

کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ی پیزوالکتریک

بر پایه‌ی نظریه‌ی مرتبه بالا

محمد شریعت (استادیار)

امین یاقونبان (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصرالدین طوسی

در این نوشتار کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ی پیزوالکتریک با به‌کارگیری یک نظریه‌ی مرتبه بالا بررسی شده است. بدین ترتیب، برخلاف نظریه‌ی کلاسیک، تنش‌های برشی عرضی نیز در نظر گرفته شده‌اند. فرمول‌بندی پیشنهادی برای پوسته‌های جدار ضخیم و جدار نازک معتبر است. اثر دامنه‌ی انحراف اولیه که عموماً به‌صورت جابه‌جایی عرضی است بر بارکمانش ارزیابی شده است. با بهره‌گیری از المان هرمیتی هرگونه شرایط مرزی از قبیل جابه‌جایی و تنش‌ی قابل اعمال است. در نهایت، اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی روی سطوح داخلی و خارجی استوانه‌ی پیزوالکتریک بر بارکمانش بررسی شده است.

۱. مقدمه

مدل برای تحلیل تیرهای خمیده تعمیم یافت. [۶] تحقیقاتی بر روی کمانش، پس کمانش و پایداری دینامیکی پوسته‌های پیزوالکتریک [۷]، بررسی رفتار الکترومکانیکی پوسته‌های استوانه‌ی پیزوترموالاستیک [۸] و همچنین، اثر خاصیت پیزوالکتریکی بر بارکمانش پوسته‌های استوانه‌ی با طول نامحدود تحت فشار و میدان الکتریکی شعاعی [۹] توسط چن و همکارش انجام شده است. پژوهشگران رفتار ارتعاشی و پس‌کمانش ورق‌های مرکب پیزوالکتریک را با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های حرارتی بزرگ مورد بررسی قرار دادند. [۱۰] و با استفاده از روش المان محدود غیرخطی و نیز بهره‌جستن از روش نیوتن - رافسون، به تحلیل رفتار ترموپیزوالکتریک ورق پیزوالکتریک بر پایه‌ی نظریه‌ی *averwise* و روابط کرنش-جابه‌جایی ون-کارمن پرداختند. [۱۱] رفتار پس‌کمانش پوسته‌های استوانه‌ی لایه‌ی دارای نقص اولیه، تحت بار محوری به همراه محرک‌های پیزوالکتریک بر اساس روابط کرنش-جابه‌جایی دائل مورد مطالعه قرار گرفت. [۱۲] از سوی دیگر، محققان مطالعاتی پیرامون پایداری دینامیکی پوسته‌های استوانه‌ی پیزوالکتریک با استفاده از روش اجزاء محدود [۱۳] و نیز پوسته‌های استوانه‌ی پیزوترموالاستیک با استفاده از روش اجزاء محدود انجام داده‌اند. [۱۴]

طبق مطالعات انجام شده، کمانش پوسته‌های استوانه‌ی پیزوالکتریک تحت بارهای محوری کم‌تر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این نوشتار پوسته‌های استوانه‌ی پیزوالکتریک بررسی می‌شود. در این مسیر، بر خلاف بسیاری از کارهای پیشین که از نظریه‌های کلاسیک ورق و پوسته یا نظریه‌ی مرتبه اول استفاده شده است، به‌منظور در نظر

استفاده از مواد هوشمند در سازه‌ها یکی از زمینه‌های بسیار جدیدی است که در مهندسی سازه و مواد در سال‌های اخیر رونق پیدا کرده است. سازه‌های پیزوالکتریک با بهره‌گیری از اثرات مستقیم و معکوس مواد پیزوالکتریک رشد و توسعه‌ی فراوانی در صنایع (نظیر هوافضا، صنایع دریایی، هواپیماسازی و غیره) یافته‌اند. به‌کارگیری اثر مستقیم خاصیت پیزوالکتریکی در حس‌گرها همزمان با اثر معکوس آنها در محرک‌ها، این مواد را به یکی از کاربردی‌ترین مواد در زمینه‌ی سازه‌های هوشمند مبدل ساخته است. از این میان کنترل شکل و کمانش سازه‌ها با استفاده از مواد پیزوالکتریک در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهش‌گران و محققان قرار گرفته است. از زمان پیدایش خواص مستقیم و معکوس مواد پیزوالکتریک تا کنون تحقیقات فراوانی بر روی این مواد صورت گرفته است.

لامرینگ برای تحلیل سازه‌ی پوسته‌ی عمومی که سطح آن پوشیده از لایه‌ی نازکی از ماده‌ی پیزوالکتریک بود، مدل اجزاء محدود را بر پایه‌ی نظریه‌ی مرتبه اول برشی ارائه کرد. [۱] همچنین محققان، مطالعاتی پیرامون حل دقیق پوسته‌های استوانه‌ی دایره‌ی پیزوالکتریک انجام دادند. [۲] ابراموویچ و میلر نیز با استفاده از نظریه‌ی مرتبه اول برشی به بررسی محرک‌های خود حس‌گر پیزوالکتریک پوسته‌ی اقدام کردند. [۳] این در حالی بود که کنترل فعال کمانش ستونی که سطح آن پوشیده از مواد پیزوالکتریک بود، مورد آزمایش قرار گرفته بود. [۴] استرامبی مدل فشار سوزنی را برای تحلیل تیری که وصله‌هایی از جنس پیزوالکتریک روی سطوح بالایی و پایینی آن تعبیه شده بود به‌کار برد. [۵] بعدها این

جابه‌جایی‌های شعاعی در استوانه‌ها ظاهر می‌شوند^[17]، رابطه‌ی ۲ حاصل می‌شود:

$$\epsilon = \epsilon^{(0)} + z k^{(1)} + z^2 k^{(2)} + z^3 k^{(3)} \quad (2)$$

که در آن $\epsilon = \{\epsilon_x \epsilon_\theta \gamma_{\theta z} \gamma_{xz} \gamma_{x\theta}\}^T$ است و $\epsilon^{(0)}$ ، $k^{(1)}$ ، $k^{(2)}$ و $k^{(3)}$ در روابط ۳ تا ۶ آورده شده‌اند.

$$\epsilon^{(0)} = \begin{cases} u_{,x} + \frac{1}{r} w_{,x}^x + \bar{w}_{,x} w_{,x} \\ (v_{,0} + w_{,0})/R + \frac{1}{r} (w_{,0}/R)^x + \bar{w}_{,0} w_{,0}/R^x \\ \beta_\theta + w_{,0}/R \\ \beta_x + w_{,x} \\ u_{,0}/R + v_{,x} + (w_{,x} w_{,0} + \bar{w}_{,x} w_{,0} + \bar{w}_{,0} w_{,x})/R \end{cases} \quad (3)$$

$$k^{(1)} = \begin{cases} \beta_{x,x} \\ \beta_{\theta,0}/R - v_{,0}/R^x \\ 0 \\ 0 \\ \beta_{x,0}/R + \beta_{\theta,x} - v_{,x}/R \end{cases} \quad (4)$$

$$k^{(2)} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 3k(\beta_\theta + w_{,0}/R) \\ 3k(\beta_x + w_{,x}) \\ 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$k^{(3)} = \begin{cases} k(w_{,xx} + \beta_{x,x}) \\ k(w_{,00}/R + \beta_{\theta,0})/R \\ 0 \\ 0 \\ k(2w_{,x0}/R + \beta_{x,0}/R + \beta_{\theta,x}) \end{cases} \quad (6)$$

در روابط اخیر \bar{w} انحراف اولیه‌ی پوسته است.

گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی و عدم نیاز به ضرائب تصحیح، از نظریه‌های مرتبه بالای پوسته بهره گرفته می‌شود. همچنین تغییرات پتانسیل الکتریکی براساس مؤلفه‌های مرتبه بالای ضخامت آورده شده است.

با در نظر گرفتن کرنش‌های متوسط، از روابط غیر خطی کرنش - جابه‌جایی دائل بهره گرفته شده است. با استفاده از روش اجزاء محدود و با کمیته کردن تابع پتانسیل کل سیستم، معادلات حاکم بر مسئله استخراج شده است. به دلیل غیرخطی بودن روابط، نمی‌توان بار بحرانی را از روش حل مقادیر ویژه به دست آورد، لذا از روش بودیانسیکی استفاده شده است. در این روش تغییر ناگهانی در شیب منحنی بار-جابه‌جایی معرف بارکمانش است. اثر انحراف اولیه که عموماً به صورت جابه‌جایی شعاعی در استوانه وجود دارد نیز منظور شده است.

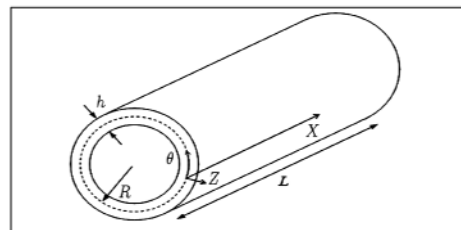
۲. میدان جابه‌جایی و کرنش

برای وارد کردن اثرات تنش‌های برشی عرضی در پوسته از نظریه‌ی برشی مرتبه سوم بهره گرفته شده است. همچنین در این نظریه توزیع تنش برشی در راستای ضخامت به صورت سهموی است. میدان جابه‌جایی نظریه‌ی مرتبه سوم به صورت رابطه‌ی ۱ است.^[15]

$$\begin{cases} u(x, \theta, z) = u_0 + z\beta_x + z^2 k(\beta_x + w_{,x}) \\ v(x, \theta, z) = v_0 (1 + z/R) + z\beta_\theta + z^2 k(\beta_\theta + w_{,0}/R) \\ w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta) \end{cases} \quad (1)$$

که در آن u_0 ، v_0 و w_0 جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی، β_θ و β_x دوران‌های عمود بر صفحه‌ی میانی حول محورهای x و θ هستند. همچنین شعاع میانگین استوانه $R = -\frac{1}{r} h^2$ و k ضخامت پوسته‌اند. مختصه‌ی x در راستای طولی، θ شعاعی و z در جهت ضخامت پوسته به سمت خارج استوانه و نسبت به لایه‌ی میانی است (شکل ۱).

با اعمال میدان جابه‌جایی ۱ در روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی دائل^[16] و با منظور کردن اثر انحراف اولیه که عموماً به صورت



شکل ۱. مشخصات هندسی و مختصات به‌کار رفته.

۳. پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی

تابع پتانسیل الکتریکی که در این مسئله در نظر گرفته شده است تابعی است به صورت رابطه‌ی ۷: [۱۸]

$$\varphi(x, \theta, z) = \varphi^{(0)} + z\varphi^{(1)} + z^2\varphi^{(2)} \quad (7)$$

که در آن $\varphi^{(0)}$ ، $\varphi^{(1)}$ و $\varphi^{(2)}$ به ترتیب عبارت‌اند از: پتانسیل الکتریکی سطح میانی، مشتق اول و مشتق دوم پتانسیل الکتریکی نسبت به راستای ضخامت در سطح میانی پوسته. دلیل استفاده از رابطه‌ی ۷، سازگاری مناسب‌تر آن با رابطه‌ی مؤلفه‌های جابه‌جایی (رابطه‌ی ۱) در استفاده از فرم توانی است. در این خصوص فرم‌های مثلثاتی نیز ارائه شده‌اند. [۱۹] با جای‌گذاری مقدار پتانسیل الکتریکی روی سطوح بالایی $(\varphi(x, \theta, +h/2) = \varphi^{(T)})$ و پایینی $(\varphi(x, \theta, -h/2) = \varphi^{(B)})$ ، در رابطه‌ی ۷، معادله‌ی ۸ برحسب پتانسیل الکتریکی سطح بالایی $(\varphi^{(T)})$ ، سطح میانی $(\varphi^{(0)})$ ، و سطح پایینی $(\varphi^{(B)})$ به دست می‌آید.

$$\varphi(x, \theta, z) = \varphi^{(0)} + (z/h)(-\varphi^{(B)} + \varphi^{(T)}) + (2z^2/h^2)(\varphi^{(B)} - 2\varphi^{(0)} + \varphi^{(T)}) \quad (8)$$

رابطه‌ی میدان الکتریکی برحسب پتانسیل الکتریکی در رابطه‌ی ۹ بیان شده است. [۱۵]

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi \quad (9)$$

که در آن $\mathbf{E} = \{E_x E_\theta E_z\}^T$ و ∇ بردار گرادینان در مختصات استوانه‌یی است.

۴. معادلات بنیانی

روابط مزدوج الکترومکانیکی حاکم بر محیط پیزوالکتریک عبارت است از: [۱۵]

$$\begin{cases} \sigma = \mathbf{C}\epsilon - \mathbf{e}^T \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e}\epsilon + \mathbf{bE} \end{cases} \quad (10)$$

که در آن $\sigma = \{\sigma_x \sigma_\theta \sigma_z \sigma_{xz} \sigma_{x\theta}\}^T$ نماینده‌ی بردار تنش، و $\mathbf{D} = \{D_x D_\theta D_z\}^T$ نماینده‌ی بردار جابه‌جایی الکتریکی هستند و بالاتویس T ترانهاده‌ی ماتریس را نشان می‌دهد. \mathbf{C} ماتریس سفتی کشسانی، \mathbf{e} ماتریس سفتی پیزوالکتریسیته و \mathbf{b} ماتریس نفوذپذیری دی‌الکتریک ماده است.

۵. مدل اجزاء محدود

برای به دست آوردن مدل اجزاء محدود، از المان چهارگره‌ی در مختصات استوانه‌یی استفاده شده است. از آنجا که در معادلات حاکم، مشتقات

w_0 تا مرتبه‌ی ۲ آشکار شده‌اند، استفاده از تابع شکل مرتبه ۳ مورد نیاز است. بر این پایه، از تابع شکل هرمیتی [۱۶]، با پیوستگی مشتقات مرتبه اول برای جابه‌جایی جانبی w_0 بهره گرفته شده است. مرتبه‌ی مشتق مرتبط با دیگر مؤلفه‌های جابه‌جایی ۱ است و لذا برای مؤلفه‌های مذکور از تابع شکل خطی لاگرانژی با پیوستگی C^0 استفاده شده است. [۱۶]

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \beta_x \\ \beta_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & H_{kl} & H_{k2} & H_{k3} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \mathbf{a}_e \quad (11)$$

که در آن N تابع شکل لاگرانژی و H تابع شکل هرمیتی است. زیرنویس k مربوط به گره‌ی k ام المان است. \mathbf{a}_e بردار مقادیر گره‌ی المان بوده و در رابطه‌ی ۱۲ معرفی شده است.

$$\mathbf{a}_e^T = [\dots u_0, v_0, w_0, \beta_x, \beta_\theta \dots]_e \quad (12)$$

همچنین برای پتانسیل الکتریکی مشابه با جابه‌جایی‌های مکانیکی رابطه‌ی ۱۳ برقرار است.

$$\begin{Bmatrix} \varphi^{(B)} \\ \varphi^{(0)} \\ \varphi^{(T)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_k & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_k \end{bmatrix} \varphi_e \quad (13)$$

که در آن $\varphi_e = \{\dots \Phi^{(B)} \Phi^{(0)} \Phi^{(T)} \dots\}^T$ است و کمیت‌های Φ با مقدار در نقاط گره متناظرند.

۶. معادلات حاکم

برای استخراج معادلات حاکم، و به منظور به دست آوردن فرمول‌بندی اجزاء محدود مسئله، از تابع انرژی پتانسیل سیستم استفاده می‌شود.

$$\pi = \frac{1}{V} \int_V (\epsilon^T \sigma - \mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV - \int_A u^T \mathbf{T} dA \quad (14)$$

$$K_{uu}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_{u^0}^T (e_0^T B_{\varphi^0} + e_1^T B_{\varphi^1} + e_2^T B_{\varphi^2}) + B_{u^1}^T (e_1^T B_{\varphi^0} + e_2^T B_{\varphi^1} + e_3^T B_{\varphi^2}) + B_{u^2}^T (e_2^T B_{\varphi^0} + e_3^T B_{\varphi^1} + e_4^T B_{\varphi^2}) + B_{u^3}^T (e_3^T B_{\varphi^0} + e_4^T B_{\varphi^1} + e_5^T B_{\varphi^2})) \det(J) Rd\xi d\eta \quad (20)$$

$$K_{\varphi u}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_{\varphi^0}^T (e_0 B_{u^0} + e_1 B_{u^1} + e_2 B_{u^2} + e_3 B_{u^3}) + B_{\varphi^1}^T (e_1 B_{u^0} + e_2 B_{u^1} + e_3 B_{u^2} + e_4 B_{u^3}) + B_{\varphi^2}^T (e_2 B_{u^0} + e_3 B_{u^1} + e_4 B_{u^2} + e_5 B_{u^3})) \det(J) Rd\xi d\eta \quad (21)$$

$$K_{\varphi\varphi}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_{\varphi^0}^T (b_0 B_{\varphi^0} + b_1 B_{\varphi^1} + b_2 B_{\varphi^2}) + B_{\varphi^1}^T (b_1 B_{\varphi^0} + b_2 B_{\varphi^1} + b_3 B_{\varphi^2}) + B_{\varphi^2}^T (b_2 B_{\varphi^0} + b_3 B_{\varphi^1} + b_4 B_{\varphi^2})) \det(J) Rd\xi d\eta \quad (22)$$

در روابط فوق J ماتریس ژاکوبین، ξ و η مختصات محلی در راستاهای طولی و محیطی المان هستند. دیگر پارامترهای به‌کار رفته به قرار زیرند:

$$[C_0, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6] = \int_z C [1, z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6] dz \quad (23)$$

$$[e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5] = \int_z e [1, z, z^2, z^3, z^4, z^5] dz \quad (24)$$

$$[b_0, b_1, b_2, b_3, b_4] = \int_z b [1, z, z^2, z^3, z^4] dz \quad (25)$$

در نهایت با ترکیب کل المان‌ها، مدل نهایی اجزاء محدود مسئله حاصل می‌شود (رابطه‌ی ۲۶):

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

۷. روش حل عددی

به‌دلیل غیرخطی بودن رابطه‌ی ۲۶ نمی‌توان از طریق حل مقدار ویژه بار بحرانی کمانش را به دست آورد. لذا از معیار پایداری بودیانسکی

در رابطه‌ی فوق از شارژ الکتریکی سطحی و نیروهای حجمی صرف‌نظر شده است. بردار تنش سطحی و u بردار جابه‌جایی مکانیکی است.

با کمینه کردن تابع پتانسیل سیستم ($\delta\pi = 0$) رابطه‌ی ۱۵ نتیجه می‌شود.

$$\int_V (\delta\varepsilon^T \sigma - \delta\mathbf{E}^T \mathbf{D}) dV = \int_A \delta u^T \mathbf{T} dA \quad (15)$$

از اعمال روابط ۲ و ۱۱، $\delta\varepsilon$ برحسب مقادیرگرهی در رابطه‌ی ۱۶ آورده شده است.

$$\delta\varepsilon = (B_{u^0} + z B_{u^1} + z^2 B_{u^2} + z^3 B_{u^3}) \delta a_e \quad (16)$$

همچنین با استفاده از روابط ۹ و ۱۳ می‌توان رابطه‌ی ۱۷ را برای میدان الکتریکی به دست آورد.

$$\delta E = (B_{\varphi^0} + z B_{\varphi^1} + z^2 B_{\varphi^2}) \delta \varphi_e \quad (17)$$

ماتریس‌های B_{u^0}, \dots, B_{u^3} و $B_{\varphi^0}, \dots, B_{\varphi^2}$ در پیوست آورده شده‌اند.

با اعمال روابط ۱۰، ۱۶ و ۱۷ در رابطه‌ی ۱۵ می‌توان به رابطه‌ی ۱۸ دست یافت:

$$\begin{bmatrix} K_{uu}^e & K_{u\varphi}^e \\ K_{\varphi u}^e & K_{\varphi\varphi}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_e \\ \varphi_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F^e \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

که در آن K_{uu}^e ماتریس سفتی مکانیکی المان، $K_{u\varphi}^e$ و $K_{\varphi u}^e$ ماتریس‌های سفتی الکترومکانیکی المان و $K_{\varphi\varphi}^e$ ماتریس سفتی الکتریکی المان هستند. همچنین بردار نیروی مکانیکی المان است. روابط منتهی به ماتریس‌های سفتی عبارت‌اند از:

$$K_{uu}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (B_{u^0}^T (C_0 B_{u^0} + C_1 B_{u^1} + C_2 B_{u^2} + C_3 B_{u^3}) + B_{u^1}^T (C_1 B_{u^0} + C_2 B_{u^1} + C_3 B_{u^2} + C_4 B_{u^3}) + B_{u^2}^T (C_2 B_{u^0} + C_3 B_{u^1} + C_4 B_{u^2} + C_5 B_{u^3}) + B_{u^3}^T (C_3 B_{u^0} + C_4 B_{u^1} + C_5 B_{u^2} + C_6 B_{u^3})) \det(J) Rd\xi d\eta \quad (19)$$

۸. نتایج

۸.۱. اعمال فشار یکنواخت خارجی بر استوانه‌ی $PVDF$ ۱ دو

سر مفصل

در این مثال برای بررسی صحت پاسخ‌های به دست آمده از حل اجزا محدود، نتایج بی‌بعد شده‌ی جابه‌جایی شعاعی و محوری و پتانسیل الکتریکی سطح میانی برای پوسته‌ی استوانه‌ی $PVDF$ دو سر مفصل تحت فشار یکنواخت خارجی P_0 و پتانسیل الکتریکی صفر روی سطوح داخلی و خارجی با نتایج موجود پیشین^[۲۰] در جدول ۱ برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت و نسبت طول به شعاع ۴ مقایسه شده است که حاکی از مطابقت خوب نتایج است. بی‌بعد سازی به صورت روابط ۲۷ انجام شده است:^[۲۰]

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{uE}{S^2 h P_0}, & \tilde{Q} &= 1000 \frac{\varphi d r E}{R P_0}, & \tilde{\tau}_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{P_0} \\ \tilde{w} &= \frac{wE}{S^2 h P_0}, & \tilde{z} &= \frac{z}{h}, & S &= \frac{R}{h} \end{aligned} \quad (27)$$

از نتایج به دست آمده در جدول ۱ چنین بر می‌آید که با کاهش نسبت شعاع به ضخامت، میزان جابه‌جایی شعاعی پوسته نسبت به حل کلاسیک افزایش می‌یابد؛ این امر ناشی از تأثیر لحاظ کردن تنش‌های برشی برخلاف حل کلاسیک است.

۸.۲. تعیین بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ی الاستیک بر

پایه‌ی نظریه‌ی مرتبه بالا

در این بخش بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ی کشسان با استفاده از نظریه‌ی مرتبه بالای پوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. به دلیل در نظر گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی و افزایش نسبت جابه‌جایی‌های جانبی نسبت به حل کلاسیک با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، بار کمانش کمتر از مقدار بار کمانش حل مقدار ویژه که مبتنی بر حل کلاسیک است به دست خواهد آمد.^[۲۱] جدول ۲ مقدار بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ی کشسان با مدول کشسانی $E = 209/5 GPa$

جدول ۱. تأثیر نسبت شعاع به ضخامت بر مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی‌های شعاعی، محوری و پتانسیل الکتریکی سطح میانی پوسته تحت تأثیر فشار خارجی یکنواخت.

$\tilde{\varphi}_0(x = 0.25L)$	$\tilde{u}_0(x = 0)$	$\tilde{w}_0(x = 0.5L)$			
S	کار حاضر مرجع [۲۰]	کار حاضر مرجع [۲۰]	کار حاضر مرجع [۲۰]	کار حاضر مرجع [۲۰]	کار حاضر مرجع [۲۰]
۱۰۰	۱,۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰	۰,۶۶۰۴	۰,۶۶۰۴	۰,۶۶۰۴
۱۰	۱,۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰	۰,۶۶۰۴	۰,۶۶۰۴	۰,۶۶۰۴
۶	۱,۰۰۰۰۰	۱,۰۰۰۰۰	۰,۶۶۰۴	۰,۶۶۰۴	۰,۶۶۰۴

به منظور تعیین مقدار بار کمانش استفاده می‌شود.^[۱۷] گام‌های حل مسئله را می‌توان چنین خلاصه کرد:

۱. دریافت ورودی‌های مسئله شامل مشخصات هندسی و خواص ماده؛

۲. شبکه‌بندی سطح میانی پوسته؛

۳. محاسبه‌ی ماتریس‌های خواص ماده شامل ماتریس‌های C_{ij} ، e_i و b_i . در این مرحله انتگرال‌گیری در راستای ضخامت انجام می‌گیرد؛

۴. اعمال تغییر شکل‌های اولیه. در این مرحله تغییر شکل‌های اولیه روی نقاط گرهی المان تعریف می‌شوند؛

۵. تقسیم‌بندی و مشخص کردن مراحل اعمال بار به صورت افزایش مرحله‌ی؛

۶. مشخص کردن تعداد نقاط در انتگرال‌گیری گوس-لژاندر و تابع وزن متناظر با هر نقطه؛

۷. شروع اعمال مرحله‌ی بار؛

۸. محاسبه‌ی ماتریس سفتی المان و مونتاژ کردن آن در ماتریس سفتی نهایی؛ با توجه به این که ماتریس سفتی وابسته به مقادیر گرهی است، در هر تکرار ماتریس سفتی برحسب متغیرهای گرهی تکرار قبل محاسبه می‌شود. (در اولین مرحله مقادیر گرهی صفر در نظر گرفته می‌شوند.)

۹. محاسبه‌ی بردار نیروی المان و مونتاژ کردن آن در بردار نیروی نهایی؛

۱۰. اعمال شرایط مرزی در ماتریس سفتی نهایی و بردار نیروی نهایی به منظور حل دستگاه معادلات جبری؛

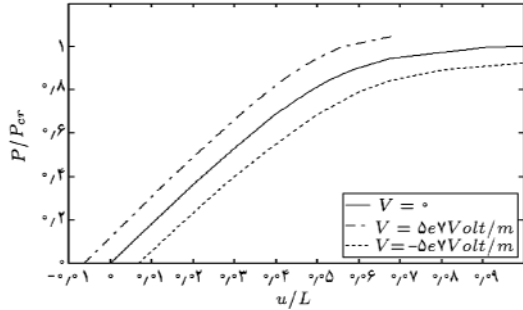
۱۱. حل دستگاه معادلات جبری سیستم و به دست آوردن مقادیر متغیرهای گرهی؛

۱۲. مقایسه‌ی مقادیر گرهی به دست آمده با مقادیر گرهی تکرار قبل به منظور ارزیابی همگرایی؛

۱۳. در صورت عدم دست‌یابی به همگرایی، با منظور کردن مقادیر متغیرهای اولیه، مراحل ۸ تا ۱۲ تکرار می‌شوند؛

۱۴. در صورت به دست آمدن همگرایی، اگر مراحل افزایش بار پایان پذیرفته باشد مقادیر متغیرهای اولیه به دست آمده برای شروع اعمال مرحله‌ی بعدی نیرو منظور شده و مراحل ۷ تا ۱۳ دوباره برای بار افزایش داده شده تکرار می‌شوند.

بعد از اتمام مراحل افزایش بار، با استفاده از منحنی بار-جابه‌جایی و معیار بودیانسکی محل بار بحرانی کمانش مشخص می‌شود.



شکل ۲. تغییر بار کمانش محوری پوسته‌ی پیزوالکتریک بر اثر اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی.

۸.۴. اثر اختلاف پتانسیل الکتریکی بر بار کمانش

اثر اعمال تحریک‌های مختلف بر بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌یی پیزوالکتریک PVDF دو سر مفصل با مشخصات زیر در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نسبت طول به شعاع استوانه ۳ و نسبت شعاع به ضخامت برابر ۲۰ است. مشخصات ماده‌ی پیزوالکتریک نیز به صورت رابطه‌ی ۲۹ است.

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2.1 \text{ GPa}$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 1/3$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = 0.1062 \times 10^{-9} \text{ F/m}$$

$$e_{31} = -0.10015, e_{32} = 0.10285$$

$$e_{33} = -0.1051 \text{ C/m}$$

$$d_{31} = 3 \times 10^{-12}, d_{32} = 23 \times 10^{-12}$$

$$d_{33} = -30 \times 10^{-12} \text{ CN}^{-1} \quad (29)$$

شکل ۲ نشانگر اثر اعمال اختلاف پتانسیل‌های مختلف بر سطح داخلی و خارجی پوسته است. با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی مناسب می‌توان مقدار بار کمانش را افزایش داد.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار کمانش استاتیکی پوسته‌های استوانه‌یی پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا و به منظور تعیین دقیق‌تر بار کمانش از نظریه‌ی مرتبه‌ی بالای پوسته با در نظر گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی بهره گرفته شد. همچنین، معادلات حاکم بر مسئله بر اساس روابط غیرخطی کرنش-جاب‌جایی دائل و با استفاده از توزیع مرتبه ۲ پتانسیل الکتریکی در راستای ضخامت، استخراج شد.

با استفاده از روش اجزاء محدود و با در نظر گرفتن المان دوبعدی چهارگره‌ی هرمیتی در مختصات استوانه‌یی معادلات حاکم حل شد. اثر انحراف اولیه و همچنین اثر بار الکتریکی بر پوسته‌ی استوانه‌یی

و ضریب پواسون $\nu = 1/3$ را برای نسبت‌های مختلف شعاع به ضخامت و نسبت‌های مختلف طول به شعاع را نشان می‌دهد.

بار بحرانی به دست آمده نسبت به بار کمانش حاصل از حل مسئله‌ی مقدار ویژه بی‌بعد شده است. نتایج حاکی از کاهش بار کمانش بر اثر کاهش نسبت شعاع به ضخامت، و همچنین طول به شعاع به دلیل در نظر گرفتن اثرات تنش‌های برشی عرضی برخلاف نظریه‌ی کلاسیک است. از آنجا که با نازک‌تر شدن پوسته، اثر تنش‌های برشی عرضی ناچیزتر می‌شود، انطباق نتایج کنونی با نظریه‌ی کلاسیک در پوسته‌های نازک‌تر (نسبت شعاع به ضخامت بزرگ‌تر) بیشتر است. در نسبت‌های بزرگ طول به شعاع استوانه، کمانش به کمانش تیر (کمانش کلی) نزدیک‌تر شده و اثر تنش‌های برشی عرضی (اثر موضعی) کاهش می‌یابد. در نتیجه مقدار بار کمانش به مقدار پیش‌بینی شده از نظریه‌ی کلاسیک نزدیک می‌شود. [۱۷]

۸.۳. اثر انحراف اولیه بر بار کمانش

در این بخش اثر انحراف اولیه بر بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌یی با مشخصات مادی بخش قبل، و با نسبت طول به شعاع ۲/۵ و نسبت شعاع به ضخامت ۱۲ مورد بررسی قرار می‌گیرد. انحراف اولیه به صورت رابطه‌ی ۲۸ است.

$$\bar{w} = \frac{W_0}{h} \sin(\Delta\pi \frac{x}{L}) \quad (28)$$

جدول ۳ اثر میزان دامنه‌ی انحراف اولیه بر بار کمانش نسبی را نشان می‌دهد.

نتایج نشان می‌دهد که با افزایش دامنه‌ی انحراف اولیه، مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد. ثابت شده است که تغییر شکل اولیه بر فرم نهایی کمانش تأثیرگذار است و دامنه‌های بزرگ‌تر تمایل به کمانش را افزایش می‌دهند. [۱۷]

جدول ۲. بار کمانش استاتیکی نسبی برای هندسه‌های مختلف پوسته‌ی کامل.

S = 100	S = 50	S = 20	
0.77	0.65	0.63	L/R = 1
0.88	0.72	0.69	L/R = 2
0.96	0.84	0.79	L/R = 5

جدول ۳. اثر دامنه‌ی تغییر شکل اولیه بر بار بحرانی پوسته.

W ₀ /h	بار بحرانی نسبی
0.0	0.7
0.1	0.65
0.1	0.43

طول به شعاع و شعاع به ضخامت به دست آمده و همچنین اثر تغییر شکل اولیه و نیز ولتاژ الکتریکی در مقدار بارکمانش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاکی از کاهش بارکمانش نسبت به حل مقدار ویژه با افزایش نسبت ضخامت به شعاع و شعاع به طول است.

پیزوالکتریک مورد ارزیابی قرار گرفت. برای اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، نتایج حل خمشی برای استوانه‌ی پیزوالکتریک با نتایج مراجع دیگر مقایسه شد. نهایتاً مقادیر بارکمانش محوری بی‌بعد شده برای نسبت‌های مختلف

پانوشت

1. poly vinylidene fluoride

منابع

- Lammering, R., "The application of a finite shell element for composites containing piezoelectric polymers in vibration control", *Comput Struct*, **41** (5), pp. 1101-9 (1991).
- Tzou, H. and Ye, R., "Piezothermoelasticity and precision control of piezoelectric systems", *ASME J. Vibrations and Acoustics*, **116**, pp. 489-495 (1994).
- Miller, S.E. and Abramovich, H., "A self-sensing piezolaminated actuator model for shells using a first shear deformation theory", *J. Intelligent Material System and Structures*, **6**, pp. 624-638 (1995).
- Thomson, S.P. and Loughlan, J., "The active buckling control of some composite column strip using piezoceramic actuators", *Composite Structures*, **32** (1-4), pp. 56-67 (1995).
- Strambi, G., Barboni, R. and Gaudenzi, P., "Pin-force and Euler-Bernoulli models for analysis of intelligent structures", *AIAA J.*, **33**(9), pp. 1746-9 (1995).
- Lalande, F., Chaudhry, Z. and Rogers, C.A., "Modeling considerations for in-phase actuation of actuators bonded to shell structures", *AIAA J.*, **33**(7), pp. 1300-4 (1995).
- Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Incremental variational principles for finitely deformed piezothermoelastic media", *Acta Solids Mechanica Sinica* (1995).
- Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Piezothermoelasticity analysis for a circular cylindrical shell under the state of axisymmetric deformation", *Int. J. Eng. Sci.*, **34**, pp. 1585-600 (1996).
- Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Stability analysis of piezoelectric circular cylindrical shells", *J. Appl. Mech.*, **64**, pp. 847-852 (1997).
- Oh, I.K., Han, J.H. and Lee, I., "Postbuckling and vibration characteristics of piezolaminated composite plates subjected to thermopiezoelectric loads", *J. Sound and Vibration*, **233** (1), pp. 19-40 (2000).
- Oh, I.K., Han, J.H. and Lee, I., "Thermopiezoelectric snapping of piezolaminated plates using layerwise nonlinear finite elements", *AIAA J.*, **39**(6), pp. 1188-1197 (2001).
- Shen, H.S., "Postbuckling analysis of axially-loaded laminated cylindrical shells with piezoelectric actuators", *Eur. J. Mech. A/Solids*, **20**, pp. 1007-1022 (2001).
- Zhu, J.Q., Chen, C.Q. and Shen, Y.P., "Three dimensional analysis of the dynamic stability of piezoelectric circular cylindrical shells", *European Journal of Mechanics and Solids*, **22**, pp. 401-411 (2003).
- Ganesan, N. and Kadoli, R., "Buckling and dynamic analysis of piezothermoelastic composite cylindrical shell", *Composite Structures*, **59**, pp. 45-60 (2003).
- Pinto Correia, I.F. Mota Soares, C.M. Mota Soares, C.A. and J. Herskovits, "Active control of axisymmetric shells with piezoelectric layers: a mixed laminated theory with a high order displacement field", *Computers and Structures*, **80**, pp. 2265-2275 (2002).
- Palazotto, A.N. and Dennis, S.T., "Nonlinear analysis of shell structures", *AIAA education series* (1992).
- Shariyat, M. and Eslami, M.R., "On thermal dynamic buckling analysis of imperfect laminated cylindrical shells", *ZAMM*, **80**(3), pp. 171-182 (2000).
- Wu, X.H., Chen, C., Shen, Y. and Tian, X., "A high order theory for functionally graded piezoelectric shells", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 5325-44 (2002).
- Wang, J. and Yang, J., "Higher-Order Theories of Piezoelectric Plates and Applications", *Appl. Mech. Review*, **53**(4), pp. 87-99 (2000).
- Kapurria, S., Sengupta, S. and Dumir, P.C., "Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load", *Comput Meth Appl Mech and Eng*, **140**, pp. 139-155 (1997).
- Reddy, J.N., "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis", Boca Raton, CRC Press (2004).

پیوست

فرم باز شده‌ی ماتریس‌های روابط ۱۶ و ۱۷:

$$B_{u^*} = \begin{bmatrix} N_{k,x} & \circ & (\bar{w}_{,x} + \frac{1}{\nu} w_{,x}) H_{kl,x} & \bar{w}_{,x} + \frac{1}{\nu} w_{,x} H_{k\gamma,x} \\ \circ & \frac{1}{R} N_{k,\theta} & \frac{1}{R} [(\bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{\nu} w_{,\theta}) H_{k\lambda,\theta} + H_{k\lambda}] & \frac{1}{R} [(\bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{\nu} w_{,\theta}) H_{k\gamma,\theta} + H_{k\gamma}] \\ \circ & \circ & \frac{1}{R} H_{k\lambda,\theta} & \frac{1}{R} H_{k\gamma,\theta} \\ \circ & \circ & H_{k\lambda,x} & H_{k\gamma,x} \\ \frac{1}{R} N_{k,\theta} & N_{k,x} & \frac{1}{R} [(\bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{\nu} w_{,\theta}) H_{k\lambda,x}] & \frac{1}{R} [(\bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{\nu} w_{,\theta}) H_{k\gamma,x}] \\ & & [+(\bar{w}_{,x} + \frac{1}{\nu} w_{,x}) H_{k\lambda,\theta}] & [+(\bar{w}_{,x} + \frac{1}{\nu} w_{,x}) H_{k\gamma,\theta}] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{w}_{,x} + \frac{1}{\nu} w_{,x}) H_{k\gamma,x} & \circ & \circ \\ \frac{1}{R} [(\bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{\nu} w_{,\theta}) H_{k\gamma,\theta} + H_{k\gamma}] & \circ & \circ \\ \frac{1}{R} H_{k\gamma,\theta} & \circ & N_k \\ H_{k\gamma,x} & N_k & \circ \\ \frac{1}{R} [(\bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{\nu} w_{,\theta}) H_{k\gamma,x}] & \circ & \circ \\ [+(\bar{w}_{,x} + \frac{1}{\nu} w_{,x}) H_{k\gamma,\theta}] & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$B_{u\lambda} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & N_{k,x} & \circ \\ \circ & -\frac{1}{R^{\gamma}} N_{k,\theta} & \circ & \circ & \circ & \circ & \frac{1}{R} N_{k,\theta} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -\frac{1}{R} N_{k,\theta} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$B_{u\gamma} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -\frac{\nu}{h^{\gamma} R} H_{k\lambda,\theta} & -\frac{\nu}{h^{\gamma} R} H_{k\gamma,\theta} & -\frac{\nu}{h^{\gamma} R} H_{k\gamma,\theta} & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} N_k & \dots \\ \circ & \circ & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} H_{k\lambda,x} & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} H_{k\gamma,x} & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} H_{k\gamma,x} & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} N_k & \dots \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$B_{u\gamma} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} H_{k\lambda,x} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} H_{k\gamma,x} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} H_{k\gamma,x} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma}} N_{k,x} & \circ \\ \circ & \circ & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R^{\gamma}} H_{k\lambda,\theta} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R^{\gamma}} H_{k\gamma,\theta} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R^{\gamma}} H_{k\gamma,\theta} & \circ & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} N_{k,\theta} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} H_{k\lambda,x} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} H_{k\gamma,x} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma} R} H_{k\gamma,x} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma}} N_{k,\theta} & -\frac{\nu}{\nu h^{\gamma}} N_{k,x} \end{bmatrix}$$

$$B_{\varphi^*} = - \begin{bmatrix} \circ & N_{k,x} & \circ \\ \circ & \frac{1}{R} N_{k,\theta} & \circ \\ -\frac{1}{h} N_k & \circ & \frac{1}{h} N_k \end{bmatrix}$$

$$B_{\varphi\lambda} = - \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} N_{k,x} & \circ & \frac{1}{h} N_{k,x} \\ -\frac{1}{h R} N_{k,\theta} & \circ & \frac{1}{h R} N_{k,\theta} \\ \frac{\nu}{h^{\gamma}} N_k & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} N_k & \frac{\nu}{h^{\gamma}} N_k \end{bmatrix}$$

$$B_{\varphi\gamma} = - \begin{bmatrix} \frac{\nu}{h^{\gamma}} N_{k,x} & -\frac{\nu}{h^{\gamma}} N_{k,x} & \frac{\nu}{h^{\gamma}} N_{k,x} \\ \frac{\nu}{h^{\gamma} R} N_{k,\theta} & -\frac{\nu}{h^{\gamma} R} N_{k,\theta} & \frac{\nu}{h^{\gamma} R} N_{k,\theta} \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$