای اصلاح شبکه‌بندی و بالابردن دقت پاسخ‌های موجود استفاده شده است. روش اول، استفاده از روش نظریف h در جهت تغییرات در شبکه به‌صورت تطبیقی است. روش نظریف h ، نواحی با خطای بالاتر از محدوده‌ی مجاز را شناسایی و با استفاده از روش شکستن بزرگ‌ترین راستا که منجر به افزایش تعداد المان در آن ناحیه می‌شود، اقدام به اصلاح تحلیل می‌کند. این روند تا برقراری رابطه‌ی مربوط به کنترل خطا ادامه می‌یابد. روش دوم، استفاده از توابع درون‌یاب پوشش به‌عنوان یک ابزار قوی برای غلبه بر محدودیت‌های روش اجزاء محدود است. در این مرحله برای هر گره‌ی موجود در حوزه، مرتبه‌ی تابع درون‌یاب پوشش استخراج و در ادامه، فرایند حل مسئله استفاده شده است. در محاسبات انجام‌شده، مختصات گره‌ی نقاط تغییر نمی‌کنند، بلکه با استفاده از روش اول در نواحی با دقت پایین، به‌صورت تطبیقی نقاط جدید وارد حوزه‌ی مسئله می‌شوند و پس از حصول شبکه‌بندی مناسب با استفاده از روش دوم، نتایج حل مسئله به دقت بسیار بالایی خواهند رسید.

منابع (References)

- Zienkiewicz, O.C. "Achievements and some unsolved problems of the finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **47**(1-3), pp. 9-28 (2000).
- Babuška, I., Zienkiewicz, O.C., Gago, J. and et al., *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, John Wiley & Sons, 408 p. (1986).
- Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J. Z. "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**(2), pp. 337-357 (1987).
- Shi, G.H., *Block System Modeling by Discontinuous Deformation Analysis*, Southampton, UK, Computational Mechanics Publications, 209 p. (1993).
- Liu, J., Kong, X. and Lin, G. "Formulations of the three-dimensional discontinuous deformation analysis method", *Acta Mech. Sin.*, **20**(3), pp. 270-282 (2004).
- Grayeli, R. and Mortazavi, A. "Discontinuous deformation analysis with second-order finite element meshed block", *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, **30**(15), pp. 1545-1561 (2006).
- Guowei, M.A., Xinmei, An. and Lei, He. "The numerical manifold method: A Review", *International Journal of Computational Methods*, **07**(01), pp. 1-32 (2010).
- Zhang, H.H., Li, L.X., An, X.M. and Ma, G.W. "Numerical analysis of 2-D crack propagation problems using the numerical manifold method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **34**(1), pp. 41-50 (2010).
- Ghasemzadeh, H., Ramezani, M.A. and Bodaghpour, S. "Dynamic high order numerical manifold method based on weighted residual method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Published online in Wiley Online Library (2014).
- Kim, J. and Bathe, K.J. "The finite element method enriched by interpolation covers", *Comput. Struct.*, **116**, pp. 35-49 (2013).
- Kim, J. and Bathe, K.J. "Towards a procedure to automatically improve finite element solutions by interpolation covers", *Computers & Structures*, **131**, pp. 81-97 (2014).

12. Jeon, H.-M., Lee, Ph.-S. and Bathe, K.-J. "The MITC3 shell finite element enriched by interpolation covers", *Computers & Structures*, **134**, pp. 128-142 (2014).
13. Arzani, H., Kaveh, A. and Dehghana, M. "Adaptive node moving refinement in discrete least squares meshless method using charged system searc", *Scientia Iranica. Transaction A, Civil Engineering*, **21**(5), pp. 1529-1538 (2014).
14. Zeng, W., Liu, G.R., Li, D. and Dong, X.W. "A smoothing technique based beta finite element method (âFEM) for crystal plasticity modeling", *Computers & Structures*, **162**, pp. 48-67 (2016).
15. Rosenberg, I.G. and Stenger, F. "A lower bound on the angles of triangles constructed by bisecting the longest side", *Math. Comp.*, **29**, pp. 390-395 (1975).
16. Plaza, A., Padron, M.A. and Surez, J.P. "Non-degeneracy study of the 8-tetrahedra longest-edge partition", *Applied Numerical Mathematics*, **55**(4), pp. 458-472 (2005).
17. Yershov, D.S. and Frazzoli, E. "Asymptotically optimal feedback planning using a numerical Hamilton-Jacobi-Bellman solver and an adaptive mesh refinement", *Int. J. Rob. Res*, **35**(5), pp. 565-584 (2016).
18. Timoshenko, S. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3th ed., New York, McGraw- Hill book (1970).
19. Nguyen-Thanh, N., Rabczuk, T., Nguyen-Xuan, H.S. and et al. "An alternative alpha finite element method (AFEM) for free and forced structural vibration using triangular meshes", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, pp. 2112-2135 (2010).