

## شبیه‌سازی عددی جریان غیرلزج حول روتور بالگرد در پرواز ایستایی با استفاده از روش بالادست در شبکه‌ی بی‌سازمان

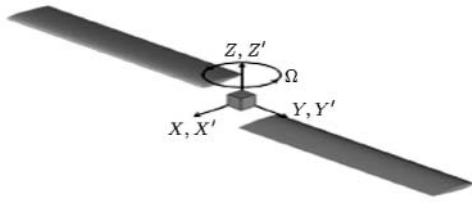
کاظم هجران‌فر (استادیار)  
سید مسعود محمدی (کارشناس ارشد)  
دانشکده‌ی مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

در این تحقیق، شبیه‌سازی عددی جریان غیرلزج و تراکم‌پذیر حول روتور در پرواز ایستایی توسط روش بالادست «رو» و با استفاده از شبکه‌ی بی‌سازمان انجام شده است. برای افزایش دقت گسسته‌سازی مکانی، از تخمین شار روی وجوه به روش «ماسکل» استفاده شده است. الگوریتم حل به روش انتگرال‌گیری زمانی صریح صورت گرفته و برای افزایش نرخ همگرایی جواب‌ها، از روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها استفاده شده است. به منظور اطمینان از دقت و صحت الگوریتم حل و ارزیابی نتایج، شبیه‌سازی عددی میدان جریان حول روتور در پرواز ایستایی در اعداد ماخ نوک تیغه برابر با ۰/۴۴ و ۰/۸۷۷ و در زاویه‌ی گام تیغه ۸ درجه انجام شده و نتایج حاضر برای مشخصات آیرودینامیکی، شامل توزیع فشار در مقاطع مختلف تیغه‌های روتور، با نتایج تجربی و عددی معتبر مقایسه شده و مورد ارزیابی قرار گرفته است. همچنین، تأثیر افزایش دقت گسسته‌سازی مکانی حل عددی در شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، تأثیر آن روی مشخصات آیرودینامیکی روتور بررسی شده است.

### مقدمه

مبتنی بر معادلات پتانسیل کامل را توسعه دادند. همچنین سانکار<sup>[۱۳]</sup>، آگاروال و دزی<sup>[۱۴]</sup> و حسن<sup>[۱۵]</sup> از پیشروان استفاده از معادلات اویلر برای شبیه‌سازی میدان جریان حول روتور در دهه‌ی ۸۰ میلادی هستند. از اوایل دهه‌ی ۹۰ میلادی تاکنون، با پیشرفت قابل ملاحظه‌ی رایانه‌ها، شبیه‌سازی میدان جریان حول مجموعه‌ی کامل بالگرد با استفاده از معادلات ناویر-استوکس امکان‌پذیر شده است. احمد و داکو در سال ۱۹۹۴ میلادی، نخستین بار موفق به انجام این کار شده‌اند.<sup>[۱۶]</sup> در دهه‌ی اخیر، استفاده از روش‌های پتانسیل به‌همراه مدل‌سازی گردابه‌ی آزاد<sup>[۱۷-۱۹]</sup> به دلیل کارایی و دقت این روش‌ها مورد توجه قرار گرفته است. روش‌های جریان پتانسیل عمده‌تاً به دو دسته‌ی کلی «روش شبکه‌ی گردابه» و «روش پانل» تقسیم‌بندی می‌شوند. در روش شبکه‌ی گردابه، از توزیع گردابه‌های حلقوی روی تیغه‌ها و دنباله‌ی آنها استفاده می‌شود و از اثرات ضخامت تیغه‌ها صرف‌نظر می‌شود. در روش پانل، از توزیع چشمه/مزدوج روی تیغه‌ها و توزیع مزدوج در دنباله استفاده، و اثرات ضخامت تیغه‌ها نیز محاسبه می‌شود. استفاده از روش‌های پتانسیل سبب ساده‌سازی تحلیل مسئله، و دستیابی به حل مؤثر و نسبتاً دقیق آنها می‌شود. مشکل اصلی این روش ضعف در تخمین میدان جریان تراکم‌پذیر است، و در نتیجه، تخمین حالات پروازی ایستایی با سرعت دورانی زیاد تیغه‌های روتور یا پرواز رو به جلوی بالگرد که تیغه‌ی پیش‌رو معمولاً در حالت جریان گذر صوتی قرار دارد، در این روش دقت مناسبی نخواهد داشت.

امروزه شبیه‌سازی جریان حول اجسام دورانی، به‌ویژه روتور بالگرد، یکی از پیچیده‌ترین مسائل دینامیک سیالات محاسباتی است. میدان جریان حول روتور به علت متغیر بودن میدان سرعت در راستای دهانه‌ی تیغه‌ها و اثرات تراکم‌پذیری از یک سو، و وجود گردابه‌های قوی نوک و صفحه گردابه‌ی جدا شده از تیغه‌ها و در نتیجه ساختار پیچیده‌ی دنباله‌ی روتور<sup>۱</sup> برای شبیه‌سازی عددی از مشکلات خاصی برخوردار است. پیش‌بینی دقیق مشخصه‌های آیرودینامیکی روتور شامل بارگذاری تیغه‌ها و تعیین ضرایب تراست و توان القایی، و نیز محاسبه‌ی ارتعاشات و اکوستیک روتور نیازمند شبیه‌سازی دقیق و مؤثر میدان جریان حول روتور است. طی دهه‌ی ۷۰ میلادی تاکنون روش‌های مختلفی به‌منظور حل جریان و تحلیل آیرودینامیکی روتور استفاده شده که از آن جمله می‌توان به روش‌های تحلیلی، روش‌های پتانسیل، روش‌های اویلر / ناویر-استوکس و روش‌های ترکیبی اشاره کرد. روش‌های اولیه مبتنی بر فرضیات نظریه‌ی خط برازای پرانتل بودند. در دهه‌ی ۷۰ میلادی، گرای<sup>[۱]</sup> و لانگرب<sup>[۲]</sup> مدل‌های گردابه‌ی معین را بر پایه‌ی مشاهدات تجربی ارائه کردند. در اواخر این دهه، کاکورک و تانگنر<sup>[۳]</sup> و نیز شینوی و گرای<sup>[۴]</sup> از ترکیب سطح برازا (به جای خط برازا) و مدل‌های گردابه معین استفاده کرده‌اند. در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی، اسکولی<sup>[۵]</sup>، سوما<sup>[۶]</sup> و بلیس و میلر<sup>[۷]</sup> روش‌های تحلیل گردابه‌ی آزاد را ارائه کردند. در دهه‌ی ۸۰، سانکار<sup>[۸]</sup>، استراون<sup>[۹]</sup>، بریچمن<sup>[۱۰]</sup> و کارادونا<sup>[۱۱]</sup> روش‌های عددی



شکل ۱. سیستم مختصات برای حل میدان جریان حول روتور.

$\mathbf{V} = (u, v, w)$  بیان شده‌اند. همچنین،  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  معرف بردار شار عمود بر وجه سلول و  $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$  معرف بردار چشمه ناشی از دوران دستگاه مختصات طبق رابطه‌ی ۲ بیان می‌شوند:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \rho U_{\perp r} \\ \rho u U_{\perp r} + p n_x \\ \rho v U_{\perp r} + p n_y \\ \rho w U_{\perp r} + p n_z \\ (E_r + p) U_{\perp r} \end{pmatrix}, \mathbf{S}(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho \Omega v \\ -\rho \Omega u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

در این رابطه، تعریف کمیت  $E_r$  مشابه تعریف انرژی بر واحد حجم در دستگاه مختصات اینرسی بوده و براساس رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود:

$$E_r = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} - 2 \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \quad (3)$$

معادله‌ی ۱ بیان‌گر موازنه‌ی بین نرخ تغییرات بردار حالت  $\mathbf{Q}$  در حجم  $V$  با شار خالص عبوری از سطح مرزی  $\partial V$  است. در رابطه‌های ارائه شده،  $\rho$  و  $p$  به ترتیب معرف چگالی و فشار،  $(u, v, w)$  مؤلفه‌های دکارتی بردار سرعت مطلق در جهت‌های  $(x, y, z)$ ،  $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$  بردار مکانی هر نقطه (نظیر یگه‌ی عمود بر هر وجه سلول،  $\mathbf{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$ ) مرکز سلول) نسبت به محور دوران  $(z)$ ،  $U_{\perp r}$  مؤلفه‌ی سرعت نسبی عمود بر هر وجه از سلول  $U_{\perp r} = \mathbf{V}_r \cdot \hat{n}$  و  $\mathbf{V}_r = (u_r, v_r, w_r)$  بردار سرعت نسبی‌اند:

$$\mathbf{V}_r = (u + \Omega y) \hat{i} + (v - \Omega x) \hat{j} + w \hat{k} \quad (4)$$

$$U_{\perp r} = (u + \Omega y) n_x + (v - \Omega x) n_y + w n_z$$

بی‌بعدسازی متغیرها، شامل چگالی و فشار، به ترتیب با متغیرهای جریان آزاد (یعنی  $\rho_{\infty}$  و  $p_{\infty}$ )، سرعت‌ها با مقیاسی از سرعت صوت  $a_{\infty} \sqrt{\gamma}$ ، ابعاد هندسی با طول مرجع  $c$  (وتر تیغه) و زمان  $t$  با  $c \sqrt{\gamma} / a_{\infty}$  انجام شده است. نسبت گرماهای ویژه نیز ثابت و برابر  $\gamma = 1/4$  در نظر گرفته شده است. با استفاده از این بی‌بعدسازی، سرعت زاویه‌ی بی‌بعد  $\Omega$  به صورت رابطه‌ی ۵ بیان می‌شود:

$$\Omega = \sqrt{\gamma} M_{tip} / R \quad (5)$$

روش‌های اویلر/ناویر-استوکس از قابلیت محاسبه‌ی دقیق میدان جریان تراکم‌پذیر مادون‌صوت/گذر صوتی حول یک روتور برخوردارند و تعیین نواحی چرخش جریان و دنباله‌ی روتور (شامل گردابه‌های نوک و گردابه‌های جدا شده از تیغه‌ها) را ممکن می‌سازند، هر چند دست‌یابی به این امر مستلزم تمهیدات خاص از نظر نوع و ابعاد شبکه‌ی انتخابی و نوع الگوریتم عددی مورد استفاده است. [۲۰-۲۴] به‌کارگیری روش‌های ترکیبی (استفاده از روش اویلر/ناویر-استوکس در مجاورت تیغه‌ها، و روش پتانسیل در نواحی دور از تیغه‌ها) نیز در تحقیقات جدید به‌منظور تحلیل آیرودینامیکی دقیق و مؤثر روتور بالگرد مورد توجه خاص قرار گرفته است. [۲۵-۲۷]

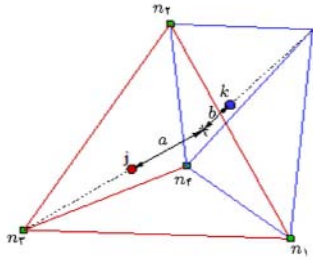
تحقیق حاضر در راستای تدوین نرم‌افزاری دقیق و مؤثر برای محاسبات آیرودینامیکی روتور بالگرد در داخل کشور صورت گرفته است. در حقیقت، به دلیل پیچیدگی و مشکلات موجود در حل عددی میدان جریان حول روتور، در کشور ما تحقیق جامع و دقیقی در این زمینه صورت نگرفته و تحقیقات انجام شده، غالباً معطوف به مسائل مربوط به محاسبات آیرودینامیکی دیگر اجسام است. در مطالعه‌ی حاضر، شبیه‌سازی عددی میدان جریان غیرلزج و تراکم‌پذیر حول روتور در پرواز ایستایی<sup>۲</sup> توسط روش بالادست «رو» انجام شده است. شبکه‌ی مورد استفاده از نوع بی‌سازمان<sup>۴</sup> چهاروجهی است و برای افزایش دقت گسسته‌سازی مکانی، از تخمین شار روی وجوه به‌روش «ماسکل»<sup>۵</sup> استفاده شده است. همچنین تأثیر افزایش دقت مکانی حل عددی در شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، مشخصات آیرودینامیکی آن بررسی شده است. برای افزایش نرخ همگرایی جواب‌ها نیز از روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها<sup>۶</sup> استفاده شده است. محاسبات یک روتور در پرواز ایستایی در دو سرعت دورانی مختلف به ازاء اعداد ماخ نوک تیغه برابر با ۰/۴۴ و ۰/۸۷۷، و در زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه انجام شده است، و نتایج حاصل با اطلاعات تجربی و عددی مقایسه و ارزیابی شده‌اند.

## معادلات حاکم

روابط حاکم برای شبیه‌سازی میدان جریان، معادلات اویلر بوده و در دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  که با سرعت زاویه‌ی  $\Omega$  حول محور  $z$  نسبت به دستگاه مختصات اینرسی  $(x', y', z')$  در حال دوران است (شکل ۱)، برای هر حجم یا سلول دلخواه به شکل رابطه‌ی ۱ بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \mathbf{Q} dV + \int \int_{\partial V} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \hat{n} dS = \int \int \int_V \mathbf{S}(\mathbf{Q}) dV \quad (1)$$

در این رابطه،  $\mathbf{Q} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E_r]^T$  معرف بردار متغیرهای حالت بوده و معادلات برحسب مؤلفه‌های مطلق بردار سرعت



شکل ۲. تعریف پارامترها در روش «ماسکل».

«رو» است و به جای مقدار آنتالپی کل  $H$  در ماتریس ژاکوبی، از مقدار روتالپی کل  $H_r = (E_r + p)/\rho$  استفاده می‌شود. عملگر  $\Delta$  به معنی  $(\ )_R - (\ )_L$  است و زیرینویس‌های  $L$  و  $R$  نیز معرف موقعیت‌های چپ و راست وجه  $k$  هستند. بالاتویس « $\sim$ » نیز معرف مقادیر میانگین «رو» است. مثلاً:

$$\bar{u} = (u_L + u_R \sqrt{\rho_R/\rho_L}) / (\sqrt{\rho_R/\rho_L} + 1) \quad (10)$$

در رابطه‌های ذکر شده، زیرینویس  $r$  معرف کمیت‌های نسبی (نسبت) به دستگاه مختصات دورانی) است.

### افزایش دقت مکانی

یکی از مزایای الگوریتم‌های بالادست، برخورداری از قابلیت افزایش دقت حل آنها است. افزایش دقت حل به ویژه برای تسخیر دقیق نواحی باگرادیان بالا، نظیر نواحی شوک که در حالت جریان گذر صوتی مجاور نوک تیغه‌ها روی می‌دهد، بسیار حائز اهمیت است. در روش بالادست «رو»، اگر در موقعیت‌های چپ و راست هر وجه سلول از مقادیر سلول‌های همسایه استفاده شود روش از دقت بالادست مرتبه اول برخوردار است. در مطالعه‌ی حاضر، به منظور افزایش دقت مکانی از روابط «ماسکل» استفاده شده است.<sup>[۲۹]</sup> در این روش، برای افزایش دقت حل عددی، درون‌یابی متغیرهای اولیه  $\mathbf{q} = [\rho, u, v, w, p]^T$  براساس رابطه‌ی ۱۱ انجام می‌شود:

$$\mathbf{q}_L = \mathbf{q}_j + \frac{s}{\bar{\rho}} [(\lambda - ks)\nabla_j + (\lambda + ks)\Delta_j]$$

$$\mathbf{q}_R = \mathbf{q}_{j+1} - \frac{s}{\bar{\rho}} [(\lambda + ks)\nabla_{j+1} + (\lambda - ks)\Delta_{j+1}] \quad (11)$$

علامت  $\nabla = \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_{n_r}$  و  $\Delta = \mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j$  به ترتیب نشان دهنده‌ی عملگرهای پیش‌رو و پس‌رو بوده و موقعیت‌های مورد استفاده در رابطه‌ی (۱۱)، در شکل ۲ نشان داده شده‌اند. پارامتر  $k$  کنترل‌کننده‌ی میزان دقت روش بالادست است. به‌ازاء  $k$  برابر با  $-1$  و  $1$  (در شبکه‌ی باسازمان و یک‌نواخت) به ترتیب دقت‌های مرتبه‌ی دو و سه بالادست به دست می‌آید. همچنین از ضریب  $s$  به عنوان محدودساز شار، و برای

که در آن،  $M_{tip}$  عدد ماخ نوک تیغه و  $R$  شعاع بی‌بعد روتور است. در نتیجه، عدد ماخ نوک تیغه از طریق تعریف سرعت زاویه‌ی بی‌بعد در حالات مختلف سرعت دورانی اعمال می‌شود.

### گسسته‌سازی معادلات حاکم

برای حل عددی میدان جریان حول روتور از روش بالادست «رو» برای گسسته‌سازی شارهای جریان استفاده شده است.<sup>[۲۸]</sup> گسسته‌سازی در یک شبکه‌ی بی‌سازمان چهاروجهی انجام شده است (شکل ۲). روش حجم محدود مورد استفاده از نوع مرکزیت سلول بوده و مقادیر متغیرهای بردار حالت در موقعیت مراکز سلول ذخیره می‌شوند. شار خالص عبوری از وجه شماره  $k$  هر سلول توسط رابطه‌ی شار «رو» براساس رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{F}_k = \frac{1}{\bar{\rho}} [\mathbf{F}(\mathbf{Q}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_R - |\bar{\mathbf{A}}|(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L)]_k \quad (6)$$

که در آن،

$$|\bar{\mathbf{A}}|(\mathbf{Q}_R - \mathbf{Q}_L) = |\Delta \bar{\mathbf{F}}_1| + |\Delta \bar{\mathbf{F}}_2| + |\Delta \bar{\mathbf{F}}_3| \quad (7)$$

$$|\Delta \bar{\mathbf{F}}_1| = |\bar{U}_{\perp r}| \left\{ \left( \Delta \rho - \frac{\Delta p}{\bar{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \frac{(\bar{u}' + \bar{v}' + \bar{w}')}{\bar{\rho}} \end{bmatrix} + \bar{\rho} \begin{bmatrix} \Delta u - \hat{n}_x \Delta U_{\perp r} \\ \Delta v - \hat{n}_y \Delta U_{\perp r} \\ \Delta w - \hat{n}_z \Delta U_{\perp r} \\ \bar{u} \Delta u + \bar{v} \Delta v + \bar{w} \Delta w - \bar{U}_{\perp r} \Delta U_{\perp r} \end{bmatrix} \right\} \quad (8)$$

$$|\Delta \bar{\mathbf{F}}_{2,3}| = |\bar{U}_{\perp r} \pm \bar{a}| \left( \frac{\Delta p \pm \bar{\rho} \bar{a} \Delta U_{\perp r}}{\bar{\rho} \bar{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \pm \hat{n}_x \bar{a} \\ \bar{v} \pm \hat{n}_y \bar{a} \\ \bar{w} \pm \hat{n}_z \bar{a} \\ \bar{H}_r \pm \bar{U}_{\perp r} \bar{a} \end{bmatrix} \quad (9)$$

در رابطه‌های فوق،  $\bar{A}$  معرف ماتریس ژاکوبی متوسط‌گیری شده

تخمین یکنواخت شارها در دقت‌های بالاتر از مرتبه‌ی اول براساس رابطه‌ی ۱۲ استفاده می‌شود: [۳۰]

$$s = \frac{2\Delta\nabla + \epsilon}{\Delta^2 + \nabla^2 + \epsilon} \quad (12)$$

ثابت  $\epsilon$  یک عدد بسیار کوچک است که برای تضمین صفر نشدن صورت یا مخرج رابطه‌ی بالا در دقت‌های بالادست بیشتر از ۱ استفاده می‌شود. اگر از عبارت داخل کروشه در سمت راست روابط ۱۱ صرف نظر شود، دقت مرتبه‌ی اول به دست می‌آید.

### انتگرال‌گیری زمانی

شکل نیمه گسسته‌ی معادلات ۱ به صورت رابطه‌ی ۱۳ بیان می‌شود:

$$V_j \frac{\Delta Q_j}{\Delta t} = R_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

$$R_j = \{S(Q)V\}_j - \sum_{i=k(j)} F_{j,i} \Delta S_{j,i} \quad (13)$$

زیر نویس  $j$  نشان دهنده‌ی شماره‌ی سلول مورد محاسبه است، و  $i = k(j)$  به معنی سلول شماره‌ی  $i$  (همسایه با سلول  $j$ ) در وجه  $k$  است. همچنین،  $R$  نشان دهنده‌ی بردار مانده‌ها است. در این تحقیق، دستیابی به جواب حالت پایا مد نظر بوده است، بنابراین با صرف نظر کردن از دقت زمانی حل، از روش صریح با دقت مرتبه اول استفاده می‌شود. در نتیجه، گام زمانی هر سلول در هر تکرار براساس رابطه‌ی ۱۴ محاسبه می‌شود:

$$\Delta t_j \leq CFL \frac{V_j}{\sum_{k=1}^N (|\bar{U}_{\perp r}| + \bar{a})_k \Delta S_k} / N \quad (14)$$

که در آن،  $CFL$  عدد کورانت و  $N$  تعداد وجوه هر سلول است. بالاتویس «-» معرف مقدار میانگین هر متغیر در وجه سلول است که به این منظور در روش‌های بالادست از میانگین‌گیری روش «رو» استفاده شده است. همچنین در رابطه‌ی ۱۴، عبارت  $|\bar{U}_{\perp r}| + \bar{a}$  بزرگ‌ترین مقدار بین مقادیر ویژه  $|\bar{U}_{\perp r}| + \bar{a}$  و  $|\bar{U}_{\perp r} - \bar{a}|$  است. به منظور محاسبه‌ی گام زمانی در هر تکرار، از کوچک‌ترین گام زمانی میدان حل استفاده شده و محاسبات با این گام زمانی ثابت انجام شده است. با انتخاب گام زمانی ثابت، الگوریتم حل عددی از قابلیت محاسبات جریان غیردائم نیز برخوردار خواهد بود. برای کاهش تعداد تکرار لازم به منظور همگرایی جواب‌ها به حالت پایا، روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها به کار رفته است.

### هموارسازی ضمنی مانده‌ها

یک راه حل برای تسریع در همگرایی حل عددی، استفاده از روش هموارسازی ضمنی مانده‌ها است. این روش افزایش عدد  $CFL$  را ممکن می‌سازد. هموارسازی مانده‌ها در هر تکرار از محاسبات انجام می‌شود. در این روش لازم است مانده‌ها توسط یک عملگر هموارساز فیلتر شوند، که به این منظور از عملگر لاپلاس در شبکه‌ی یکنواخت استفاده شده است. رابطه‌ی نهایی مورد استفاده برای هموارسازی مانده‌ها، طبق روش تکرار ژاکوبی به صورت رابطه‌ی ۱۵ بیان می‌شود: [۳۱]

$$\bar{R}_j^{(m)} = \frac{R_j + \sigma \sum_{i=k(j)} \bar{R}_i^{(m-1)}}{1 + \sigma \sum_{i=k(j)} 1} \quad (15)$$

بالاتویس «-» نشان دهنده‌ی مقادیر مانده‌ی هموار شده بوده و علامت جمع روی مقادیر مانده‌ها در سلول‌های همسایه که دارای وجوه مشترک  $k$  با سلول  $i$  هستند، صورت می‌گیرد. مقدار مناسب برای  $\sigma$  که سبب افزایش خاصیت غالب بودن قطری ضرایب ماتریس شده، حدود  $0.5$  انتخاب می‌شود. [۳۱] تعداد دفعات لازم تکرار روش ژاکوبی حداقل ۲ تکرار است. مزیت استفاده از روش هموارسازی مانده‌ها، دو برابر شدن عدد کورانت مجاز (و در نتیجه گام زمانی) است.

### شرایط مرزی

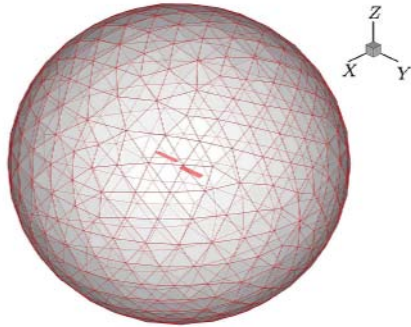
برای اعمال شرط مرزی مماس بودن جریان بر سطح تیغه‌ها، به‌ازاء هر وجه روی سطح تیغه‌ها، سلولی مجازی در نظر گرفته می‌شود. مقادیر فشار، چگالی و انرژی یکسان فرض شده و سرعت‌های نسبی نیز طبق رابطه‌ی ۱۶ داخل سلول مجازی در نظر گرفته می‌شود: [۳۲]

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2\hat{n}_x^2 & -2\hat{n}_x\hat{n}_y & -2\hat{n}_x\hat{n}_z \\ -2\hat{n}_x\hat{n}_y & 1 - 2\hat{n}_y^2 & -2\hat{n}_y\hat{n}_z \\ -2\hat{n}_x\hat{n}_z & -2\hat{n}_y\hat{n}_z & 1 - 2\hat{n}_z^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ v_r \\ w_r \end{Bmatrix}_j \quad (16)$$

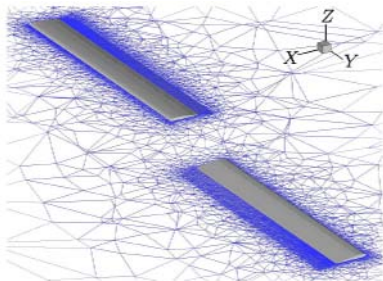
برای اعمال شرایط مرزی مادون صوت در مرزهای ورودی و خروجی، از شرط مرزی مشخصه‌ها مبتنی بر لایتغیرهای «ریمان<sup>۲</sup>» استفاده شده است.

### نتایج و بحث

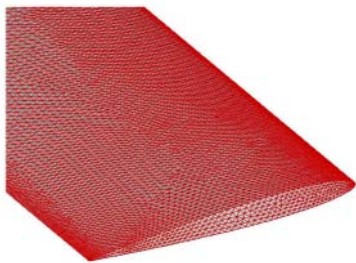
برای اطمینان از صحت و دقت الگوریتم حل عددی در تحلیل جریان تراکم‌پذیر، شبیه‌سازی عددی میدان جریان سه بعدی گذر صوتی با عدد ماخ  $0.84$  و زاویه‌ی حمله‌ی  $3.6^\circ$  درجه حول بال ثابت ONERA M6 صورت گرفته که نتایج حل شامل ضرایب آیرودینامیکی و توزیع فشار



شکل ۳. شبکه‌ی حجمی حول روتور دوتیغه‌ی کارادونا.



شکل ۴. نمایی از شبکه‌ی برش خورده‌ی مجاور تیغه‌ی روتور.



شکل ۵. شبکه‌ی سطحی تیغه‌ی روتور.

ویژگی‌های اساسی و مهم شبکه‌های بی‌سازمان، قابلیت تطبیق محلی این نوع شبکه در نواحی با گرادیان‌های زیاد (نظیر نواحی شوک در مجاور نوک تیغه‌ها) برای افزایش دقت حل عددی در این نواحی از میدان حل است. شکل ۴ نمای برش خورده‌ی از شبکه‌ی حجمی مجاور تیغه‌ها را نشان می‌دهد؛ چنان که مشاهده می‌شود فشردگی نسبی شبکه در نزدیکی تیغه‌های روتور و افزایش سریع ابعاد سلول‌ها در نواحی دور از سطح تیغه‌ها نمایان است.

**حالت اول: جریان مادون صوت ( $M_{tip} = 0.44$ )**  
در شکل ۶، توزیع ضریب فشار سطح در نواحی مختلف از دهانه‌ی تیغه به ازاء ماخ نوک تیغه  $M_{tip} = 0.44$  و زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه، در مقایسه با داده‌های تجربی، نشان داده شده است. مطابق این شکل، در نواحی بیرونی تیغه تطابق نسبتاً خوبی بین نتایج حاضر

روی سطح بال در مقاطع مختلف، در مقایسه با داده‌های تجربی و عددی از دقت بسیار خوبی برخوردار است. نتایج این بررسی معرف قابلیت و دقت الگوریتم عددی مورد نظر در تحلیل جریان تراکم‌پذیر سه‌بعدی حول هندسه‌های پیچیده است [۳۳] و به همین علت، الگوریتم عددی مورد نظر برای شبیه‌سازی عددی جریان تراکم‌پذیر حول روتور مورد استفاده قرار گرفته است.

به‌منظور بررسی دقت و صحت الگوریتم عددی در حل میدان جریان حول روتور، از نتایج تجربی روتور در پرواز ایستایی استفاده شده [۳۴] و شبیه‌سازی عددی میدان جریان تراکم‌پذیر در دو حالت ماخ نوک تیغه برابر با  $0.44$  و  $0.877$  و زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه انجام شده است. نتایج آیرودینامیکی به دست آمده از روش بالادست با نتایج تجربی [۳۴] و عددی [۱۴] براساس روش حجم محدود مرکزی «جیمسون<sup>۸</sup>» با دقت مرتبه ۲، و نتایج عددی [۲۴] براساس روش بالادست با دقت مرتبه ۴، مقایسه و ارزیابی شده است. حل حاضر در یک شبکه‌ی بی‌سازمان، و حل‌های مراجع مورد نظر توسط شبکه‌ی باسازمان حاصل شده است. همچنین، تأثیر افزایش دقت مکانی حل عددی روی شبیه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، تأثیر آن روی مشخصات آیرودینامیکی روتور در هر دو حالت ماخ نوک تیغه بررسی شده است.

### مشخصات روتور

روتور مورد نظر دارای ۲ تیغه بوده و تیغه‌های آن شامل ایرفویل با مقطع  $NACA\ 0012$  هستند. در تیغه‌ها پیچش و باریک‌شدگی وجود ندارد. شعاع هر تیغه برابر با  $3.75\ ft$  ( $1.143\ m$ ) و نسبت منطری آن  $R/c = 6$  است. فاصله‌ی شروع تیغه از مرکز روتور به اندازه‌ی وتر تیغه است. در هر دو حالت، تیغه‌ها دارای زاویه‌ی گام ۸ درجه‌اند. حالت اول دارای سرعت دورانی  $1250\ rpm$  (معادل با ماخ نوک تیغه  $M_{tip} = 0.44$ ) و حالت دوم دارای سرعت دورانی  $2500\ rpm$  (معادل با ماخ نوک تیغه  $M_{tip} = 0.877$ ) است.

### شبکه‌ی محاسباتی

در شکل‌های ۳ تا ۵، شبکه‌های حجمی و سطحی به‌کار رفته برای شبیه‌سازی میدان جریان حول روتور مورد نظر نشان داده شده است. مرز خارجی به صورت یک کره هم‌مرکز با صفحه‌ی روتور و به شعاع ۳۰ برابر وتر تیغه‌ها در نظر گرفته شده است. میدان محاسباتی دارای  $474551$  سلول و  $97457$  گره است که از این تعداد مجموعاً  $69762$  سلول روی سطح تیغه‌ها قرار گرفته‌اند. به علت وجود نواحی با گرادیان‌های زیاد و نیز وجود نواحی شوک، تمرکز شبکه‌ی سطحی در نواحی نوک تیغه‌ها و لبه‌های حمله و فرار هر تیغه بیشتر است (شکل ۵). در حقیقت، از

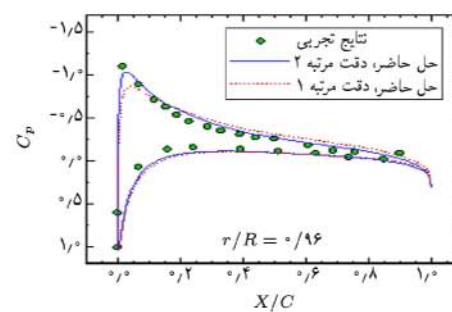
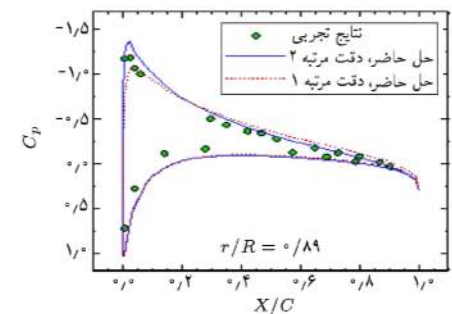
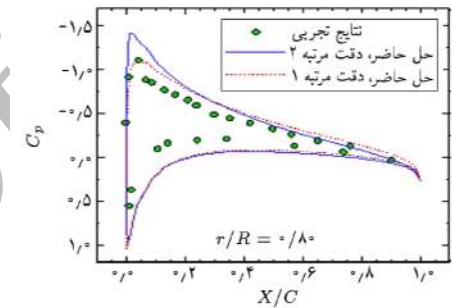
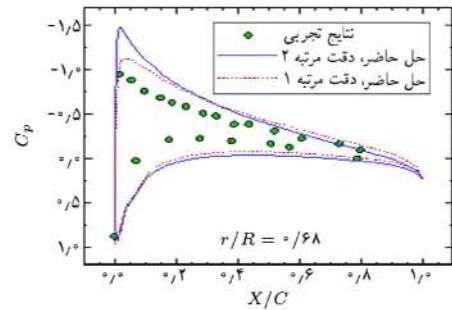
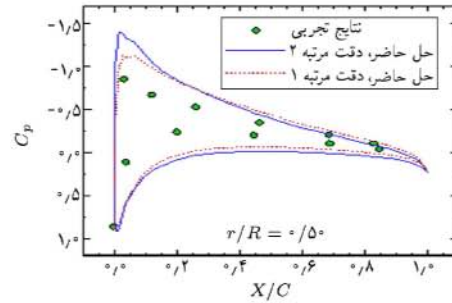
و نتایج تجربی برقرار است، در حالی که در نواحی داخلی تیغه، تطابق کم‌تری در نتایج، به‌ویژه نتایج حاصل از حل مرتبه ۲، مشاهده می‌شود. در حقیقت میدان جریان حول روتور دنباله‌ی دارد که گردابه‌های نوک و صفحه‌ی گردابه‌ی جدا شده از هر تیغه را شامل می‌شود. به علت نوع حرکت تیغه‌ها، این گردابه‌ها در مسیر تیغه‌ی بعدی قرار گرفته و میدان جریان القایی ناشی از آنها، سبب ایجاد فروزش در بیشتر نواحی داخلی و فروزش در ناحیه‌ی نوک تیغه‌ها می‌شود. در صورت تسخیر دقیق این دنباله، میدان جریان القایی سبب ایجاد فروزش در بیشتر نواحی صفحه‌ی روتور شده و جریان با زاویه‌ی حمله‌ی کم‌تر از مقدار زاویه‌ی حمله‌ی هندسی به تیغه‌ها برخورد می‌کند و سبب کاهش زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در اکثر نواحی دهانه‌ی تیغه‌ها (به‌ویژه در نواحی داخلی) نسبت به مقدار هندسی آن خواهد شد. با این وجود، الگوریتم‌های عددی متداول — به‌ویژه برای حل با دقت مرتبه ۲ — به دلیل وجود شبکه‌ی عددی با ابعاد حجمی نسبتاً درشت و افزایش سریع ابعاد شبکه‌ی حجمی بلافاصله بعد از تیغه‌ها و در نتیجه، افزایش لزجت مصنوعی حل عددی (میرایی عددی) در این نواحی از شبکه، قابلیت تسخیر دقیق گردابه‌های نوک و صفحه‌ی گردابه‌ی جدا شده از تیغه‌های روتور را ندارد.

این اثرات در حل مرتبه‌ی اول کم‌تر است و بنابراین، توزیع فشار حاصل از حل مرتبه‌ی اول در برخی نواحی از تیغه‌ها (نواحی داخلی به دلیل بارگذاری کم و در نتیجه سرعت القایی کم و نیاز به تمهیدات خاص شامل شبکه‌ی محاسباتی ریز و افزایش دقت الگوریتم حل برای آشکارسازی و تسخیر دقیق این جریان القایی) نسبت به حل مرتبه‌ی ۲ کمی دقیق‌تر به نظر می‌رسد. این اثرات در یک بال ثابت، به دلیل دور شدن دنباله پس از جدا شدن از بال، وجود ندارد.

در نواحی نوک تیغه از جمله مقاطع  $r/R = 0/96$ ،  $0/89$ ، جواب‌های عالی حل بالادست با دقت مرتبه ۲ قابل مشاهده است. در حقیقت، به دلیل این که دنباله‌ی ناشی از روتور به سمت داخل منقبض می‌شود، در نواحی نوک تیغه‌ها اثر معکوس وجود دارد. بنابراین، زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در نواحی نوک تیغه‌ها به علت پدیده‌ی فروزش اندکی افزایش می‌یابد.

### حالت دوم: جریان گذر صوتی ( $M_{tip} = 0/877$ )

در شکل ۷، توزیع ضریب فشار سطح در نواحی مختلف از دهانه‌ی تیغه به‌ازاء ماخ نوک  $M_{tip} = 0/877$  و زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه در مقایسه با داده‌های تجربی ارائه شده است. در این حالت، تأثیر دقت ساختار دنباله‌ی روتور روی مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌ها به دلیل سرعت دورانی بالاتر و ایجاد گردابه‌های قوی‌تر، بیشتر است. در این حالت نیز نتایج در نواحی داخلی تیغه‌ها متأثر از عدم اخذ دقیق گردابه‌ها



شکل ۶. توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با داده‌های تجربی در ماخ نوک تیغه ۰/۴۴ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.

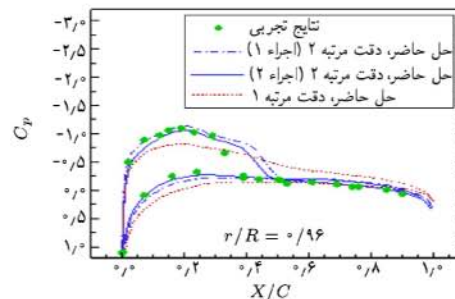
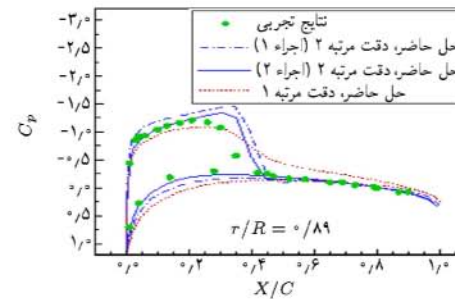
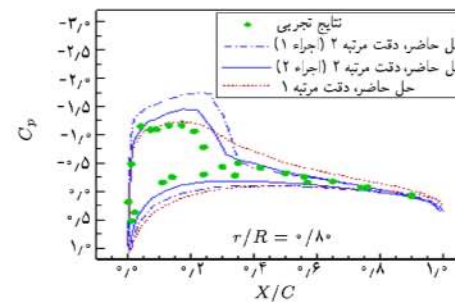
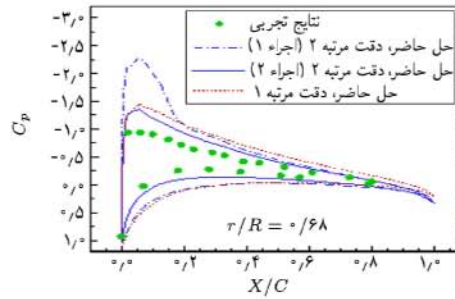
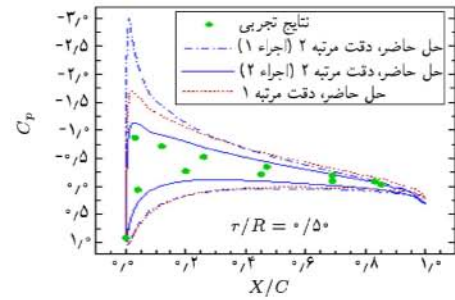


بوده و توزیع فشار محاسباتی در این نواحی، در مقایسه با مقادیر تجربی به ویژه در حل مرتبه‌ی ۲، تطابق کم‌تری نسبت به نواحی نوک تیغه دارد. نکته‌ی بسیار مهمی که نتایج بیان می‌دارند؛ تأثیر ساختار دنباله‌ی روتور روی توسعه‌ی حل عددی و اثر آن بر میدان جریان القایی به ویژه در حل مرتبه‌ی ۲ است. با شروع حل عددی، ابتدا بارگذاری ناشی از سرعت دورانی تیغه‌ها به ویژه در نواحی داخلی، به سرعت افزایش می‌یابد (اجراء ۱)؛ در این حالت دنباله‌ی چندانی تشکیل نمی‌شود. در نتیجه، به دلیل عدم ایجاد جریان القایی دقیق روی صفحه‌ی روتور، نتایج حل مرتبه‌ی ۲ به ویژه در نواحی داخلی - در مقایسه با نتایج تجربی - از تطابق کم‌تری برخوردار است. در این حالت، علاوه بر کاهش بیشتر مقادیر ضریب فشار نقاط اوج (نسبت به مقادیر تجربی) در حل با دقت مرتبه‌ی ۲، در بعضی از مقاطع از جمله  $r/R = 0/68$  موج ضربه‌یی ظاهر شده است. پیدایش غیرواقعی موج ضربه‌یی تحت تأثیر عدم پیش‌بینی دنباله‌ی روتور و در نتیجه، تخمین نامناسب زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر در این مقطع است.

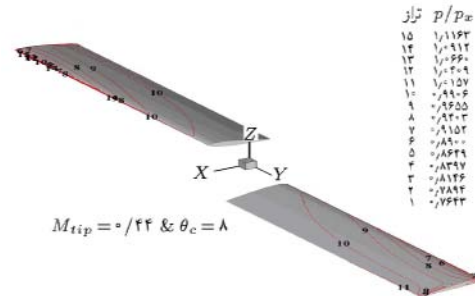
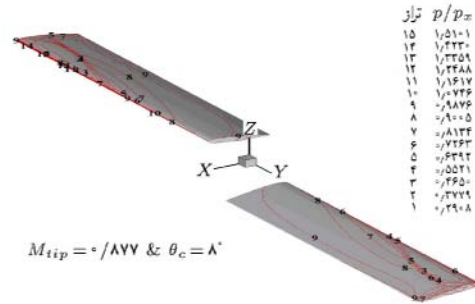
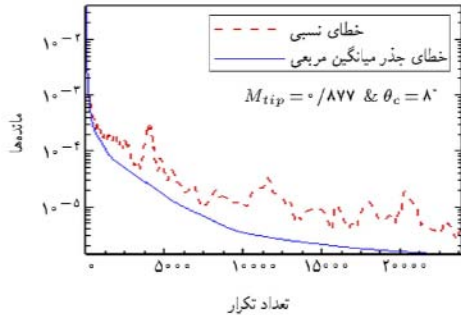
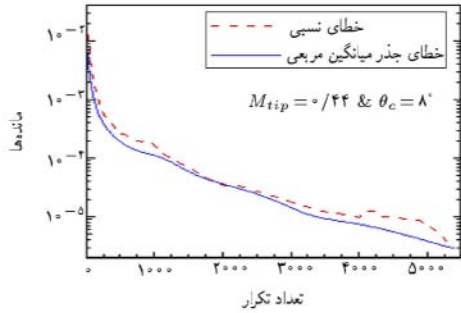
با افزایش زمان و توسعه‌ی حل عددی، و با شکل‌گیری دنباله‌ی روتور و نیز به دلیل ایجاد جریان القایی بیشتر مجاور تیغه‌ها، بارگذاری تیغه‌ها کاهش یافته و در بیشتر نواحی، حل مرتبه‌ی ۲ نسبت به حل مرتبه‌ی اول دقیق‌تر است (اجراء ۲). با این حال، تحت تأثیر اثرات میرایی الگوریتم عددی و محو شدن اثرات گردابه‌ها در نواحی دور از تیغه‌ها که روی بارگذاری تأثیرگذارند، اختلاف کمی با نتایج تجربی مشاهده می‌شود. بنابراین، در صورتی که ساختار دنباله و در نتیجه، جریان القایی با دقت بیشتر تعیین شوند، توزیع فشار و مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌ها (به ویژه در حل مرتبه‌ی ۲) نیز دقیق‌تر محاسبه خواهند شد. الگوریتم بالادست با دقت مرتبه‌ی اول نیز علیرغم دقت نسبی در تخمین توزیع فشار نواحی داخلی (نسبت به حل دقت مرتبه ۲)، در اخذ امواج ضربه‌یی مجاور نواحی نوک تیغه‌ها ناتوان بوده است. در نواحی نزدیک به نوک تیغه، به علت وجود خطای کم در پیش‌بینی مقدار زاویه‌ی حمله‌ی مؤثر، موقعیت موج ضربه‌یی حاصل از حل مرتبه‌ی ۲ نسبت به داده‌های تجربی اختلاف اندکی وجود دارد.

### مقایسه نتایج دو حالت

در شکل ۸، خطوط هم‌تراز فشار سطح تیغه‌ها در دو حالت برای اعداد ماخ نوک تیغه برابر با ۰/۴۴ و ۰/۸۷۷ و زاویه‌ی گام تیغه‌ی ۸ درجه نشان داده شده است. در هر حالت، تراکم خطوط فشار ثابت در نواحی بیرونی و مجاور نوک تیغه‌ها، معرف اثرات تراکم‌پذیری و تغییرات بیشتر فشار ناشی از سرعت دورانی بیشتر در نواحی بیرونی تیغه‌ها است و بارگذاری تیغه‌ها در این نواحی نیز بیشتر است. در حالت دوم که معرف



شکل ۷. توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با داده‌های تجربی در ماخ نوک تیغه ۰/۸۷۷ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.



شکل ۹. نرخ همگرایی مانده‌ها برای دو حالت ماخ نوک تیغه ۰/۴۴ و ۰/۸۷۷ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.

شکل ۸. خطوط همتراز فشار سطح تیغه‌های روتور برای دو حالت ماخ نوک تیغه ۰/۴۴ و ۰/۸۷۷ و زاویه گام تیغه ۸ درجه.

نتایج عددی [۲۴] براساس روش بالادست با دقت مرتبه‌ی ۴ مقایسه و ارزیابی شده است.

در تحلیل حاضر برخلاف تحقیقات انجام شده قبلی [۱۴] مدل‌سازی اثرات دنباله‌ی روتور صورت نگرفته است؛ با این وجود، نتایج حاضر با استفاده از روش بالادست حتی بدون تصحیح اثرات جریان القایی نسبت به نتایج موجود [۱۴] با استفاده از روش حجم محدود مرکزی (که در آن اثرات دنباله به صورت کاهش زوایای حمله‌ی تیغه منظور شده است)، در هر دو حالت ماخ نوک تیغه (۰/۴۴، ۰/۸۷۷)، از تطابق خوبی برخوردار است.

در روش‌های حجم محدود مرکزی برای حل عددی جریان و پایداری الگوریتم حل، از عبارات میرایی عددی (اتلاف مصنوعی<sup>۹</sup>) استفاده می‌شود. اگر چه مقادیر عبارات میرایی عددی در روش‌های حجم محدود مرکزی قابل کنترل‌اند، در صورت عدم کنترل مقادیر آنها در این روش‌ها، ساختار دنباله‌ی حاصل نسبت به روش‌های عددی بالادست ممکن است با دقت کم‌تر محاسبه شود. بنابراین، تطابق خوب نتایج تحلیل حاضر در مقایسه با نتایج مرجع ۱۴، می‌تواند ناشی از دقت بیشتر روش بالادست یا میرایی عددی کم‌تر این روش نسبت به روش به کار گرفته شده‌ی مرجع ۱۴ یا عدم توسعه و همگرایی کامل حل عددی آنها باشد.

در برخی از تحقیقات از روش شبکه‌ی باسازمان به همراه الگوریتم

جریان گذرصوتی مجاور نوک تیغه‌ها است، اثرات تراکم‌پذیری در نواحی بیرونی نسبت به حالت اول بیشتر است و نواحی شوک مجاور نوک تیغه‌ها در این حالت دیده می‌شود.

### روند همگرایی حل عددی

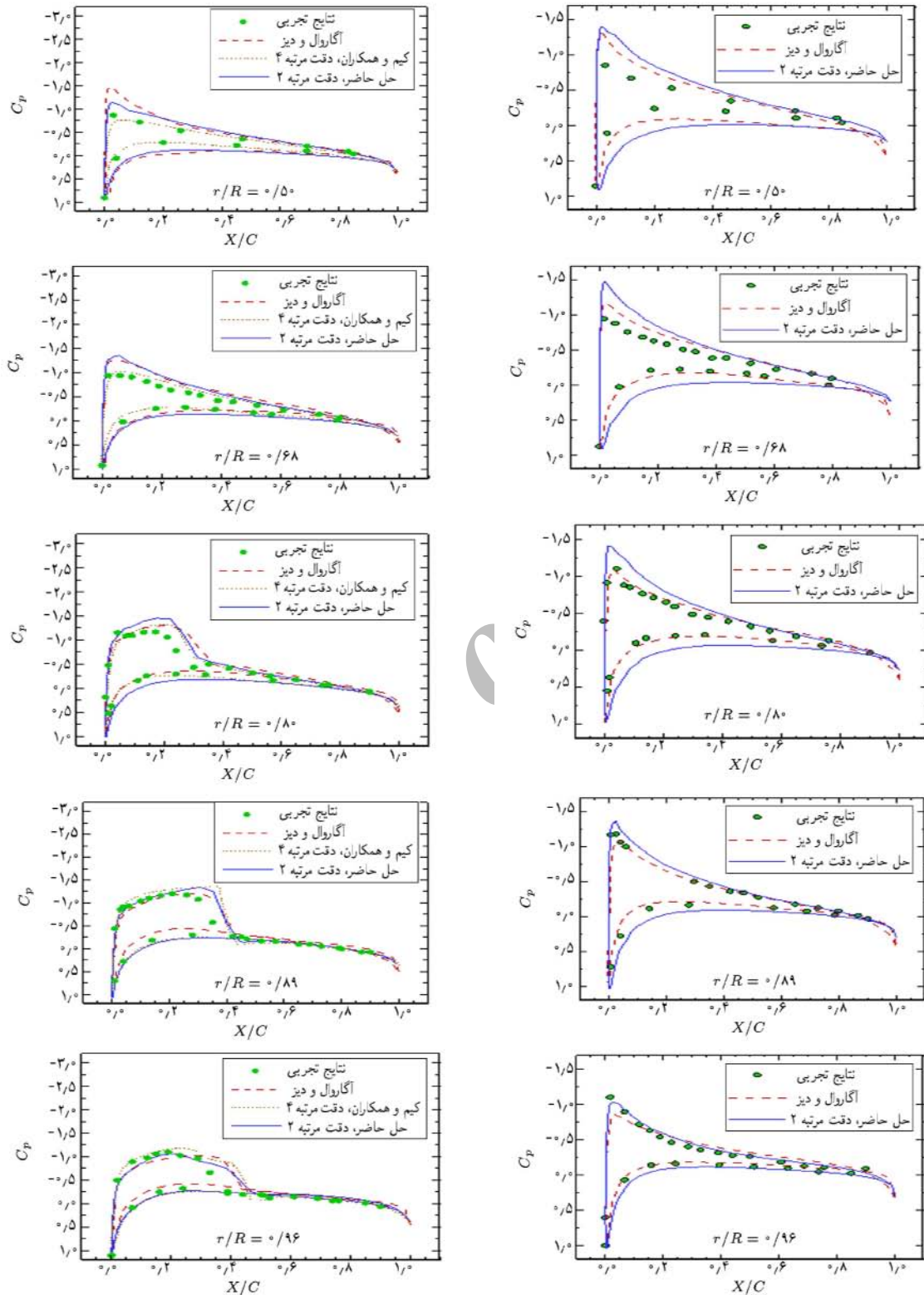
در شکل ۹، نمودارهای نرخ همگرایی مانده‌ها برحسب خطای نسبی و جذر میانگین مربعی برای دو حالت ماخ نوک تیغه ۰/۴۴ و ۰/۸۷۷ نشان داده شده است.

محاسبات با گام زمانی ثابت انجام شده و از روش هموارسازی مانده‌ها برای تسریع همگرایی حل عددی استفاده شده است. مطابق این شکل، زمان مورد نیاز برای محاسبه‌ی همگرایی حل در حالت جریان گذرصوتی (۰/۸۷۷) بیشتر از حالت جریان مادون صوت (۰/۴۴) است. این موضوع به دلیل وجود اثرات غیرخطی بیشتر ناشی از ناحیه‌ی شوک مجاور نوک تیغه‌ها است.

### مقایسه با نتایج عددی

در شکل‌های ۱۰ و ۱۱، نتایج عددی حاضر با استفاده از روش بالادست «رو» با دقت مرتبه‌ی ۲ با نتایج تجربی [۳۴] و نتایج عددی [۱۴] براساس روش حجم محدود مرکزی «جیمسون» با دقت مرتبه‌ی ۲ و





شکل ۱۱. مقایسه‌ی توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با نتایج عددی در ماخ نوک تیغه  $0.877$  و زاویه گام تیغه  $8$  درجه.

شکل ۱۰. مقایسه‌ی توزیع ضریب فشار در مقاطع مختلف تیغه در مقایسه با نتایج عددی در ماخ نوک تیغه  $0.44$  و زاویه گام تیغه  $8$  درجه.

دقت حل در آنها است. با توجه به این ویژگی، در مطالعه‌ی حاضر، تأثیر دقت مکانی حل عددی در شبه‌سازی عددی جریان حول روتور و در نتیجه، تأثیر آن بر مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌های روتور بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که حل دقیق جریان حول روتور متأثر از اثرات دنباله‌ی تیغه‌ها بوده و با توسعه‌ی حل عددی از نظر زمان - در صورتی که ساختار دنباله و در نتیجه جریان القایی با دقت بیشتر تعیین شود - توزیع فشار و مشخصات آیرودینامیکی تیغه‌ها (به‌ویژه در حل مرتبه‌ی دو) نیز دقیق‌تر محاسبه خواهند شد.

در نوشتار حاضر از شبکه‌ی بی‌سازمان استفاده شده که علاوه بر مدل‌سازی خوب هندسی و قابلیت تحلیل جریان حول هندسه‌های پیچیده‌تر نسبت به روش باسازمان، از ویژگی اساسی و مهم قابلیت تطبیق محلی این نوع شبکه در نواحی باگرادیان‌های زیاد (نظیر نواحی شوک در مجاور نوک تیغه‌ها) برای افزایش دقت حل عددی در این نواحی از میدان حل برخوردار است. از این ویژگی و قابلیت به همراه استفاده از الگوریتم‌های تطبیق شبکه می‌توان برای تسخیر دقیق دنباله‌ی روتور شامل گردابه‌های نوک تیغه و در نتیجه، حل دقیق‌تر جریان حول روتور نیز استفاده کرد.

این تحقیق در راستای تدوین نرم‌افزاری دقیق و مؤثر برای تحلیل جریان تراکم‌پذیر حول روتور در داخل کشور است و نرم‌افزار حاضر در حال توسعه برای حل معادلات اوایلر/ناویراستوکس حول هندسه کامل بالگرد است.

### قدردانی

بدینوسیله از دانشگاه صنعتی شریف به دلیل در اختیار قرار دادن امکانات لازم و کمک‌های بی‌شائبه، کمال تشکر و قدردانی می‌نماید.

### پانویس

1. rotor wake
2. hovering rotor
3. Roe's scheme
4. unstructured mesh
5. MUSCL scheme
6. residual smoothing
7. Riemann invariants
8. Jamson's scheme
9. artificial viscosity

### منابع

1. Gray, R.B., "On the motion of the helical vortex shed from a single bladed hovering model rotor and its application to the calculation of the spanwise aerodynamic loading", Princeton University

عددی بالادست با دقت مرتبه‌ی ۴ استفاده شده<sup>[۲۴]</sup> و در نتیجه، نتایج آن در نواحی داخلی نسبت به حل حاضر و نتایج قبلی<sup>[۱۴]</sup> که هر دو دارای دقت مرتبه‌ی ۲ هستند در مقایسه با نتایج تجربی از تطابق بهتری برخوردار است.

شایان ذکر است که در مقاله‌ی حاضر از شبکه‌ی بی‌سازمان استفاده شده در حالی که در تحقیقات قبلی<sup>[۲۴] و [۱۴]</sup> از روش شبکه‌ی باسازمان استفاده شده است. علاوه بر مدل‌سازی خوب هندسی روش بی‌سازمان و قابلیت آن در تحلیل جریان حول هندسه‌های پیچیده‌تر نسبت به روش باسازمان، ویژگی اساسی و مهم آن، عبارت است از قابلیت تطبیق محلی این نوع شبکه در نواحی باگرادیان‌های زیاد (نظیر نواحی شوک در مجاور نوک تیغه‌ها) برای افزایش دقت حل عددی در این نواحی از میدان حل.

### نتیجه‌گیری

در این تحقیق، شبه‌سازی عددی میدان جریان غیرلزج و تراکم‌پذیر حول روتور در پرواز ایستایی توسط روش عددی «رو» در شبکه‌ی بی‌سازمان انجام شده است. نتایج آیرودینامیکی حاضر شامل توزیع فشار مقاطع مختلف تیغه، به‌ویژه در مقاطع بیرونی، حتی بدون استفاده از مدل‌سازی اثرات دنباله‌ی روتور تطابق نسبی با نتایج عددی (روش حجم محدود مرکزی همراه با مدل‌سازی دنباله) و نتایج تجربی دارد. با استفاده از الگوریتم عددی بالادست در تحلیل جریان حول روتور به دلیل در برداشتن مشخصه‌های انتشار موجی جریان در این روش‌ها، حل‌های دقیق و فیزیکی حاصل شده و این روش‌ها به ویژه در تحلیل جریان گذر صوتی حول تیغه‌ها، نسبت به روش‌های حجم محدود مرکزی مؤثرترند. یکی از مزایای الگوریتم‌های بالادست، قابلیت و امکان افزایش

Aero. Engineering Department, Report No. 313, (1955).

2. Landgrebe, A.J., "An analytical and experimental investigation of helicopter rotor performance and wake geometry characteristic", USAAM-RDL *Technical Report* 71-24 (1971).
3. Kocurek, J.D. and Tangler, J.L., "A prescribed wake lifting surface hover performance analysis", *Journal of the American Helicopter Society*, **22**(1), pp. 24-35 (1977).
4. Shenoy, K.R. and Gray, R.B., "Iterative lifting surface method for thick bladed hovering helicopter rotors", *Journal of Aircraft*, **18**(6), pp. 417-424 (1981).

5. Scully, M.P., "Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads", MIT, ASRL-TR-178-1 (1975).
6. Summa, J.M., "Potential flow about three-dimensional lifting configurations with applications to wings and rotors", AIAA paper 75-125 (1975).
7. Bliss, D.B. and Miller, W.O., "Efficient free wake calculations using analytical/ numerical matching and far-field linearization", Presented at the 45th Annual American Helicopter Society Forum, Boston, MA, (May 1989).
8. Sankar, L.N. and Prichard, D., "Solution of transonic flow past rotor blades using the conservative full potential equation," AIAA Paper 85-5012 (Oct. 1985).
9. Sankar, L.N., Malone, J.B. and Tassa, Y., "A strongly implicit procedure for steady three-dimensional transonic potential flow", *AIAA Journal*, **20**(5), (1982).
10. Strawn, R.C., "Numerical modeling of rotor flows with a conservative form of the full potential equation", AIAA Paper 86-0079 (July 1986).
11. Bridgeman, J.O., Strawn, R.C. and Caradonna, F.X., "An entropy and viscosity corrected potential method for rotor performance prediction", 44th Annual AHS Forum, (June 1988).
12. Strawn, R.C. and Caradonna, F.X., "Conservative full potential model for unsteady transonic rotor flows", *AIAA Journal*, **25**, pp. 193-198 (1987).
13. Sankar, L.N., Wake, B.E. and Lekoudis, S.G., "Solution of the unsteady Euler equations for fixed and rotor wing configurations", *Journal of Aircraft*, **23**(4), pp. 283-289 (1986).
14. Agarwal, R.K. and Deese, J.E., "An Euler solver for calculating the flowfield of a helicopter rotor in hover and forward flight", AIAA 19th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Laser Conference, (June 1987).
15. Hassan, A.A., Tung, C. and Sankar, L.N., "An assessment of full potential and Euler solutions for self generated blade-vortex interactions", 46th Annual AHS Forum, (May 1990).
16. Ahmad, J. and Duque, E.P.N., "Helicopter rotor blade computation in unsteady flows using moving embedded grids", AIAA Paper 94-1922, (June 1994).
17. Ahmed, S.R. and Vidjaja, V.T., "Unsteady panel method calculation of pressure distribution on BO 105 model rotor blades", *Journal of the American Helicopter Society*, **43**(1), pp. 47-56 (1998).
18. Richason T.F. and Katz J., "Unsteady panel method for flows with multiple bodies moving along various paths", *AIAA Journal*. **32**(1), pp. 62-68 (1994).
19. Szymendera C.J., "Computational free wake analysis of A helicopter rotor", The Pennsylvania State University, Ms.c Thesis (2002).
20. Hariharan, N., "Evaluation of high order upwind schemes for rotors in hover", AIAA Paper 2003-49 (2003).
21. Hariharan, N. and Sankar, L.N., "First-principles based high order methodologies for rotorcraft flowfield studies", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada, (1999).
22. Hall, C.M., Long, L. N., "High-order accurate simulations of wake and tip vortex flowfields", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada (1999).
23. Tang, L., and Baeder, J.D., "Improved Euler simulation of hovering rotor tip vortices with validation", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada (1999).
24. Kim, H., Williams, M.H. and Lyrintzis, A.S., "Improved Method for Rotor Wake Capturing", *Journal of Aircraft*, **39**(5), pp. 794-803 (Sept. Oct. 2002).
25. Berkman, M.E., Sankar, L.N., Berezin, C.R., and Torok, M.S., "A Navier-Stokes/full potential/free wake method for advancing multi-blade rotors", *Proceedings of the 53th Annual Forum of the American Helicopter Society*. Virginia Beach, VA., (1997).
26. Moulton, M.A., Wenren, Y. and Caradonna, F.X., "Free-wake hover flow prediction with a hybrid potential/Navier-Stokes solver", *AHS 55th Annual Forum*, Montreal, Canada (1999).
27. Hariharan, N., Sankar, L.N., "A review of computational techniques for rotor wake modeling", AIAA Paper 2000-0114 (2000).
28. Roe, P.L., "Characteristic-based schemes for the Euler equations", *Annual Review of Fluid Mechanics*, **18**, pp. 337-365 (1986).
29. Van Leer, B., "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V: A Second Order Sequel to Godunov's Method", *Journal of Computational Physics*, **32**, pp. 101-136 (1979).
30. Van Albada, G.D., Van leer, B. and Roberts, W.W., "A Comparative Study of Computational Methods in Cosmic Gas Dynamics", *Astronomy and Astrophysics*, **108**, pp. 76-84 (1982).
31. Frink, N.T., Parikh, P. and Pirzadeh, S., "A Fast Upwind Solver for the Euler Equations

- on Three-Dimensional Unstructured Meshes”, AIAA Paper 91-0102 (1991).
32. Batina, J.T., “Implicit flux split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes”, *AIAA Journal*, **29**(11), pp. 1836-1843 (1991).
33. Hejranfar, K. and Mohammadi, M., “Upwind scheme for solution of three-dimensional inviscid flows over complex geometries on unstructured meshes”, *Proceedings of the 9th Fluid Dynamics Conference*, Iran, Shiraz (March 2005).
34. Caradonna, F.X. and Tung, C., “Experimental and analytical studies of a model helicopter rotor in hover”, *Vertica*, **5**, pp. 149-161 (1981).

Archive of SID