

تحلیل مدل ریاضی انتشار ترک هیدرولیکی  
در محیط کشسان: رژیم سختی - گرانروی

Original Article

علی عسگری\* (استادیار)

دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مازندران، بابلسر

علی اکبر گلشنی (استادیار)

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

در نوشتار حاضر، یک روش شبه تحلیلی توسعه یافته برای حل مسئله رشد ترک هیدرولیکی در یک محیط کشسان و در حالت کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. محیط نفوذناپذیر و چقرمگی آن نسبتاً زیاد فرض شده و همچنین جریان سیال غیرقابل تراکم و آرام در نظر گرفته شده است. ترک در همه‌ی زمان‌ها کاملاً از سیال پر شده و انتشار ترک در چارچوب مکانیک شکست خطی (LEFM) است، به عبارت دیگر، ترک به صورت شبه استاتیکی رشد می‌کند. مهم‌ترین فراسنج‌های مؤثر در مسئله‌ی حاضر عبارت‌اند از: گرانروی سیال، چقرمگی محیط، میزان دبی ورودی، مدول کشسانی، تنش محصورکننده و مقدار زمان تزریق. در پژوهش‌های اخیر، مسئله‌ی شکست هیدرولیکی با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی و شبه تحلیلی بررسی شد. در بسیاری موارد، نتایج پژوهش‌های انجام شده برای مقادیر کوچک از گرانروی سیال در مقابل سختی قابل قبول است، در صورتی که در پژوهش حاضر، با توسعه دادن روش اغتشاش، به کمک برخی از تبدیلات اویباری، نتایج برای مقادیر بزرگ‌تری از گرانروی نیز همگراست. نتایج این پژوهش با مدل‌سازی عددی موجود مقایسه و بررسی شده است.

واژگان کلیدی: شکست هیدرولیکی، رژیم سختی - گرانروی، روش اغتشاش توسعه یافته، تبدیلات اویباری.

a.asgari@umz.ac.ir  
golshani@modares.ac.ir

## ۱. مقدمه

الگوسازی و تحلیل مسائل، شامل رشد و انتشار ترک‌های هیدرولیکی به دلیل اندرکنش غیرخطی از درجه‌ی بالا بین سیال و محیط (مانند سنگ یا خاک)، وجود تکیه بودن معادلات تنش در نوک ترک و همچنین شرایط مرزی پیش‌رونده بسیار پیچیده است. بررسی با روش‌های تحلیلی و یا شبه تحلیلی بر روی یک ترک با هندسه‌ی ساده (ترک‌های دوعدی KGD، شعاعی<sup>۱</sup> و PKN<sup>۲</sup> در یک سنگ همگن با تنش بر جای یکنواخت به طبیعت مدل‌سازی ریاضی مسئله برمی‌گردد،<sup>[۱]</sup> و ممکن است برای دستیابی به چنین حل‌هایی، نیاز به فرض کردن رشد ترک هیدرولیکی در یک رژیم خاص باشد. برای اطلاعات بیشتر در مورد انواع هندسه‌ی ترک‌ها به رساله‌ی عسگری (۲۰۱۶)،<sup>[۲]</sup> مراجعه شود. رژیم‌ها براساس مکانیزم هدررفت انرژی نام‌گذاری می‌شوند که مهم‌ترین آن‌ها در شکست هیدرولیکی عبارت‌اند از: ۱. رژیم سختی که بیشترین هدررفت انرژی تولید شده ناشی از تزریق سیال، مربوط به بزرگی پارامتر سختی محیط و سیستم است؛ و ۲. رژیم گرانروی، که غالب انرژی ورودی، ناشی از اصطکاک بین سیال و سطوح ترک به

در سال ۱۹۸۸،<sup>[۱۰]</sup> نیز راه حل مربوط به ترک در حالت تنش مسطح توسعه داده شد که شکل ساده‌تری از معادله‌ی پیوستگی در ناحیه‌ی رأس ترک بود. معادلات به روش متغیر مشابه<sup>۸</sup> با مختصات مکانی مقیاس و با طول ترک واقعی تحلیل شدند. همچنین در دهانه‌ی ترک<sup>۹</sup> با فشار فرضی ثابت، سختی محیط به دو صورت

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۱/۲۳، اصلاحیه ۱۳۹۶/۵/۲۲، پذیرش ۱۳۹۶/۶/۷

DOI:10.24200/J30.2018.1991.2094

## Archive of SID

رشد ترک PKN در رژیم گرانروی با سختی کم و چگونگی رشد نوک ترک (PKN) در رژیم سختی مجهول باقی مانده است. اخیراً کارهای اندکی در زمینه‌ی ذکر شده با در نظر گرفتن سختی جانبی انجام شده است.<sup>[۲۳-۲۴]</sup> ولی هنوز ابهاماتی در چگونگی رشد ترک PKN در نوک آن وجود دارد.

## ۲. فرمول بندی ریاضی

### ۱.۲. تعریف مسئله

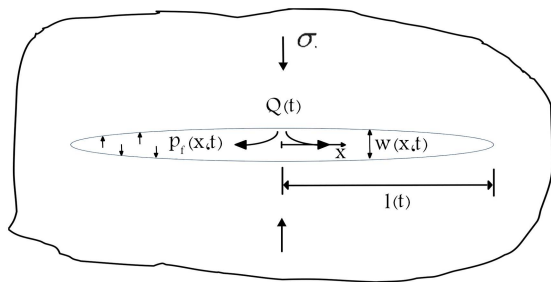
مطابق با شکل ۱، ترک هیدرولیکی KGD به طول  $2\ell(t)$  در یک محیط سنگی شکننده با مدول یانگ  $E$ ، ضریب پواسون  $\nu$  و چقرمگی  $K_{IC}$  در نظر گرفته شده است.

به دلیل تقارن ترک مذکور، نیمی از مدل در تحلیل منظور می‌شود. همچنین سیال با گرانروی  $\mu$  و با دبی  $Q(t)$  تزریق می‌شود که تزریق آن باعث فشار داخلی  $P_f(x, t)$  در سطوح ترک می‌شود. با توجه به اینکه محیط تحت تنش محدودکننده‌ی  $\sigma$  قرار دارد، در نتیجه فشار خالص در داخل ترک برابر با  $P(x, t) = P_f(x, t) - \sigma$  است. تئوری مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM)<sup>[۱۶]</sup> برای تعیین بازشدگی ترک  $w(x, t)$ ، فشار خالص  $P(x, t)$  و رشد ترک  $\ell(t)$  بر حسب زمان  $t$  و مختصات محلی  $x$  استفاده می‌شود.

### ۲.۲. فرضیات مسئله

فرضیات اصلی برای الگوی در نظر گرفته شده در پژوهش حاضر، به این صورت خلاصه شده است:

- ترک در تمام لحظات کاملاً از سیال پر شده است و هیچ‌گونه پس‌افتادگی<sup>[۱۷]</sup> بین سیال و نوک ترک وجود ندارد.
- محیط به صورت کشسان، همگن و همچنین نفوذناپذیر فرض شده است و اتلاف سیال در فرایند تزریق ناشی از نشت وجود ندارد.
- به دلیل وجود فشار هیدرولیکی سیال در سطوح ترک و ناچیز بودن تنش برشی در سطوح مذکور، مود شکست، کششی فرض شده است.
- فشار سیال در طول ترک ثابت نیست. در واقع، فشار با یک معادله‌ی کشسانی انتگرالی به میزان جابه‌جایی منوط می‌شود. بنابراین تحلیل همبسته بوده و مسئله به صورت هیدرومکانیکی است.
- انتشار ترک در قالب مکانیک شکست، خطی توصیف می‌شود. در این صورت معیار رشد ترک با برابر قرار دادن چقرمگی محیط با عامل شدت تنش در نوک ترک



شکل ۱. مدل شکست هیدرولیکی در حالت کرنش صفحه‌ی (ترک KGD).

در نظر گرفته شد: حالت اول) در حل آن با فرض سختی صفر<sup>[۱]</sup>، رأس ترک با شکل نوک‌تیز و همچنین فاصله‌ی بین جلوی سیال و نوک ترک (پس‌افتادگی سیال) پیش‌بینی شد، حالت دوم) با فرض محدود سختی محیط، هیچ فاصله‌ی بین جلوی سیال و نوک ترک در نظر گرفته نشد. با توجه به حل حالت دوم، شکل نوک ترک گرد و فشار سیال در نوک محدود شد که ناسازگار با معادله‌ی روان‌سازی است.

به دنبال روش اشاره شده‌ی اخیر<sup>[۹]</sup> در سال ۱۹۹۶<sup>[۱۱]</sup> راه حل خودمستشابه دیگری برای حالت مجانبی سختی صفر معرفی شد که براساس روشی با نام حل نوک مجانبی<sup>[۱۱]</sup> (SCR) بود. در روش مذکور رفتار مجانبی بازشدگی و فشار در نزدیکی رأس ترک تشریح شده است. اگرچه روش عددی اخیر<sup>[۹]</sup> برای حل مسئله در یک رژیم مابین سختی و گرانروی ارائه و بعدها در پژوهش دیگری<sup>[۲۰-۲۱]</sup>،<sup>[۱۳]</sup> بازبینی شد، ولی بسیاری از پژوهشگران برای ساده‌تر شدن تحلیل مسئله، آن را به صورت یکی از رژیم‌های سختی (هدررفت انرژی ناشی از چقرمگی یا سختی بالای سنگ)،<sup>[۱]</sup> یا گرانروی (هدررفت انرژی ناشی از گرانروی بالای سیال)،<sup>[۹]</sup> در نظر گرفتند.

همچنین در سال ۲۰۰۲<sup>[۱۶]</sup> راه حل خودمستشابه دیگری برای مسئله‌ی گسترش ترک سکه‌ی شکل در محیط کشسان نفوذناپذیر با سختی صفر و سیال نیوتنی استفاده شد که براساس روش خودمستشابه اخیر<sup>[۹]</sup> بود، با این مفهوم که در راه حل موردنظر، فشار و بازشدگی به صورت یک سری از چندجمله‌ی ژاکوبی بیان می‌شود که ضرایب سری‌های ذکر شده با هم فرق می‌کنند. البته راه‌حل مذکور با راه‌حل‌های اخیر<sup>[۹]</sup> فرق می‌کرد و هم‌گرایی عددی روش اشاره شده به طرز چشم‌گیری افزایش پیدا کرد (برای جزئیات بیشتر به مراجع<sup>[۱۷]</sup> مراجعه شود). به‌طور خلاصه، برای حل در مقیاس گرانروی، یک روش نیمه تحلیلی در سال ۱۹۸۵<sup>[۹]</sup> ارائه شد و بعدها برای ترک KGD<sup>[۱۵]</sup> و همچنین برای ترک شعاعی<sup>[۱۶]</sup> توسعه داده شد. برخی از بررسی‌های اخیر فقط برای محدوده‌ی  $\mathcal{K} = \frac{\mu' Q_0 E' t}{K_{IC}^2} \leq 1$  (رژیم گرانروی)<sup>[۱۲]</sup> اعتبار دارد که در آن  $\mu'$  گرانروی مؤثر،  $K'$  چقرمگی مؤثر،  $Q_0$  دبی ورودی و  $E'$  مدول کشسانی محیط است.

همچنین در سال ۲۰۰۰<sup>[۱۸]</sup> یک راه حل صریح دیگر برای انتشار ترک هیدرولیکی دوبعدی در رژیم سختی ارائه شد که در آن راه حل بازشدگی ترک با استفاده از حد ریشه‌ی دوم و فشار در نوک از تابع تکینگی لگاریتمی<sup>[۱۳]</sup> به‌صورت همبسته با دیگر معادلات حاکم تعیین و فرض شد که در تحلیل مذکور، انرژی اتلافی ناشی از جریان سیال گرانروی در داخل ترک در مقایسه با انرژی اتلافی ناشی از سختی سنگ ناچیز است. به نظر می‌رسد که اعتبار راه حل اخیر در محدوده‌ی حل یعنی محدوده‌ی  $\mathcal{K} \geq 4$  (رژیم سختی)<sup>[۱۴]</sup> است. اگرچه در ادامه‌ی راه حل مذکور، یک راه حل اصلاحی برای حل در رژیم سختی - گرانروی (یعنی در محدوده‌ی  $1 \leq \mathcal{K} \leq 4$ ) ارائه شده است<sup>[۱]</sup> ولی همچنان حل در محدوده‌ی مذکور، اعتبار کافی ندارد.

در نوشتار حاضر، با توسعه‌ی روش اغتشاش به کمک برخی از تبدیلات اوپری، اعتبار حل در محدوده‌ی  $1 \leq \mathcal{K} \leq 4$  را نیز تضمین می‌کند. برای اعتبارسنجی در پژوهش حاضر، از راه حل عددی آداجی<sup>[۲۰-۲۱]</sup>،<sup>[۱۳]</sup> استفاده شده است.

جدول ۱، خلاصه‌ی از سیر تحول و برخی از کارهای تحلیلی و نیمه تحلیلی بر روی ترک‌های دوبعدی KGD، شعاعی و PKN در حوزه‌ی مذکور از پژوهش را نشان می‌دهد. پژوهش‌های اشاره شده، پایه و معیاری را برای شبیه‌سازی عددی فراهم می‌سازند.

هر چند کارهای زیادی در محدوده‌ی مقیاس گرانروی با سختی کوچک در ترک‌های دو بعدی KGD و شعاعی انجام شده است<sup>[۱۹]</sup>، اما همچنان چگونگی

جدول ۱. برخی از پژوهش‌های مهم انجام شده در مورد انتشار ترک هیدرولیکی در یک محیط نفوذناپذیر با تزریق سیال نیوتنی و با نرخ ثابت برای انواع ترک‌ها.

نوع مقیاس و رژیم	ترک دو بعدی KGD	ترک شعاعی Radial	ترک PKN
گرانروی با سختی صفر	آداچی (۲۰۰۱) [۱۳]	دتورنی و همکاران (۲۰۰۷) [۱۶]	نوردگرن (۱۹۷۲) [۷]
گرانروی با سختی کوچک	آداچی و دتورنی (۲۰۰۲) [۲۷]	سواتسکی و دتورنی (۲۰۰۲) [۲۶]	کوالیشن و همکاران (۲۰۱۰) [۲۴]
سختی با گرانروی صفر	گاراگاش و دتورنی (۲۰۰۵) [۱۹]	بانگر و همکاران (۲۰۰۷) [۲۸]	کمپ (۱۹۹۰) [۲۵]
سختی با گرانروی کوچک	گاراگاش (۲۰۰۶) [۳۲,۳۱]	سواتسکی و دتورنی (۲۰۰۲) [۳۰,۱۶]	آداچی و همکاران (۲۰۱۰) [۲۳,۲۲,۲۰]
سختی با گرانروی و ماند کوچک	گاراگاش (۲۰۰۶) [۳۲,۳۱]	آبه و همکاران (۱۹۷۶) [۳۰]	دونتسو و پیرس (۲۰۱۵) [۲۳,۲۲]
حد وسط گرانروی - سختی	عسگری (۲۰۱۶) [۲]	سواتسکی (۲۰۰۲) [۱۶]	-
	عسگری و همکاران (۲۰۱۶) [۳۴]	سواتسکی و دتورنی (۲۰۰۲) [۳۳,۱۶]	-
	در نوشتار حاضر با استفاده از روش شبه	-	-
	تحلیلی توسعه یافته و مقایسه با روش عددی:	سواتسکی (۲۰۰۰) [۳۳]	-
	آداچی (۲۰۰۱) [۱۳]، آداچی و دتورنی (۲۰۰۲) [۲۷]		

معادله‌ی انتگرالی تکیه است. فرض رابطه‌ی مذکور این است که ترک به شکل شبه استاتیکی رشد می‌کند. [۳۶]

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^l G\left(\frac{x}{\ell}, \frac{x'}{\ell}\right) P(x', t) dx',$$

$$G(\xi, \xi') = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-\xi'^2}} \right| \quad (1)$$

### ۲.۳.۲. پیوستگی و بقای جرم

جریان سیال در ترک با قانون بقای جرم و اندازه‌ی حرکت مدل می‌شود. در این حالت حجم سیال ورودی یا تزریقی ( $V(t)$ ) برابر است با حجم بازشده‌ی ترک (رابطه‌ی ۲):

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad q = \int_{-w/2}^{w/2} v_x dy = vw$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^\ell w dx = vw, \quad \int_0^\ell w dx = \frac{1}{2} V(t)$$

$$V(t) = \int_0^t Q dt = Q \cdot t = 2 \int_0^\ell w dx \quad (2)$$

که در آن‌ها،  $q$  نرخ جریان سیال یا فلاکس عبوری،  $v(x, t)$  سرعت متوسط سیال در طول ترک است و سرعت سیال در نوک ترک  $v(x = \ell, t)$  برابر با سرعت رشد در نوک ترک  $dl/dt$  است؛ در صورتی که مقدار پس‌افتادگی سیال صفر باشد.

### ۳.۳.۲. معادله‌ی حرکت سیال

با فرضیات اشاره شده، معادله‌ی ناویر-استوکس برای جریان یک بعدی آرام و سیال غیرقابل تراکم به صورت رابطه‌ی ۳ در می‌آید: [۳۸,۳۷]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_x^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_f}{\partial x} + \frac{12\mu v_x}{w^2} \right) \quad (3)$$

با صرف‌نظر کردن از ترم سمت چپ معادله‌ی روان‌سازی<sup>۱۹</sup> رابطه‌ی ۳ به معادله‌ی پویزنی<sup>۲۰</sup> به صورت رابطه‌ی ۴ در می‌آید: [۳۹]

$$v = -\frac{w^2}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \text{ or } q = -\frac{w^2}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4)$$

مشخص می‌شود. در فرض LEFM از تغییرشکل‌های غیرکشسان در ناحیه‌ی مستعد جلوی ترک<sup>۱۸</sup> صرف‌نظر می‌شود، چرا که در محیط شکننده، ناحیه‌ی مذکور بسیار کوچک است. لازم به ذکر است که در نظر گرفتن پس‌افتادگی سیال و ناحیه‌ی مستعد جلوی ترک، عملکرد مشابهی دارند. به طور کلی معمولاً آثار ناحیه‌ی ذکر شده در رشد ترک به دلیل کوچک بودن ابعاد آن در مقایسه با مقادیر گسترش ترک و بزرگی تنش برجا در نظر گرفته نمی‌شود و یا آثار آن به صورت سختی مؤثر اعمال می‌شود. [۳۵]

- فرض می‌شود که نسبت بازشدگی ترک به طول ترک بسیار کوچک است، در نتیجه می‌توان جریان سیال را یک بعدی در نظر گرفت. همچنین با توجه به عدد رینولدز کم و یا بسیار بزرگ، جریان سیال آرام فرض می‌شود.
- هیچ‌گونه تغییر حالتی در سیال رخ نمی‌دهد و سیال همواره نیوتنی و تراکم‌ناپذیر فرض شده است.
- به دلیل کوچک بودن شعاع چاه نسبت به طول ترک از آثار آن صرف‌نظر می‌شود.
- رشد ترک در جهت تنش بیشینه و امتداد چاه، موازی با تنش کمینه است.
- فرضیات اضافی و خاص دیگر در روند حل هر یک از مسائل اشاره خواهد شد.

## ۳.۲. معادلات حاکم

در مسئله‌ی حاضر از ۳ معادله‌ی اصلی دیفرانسیلی - انتگرالی همبسته و غیرخطی در کنار شرایط اولیه و مرزی استفاده و سپس ۳ مجهول از آن محاسبه شده است. معادلات: ۱. معادله‌ی کشسانی، ۲. معادله‌ی حرکت یا بقای اندازه‌ی حرکت، ۳. معادله‌ی پیوستگی یا بقای جرم. مجهولات: ۱. طول ترک که تابعی از زمان است، ۲. بازشدگی ترک و ۳. فشار روی سطوح ترک که تابعی از موقعیت مکانی و زمان است. البته فراسنج سرعت و دبی سیال در طول ترک نیز به عنوان مجهول‌های ثانویه قابل تعیین است.

### ۱.۳.۲. معادله‌ی کشسانی

معادله‌ی کشسانی، بازشدگی ترک را با فشار خالص سیال داخل ترک با یک رابطه‌ی انتگرالی مربوط می‌سازد. رابطه‌ی انتگرالی به شکل رابطه‌ی ۱ و به صورت یک

## Archive of SID

که در آن  $\gamma(t), \Pi(\xi, t), \Omega(\xi, t), \xi = x/l(t) \in [0, 1]$  به ترتیب مختصات مکانی، بازشدگی ترک، فشار خالص و نیم طول مقیاس شده‌ی ترک است. لازم به ذکر است که «علامت بار» نشانه‌ی مقیاس‌سازی مجدد آن کمیت است. با به‌کارگیری تغییر متغیرهای رابطه‌ی ۶، معادلات ۱ الی ۵ به این صورت درمی‌آیند:

- معادله‌ی بقای جرم (رابطه‌ی ۷):

$$\frac{t\dot{V}}{V} \int_{\xi} \bar{\Omega} d\xi + \frac{t\dot{L}}{L} \xi \bar{\Omega} + t \int_{\xi} \left[ \dot{\bar{\Omega}} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \left( \bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi = \bar{\Omega} \bar{v} \int_{\xi} \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{\gamma^2} \quad (7)$$

- معادله‌ی مومنتم (رابطه‌ی ۸):

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = G_{\mu} \frac{\bar{v}}{\bar{\Omega}^2} \quad (8)$$

- معادله‌ی کشسانی و معیار انتشار ترک (رابطه‌ی ۹):

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = L^{-1} \{ \Pi \}(\xi, t) \\ \frac{4}{\pi} \int_{\xi} G(\xi, \xi') \Pi(\xi', t) d\xi', \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} (\lambda - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega} = G_k \gamma^{-1/2} \quad (9)$$

که در معادلات ۸ و ۹،  $G_{\mu}$  و  $G_k$  به صورت رابطه‌ی ۱۰ بیان می‌شوند:

$$G_k = \frac{K' L^2 \nu}{E' V}, \quad G_{\mu} = \frac{\mu' L^6}{E' t V^2} \quad (10)$$

پارامترهای مذکور بی‌بعد هستند و به آن پارامترهای مقیاس‌شده می‌گویند (برای توضیحات بیشتر در مورد پارامترها و روابط بین آن‌ها می‌توان به مرجع [۲] رجوع کرد). همان‌طور که در قبل اشاره شد، انرژی ورودی ناشی از تزریق سیال به واسطه‌ی رشد ترک به دو صورت اتلاف می‌شود: ۱. از طریق گرانروی سیال، ۲. از طریق چقرمگی محیط. اگر انرژی بیشتری به واسطه‌ی بالا بودن گرانروی سیال نسبت به مقدار سختی محیط اتلاف شود، در این صورت رژیم گرانروی حاکم است و  $G_{\mu}$  برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود و فراسنج‌های باقیمانده<sup>۲۱</sup> نیز با فرض ذکر شده تعیین می‌شوند (به جدول ۲ مراجعه شود). اگر بیشتر انرژی ورودی ناشی از بزرگی سختی محیط اتلاف شود، آنگاه رژیم سختی حاکم است که در این صورت  $G_k$  برابر ۱ است. با حذف یکی از کمیت‌ها در معادلات بی‌بعد شده، می‌توان مسئله را به صورت خاص بررسی کرد. در نهایت،  $t\dot{\gamma}/\gamma$  و  $t\dot{L}/L$  در معادلات ۷ را می‌توان با اپراتور زمان مطابق با به‌کارگیری رابطه‌ی ۱۱ جایگزین کرد:

$$t \frac{\partial}{\partial t} = \left( \frac{t\dot{G}_k}{G_k} \right) G_k \frac{\partial}{\partial G_k} + \left( \frac{t\dot{G}_{\mu}}{G_{\mu}} \right) G_{\mu} \frac{\partial}{\partial G_{\mu}} \quad (11)$$

که در آن، علامت نقطه در بالای فراسنج‌های مقیاسی به منظور مشتق آن نسبت به زمان  $t$  است. دو نوع مقیاس اشاره شده‌ی اخیر، شکل‌های خاصی از بیان یک دسته و یک نوع معادلات یکسان هستند. در واقع مقیاسی برای حل مسئله به کار

## ۴.۳.۲. شرایط مرزی، اولیه و معیار انتشار ترک

نرخ جریان سیال یا فلاکس عبوری  $q$  و بازشدگی ترک  $w$  در نوک ترک  $x = \pm l$  در تمام لحظات برابر صفر است. با استفاده از شرط  $q = 0$ ، در نوک ترک داریم:  $w^2 \frac{\partial P}{\partial x} = 0, x = \pm l$  نسبت به نوک ترک وجود نداشته باشد.

در محل تزریق  $x = 0$  نرخ جریان سیال یک ناپیوستگی وجود دارد که می‌توان مسئله را به صورت متقارن فرض کرد، یعنی:  $\lim_{x \rightarrow 0} q(x, t) = \frac{Q_0}{2}$ . در آن،  $Q_0$ ، دبی سیال، با نرخ ثابت تزریق می‌شود. از آنجایی که  $w > 0$  است، در نتیجه گرادینان و تغییرات فشار نسبت به طول در محل تزریق به صورت  $\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0^+} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0^-} < 0$  است:  $t = 0, P = 0, w = 0, \ell = 0$  مطابق با مکانیک شکست کشسان خطی برای مود شکست اول، بازشدگی ترک در رأس با عبارت حدی ریشه‌ی دوم بیان می‌شود (رابطه‌ی ۵):<sup>[۲۰]</sup>

$$w = \frac{K'}{E'} \sqrt{\ell - x} + O \left[ (\ell - x)^{3/2} \right], x \rightarrow \pm \ell \quad (5)$$

که در آن،  $E', \mu', K'$  به این صورت هستند:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \mu' = 12\mu, K' = 4 \left( \frac{\nu}{\pi} \right)^{1/2} K_I$$

شرط اضافی دیگری برای معیار رشد ترک نیاز است. با فرض اینکه ترک به شکل شبه استاتیکی گسترش می‌یابد، این شرط به صورت  $F = K_I - K_{IC}$  بیان می‌شود که در آن  $K_{IC}$  چقرمگی محیط است. اگر مقدار  $F$  مساوی صفر باشد، ترک در حالت تعادل حدی رشد خواهد کرد (ملاک در پژوهش حاضر) و اگر  $F$  بزرگ‌تر از صفر باشد، ترک به صورت دینامیکی رشد خواهد کرد و در نهایت اگر مقدار  $F$  کوچک‌تر از صفر باشد، در این صورت ترک رشد نمی‌کند و پایدار است.

## ۳. مقیاس‌سازی

یک مقیاس‌سازی مناسب برای حل یک مسئله باید دو ویژگی داشته باشد: اولاً، باید درک فیزیکی از مسئله‌ی انتشار ترک را فراهم سازد و ثانیاً، متغیرهای مسئله را کاملاً بی‌بعد سازد. به‌طور کلی، تحلیل ابعادی منجر به فشرده‌سازی، کاهش پیچیدگی و کاستن تعداد متغیرهای مؤثر یک دسته معادلات دیفرانسیل و انتگرالی حاکم در یک پدیده‌ی معین فیزیکی می‌شود. اگر پدیده‌ی  $n_1$  متغیر بعددار بستگی داشته باشد، تحلیل ابعادی تعداد متغیرها را به  $n_2$  متغیر بی‌بعد کاهش می‌دهد، که این کاهش به پیچیدگی مسئله بستگی دارد. به‌طور کلی هدف از بی‌بعد کردن یا مقیاس‌گذاری، کاهش متغیرها و گروه‌بندی آن‌ها به صورت بی‌بعد است.

مقیاس‌سازی در پژوهش حاضر بر پایه‌ی پژوهش‌های اولیه‌ی دتورنی،<sup>[۲۱]</sup> است: برای ساده‌سازی حل دسته‌ی معادلات ۱ الی ۵، برخی متغیرها به صورت روابط ۶ تغییر داده می‌شوند که سبب بی‌بعد و مقیاس شدن متغیرها می‌شود که نتیجتاً حل مسئله ساده‌تر می‌شود.<sup>[۲۳-۲۱، ۲۲، ۲۴]</sup>

$$w(x, t) = \varepsilon(t) L(t) \Omega(\xi, t), \ell(t) = L(t) \gamma(t), \\ P(x, t) = \varepsilon(t) E' \Pi(\xi, t), \varepsilon(t) = L^{-1}(t) V(t), \\ v(x, t) = t^{-1} L(t) \vartheta(\xi, t), \bar{v}(\xi, t) = \vartheta(\xi, t) / \gamma(t) \\ \bar{\Omega}(\xi, t) = \Omega(\xi, t) / \gamma(t) \quad (6)$$

جدول ۲. فراسنج کوچک و طول مقیاس شده برای ۲ رژیم سختی و گرانروی و مقادیر فراسنج های تغییر یافته.

کمیت		طول مقیاس شده (L)		فراسنج کوچک (ε)	
گرانروی (Gμ)	سختی (Gk)				
$K = \frac{\mu' Q \cdot E'^{\frac{1}{2}}}{K'^{\frac{1}{2}}}$	۱	$\left(\frac{E' Q \cdot t}{K'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{K'^{\frac{1}{2}}}{E'^{\frac{1}{2}} Q \cdot t}\right)^{\frac{1}{2}}$	سختی، (k)	
۱	$M = \left(\frac{K'^{\frac{1}{2}}}{E'^{\frac{1}{2}} \mu' Q}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{E' Q^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}{\mu'}\right)^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{\mu'}{E' t}\right)^{\frac{1}{2}}$	گرانروی (M)	

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} M^m f_m(\xi),$$

$$f(\xi) = \{\bar{\Omega}(\xi), \Pi(\xi), \gamma\} \quad (15)$$

برای راحتی کار، مجهولات و یا همان دسته جواب های مقیاس شده به صورت f نمایش داده می شوند. با به کارگیری معادله ی ۱۱، معادلات ۷ الی ۹ در مقیاس سختی به صورت معادلات ۱۶ الی ۱۸ به دست می آیند:

$$\int_{\xi} \bar{\Omega} d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \xi \bar{\Omega} = \bar{\Omega} \bar{\nu} \int \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{\gamma^2}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = -M \frac{\bar{\nu}}{\Omega^2} \quad (17)$$

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = L^{-1} \{\Pi\}(\xi, t),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega} = \gamma^{-1/2} \quad (18)$$

با جای گذاری رابطه ی ۱۵ در معادلات ۱۶ الی ۱۸ و مرتب کردن آن ها براساس ضرایب ۱، M، M<sup>۲</sup> و ... در مقیاس سختی (G<sub>k</sub> = ۱)، روابط ۱۹ الی ۲۲ را خواهیم داشت:  
 -- ترم صفر f<sub>۰</sub>(ξ):

$$1 : \int_{\xi} \bar{\Omega}_0 d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \xi \bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}_0 \bar{\nu}_0,$$

$$\gamma_0^{-2} = \gamma^2 \int \bar{\Omega}_0 d\xi \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} = 0,$$

$$\bar{\Omega}_0(\xi) = L^{-1} \{\Pi_0\}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_0 = \gamma_0^{-1/2} \quad (19)$$

-- ترم اول f<sub>۱</sub>(ξ):

$$M : \int_{\xi} \bar{\Omega}_1 d\xi + \frac{1}{\gamma^2} \xi \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_1 \bar{\nu}_1 + \bar{\Omega}_0 \bar{\nu}_1,$$

$$\gamma_1 = -\gamma^2 \int \bar{\Omega}_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} = -\frac{\bar{\nu}_1}{\Omega^2},$$

$$\bar{\Omega}_1(\xi) = L^{-1} \{\Pi_1\}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_1 = -\frac{1}{\gamma} \gamma_1 \gamma_0^{-2/2} \quad (20)$$

گرفته می شود که اثر فراسنج مربوط به آن مقیاس غالب باشد. مقیاس کردن چیزی جزء پیوند بین فراسنج های اساسی مسئله نیست، بنابراین دور از انتظار نیست که فراسنج های بی بعد و مقیاس شده مطابق با رابطه ی ۱۲ در رژیم های مختلف با هم ارتباط داشته باشند.

$$K = M^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

همچنین می توان ارتباطی بین مقیاس های مختلف طولی و فراسنج های کوچک در دو رژیم یافت (روابط ۱۳):

$$\frac{L_M}{L_k} = K^{\frac{1}{2}} = M^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\epsilon_M}{\epsilon_k} = K^{\frac{1}{2}} = M^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

#### ۴. ایده و روش حل

در پژوهش حاضر، از روش اغتشاش (PM)<sup>[۲۲]</sup> برای یافتن جواب تقریبی انتشار صفحه یی ترک هیدرولیکی استفاده می شود. روش اغتشاش موقعی برای حل معادلات غیرخطی به کار می رود که یک فراسنج کوچک در معادلات وجود داشته باشد. با توجه به وجود دو فراسنج بی بعد G<sub>μ</sub> و G<sub>k</sub> در معادلات غیرخطی، روش اغتشاش به کمک مثلث خیام - پاسکال<sup>[۲۴]</sup> مطابق با معادله ی ۱۴ توسعه داده شد:

$$f(\xi, G_i) = \{\bar{\Omega}(\xi, G_i), \Pi(\xi, G_i), \gamma(G_i)\}, \quad i = k, \mu, \rho$$

$$f(\xi, G_i) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n \\ i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3, \text{ or } k, \mu, \rho}} (G_{i_1} G_{i_2} \dots G_{i_n} f^{(i_1 i_2 \dots i_n)}(\xi)) \quad (14)$$

#### ۵. حل در مقیاس سختی با نرخ تزریق ثابت

در بخش حاضر، به حل مسئله ی ترک هیدرولیکی در دو حالت اشاره شده با شرط کرنش صفحه یی (KGD) و شعاعی در مقیاس سختی و با گرانروی کوچک M ≪ ۱ پرداخته شده است. حل در رژیم سختی از دو منظر، اهمیت کاربردی دارد: (۱) استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی توسط تزریق سیال با گرانروی کم انجام می شود،<sup>[۱]</sup> که ارتباط تحلیل این الگو با کاربرد شکست هیدرولیکی را در رژیم سختی تضمین می کند. (۲) در مقیاس های آزمایشگاهی، اغلب، رژیم سختی حاکم است و معمولاً اثر گرانروی ناچیز است، حتی اگر در آزمایش از یک سیال با گرانروی زیاد استفاده شود. در مقیاس ذکر شده، G<sub>k</sub> = ۱ است و متعاقباً حل در مقیاس سختی، با استفاده از روش اغتشاش به پارامتر گرانروی M = G<sub>μ</sub> بستگی دارد. بنابراین رابطه ی ۱۴ در حل مقیاس سختی به صورت رابطه ی ۱۵ کاهش می یابد:

$$-\frac{4}{\pi^{1/2}} \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \sqrt{1 - \xi^2} - \sqrt{\xi^2}} \right),$$

$$\gamma_1 = -\frac{32(1 + 6 \ln 2)}{9\pi^{5/2}} \quad (24)$$

ترم‌های  $f_0(\xi)$  و  $f_1(\xi)$  به ترتیب ترم‌های مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی اول هستند که در مرجع [1] به تفسیر در مورد حل آن‌ها بحث و بررسی شده است. برای تعیین ضرایب ترم‌های بالاتر از بسط ۱۵، مثلاً برای مقادیر  $m \geq 2$ ، محاسبه‌ی ترم‌های ذکر شده به دلیل برخورد با انتگرال‌های تکینه، به روش تحلیلی بسیار پیچیده و غیرممکن به نظر می‌رسد؛ بنابراین در پژوهش حاضر، انتگرال‌های مذکور به روش عددی محاسبه و سپس برای تعیین تابع حاصل از انتگرال، از روش درون‌یابی<sup>۲۳</sup> استفاده شده است. در نهایت، با تعیین ترم‌های ذکر شده، میزان بازشدگی، طول رشد و فشار بر روی ترک تعیین شده است. به‌طور مثال بازشدگی مقیاس شده از رابطه‌ی ۲۵ تعیین می‌شود:

$$\Omega(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \bar{\Omega}_m(\xi) \times \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \gamma_m \quad (25)$$

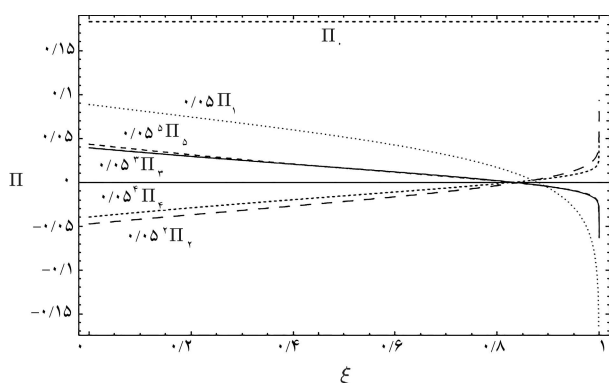
## ۶. بحث و نتایج

مقادیر فشار خالص سیال در نقطه‌ی محل تزریق ترک  $\Pi_0[m]$ ، برحسب ترم‌های مختلفی از مقادیر  $m$  در جدول ۳ ارائه شده است. اگرچه جدول ۳، یک افزایش در مقادیر فشار، با افزایش درجه‌ی  $m$  را در محل تزریق نشان می‌دهد، ولی به دلیل فرض کوچک ماندن فراسنج گرانروی، توان مرتبه‌ی  $m$  آن‌ها بسیار کوچک است و آثار ترم‌های بالاتر به تناسب کاهش می‌یابد. شکل ۲، ترم‌های مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌های اول تا سوم فشار خالص سیال داخل ترک (II)، را در طول پروفایل ترک نشان می‌دهد.

جدول ۳. ضرایب محاسبه شده از ترم  $O(\mathcal{M}^m)$ ،  $\{0, 1, \dots, 5\}$  در  $m \rightarrow$  معادله‌ی ۱۵ از فشار خالص مقیاس شده در محل تزریق سیال  $\Pi_0[m]$ .

$\Pi_0[m]_{\downarrow}$	$m$	$\Pi_0[m]_{\downarrow}$	$m$
۳۱۴٫۹۴۵۷۶۳	۳	۰٫۱۸۳۰۷۴	۰*
-۶۳۱۱٫۳۵۱۴	۴	۱٫۷۷۵۲۱۹	۱
۱۳۹۴۰۶٫۹۸۰	۵	-۱۸٫۹۴۰۴۰۰	۲

\* این مقدار در مرجع [1] محاسبه شده است.



شکل ۲. ترم‌های مرتبه‌ی صفر و بدون ماند مرتبه‌های اول تا پنجم فشار خالص سیال داخل ترک (II).

$$\mathcal{M}^1 : \int_{\xi} \bar{\Omega}_r d\xi + \frac{1}{\pi} \xi \bar{\Omega}_r$$

$$= \bar{\Omega}_r \bar{\vartheta}_0 + \bar{\Omega}_1 \bar{\vartheta}_1 + \bar{\Omega}_2 \bar{\vartheta}_2$$

$$\gamma_2 = \frac{3\gamma_1^2}{2\gamma_0} - \gamma_0^2 \int \bar{\Omega}_1 d\xi,$$

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial \xi} = \frac{-\bar{\vartheta}_1 \bar{\Omega}_0 + 2\bar{\vartheta}_2 \bar{\Omega}_1}{\bar{\Omega}_r^2}$$

$$\bar{\Omega}_r(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_r \}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_r = \frac{1}{\lambda} (3\gamma_1^2 - 4\gamma_0 \gamma_2) \gamma_0^{-5/2}. \quad (21)$$

-- ترم سوم  $(f_3)(\xi)$ :

$$\mathcal{M}^1 : \int_{\xi} \bar{\Omega}_r d\xi + \frac{1}{\pi} \xi \bar{\Omega}_r$$

$$= \bar{\Omega}_r \bar{\vartheta}_0 + \bar{\Omega}_2 \bar{\vartheta}_1 + \bar{\Omega}_1 \bar{\vartheta}_2 + \bar{\Omega}_0 \bar{\vartheta}_3,$$

$$\gamma_3 = -\frac{2\gamma_1^3}{\gamma_0^2} + \frac{3\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0} - \gamma_0^2 \int \bar{\Omega}_2 d\xi,$$

$$\frac{\partial \Pi_r}{\partial \xi} = \frac{-\bar{\vartheta}_2 \bar{\Omega}_0^2 + 2\bar{\vartheta}_1 \bar{\Omega}_1 \bar{\Omega}_0}{\bar{\Omega}_r^3}$$

$$+ \frac{-3\bar{\vartheta}_0 \bar{\Omega}_1^2 + 2\bar{\vartheta}_0 \bar{\Omega}_2 \bar{\Omega}_r}{\bar{\Omega}_r^3}$$

$$\bar{\Omega}_r(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_r \}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_r$$

$$= \frac{1}{16} (-5\gamma_1^2 + 12\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 - 8\gamma_0^2 \gamma_3) \gamma_0^{-7/2} \quad (22)$$

دسته‌ی معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی اخیر به صورت متوالی از رابطه‌های ۱۹ الی ۲۲ حل می‌شوند. برای مختصرسازی در بخش حاضر از آوردن جزئیات و روند حل صرف نظر شده است:

$$\bar{\Omega}_0 = \frac{1}{\pi} \pi^{1/2} \sqrt{1 - \xi^2},$$

$$\Pi_0 = \frac{\pi^{1/2}}{\lambda}, \gamma_0 = \frac{2}{\pi^{1/2}},$$

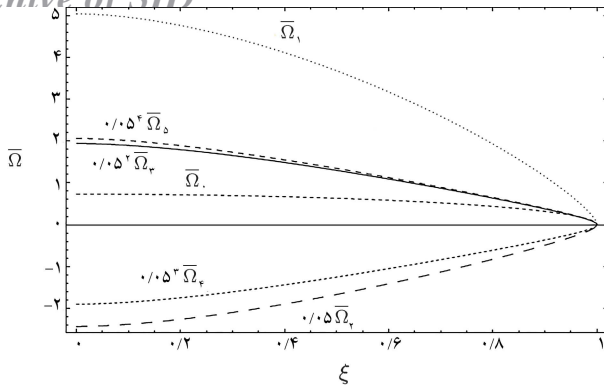
$$\bar{\vartheta}_0 = \frac{1}{\pi} \xi + \frac{1}{2} \frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (23)$$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda}{3\pi^{1/2}} \left( \frac{1}{24} + \ln \left( 4\sqrt{1 - \xi^2} \right) \right)$$

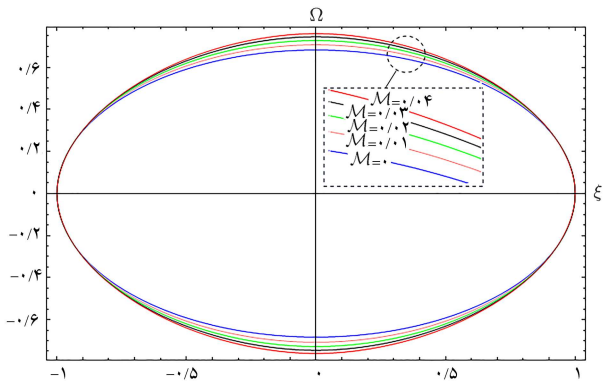
$$- \frac{3\xi \cos^{-1}(\xi)}{4\sqrt{1 - \xi^2}},$$

$$\bar{\Omega}_1 = \frac{\lambda}{3\pi^{1/2}} \left( 2\pi - 4\xi \sin^{-1}(\xi) \right)$$

$$- \frac{\lambda}{3\pi^{1/2}} \left( \frac{5}{6} - \ln 2 \right) \sqrt{1 - \xi^2}$$



شکل ۴. ترم‌های مرتبه‌ی صفر و بدون ماند مرتبه‌های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ( $\bar{\Omega}$ ).



شکل ۵. بازشدگی ترک ( $\bar{\Omega} = \gamma \bar{\Omega}$ ), بر حسب مقادیر مختلفی از فرانسج گرانروی ( $M$ ).

## ۷. تبدیلات اویلری و اعتبارسنجی

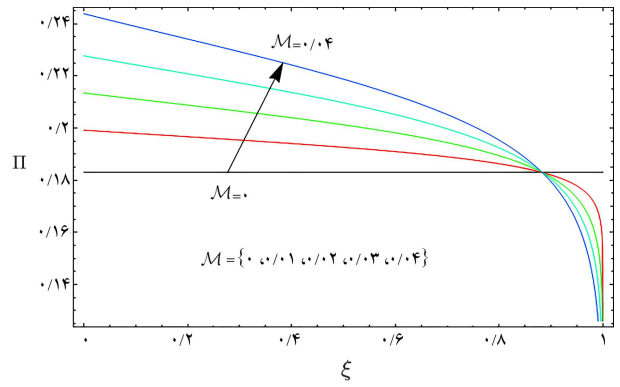
همان‌طور که اشاره شد، برای به کارگیری روش اغتشاش، بسط ضریب طول نیم ترک، فشار و بازشدگی در حالت مقیاس شده به صورت رابطه‌ی ۲۶ است:

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} M^m f_m, f(\xi) = \{\bar{\Omega}(\xi), \Pi(\xi), \gamma\} \quad (26)$$

برای تعیین جملات بیشتری از بسط مذکور، باید ضرایب ترم‌های بالاتر تعیین شود که محاسبه‌ی آن‌ها به دلیل برخورد با انتگرال‌های تکیه به روش تحلیلی بسیار پیچیده است. بنابراین در بخش حاضر، انتگرال‌های تکیه به روش عددی محاسبه و سپس برای تعیین تابع حاصل از انتگرال، از روش درون‌یابی استفاده شده است که نتایج آن در جدول ۵ خلاصه شده و در آن  $\bar{\Omega}_0[m]$  و  $\Pi_0[m]$  به ترتیب میزان بازشدگی و فشار سیال در حالت مقیاس شده در محل تزریق هستند.

شکل ۶، مقایسه‌ی بین ضریب طول محاسبه شده با روش اشاره شده‌ی اخیر و روش عددی در مرتبه‌ی صفر، یک و بالاتر را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، شعاع هم‌گرایی با مقایسه‌ی روش عددی در مرتبه‌ی اول حدوداً  $0.1^\circ$  و در مراتب بالاتر  $O(M^{15})$  برابر با  $0.3^\circ$  است.

با افزایش ترم‌ها، نه فقط تأثیر چشمگیری در شعاع هم‌گرایی ایجاد نشد، بلکه دینتر گرفتن آن، مسئله را پیچیده‌تر و زمان محاسبات را طولانی‌تر خواهد کرد. بنابراین، برای افزایش شعاع هم‌گرایی سری و کاهش زمان محاسبات از یک روش استاندارد [۲۴]، استفاده می‌شود که تأثیر به سزایی در کاهش اختلاف بین روش‌های



شکل ۳. فشار خالص سیال داخل ترک ( $\Pi$ ), بر حسب مقادیر مختلفی از فرانسج گرانروی  $M$ .

جدول ۴. ضرایب محاسبه شده از ترم  $O(M^m)$ ,  $\{0, 1, \dots, 4\}$ , در معادله‌ی ۱۵ از بازشدگی مقیاس شده در محل تزریق سیال  $\bar{\Omega}_0[m]$ .

$\bar{\Omega}_0[m]$	$m$	$\bar{\Omega}_0[m]$	$m$
۷۷۸,۶۲۱۲۹۹	۳	۰,۷۳۲۲۹۶	۰*
-۱۵۲۲۶,۹۸۰	۴	۵,۰۵۱۷۵۱	۱
۳۳۰۸۶۷,۷۰۴	۵	-۴۸,۷۲۱۸۰۲	۲

\* این مقدار در مرجع [۱] محاسبه شده است.

محاسبه‌ی ضرایب ترم‌های بالاتر به دلیل پیچیدگی دسته‌ی معادلات و برخورد با انتگرال‌های تکیه به روش تحلیلی غیرممکن است؛ بنابراین، در پژوهش حاضر آن‌ها به روش عددی محاسبه شده‌اند. لازم به ذکر است که در روش اغتشاش برای تعیین ترم‌های بالاتر، نیاز به داشتن تابعی از ترم‌های پایین‌تر جواب‌هاست. لذا، برای تعیین تابع حاصل از حل عددی انتگرال، با استفاده از روش درون‌یابی، تابع مراتب پایین‌تر با درجه‌ی از تقریب تعیین شده است.

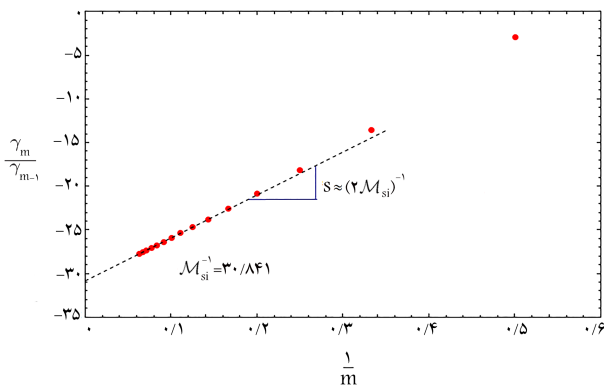
شکل ۳، فشار خالص مقیاس شده‌ی سیال بر روی سطوح ترک ( $\Pi$ ), از حل مرتبه‌ی سه با فرانسج گرانروی مختلف  $M = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4\}$  را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مذکور با افزایش فرانسج گرانروی ( $M$ ), میزان فشار خالص در محل تزریق افزایش یافته و در نوک آن سیر نزولی داشته است. این اثر مطابق با قاعده‌ی برنولی قابل توجیه است. [۲۲]

به‌طور مشابه، مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه‌ی محل تزریق ترک ( $\bar{\Omega}(0)$ ), بر حسب ترم‌های مختلفی از مقادیر  $m$  در جدول ۴ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرایند مشابهی همانند ترم‌های فشار، در مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه‌ی محل تزریق ترک وجود دارد. یعنی با افزایش درجه‌ی  $m$ , مقادیر بازشدگی ذکر شده  $\bar{\Omega}(0)$  افزایش می‌یابد، ولی در نهایت آثار ترم‌های بالاتر به دلیل کوچک فرض کردن فرانسج  $M$  کاهش می‌یابد.

شکل ۴، ترم‌های مرتبه‌ی صفر، مرتبه‌های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ترک (تتا) را نشان می‌دهد. در تمام ترم‌های مذکور، شرط مرزی در نوک ترک (میزان بازشدگی در آن نقطه برابر با صفر است) ارضاء شده است.

محاسبه‌ی ضرایب ترم‌های ذکر شده با حل پیوسته‌ی معادلات حاکم در حالت مقیاس شده از روش اغتشاش تعیین شده است که در ادامه، به چگونگی اثربخشی آن‌ها در میزان بازشدگی از لحاظ کیفی و کمی پرداخته شده است. شکل ۵ نشان می‌دهد که به‌طور کلی افزایش گرانروی سیال موجب افزایش بازشدگی و کاهش میزان رشد شده است.

$\bar{\Omega}_{\circ[m]} \times 10^5 m$	$\Pi_{\circ[m]} \times 10^5 m$	$\gamma_m \times 10^5 m$	$m$
+۰٫۷۳۲۲۹۵۹	+۰٫۱۸۳۰۷۴	+۰٫۹۳۲۳۸۸۲	$m = 0$
+۰٫۲۵۲۵۸۷۵	+۰٫۰۸۸۷۶۰۹	-۰٫۱۳۶۰۹۷۵	$m = 1$
-۰٫۱۲۱۸۰۴۵	-۰٫۰۴۷۳۵۱۰	+۰٫۰۹۲۵۰۱۱	$m = 2$
+۰٫۰۹۷۳۲۷۷	+۰٫۰۳۹۳۶۸۲	-۰٫۰۸۳۹۹۷۳	$m = 3$
+۰٫۰۹۵۱۶۸۶	-۰٫۰۳۹۴۴۵۹	+۰٫۰۸۷۵۲۴۴	$m = 4$
+۰٫۱۰۳۳۹۶۲	+۰٫۰۴۳۵۶۴۷	-۰٫۰۹۸۸۰۰۵	$m = 5$
-۰٫۱۱۹۸۹۶۶	-۰٫۰۵۱۱۱۶۴	+۰٫۱۱۷۵۳۹۷	$m = 6$
+۰٫۱۴۵۳۳۳۹	+۰٫۰۶۲۵۱۴۸	-۰٫۱۴۵۱۱۸۷	$m = 7$
-۰٫۱۸۱۹۲۵۸	-۰٫۰۷۸۷۹۹۸	+۰٫۱۸۴۱۸۷۶	$m = 8$
+۰٫۲۳۳۳۵۶۷	+۰٫۱۰۱۶۴۰۸	-۰٫۲۳۸۸۲۵۸	$m = 9$
-۰٫۳۰۵۱۱۷۱	-۰٫۱۳۳۵۰۳۸	+۰٫۳۱۴۹۹۲۳	$m = 10$
+۰٫۴۰۵۱۵۳۵	+۰٫۱۷۷۹۴۹۱	-۰٫۴۲۱۲۶۲۶	$m = 11$
-۰٫۵۴۴۸۷۲۱	-۰٫۲۴۰۰۸۴۸	+۰٫۵۶۹۹۳۰۶	$m = 12$
+۰٫۷۴۰۶۲۰۳	+۰٫۳۲۷۲۳۴	-۰٫۷۷۸۶۲۲۸	$m = 13$
-۱٫۰۱۵۸۴۸۱	-۰٫۴۴۹۹۰۷۴	۱٫۰۷۲۶۴۷۵	$m = 14$
+۱٫۴۰۴۲۵۳۹	+۰٫۶۲۳۲۱۸۴	-۱٫۴۸۸۴۱۵۳	$m = 15$

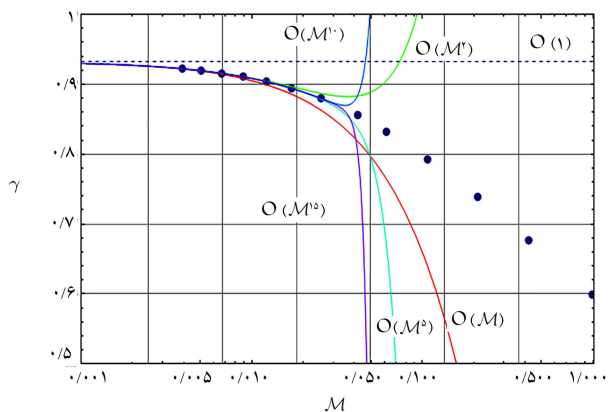
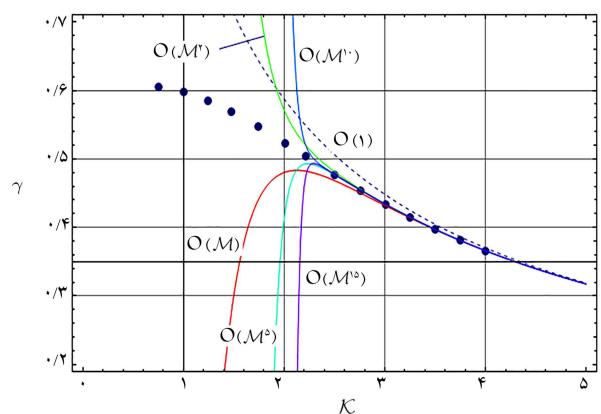


شکل ۷. نمودار Domb-Sykes برای اصلاح سری طول ترک مقیاس شده با گرانروی کوچک (رابطه‌ی ۴-۱ الف).

اغتشاش و عددی، [۱۳] در مقادیر بزرگ‌تری از فراسنج گرانروی دارد. این اختلاف ناشی از شرایط تکینگی نوک ترک است. برای حذف تکینگی و برای به کارگیری روش اصلاح از تبدیل اویلر<sup>۲۵</sup> استفاده می‌شود. همچنین تبدیل اویلر باعث افزایش هم‌گرایی می‌شود (رابطه‌ی ۲۷):

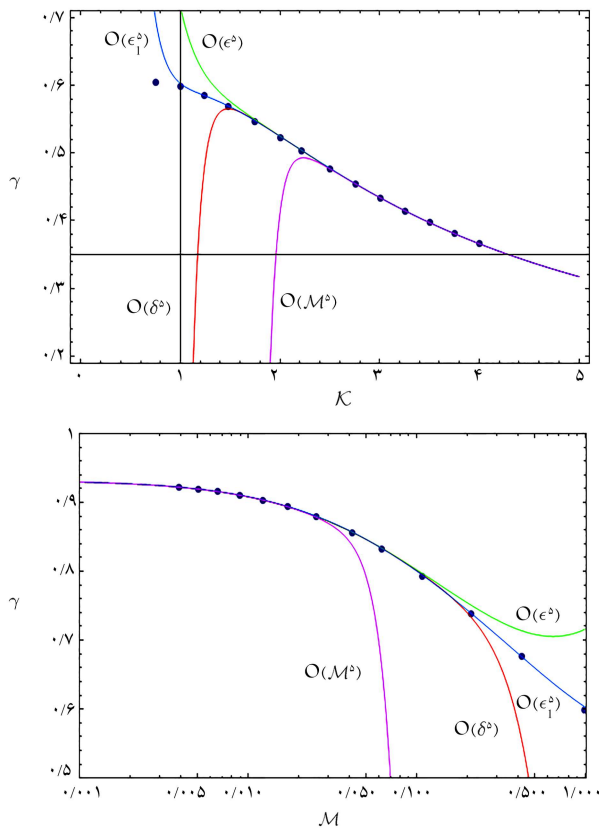
$$\delta(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{M}}{(1 + \mathcal{M}/\mathcal{M}_{si})^\alpha}, \alpha \approx \frac{1}{2}, \mathcal{M}_{si} = 0.324 \quad (27)$$

مقادیر  $\alpha$  و  $\mathcal{M}_{si}$  از رسم نمودار Domb-Sykes بر حسب  $1/m$ ،  $m = 1, 2, \dots, 15$  مطابق با شکل ۷ تعیین شده است. مقدار عرض از مبدأ برابر با  $\mathcal{M}_{si}^{-1}$  و مقدار  $\alpha = S\mathcal{M}_{si} - 1$  است که  $S$  در آن شیب خط رگرسیون است. با معکوس کردن رابطه‌ی ۲۷،  $\mathcal{M}(\delta)$  و سپس جای‌گذاری آن در رابطه‌ی ۲۶، رابطه‌ی ۲۸



شکل ۶. مقایسه‌ی ضریب طول مقیاس شده از حل گرانروی کوچک و ماند صفر با تقریب‌های مختلف و نتایج عددی [۱۳] (در شکل به صورت نقاط دایره‌ی توپر مشاهده می‌شود).





شکل ۸. مقایسه‌ی طول مقیاس شده از حل گرانیوی کوچک و ماند صفر با اعمال تبدیل‌های مختلف از روابط ۲۸ و ۲۹ در تقریب مرتبه‌ی پنجم و نتایج عددی مرجع [۱۳] (در شکل به صورت نقاط دایره‌یی توپر نمایش داده شده است).

### ۸. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روش تحلیلی اغتشاش گسترش یافته برای تعیین میزان انتشار بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در سنگ‌های شکننده در حالت کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. مجهولات به طور مقیاس شده و با روابط معکوس مقیاس به این صورت تعیین شده‌اند:

$$\ell(t) = \left(\frac{E'Q_0 t}{K'}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \{\varepsilon_l(\mathcal{M})\}^m \gamma_m,$$

$$w(x, t) = \left(\frac{K'^2 Q_0 t}{E'^2}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \{\varepsilon_l(\mathcal{M})\}^m \gamma_m$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \{\varepsilon_l(\mathcal{M})\}^m \bar{\Omega}_m\left(\frac{x}{\eta(t)}\right),$$

$$P(x, t) = \left(\frac{K'^2}{E'Q_0 t}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \{\varepsilon_l(\mathcal{M})\}^m \Pi_m\left(\frac{x}{\ell(t)}\right),$$

$$\varepsilon_l(\mathcal{M}) = \ln\left(1 + \frac{\mathcal{M}}{\sqrt{1 + \mathcal{M}/0.324}}\right),$$

$$\mathcal{M} = \left(\frac{K'^2}{E'^2 \mu' Q_0}\right)^{1/2}$$

بررسی‌های انجام شده برای محدوده‌ی  $1 \leq K \leq 4$  اعتبار دارد. به‌طورکلی افزایش گرانیوی سیال موجب افزایش بازشدگی و کاهش میزان رشد و همچنین باعث

جدول ۶. مقادیر عددی ضرایب طول نیم ترک  $\gamma\delta[m]$  مقیاس شده‌ی اصلاح شده از مرتبه‌ی  $O(\delta^m)$ .

$\gamma\delta[m]$	$m$	$\gamma\delta[m]$	$m$
+۱۲,۳۹۶۳۱۳۶	$m = 8$	+۰,۹۳۲۳۸۸۲	$m = 0$
-۷۸,۷۵۶۵۰۷۰	$m = 9$	-۰,۴۹۰۱۳۴۱	$m = 1$
-۶۹,۶۸۳۴۶۴۱	$m = 10$	-۰,۱۶۱۲۶۳۸	$m = 2$
+۴۵۱,۸۷۹۷۲۹	$m = 11$	+۰,۸۴۹۶۵۴۸	$m = 3$
+۴۱۳,۷۵۸۷۱۴۴	$m = 12$	+۰,۵۴۰۳۷۳۵	$m = 4$
-۲۷۲۴,۲۶۷۳۳۸۹	$m = 13$	-۳,۱۲۶۹۹۱۹۳	$m = 5$
-۲۵۶۸,۰۸۲۴۱۰۴	$m = 14$	-۲,۴۰۰۸۲۵۴	$m = 6$
+۱۶۹۲۳,۸۴۱۱۹۶۸	$m = 15$	۱۴,۷۶۶۴۶۳۴	$m = 7$

به‌دست می‌آید:

$$f(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta(\mathcal{M})^m f_m, f(\xi) = \{\bar{\Omega}(\xi), \Pi(\xi), \gamma\} \quad (28)$$

در جدول ۶، به‌طورمثال مقادیر عددی ضرایب طول نیم ترک اصلاح شده  $\gamma\delta[m]$  ارائه شده است. مسلماً همان‌طور که مشاهده می‌شود، تبدیل  $O(\varepsilon_l^2)$  دقت بسیار بالایی برای رنج‌های بزرگ‌تر از گرانیوی هم‌گرا دارد و به روش عددی آداجی نزدیک‌تر است. همچنین در شکل ۸، مقایسه‌یی بین نیمه طول ترک در سه حالت عددی، بسط بر حسب  $\mathcal{M}$  و  $\delta$  بسط (اصلاح شده) در مرتبه‌های مختلف انجام شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تبدیل اویلر به‌طور چشم‌گیری باعث افزایش هم‌گرایی تا شعاع ۰/۲ شده است.

در پژوهش حاضر، برای افزایش هم‌گرایی مجدداً از دو تبدیل دیگر استفاده شده است (روابط ۲۹):

$$\varepsilon(\delta) = \frac{\delta}{(1 + \delta/\delta_{si})^\beta}, \quad \beta = 1, \delta_{si} = 1$$

$$\varepsilon_l(\delta) = \ln \frac{\delta_{si} + \delta}{\delta_{si}}, \quad \delta_{si} = \frac{1}{6} \quad (29)$$

همچنین ضرایب  $\beta$ ،  $\delta_{si}$  و  $\delta_{isi}$  مطابق روش مشابه قبل تعیین می‌شود. همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، اعمال تبدیل‌های اخیر باعث هم‌گراشدن تا شعاع نزدیک ۱ است و تطابق بسیار نزدیکی با روش عددی (نقاط توپر در شکل ۸) دارد. این لازم به ذکر است که در شکل ۸، خط  $O(\mathcal{M}^5)$  مربوط به مطالعات پژوهشی گاراگاش است و بقیه‌ی خطوط مربوط به پژوهش حاضر است. بنابراین راه‌حل پیشنهادی قادر است که رشد ترک را هم در محدوده‌ی میانی رژیم سختی - گرانیوی پیش‌بینی کند.

کد برنامه‌ی مذکور در محیط Mathematica توسط دمتری گاراگاش نوشته شده و در پژوهش حاضر بازنویسی و گسترش داده شده است. لازم به ذکر است که مقایسه و کنترل بازشدگی و فشار خالص مقیاس شده در حالت تبدیل اویلری با روش عددی آداجی [۱۳] نیز تطابق بسیار خوبی نسبت به یکدیگر دارند که در پژوهش حاضر به دلیل مختصرسازی از ارائه‌ی آن‌ها خودداری شده است.

- افزایش میزان فشار خالص در محل تزریق می‌شود و در نوک آن سیر نزولی دارد. در پایان با مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با پژوهش آداجی (۲۰۰۱)، [۱۳] می‌توان دریافت که نوشتار حاضر، اعتبار کافی دارد.
- تقدیر و تشکر**
- نویسندگان از راهنمایی‌های ارزنده‌ی پروفسور دمتری گاراگاش (Dmitry I. Garagash) از دانشگاه Dalhousie کانادا در دوره‌ی فرصت مطالعاتی برای واضح‌تر شدن روند پژوهش حاضر سپاسگزارند.
- فهرست علائم**
- $x$ : مختصات طولی معمولاً در جهت رشد ترک؛  
 $s$ : فرانسنج کمکی هم‌بعد با فرانسنج  $x$ ؛  
 $\xi$ : موقعیت مکانی بی‌بعد شده؛  
 $\xi'$ : فرانسنج کمکی مکانی بی‌بعد شده (شکل بی‌بعد شده فرانسنج  $s$ )؛  
 $l$ : طول ترک؛  
 $E$ : مدول یانگ یا کشسانی محیط؛  
 $E'$ : مدول یانگ موثر؛  
 $\nu$ : ضریب پواسون؛  
 $K_{Ic}$ : چقرمگی؛  
 $\mu$ : گرانروی یا لزجت دینامیکی سیال؛  
 $\rho$ : جرم مخصوص سیال؛  
 $Q_0$ : نرخ حجمی تزریق؛  
 $t$ : زمان؛
- $V$ : حجم سیال تزریقی؛  
 $\sigma_0$ : کمینه تنش برجا؛  
 $\sigma_{max}$ : بیشینه تنش برجا؛  
 $w$ : بازشدگی ترک؛  
 $p$ : فشار خالص سیال بر سطح ترک؛  
 $p_f$ : فشار سیال بر سطح ترک؛  
 $G(x, s)$ : تابع کرنل در معادله‌ی کشسانی؛  
 $v_x$ : سرعت سیال در جهت  $x$ ؛  
 $q$ : نرخ جریان سیال؛  
 $K_I$ : شدت تنش در مود اول در نوک ترک؛  
 $\mu'$ : گرانروی دینامیکی موثر سیال؛  
 $K'$ : چقرمگی موثر محیط (سنگ)؛  
 $\varepsilon$ : فرانسنج کوچک؛  
 $\gamma$ : ضریب طول مقیاس شده و بدون بعد؛  
 $L$ : مقیاس طول؛  
 $\Omega$ : بازشدگی بی‌بعد شده ترک؛  
 $\bar{\Omega}$ : بازشدگی مقیاس شده مجدد؛  
 $\Pi$ : فشار بی‌بعد شده در سطح ترک؛  
 $G_\mu$ : فرانسنج بی‌بعد شده‌ی گرانروی؛  
 $G_k$ : فرانسنج بی‌بعد شده‌ی سختی؛  
 $M_k$ : فرانسنج گرانروی در مقیاس سختی؛  
 $K_m$ : فرانسنج سختی در مقیاس گرانروی؛  
 $L_m$ : طول بی‌بعد ترک در مقیاس گرانروی؛  
 $L_k$ : طول بی‌بعد ترک در مقیاس سختی؛  
 $\bar{\nu}$ : سرعت سیال بی‌بعد شده؛  
 $\bar{\nu}$ : سرعت سیال مقیاس شده مجدد.

## پانوشتها

1. Khristianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD)
2. penny shape or radial
3. perkins and kern; nordgern (PKN)
4. self-similar solution
5. finite toughness
6. square-root tip asymptote
7. stress intensity factor
8. similarity variable
9. crack inlet
10. zero toughness
11. tip asymptote
12. M-vertex solution
13. logarithmic singularity
14. K-vertex solution
15. MK-edge solution
16. Linear elastic fracture mechanics (LEFM)
17. lag

18. process zone
19. lubrication approximation
20. poiseuille equation
21. evolution parameters
22. perturbation method
23. interpolation
24. domb-sykes
25. Euler transformation

## منابع (References)

1. Garagash, D.I. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness", *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(4), pp. 456-481 (2006)
2. Asgari, A. "Hydraulic fracture propagation in brittle rock: Based on hydro-mechanical model", PhD Thesis, Tarbait Modares University, Tehran (2016).

3. Khristianovic, S. and Zheltov, Y. "Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids", In Proc. 4th World Petroleum Congress, Rome (1955).
4. Barenblatt, G.I. "The formation of equilibrium cracks during brittle fracture, General ideas and hypotheses, Axially-symmetric cracks", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **23**(3), pp. 622-636 (1959).
5. Perkins, T. and Kern, L. "Widths of hydraulic fractures", *Journal of Petroleum Technology*, **13**(09), pp. 937-949 (1961).
6. Geertsma, J. and De Klerk, F. "A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures", *Journal of Petroleum Technology*, **21**(12), pp. 1571-1581 (1969).
7. Nordgren, R. "Propagation of a vertical hydraulic fracture", *Society of Petroleum Engineers Journal*, **12**(04), pp. 306-314 (1972).
8. Geertsma, J. and Haafkens, R. "A comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures", *Journal of Energy Resources Technology*, **101**(1), pp. 8-19 (1979).
9. Spence, D. and Sharp, P. "Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow", *Proceedings of the Royal Society of London, A. Mathematical and Physical Sciences*, **400**(1819), pp. 289-313 (1985).
10. Nilson, R. "Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven into a permeable medium by a constant inlet pressure", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **12**(5), pp. 477-495 (1988).
11. Carbonell, R.S. "Self-similar solution of a fluid-driven fracture in a zero toughness elastic solid", Proc. Roy. Soc., London (1996).
12. Desroches, J., Detournay, E., Lenoach, B. and et al. "The crack tip region in hydraulic fracturing", In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society*, **447**(1929), pp. 39-48 (1994).
13. Adachi, J.I. "Fluid-driven fracture in permeable rock", PhD Thesis, University of Minnesota (2001).
14. Nilson, R. "Gas-driven fracture propagation", *J. Appl. Mech., (United States)*, **48**(4), pp. 757-762 (1981).
15. Garagash, D. and Detournay, E. "Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium", in IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials, Springer (2002).
16. Savitski, A. and Detournay, E. "Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: Asymptotic solutions", *International Journal of Solids and Structures*, **39**(26), pp. 6311-6337 (2002).
17. Savitski, A. and E. Detournay. "Similarity solution of a penny-shaped fluid-driven fracture in a zero-toughness linear elastic solid", *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, **329**(4), pp. 255-262 (2001).
18. Garagash, D. "Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large toughness", in 4th North American Rock Mechanics Symposium, American Rock Mechanics Association (2000).
19. Garagash, D.I. and Detournay, E. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution", *Journal of Applied Mechanics*, **72**(6), pp. 916 (2005).
20. Adachi, J.I., Detournay, E. and Peirce, A.P. "Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **47**(4), pp. 625-639 (2010).
21. Adachi, J.I. and Peirce, A.P. "Asymptotic analysis of an elasticity equation for a finger-like hydraulic fracture", *Journal of Elasticity*, **90**(1), pp. 43-69 (2008).
22. Dontsov, E. and Peirce, A. "Proppant transport in hydraulic fracturing: Crack tip screen-out in KGD and P3D models", *International Journal of Solids and Structures*, **63**, pp. 206-218 (2015).
23. Dontsov, E. and Peirce, A. "An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness", *Engineering Fracture Mechanics*, **142**, pp. 116-139 (2015).
24. Kemp, L.F. "Study of Nordgren's equation of hydraulic fracturing", *SPE Production Engineering*, **5**(03), pp. 311-314 (1990).
25. Kovalyshen, Y. and Detournay, E. "A reexamination of the classical PKN model of hydraulic fracture", *Transport in Porous Media*, **81**(2), pp. 317-339 (2010).
26. Detournay, E., Peirce, A. and Bungler, A. "Viscosity-dominated hydraulic fractures", In 1st Canada-US Rock Mechanics Symposium, American Rock Mechanics Association (2007).
27. Adachi, J. and Detournay, E. "Self similar solution of a plane strain fracture driven by a power law fluid", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**(6), pp. 579-604 (2002).
28. Bungler, A., Detournay, E.M., Garagash, D.I. and et al. "Numerical simulation of hydraulic fracturing in the viscosity dominated", In *SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, Society of Petroleum Engineers* (2007).
29. Bungler, A.P. and Detournay, E. "Early-time solution for a radial hydraulic fracture", *Journal of Engineering Mechanics*, **133**(5), pp. 534-540 (2007).
30. Abe, H., Keer, L. and Mura, T. "Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks", *Journal of Geophysical Research*, **81**(35), pp. 6292-6298 (1976).
31. Garagash, D.I. "Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution", *International Journal of Solids and Structures*, **43**(18-19), pp. 5811-5835 (2006).
32. Garagash, D. "Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **30**(14), pp. 1439-1475 (2006).
33. Savitski, A.A. "Propagation of a pennyshaped hydraulic fracture in an impermeable rock", PhD Thesis, University of Minnesota (2000).

34. Asgari, A., Golshani, A. and Lakirouhani, A. "Hydraulic fracture propagation in brittle rock: Considering interaction term between fluid inertia and viscosity parameters", *Sharif Journal, Civil Engineering*, **32.2**(2.1), pp. 59-66 (In Persian) (2016).
35. Garagash, D. and Detournay, E. "Erratum:Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution", *Journal of Applied Mechanics*, bf 72(6), pp. 916-928, *Journal of Applied Mechanics*, **74**(4), pp. 832-832 (2007).
36. Sneddon, I.N., Lowengrub, M. and Mathematician, P. "Crack problems in the classical theory of elasticity", Wiley New York (1969).
37. Nilson, R. "Gas-driven fracture propagation", *Journal of Applied Mechanics*, **48**(4), pp. 757-762 (1981).
38. Shapiro, R.A. "The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow", New York: Ronald Press, 2(1) (1954).
39. Batchelor, G. "An introduction to fluid dynamics", Cambridge Univ. Press, Bentley House, London (1967).
40. Rice, J.R. "Mathematical analysis in the mechanics of fracture", *Fracture: An Advanced Treatise*, **2**, pp. 191-311 (1968).
41. Detournay, E. "Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks", *International Journal of Geomechanics*, **4**(1), pp. 35-45 (2004).
42. Adachi, J.I. and Detournay, E. "Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock", *Engineering Fracture Mechanics*, **75**(16), pp. 4666-4694 (2008).
43. Sarvaramini, E. and Garagash, D.I. "Breakdown of a Pressurized Fingerlike Crack in a Permeable Solid", *Journal of Applied Mechanics*, **82**(6), pp.061006-(1-10) (2015).
44. Van Dyke, M.D. "Perturbation methods in fluid dynamics", Stanford: Parabolic Press (1975).
45. Van Dyke, M.D. "Analysis and improvement of perturbation series", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **27**(4), pp. 423-450 (1974).