

مدل سازی جریان در محیط متخلخل با استفاده از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید

کریم گودرزی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

بهار فیروزآبادی (دانشیار)

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار جریان دوفازی در محیط متخلخل با استفاده از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید پیاده سازی و حل شده است. با استفاده از تعریف فشار و سرعت کلی، معادلات جریان در محیط متخلخل به فرم ساده‌تری از لحاظ عددی تبدیل شده است. در این معادلات، معادله فشار و درجه‌ی اشباع نسبت به هم وابستگی کمی دارند ولی سرعت در معادله درجه‌ی اشباع مستقیماً ظاهر می‌شود. به همین دلیل برای رسیدن به جواب‌های قابل قبول باید سرعت با دقت خوبی محاسبه شود. روش هیبرید معادلات سرعت و فشار را با هم و به‌طور هم‌زمان حل می‌کند و از خطاهای ناشی از مشتق‌گیری عددی از میدان فشار برای رسیدن به میدان سرعت اجتناب می‌کند. بدین ترتیب میدان سرعت و فشار دقت یکسانی دارند. معادله درجه‌ی اشباع نیز از یک روش هیبریدی گسسته می‌شود. در این نوشتار میدان‌های یک‌بعدی و دوبعدی با استفاده از روش مذکور حل شده است. نتایج نشان داده است که جواب‌های به دست آمده از این روش، خصوصاً در شبکه‌ی درشت، نسبت به روش‌های دیگر از جمله روش‌های اختلاف محدود و اجزاء محدود گارکین به حل دقیق‌تر است.

واژگان کلیدی: محیط متخلخل، اجزاء محدود ترکیبی هیبرید، جریان دوفازی.

karim.goodarzi@gmail.com
firoozabadi@sharif.edu

مقدمه

شناخت جریان در محیط متخلخل برای مهندسی اهمیت زیادی دارد. از جمله روش‌هایی که برای این کار پیشنهاد می‌شود، روش‌های آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی است. از آنجا که روش‌های آزمایشگاهی هزینه‌بر هستند، عمده‌ی رویکردها استفاده از روش‌های عددی است. شبیه‌سازی جریان در محیط متخلخل مشکلات خاصی دارد. در این محیط از معادله‌ی دارسی برای بیان حرکت سیال استفاده می‌شود. در این معادله ضریب نفوذپذیری نسبی تابعی از درجه‌ی اشباع سیال است که این خود باعث غیرخطی شدن معادلات می‌شود. همچنین معادلات در محیط متخلخل از نوع معادلات جابه‌جایی - پخشی بوده که جمله‌ی جابه‌جایی آن قوی‌تر است و این امر باعث افزایش اتلاف عددی^۱ معادلات می‌شود؛ همچنین معادلات به شکل هذلولی بوده که جواب آن‌ها همراه با ناپیوستگی است. از طرف دیگر در بیشتر مسائل واقعی، محیط متخلخل محیطی ناهمگن است و این امر باعث تغییرات شدید مکانی می‌شود. روش‌هایی از نوع اجزاء محدود کلاسیک، هنگامی که محیط همگن باشد، جواب‌های نسبتاً خوبی ارائه می‌کنند. اما با وجود ناهمگنی در محیط، به‌طور مثال ناهمگنی در تخلخل یا نفوذپذیری، این روش‌ها نمی‌توانند ناپیوستگی‌ها را به خوبی مدل کرده و به این ترتیب جواب‌هایی که از این روش‌ها به دست می‌آیند دقت خوبی نخواهند داشت. برای غلبه بر این مشکل، روش‌هایی به شکل حجم

کنترل بالادستی^۲ ارائه شده‌اند، اگرچه در این روش‌ها نیز اتلاف عددی زیاد بوده و در نقاط ناپیوستگی دارای جواب‌های خوبی نیستند. در این روش‌ها ابتدا معادله فشار را حل، و سپس با مشتق‌گرفتن از میدان فشار میدان سرعت را به دست می‌آورند -- مشتق عددی خود باعث به وجود آمدن خطاهای عددی زیادی می‌شود. بنابراین این میدان سرعتی که از این روش به دست می‌آید دارای دقت قابل قبولی نخواهد بود. برای رفع این مشکل، روش اجزاء محدود ترکیبی^۳ ارائه شد.^[۱] در روش اجزاء محدود ترکیبی میدان سرعت و فشار هم‌زمان حل می‌شود و میدان سرعتی که از این روش به دست می‌آید برای نفوذپذیری‌های همگن و ناهمگن دقت مناسبی دارد. دورلفسکی روش اجزاء محدود ترکیبی و حجم محدود را برای جریان تک‌فاز در محیط ناهمگن با هم مقایسه کرد و به این نتیجه رسید که خطوط جریانی که از روش اجزاء محدود ترکیبی به دست می‌آید بسیار دقیق‌تر از روش حجم محدود است.^[۲] اما گسسته‌سازی معادلات به روش اجزاء محدود ترکیبی به دستگامی از نوع مسائل زینی^۴ منجر می‌شود که حل آن با استفاده از روش‌های استاندارد امکان‌پذیر نیست.^[۱] برای از بین بردن این مشکل مسعود و هیوز روشی ارائه کردند که در آن تابع وزنی و شکلی فشار و سرعت یکسان است.^[۳] این روش، دستگاه معادلات ضعیف را به دستگاه پایدار تبدیل می‌کند. روش دیگر استفاده از روش هیبرید است که توسط شاونت ارائه شد.^[۱] به‌وسیله‌ی این روش دستگاهی خوش‌رفتار نتیجه می‌شود که می‌توان آن را به راحتی با استفاده از روش‌های استاندارد حل کرد. نتایج به دست آمده

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۷/۷، داوری ۱۳۸۶/۱۲/۷، پذیرش ۱۳۸۸/۵/۳.

که در آن φ ضریب تخلخل، q چشمه یا چاه و ρ چگالی است. وقتی از واژه امتزاج ناپذیر استفاده می شود منظور این است که هیچ انتقال جرمی بین دو فاز وجود ندارد. به سادگی می توان نشان داد که قانون بقای جرم، برای هر فاز در محیط متخلخل مطابق رابطه ۲ قابل بیان است: [۶]

$$\frac{\partial(\varphi \rho_{\alpha} S_{\alpha})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{\alpha} \vec{u}_{\alpha}) = q_{\alpha} \quad \alpha = w, n, \quad (2)$$

که در آن w علامت فاز ترکننده، n علامت فاز غیر ترکننده، S_{α} درجه اشباع هر فاز و u_{α} سرعت همان فاز است.

قانون داریسی

داریسی رابطه‌ی بین نرخ جریان و عامل به وجود آورنده‌ی آن را در سال ۱۸۵۶ ارائه کرد که به «قانون داریسی» مشهور است. [۷] با در نظر گرفتن اثرات گرانش، قانون داریسی در حالت کلی (یک، دو، یا سه بعدی) برای سیال تک فاز چنین است: [۸]

$$\vec{u} = \frac{-k}{\mu} (\nabla P - \rho g \nabla D) \quad (3)$$

که در آن ∇P تغییرات فشار، μ لزجت سیال، k نفوذپذیری ماده‌ی متخلخل، g شتاب گرانش و D معرف عمق (تابع دلخواهی از سیستم مختصات) است. در حالتی که بیش از یک فاز در محیط حضور داشته باشد، با اندک اصلاحی می توان از قانون تعمیم یافته‌ی داریسی استفاده کرد: [۶]

$$\vec{u}_{\alpha} = \frac{-k k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}} (\nabla P_{\alpha} - \rho_{\alpha} g \nabla D) \quad (4)$$

که در آن $k_{r\alpha}$ نفوذپذیری نسبی برای فاز α بوده و تابعی از درجه اشباع این فاز در نقطه‌ی مورد نظر S_{α} است.

برای هر فاز در محیط متخلخل معادله‌ی ۳ و ۴ برقرار است. هدف در این نوشتار، حل جریان دوفازی غیرقابل امتزاج و تراکم ناپذیر است. معادله‌ی ۲ برای دو فاز w و n مطابق رابطه‌ی ۵ بازنویسی می شود: [۶]

$$\frac{\partial(\varphi \rho_n S_n)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{-k k_{rn}}{\mu_n} (\nabla P_n - \rho_n g \nabla D) \right) = q_n \quad (5)$$

$$\frac{\partial(\varphi \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{-k k_{rw}}{\mu_w} (\nabla P_w - \rho_w g \nabla D) \right) = q_w \quad (6)$$

با حل دو معادله‌ی ۵ و ۶ یک جریان دوفاز در محیط متخلخل به طور کامل مشخص می شود. مجهولات مسئله عبارت‌اند از: S_n, S_w, P_n, P_w . بدین ترتیب برای حل معادلات فوق باید دو معادله‌ی کمکی به دست آورد. برای درجه اشباع‌ها می توان نوشت:

$$S_w + S_n = 1 \quad (7)$$

از طرفی فشار موینگی P_c را می توان طبق رابطه‌ی ۸ بیان کرد:

$$P_n - P_w = P_c \quad (8)$$

در متون فنی روابطی برای فشار موینگی برحسب درجه اشباع ارائه شده است. با استفاده از این روابط می توان دستگاه معادلات را کامل کرد. بدین ترتیب با توجه به معادلات کمکی، به صورت دستگاه معادلات (۵ - ۸) بسته می شود و به دستگاه معادلاتی با چهار معادله و چهار مجهول تبدیل می شود.

از این روش با روش اجزاء محدود کلاسیک برای هندسه‌های کاملاً ناهمگن مقایسه و نشان داده شد که خطوط جریانی که از روش هیبرید به دست آمده بسیار دقیق تر از روش اجزاء محدود کلاسیک است. [۴] روش اجزاء محدود ترکیبی اولین بار توسط شاونت و همکاران برای جریان دوفاز در محیط متخلخل مورد مطالعه قرار گرفت. [۵] پس از آن بود که شاونت روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید^۵ را ارائه کرد. [۱]

معادلات حاکم بر جریان چندفازی در محیط متخلخل مشتمل است بر قانون داریسی تعمیم یافته، قانون بقای جرم برای هریک از فازها، و دو رابطه نیز برای فشار موینگی و نفوذپذیری نسبی. این معادلات شدیداً به یکدیگر وابسته‌اند و حل آن‌ها با روش‌های عددی مرسوم مشکل است، و لذا آن‌ها را با تبدیلات خاصی به معادلاتی با وابستگی کم تر و همچنین فرم ریاضی قابل قبول تر تبدیل می کنند. لازم به ذکر است که معادلاتی که به این روش به وجود می آید معادلات گذرا و میانی بوده و فعلاً معنای خاص فیزیکی برای آن‌ها پیدا نشده است. یکی از این گروه معادلات با استفاده از تعریف فشار کلی به دست می آید. در این فرم، معادله‌ی درجه اشباع به وسیله‌ی سرعت به معادله‌ی فشار ربط پیدا می کند، ولی فشار مستقیماً در معادله‌ی درجه اشباع ظاهر نمی شود. همچنین در این معادله سرعت به صورت صریح نمایان است و بدین ترتیب معادله‌ی درجه اشباع شدیداً به سرعت وابسته است؛ لذا محاسبه‌ی دقیق میدان سرعت در یافتن جواب مسئله از اهمیت به سزایی برخوردار است. بدین ترتیب باید به دنبال روشی بود که میدان سرعت و فشار را به صورت هم زمان حل، و بقای موضعی و کلی را حفظ کند. از طرف دیگر معادله‌ی درجه اشباع یک معادله‌ی گذرای جابه جایی - پخش‌ی است که در اغلب مسائل از جمله جابه جایی غالب است. دقت حل این معادله نیز در حل زمانی اهمیت زیادی دارد.

در این نوشتار از روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید برای حل معادلات جریان دو فاز در محیط متخلخل استفاده شده است. در معادله‌ی فشار به جای درجه اشباع از درجه اشباع زمان قبل استفاده می شود. بدین ترتیب معادله‌ی فشار به صورت ضمنی و درجه اشباع به صورت صریح حل می شود. به دلیل این که فشار بر اثر تغییر درجه اشباع تغییرات ناچیزی دارد، حل معادله‌ی فشار به صورت ضمنی توجیه پذیر می شود. به این ترتیب ابتدا معادله‌ی داریسی حل می شود و سپس با به دست آوردن مقدار فشار و سرعت، این مقادیر به صورت صریح در معادله‌ی درجه اشباع قرار گرفته و درجه اشباع مشخص می شود.

معادلات حاکم

در این تحقیق سیال را به صورت دوفازی (نفث و آب)، غیر امتزاجی، و غیر قابل تراکم در نظر گرفته ایم. معادلات حرکت سیال در محیط متخلخل شامل معادلات بقای جرم و اندازه حرکت هستند. از آنجا که استفاده از این اصول در محیط متخلخل با همان شکل عمومی امکان پذیر نیست، در محیط متخلخل معمولاً از روابط نیمه تجربی استفاده می شود؛ مثلاً چون سیال در محیط متخلخل با سرعت کمی جریان می یابد به جای معادله‌ی بقای اندازه حرکت از معادله‌ی نیمه تجربی داریسی استفاده می شود.

قانون بقای جرم

معادله‌ی بقای جرم در محیط متخلخل عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varphi) + \left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) = q \quad (1)$$

بدین ترتیب معادله‌ی درجه اشباع عبارت خواهد بود از:^[۸]

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S_w - \frac{d}{dS} (\lambda f_w f_n) (\vec{K} \cdot \vec{\nabla} \vec{P}_{CM}) \cdot \vec{\nabla} S_w - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda f_w f_n \vec{K} \cdot \left[P_{CM} \frac{dp_c}{dS} - \vec{\nabla} ((\rho_w - \rho_n)gz) \right] \right\} = (\lambda f_w f_n p_c) \vec{\nabla} \cdot (\vec{K} \cdot \vec{\nabla} \vec{P}_{CM}) \quad (19)$$

حال اگر فشار موینگی مستقل از مکان باشد، می‌توان نوشت:^[۸]

$$\vec{u} = -\lambda \vec{K} \cdot (\vec{\nabla} P - (\rho_w f_w + \rho_n f) \vec{\nabla} gz) \quad (20)$$

و لذا:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_w + \vec{u}_n) = 0 \quad (21)$$

$$\varphi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{df_w}{dS} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} S_w - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda f_w f_n \vec{K} \cdot \left[\frac{dp_c}{dS} \vec{\nabla} S_w - \vec{\nabla} ((\rho_w - \rho_n)gz) \right] \right\} = 0 \quad (22)$$

بدین ترتیب با کمک عملیات ریاضی فوق دستگاه معادلاتی به دست آمده است که معادلات آن وابستگی ضعیف‌تری به هم دارند. در دستگاه قبلی مجهولات یک معادله در دیگری ظاهر می‌شد در حالی که معادلات فشار کلی (معادله‌ی ۲۰) و درجه اشباع (معادله‌ی ۲۲) فقط از طریق ضرایب به هم وابسته‌اند. معادله‌ی فشار کلی از دسته معادلات بیضی است و معادله‌ی درجه اشباع معادله‌ی از نوع جابه‌جایی - پخشی است و بسته به فشار موینگی می‌تواند رفتاری کاملاً پخشی یا کاملاً جابه‌جایی داشته باشد. هنگامی که درجه اشباع کاهش می‌یابد فشار موینگی قابل اغماض است که منجر به تبدیل معادله‌ی درجه اشباع به یک معادله‌ی جابه‌جایی می‌شود. با به‌کار بردن رابطه‌ی برای فشار موینگی و همچنین رابطه‌ی برای ضریب نفوذپذیری نسبی می‌توان دستگاه معادلات فوق را برحسب مجهولات فشار کلی، سرعت کلی، و درجه اشباع فاز ترکننده حل کرد.

گسسته‌سازی معادلات

معادلات ریاضی حاکم بر رفتار جریان در محیط متخلخل بسیار پیچیده‌اند و جز در حالت‌های بسیار خاص به صورت تحلیلی قابل حل نیستند. به همین دلیل برای حل این معادلات از روش‌های عددی استفاده شده است. از جمله روش‌های عددی که برای حل این معادلات استفاده می‌شود روش اجزاء محدود ترکیبی است. در این بخش گسسته‌سازی معادلات محیط متخلخل به روش اجزاء محدود ترکیبی و اجزاء محدود ترکیبی هیبرید به تفصیل آورده شده است. در گسسته‌سازی معادلات از فضای توماس - راویارت استفاده می‌شود.^[۹] لذا ابتدا به معرفی فضای توماس - راویارت پرداخته و در ادامه، معادله‌ی دارسی به وسیله‌ی اجزاء محدود ترکیبی گسسته‌شده و نحوه‌ی گسسته‌کردن معادله‌ی بقای جرم ذکر می‌شود.

فضای توماس - راویارت در یک المان

ابتدا برای سادگی یک المان مستطیلی در نظر گرفته شده است (شکل ۱). برای این المان، بردار عمود v_k و چهار ضلع A_i و همچنین چهار میدان برداری

چنان که مشاهده می‌شود این دستگاه معادلات دستگاهی کامل است که با داشتن مقدار تخلخل و مقادیر چشمه‌های دوفاز، ضریب لزجت، توابع فشار موینگی و ضریب نفوذپذیری نسبی دو فاز، و نیز مقدار ضریب نفوذپذیری سنگ مخزن به‌طور کامل قابل حل است. با کمی دقت مشخص می‌شود که معادلات این دستگاه به‌شدت به هم وابسته‌اند و همین امر باعث سخت‌شدن حل این دستگاه می‌شود، به طوری که ممکن است حل آنها با استفاده از روش‌های عددی مرسوم مشکل باشد. برای حل این دستگاه باید این وابستگی را از بین برد و معادلات را به شکل قابل قبول‌تری از لحاظ ریاضی نوشت. برای این کار از تعریف فشار کلی^۶ و سرعت کلی^۷ استفاده شده است.^[۸]

قبل از تبدیل این معادلات به فرم قابل قبول، فشار موینگی را چنین تعریف کرده‌اند:^[۲]

$$P_c = P_{CM}(x) p_c(S) \quad (9)$$

ضریب $P_{CM}(x) \geq 0$ بیشترین مقدار فشار موینگی در یک نقطه‌ی خاص است، و $p_c(S)$ تابعی بدون بعد است که ویژگی‌های آن در قالب روابط ۱۰ و ۱۱ آمده است:^[۸]

$$0 \leq p_c(S) \leq 1 \quad (10)$$

$$p_c(S_c) = 0 \quad (11)$$

S_c درجه اشباعی است که مقدار p_c در آن صفر است. برای رسیدن به معادلات قابل قبول، ابتدا دو معادله‌ی ۵ و ۶ را با هم جمع می‌کنند. با در نظر گرفتن دوفاز به صورت غیر قابل تراکم، معادله‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_w + \vec{u}_n) = 0 \quad (12)$$

اکنون قابلیت حرکت^۸ یک فاز چنین تعریف می‌شود:

$$\lambda_i = \frac{k_{ri}}{\mu_i} \quad i = n, w \quad (13)$$

برای رسیدن به فشارکلی توابع ۱۴ و ۱۵ تعریف می‌شوند:^[۸]

$$\gamma = \int_{S_c}^S \left(f_w - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{dP_c}{dS} ds \quad (14)$$

$$\gamma_1 = \int_{S_c}^S \frac{df_w}{dS} p_c ds \quad (15)$$

در این روابط $f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w + \lambda_n}$ و $f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_w + \lambda_n}$ و فشار موینگی در درجه اشباع S_c برابر صفر است. نهایتاً فشار کلی مطابق رابطه‌ی ۱۶ تعریف می‌شود:^[۸]

$$P = \frac{1}{\gamma} (P_w + P_n) + \gamma P_{CM} \quad (16)$$

با گردآیدان گرفتن از طرفین معادله‌ی ۱۶ و با انجام عملیات جبری نتیجه می‌شود که:^[۸]

$$\vec{u} = \vec{u}_n + \vec{u}_w = -\lambda \vec{K} \cdot (\vec{\nabla} P + \gamma_1 \vec{\nabla} P_{CM} - \gamma_2 \vec{\nabla} gz) \quad (17)$$

که در آن \vec{u} سرعت کلی است و γ_2 نیز چنین تعریف می‌شود:

$$\gamma_2 = \rho_w f_w + \rho_n f_n \quad (18)$$

از خاصیت ۱ می توان انتظار داشت که:

$$\int_K \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = \sum_{j=1}^r Q_{K,j} \quad (24)$$

و از خاصیت ۲ می توان شار عبوری \vec{q} از ضلع A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) را مطابق رابطه ی ۲۵ به دست آورد:

$$\int_K \vec{q} \cdot \vec{v}_K = Q_{K,j} \quad (25)$$

بدین ترتیب هر میدان برداری $\vec{q} \in \vec{X}_K$ به طور کامل و با تعیین $Q_{K,j}$ معین می شود؛ $Q_{K,j}$ شار عبوری \vec{q} از ضلع A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) است. از ضرب برداری میدان های برداری فوق رابطه ی ۲۶ حاصل می شود:

$$A_{ij} = \int_K \vec{w}_j(x) \vec{w}_i(x) \quad (26)$$

بدین ترتیب ماتریس A_K برای المان K عبارت خواهد بود از:

$$A_K = [A_{ij}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

و معکوس آن نیز چنین است:

$$A_K^{-1} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

تقریب یک تابع و گرادیان آن به وسیله ی اجزاء محدود

ابتدا دامنه ی حل Ω را به صورت دلخواه و یک تابع α به صورت زیر، همچنین نمادهای زیر در نظر گرفته می شود:

$$\alpha : \Omega \rightarrow R^+$$

$$\mathbb{S}_h = \text{مجموعه اجزاء } \eta_h = K = \text{مجموعه اضلاع اجزاء } A$$

$$\mathbb{E}_h = \text{مجموعه گوشه های اجزاء } M$$

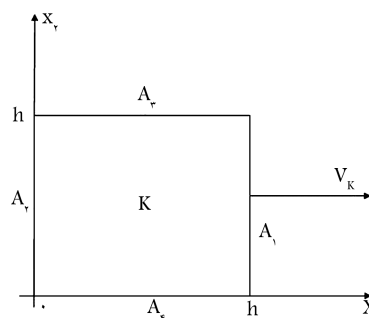
در این نوشتار توابع اسکالر (مانند فشار) در یک المان به صورت مقداری ثابت تقریب زده می شوند. حال تابع اسکالر $a(x)$ را در نظر بگیرید، تقریب این تابع در المان K برابر a_k است. برای هر المان K تابع فشار P و تابع سرعت \vec{q} را چنین تقریب می زنیم:

$$P_K = \text{تقریب متوسط فشار در هر المان } K$$

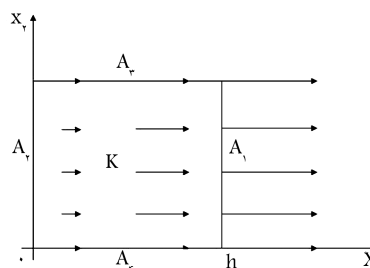
$$TP_{K,i} = \text{تقریب متوسط فشار در ضلع } A_i$$

$$\vec{q}_K = \text{تقریب سرعت در المان } K$$

از سوی دیگر، معلوم شد که مقدار \vec{q}_K ، هنگامی که شار عبوری آن از هر ضلع المان معلوم باشد، کاملاً معلوم است. بنابراین فشار و سرعت یک المان، هنگامی که



شکل ۱. شکل یک المان و طریقه ی شماره گذاری اضلاع آن و بردار نرمال المان.



شکل ۲. نمونه ی میدان برداری.

\vec{w}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) چنین تعریف می شود: [۱]

$$\vec{w}_1(x) = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2(x) = \begin{bmatrix} \frac{(x_1-h)}{h^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{w}_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{x_2}{h^2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_4(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(x_2-h)}{h^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای نمونه میدان برداری w_1 در شکل ۲ نشان داده شده است. چنان که مشاهده می شود این میدان در هر نقطه موازی محور x_1 است، بر روی ضلع A_2 مقدار صفر می گیرد، و بر روی ضلع A_1 مقدار ثابت $(\frac{1}{h}, 0)$ به آن اختصاص می یابد. میدان های برداری دیگر نیز مانند میدان برداری w_1 هستند که با چرخش و انتقال می توان آن ها را به دست آورد.

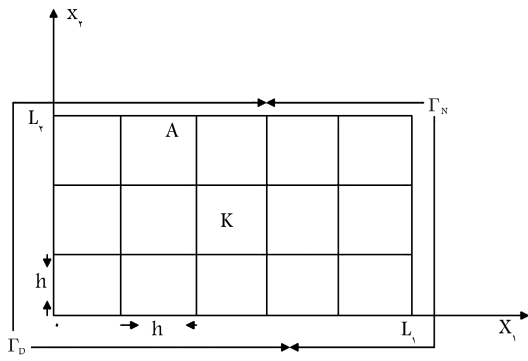
این چهار بردار مستقل خطی اند. می توان ثابت کرد که این میدان های برداری برای هر j (که $j = 1, 2, 3, 4$) دارای خواص زیر هستند:

$$1. \int_K \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_j(x) = 1 \text{ و بر روی المان } K \text{ ثابت است}$$

$$2. \text{ برای هر } i \text{ (که } i = 1, 2, 3, 4 \text{) می توان نوشت } \vec{w}_j(x) \cdot \vec{v}_K \text{ بر روی ضلع } A_i \text{ ثابت است و } \int_{A_i} \vec{w}_j(x) \cdot \vec{v}_K = \delta_{ij}$$

این خاصیت ها بدان معناست که میدان برداری \vec{w}_j دارای شار عبوری به اندازه ی ۱ از A_j و صفر از دیگر اضلاع است. دیده می شود که فضای توماس - رابارت، فضای چهار بعدی \vec{X}_K است که به وسیله ی \vec{w}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) بر روی المان K تولید شده است. بدین ترتیب هر بردار $\vec{q} \in \vec{X}_K$ را می توان به صورت یک ترکیب خطی از بردارهای این فضا نوشت:

$$\vec{q}(x) = \sum_{j=1}^r Q_{K,j} \vec{w}_j(x) \quad (23)$$



شکل ۴. نمونه میدان حل و شرایط مرزی اعمال شده.

که در آن مقدار تقریبی $\int_K f(x)dx$ مساحت المان، ∂K مرزهای المان است. معادله‌ی پیوستگی ۳۲ به فرم ماتریس عبارت است از:

$$DIV_K Q_k = F_k \quad (33)$$

برای اعمال شرایط مرزی شکل ۴ به‌عنوان نمونه آورده شده است. بر روی مرز Γ_D و Γ_N شرایط مرزی از نوع فشاری و شار ثابت است:

$$\begin{aligned} TP_{K,A} &= P_{e,A} \quad \forall A \subset \Gamma_D \\ Q_{K,A} &= Q_{e,A} \quad \forall A \subset \Gamma \end{aligned} \quad (34)$$

بدین ترتیب به یک دستگاه کامل دست پیدا می‌کنیم که مجهولات آن $P_K, TP_{K,A}, Q_A$ است. حال اگر مجهولات مسئله را $TP_{K,A}$ در نظر گرفته و P_K, Q_A را برحسب $TP_{K,A}$ به دست آوریم به تقریب اجزاء محدود ترکیبی هیبرید می‌رسیم.

فرمولاسیون اجزاء محدود ترکیبی هیبرید

چنان‌که گفته شد مجهولات اصلی مسئله، فشار TP_K بر روی هر ضلع در نظر گرفته شده است. بعد از عملیات ریاضی و تعیین P_K, Q_A برحسب $TP_{K,A}$ دستگاه معادلات ۳۵ حاصل می‌شود.^[۱]

$$(M^{MH} - N^{MH}) TP = F^{MH} - G^{MH} \quad (35)$$

$$M_{A,A'}^{MH} = \sum_{A,A' \subset K} a_K A_{K,A,A'}^{-1} \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \quad (36)$$

$$N_{A,A'}^{MH} = \sum_{A,A' \subset K} a_K v_{K,A,A'} \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \quad (37)$$

$$F_A^{MH} = \sum_{A \subset K} \frac{\alpha_{K,A}}{\alpha_K} F_K \quad \forall A, A' \in \eta_h^{MH} \quad (38)$$

$$G_A^{MH} = \begin{cases} 0 & \text{if } A \text{ is interior} \\ Q_{e,A} & \text{if } A \subset \Gamma_N \end{cases} \quad (39)$$

مجهولات زیر در المان مشخص شده باشند، به‌طور کامل معین است:

$$\begin{cases} P_k \in R \\ TR_{K,i,j} \in R \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ Q_{K,i,j} \in R \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (27)$$

اگر این ۹ مجهول در یک المان تعیین شوند، می‌توان گفت که حل جریان در المان کامل شده است. از طرفی این مجهولات از هم مستقل نیستند و توسط رابطه‌ی داریسی به هم ربط دارند:

$$\vec{q} = -a \nabla P \quad (28)$$

چنان‌که دیده می‌شود در رابطه‌ی ۲۸ اثرات گرانش زمین در نظر گرفته نشده است و a معرف نفوذپذیری است. فرم تغییراتی^۹ معادله‌ی ۲۸ چنین است:

$$A_K Q_k = a_K (P_K DIV_K^T - TP_K) \quad (29)$$

که در آن ماتریس A_K به‌وسیله‌ی ماتریس‌های قبل تعریف شد، و ماتریس‌های دیگر معادله نیز چنین تعریف می‌شود:

$$DIV_K^T = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} Q_k = \begin{bmatrix} Q_{K,1} \\ Q_{K,2} \\ Q_{K,3} \\ Q_{K,4} \end{bmatrix} \quad TP_K = \begin{bmatrix} TP_{K,1} \\ TP_{K,2} \\ TP_{K,3} \\ TP_{K,4} \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله‌ی ۲۹ و با داشتن مقدار a_K, P_K در المان مورد نظر و مقادیر TP_K بر روی اضلاع این المان، مقادیر $Q_{K,i}$ و به تبع آن \vec{q}_K قابل محاسبه است. حال دو المان K و K' را مطابق آنچه که در شکل ۳ آورده شده در نظر بگیرید. این دو المان در یک ضلع با هم اشتراک دارند، و لذا برای توابع TP_h و \vec{q}_h داریم:

$$\begin{aligned} TP_{K,A} &= TP_{K',A} \\ Q_{K,A} + Q_{K',A} &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

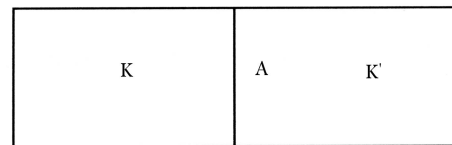
تقریب معادله‌ی پیوستگی به‌روش اجزاء محدود

برای تقریب معادله‌ی پیوستگی به‌روش اجزاء محدود ابتدا معادله‌ی ۳۱ را در نظر گرفته‌ایم:

$$\nabla \cdot \vec{q} = f(x) \quad \text{on } K \quad (31)$$

سپس آن را در یک تابع آزمون ($v \in \vec{X}$) ضرب کرده و بر روی المان K انتگرال می‌گیریم. بدین ترتیب به فرم تغییراتی زیر می‌رسیم:

$$\sum_{A \in \partial K} Q_{K,A} = F_K \quad (32)$$



شکل ۳. دو المان در داخل میدان حل.

حال با تعیین مقادیر $Q_{SK,A}$ از معادله ۴۳ و قرار دادن آن‌ها در معادله ۴۴ به معادله‌ی برحسب TS و S خواهیم رسید. همچنین S را از معادله ۴۵ برحسب TS به دست می‌آوریم و در معادله‌ی قبلی جایگذاری می‌کنیم. بدین ترتیب به دستگاه معادلاتی برحسب TS خواهیم رسید. با حل این دستگاه مقدار درجه اشباع در روی سطوح المان‌ها و به تبع آن مقدار درجه اشباع در مرکز المان‌ها به دست می‌آید. دیده می‌شود که ابتدا معادلات سرعت و فشار حل شده و با جایگزینی مقادیر سرعت در معادله‌ی درجه اشباع مقدار درجه اشباع در زمان بعدی به دست می‌آید. باید توجه داشت که جواب‌های به دست آمده به دقت بودن سرعت وابسته است. روش هیبرید معادلات سرعت و فشار را هم‌زمان حل می‌کنند و دارای دقت بالایی است؛ از این رو درجه اشباع‌های به دست آمده دارای دقت قابل قبولی خواهند بود. در ادامه خواهیم دید که این ویژگی باعث می‌شود جواب‌های این روش از روش‌های اجزاء محدود استاندارد به مراتب دقیق‌تر باشد.

در این معادلات برای به دست آوردن مقادیر نفوذپذیری نسبی از مدل تد^۱ استفاده شده است.^[۱]

$$k_{rw}(S_w) = S_w^t, \quad k_{rn}(S_w) = (1 - S_w)^t \quad (50)$$

اعتباربخشی به روش حاضر به وسیله‌ی حل معادله‌ی باکلی - لورت^{۱۱}

ابتدا با حل جریان در یک محیط متخلخل با نفوذپذیری همگن، کارآیی روش هیبرید نشان داده شده است. معادله‌ی باکلی - لورت معادله‌ی درجه اشباع یک بعدی بدون در نظر گرفتن اثر فشار موینگی است. می‌توان این معادله را به دقت حل کرد و از آن به عنوان معیاری برای مقایسه‌ی کارآیی روش‌ها با هم استفاده کرد. قبل از ارائه‌ی نتایج، کمیت‌های بی‌بعد مکان، زمان و درجه اشباع مطابق معادله‌های ۵۱ تا ۵۳ تعریف می‌شوند:

$$x_D = \frac{x}{L} \quad (51)$$

$$t_D = \frac{u_t}{(1 - S_{or} - S_{wr})\varphi L} t \quad (52)$$

$$S = \frac{S_w - S_{wr}}{1 - S_{or} - S_{wr}} \quad (53)$$

در این معادلات S_{or} و S_{wr} به ترتیب درجه اشباع مانده‌ی آب و نفت هستند. معادله‌ی باکلی - لورت عبارت است از:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{\varphi} \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial x} = 0 \quad (54)$$

در این بخش لزجت نفت (μ_o) ۴ برابر لزجت آب (μ_w) فرض شده است. برای بررسی کارآیی روش اجزاء محدود ترکیبی هیبرید، علاوه بر مقایسه‌ی نتایج با روش تحلیلی، آن را با روش‌های اختلاف محدود بالادست، لکس فردریچ^{۱۲} و لکس واندروف^{۱۳} مقایسه کرده‌ایم. اگر معادله‌ی ۵۴ را به روش بالادست گسسته کنیم خواهیم داشت:

$$S_i^n = S_i^{n-1} + \frac{u\Delta t}{\varphi\Delta x} (f_i^{n-1} - f_{i-1}^{n-1}) \quad (55)$$

$$v_{K,A,A'} = \frac{\alpha_{K,A}\alpha_{K,A}}{\alpha_K} \quad (40)$$

$$\alpha_{K,A} = \sum_{A' \subset \partial K} A_{K,A,A'}^{-1}$$

$$\alpha_K = \sum_{A' \subset \partial K} \alpha_{K,A} \quad (41)$$

در معادلات بالا، بالاتویس MH معرف اجزاء محدود ترکیبی هیبرید است. می‌توان ثابت کرد که دستگاه فوق دارای یک جواب است و ماتریس $(M^{MH} - N^{MH})$ متقارن و مثبت معین است.^[۹] در این ماتریس بلوک صفر روی قطر اصلی وجود ندارد، به همین دلیل ماتریس از نوع مسائل زینی نیست و می‌توان از روش‌های استاندارد آن را معکوس کرد. با حل این دستگاه TPK ‌ها روی هر ضلع به دست می‌آیند و از روی آن‌ها P_K, Q_A حاصل می‌شود.

گسسته‌سازی معادله‌ی درجه اشباع

q_s مطابق معادله ۴۲ تعریف می‌شود:

$$q_s = \nabla S \quad (42)$$

فرم تغییراتی این معادله عبارت است از:

$$A_K Q_{SK} = (S_K DIV_K^T - TSK) \quad (43)$$

که در آن ماتریس‌ها همانند ماتریس‌های تعریف‌شده‌ی قبلی‌اند. با توجه به معادله ۴۳ و با داشتن مقدار S_K در المان مورد نظر و مقادیر TSK بر روی اضلاع این المان، مقادیر $Q_{SK,i}$ و به تبع آن q_s قابل محاسبه است. با توجه به شکل ۳ این دو المان در یک ضلع با هم مشترک‌اند. برای توابع TS_h و q_s داریم:

$$T_{SK,A} = T_{SK',A} \\ Q_{SK,A} + Q_{SK',A} = 0 \quad (44)$$

می‌توان معادله‌ی درجه اشباع را چنین نوشت:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{df_w}{dS} \vec{u} \cdot \nabla S - \vec{\nabla} \cdot \left\{ \lambda f_w f_n \vec{K} \cdot \left[\frac{dp_c}{dS} \vec{\nabla} S \right] \right\} = 0 \quad (45)$$

حال معادله ۴۵ را در یک تابع آزمون (χ_k) ضرب کرده و بر روی المان K انتگرال‌گیری می‌شود.

$$\begin{cases} \chi_k = 1 & \text{in } K \\ \chi_k = 0 & \text{else where} \end{cases} \quad (46)$$

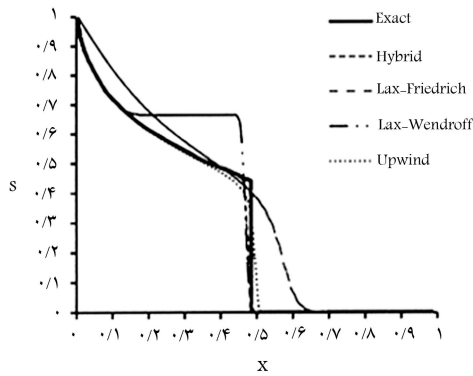
در نتیجه:

$$|K| \varphi \frac{S_k^n - S_k^{n-1}}{\Delta t} + \sigma_E \sum Q_s + \frac{df}{dc} \left[\left(\frac{1}{\varphi} Q_1 - \frac{1}{\varphi} Q_2 \right) Q_{s1} + \left(-\frac{1}{\varphi} Q_1 + \frac{1}{\varphi} Q_2 \right) Q_{s2} + \left(\frac{1}{\varphi} Q_2 - \frac{1}{\varphi} Q_3 \right) Q_{s3} + \left(-\frac{1}{\varphi} Q_2 + \frac{1}{\varphi} Q_3 \right) Q_{s4} \right] = 0 \quad (47)$$

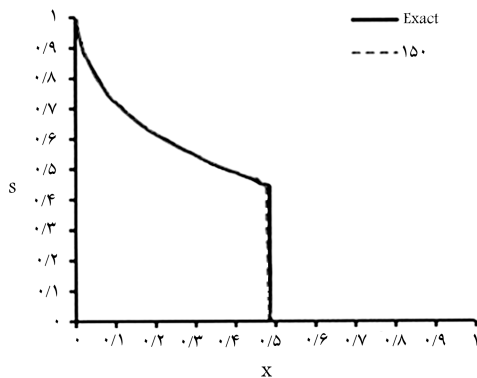
در این معادله اندیس‌های ۱ تا ۴ مطابق تعاریف شکل ۱ است؛ در معادله ۴۷ نیز σ_E چنین به دست می‌آید:

$$\sigma(S_w) = -\lambda f_w f_n \vec{K} \frac{dp_c}{dS} \quad (48)$$

$$\sigma_E \frac{1}{\varphi} \sum_{j=1}^4 \sigma(TSA_j) \quad (49)$$



شکل ۷. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۱۰۰.



شکل ۸. نتایج حاصله از روش هیبرید برای تعداد شبکه ۱۵۰.

مطابق انتظار بهبود می‌یابد، به طوری که مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی دقیق‌تر شده و لبی در نقاط نزدیک به نقطه‌ی ناپیوستگی جواب‌های حاصله از خطاهای زیادی برخوردارند. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش هیبرید نشان می‌دهد که این روش در تشخیص نقطه‌ی ناپیوستگی بسیار قوی است و با اضافه کردن تعداد شبکه خطاها به سرعت به سمت صفر میل می‌کند. همان‌طور که در شکل ۸ نشان داده شده است با تعداد شبکه‌ی ۱۵۰، به حل تقریباً دقیق خواهیم رسید.

مثال عددی دوبعدی و محیط همگن

مثال عددی دوم میدان جریان دو بعدی است که به «پنج نقطه» مشهور بوده و در شکل ۹ نشان داده شده است. ابعاد این میدان $300\text{ m} \times 300\text{ m}$ است و ضریب نفوذپذیری و تخلخل این محیط برابر $K = 10^{-7}$ و $\varphi = 12$ است. یادآور می‌شود که خصوصیات این محیط به صورت همگن در نظر گرفته شده است. چگالی آب و نفت برابر 1000 kg/m^3 و لزجت آب برابر 0.001 kg/(ms) و لزجت نفت ۴ برابر آن در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در مرز تزریق (نقطه‌ی ۰،۰ عبارت است از:

$$P_n = 210^5 [Pa], \quad q_w = 0.12 [kg/s] \quad (58)$$

شرایط مرزی در مرز تولید (نقطه‌ی ۳۰۰،۳۰۰) نیز عبارت است از:

$$S_w = 0.1, \quad q_n = -0.12 [kg/s] \quad (59)$$

و اگر به روش مرتبه اول لکس فردریچ گسسته شود، داریم: [۱۰]

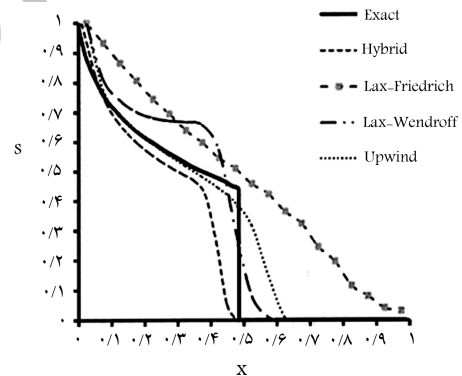
$$S_i^{n+1} = \frac{1}{\varphi} (S_{i+1}^n + S_{i-1}^n) - \frac{u\Delta t}{\varphi\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) \quad (56)$$

و نیز اگر به روش مرتبه دوم لکس و اندروپ گسسته شود خواهیم داشت: [۱۱]

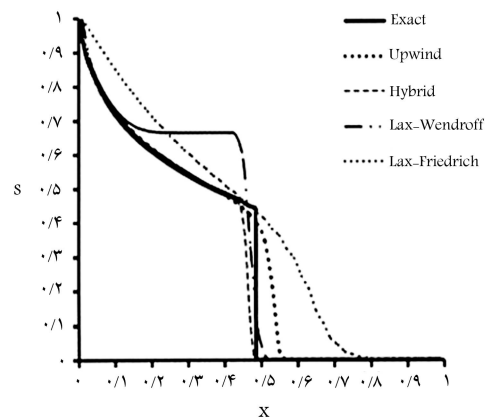
$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{u\Delta t}{\varphi\Delta x} (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) + \frac{u\Delta t^2}{\varphi\Delta x^2} [a_{i+\frac{1}{2}}(f_{i+1}^n - f_i^n) - a_{i-\frac{1}{2}}(f_i^n - f_{i-1}^n)] \quad (57)$$

که در آن $a = \frac{\partial f}{\partial S}$. در ادامه، نتایج حاصل از به کارگیری این روش‌ها برای حل معادله‌ی باکلی - لورت با هم مقایسه شده‌اند. این نتایج برای زمان بی بعد شده ۰٫۳ و سه نوع اندازه شبکه‌ی ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ در دامنه یک بعدی هستند.

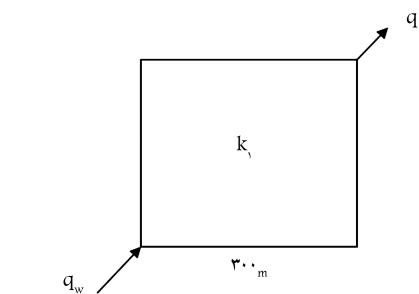
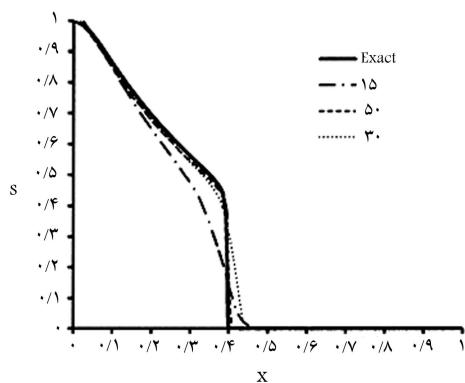
با توجه به نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش مرتبه اول لکس فردریچ از دقت کمی برخوردار است و در نقاط هموار به دلیل اتلاف عددی، جواب‌های خطای زیادی دارند. همچنین این روش در مکان‌یابی نقطه‌ی ناپیوستگی ضعیف عمل می‌کند (شکل‌های ۵ تا ۷). شیوه‌ی عمل این روش آن است که برای رسیدن به جواب قابل قبول باید دامنه را به ۲۰۰۰ قسمت تقسیم کرد که زمان محاسباتی بالایی را شامل می‌شود. روش مرتبه دوم لکس و اندروپ دقت خوبی در مکان‌یابی محل شوک دارد و همچنین در نقاط هموار جواب‌ها از دقت بالایی برخوردارند ولی در نزدیکی محل شوک به دلیل پخش عددی بالا دارای خطای زیادی است. دیده می‌شود که حتی با اضافه کردن تعداد شبکه این پخش عددی از بین نمی‌رود. در روش بالادست نیز هدردهی عددی زیاد است ولی با اضافه کردن تعداد شبکه این هدردهی



شکل ۵. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۲۰.

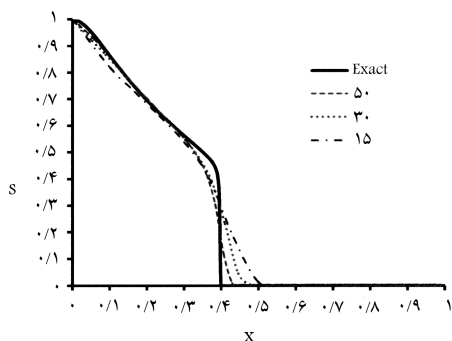


شکل ۶. نتایج حاصله برای تعداد شبکه‌ی ۵۰.

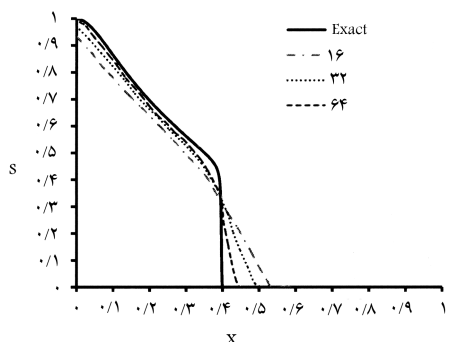


شکل ۹. مثال عددی دوبعدی با یک ورودی و یک خروجی.

شکل ۱۰. نتایج حاصله از روش هیبرید در حل میدان شکل ۹.



شکل ۱۱. نتایج حاصله از روش بالادست.



شکل ۱۲. نتایج حاصل از روش گلرکین بالادست توسط هوبر.^[۱۱]

هوبر در روش بعدی معادلات سرعت و فشار را به وسیله روش هیبرید، و معادله‌ی درجه اشباع را به وسیله فلاکس‌های محدودکننده حل کرده که نتایج آن در شکل ۱۳ ارائه شده است. چنان که در این شکل مشاهده می‌شود، برای رسیدن به حل دقیق، هنگامی که از روش فلاکس محدودکننده استفاده می‌شود باید از شبکه‌ی 50×50 به حل دقیق خواهیم رسید. همچنین با مقایسه‌ی شکل‌های ۱۰ و ۱۳، با تعداد شبکه‌ی 30×30 جواب‌های حاصل از روش هیبرید نسبت به روش فلاکس محدودکننده به جواب دقیق بسیار نزدیک است.

در ادامه در شکل‌های ۱۴ الی ۱۹ خطوط تراز درجه اشباع آورده شده است. با توجه به این خطوط درمی‌یابیم که روش هیبرید نسبت به تغییر شبکه واکنش بهتری دارد، به طوری که با زیاد شدن تعداد شبکه جواب‌ها به سرعت به جواب دقیق نزدیک می‌شود. در روش بالادست خطوط تراز به دست آمده با تعداد تقسیمات

اندیس n معرف فاز نفت (فاز غیر ترکنده) و اندیس w معرف فاز آب (فاز ترکنده) است. شرایط اولیه به صورت $S_w = 0.7$ و گام زمانی یک روز در نظر گرفته شده است؛ این محاسبات برای مدت زمان 400 روز انجام شده است. در ادامه، نتایج به دست آمده از مدل‌سازی این دامنه برای همان مدت زمان 400 روز آمده است. حل دقیق معادله‌ی درجه اشباع بر روی قطر اصلی را می‌توان از طریق حل معادله‌ی باکلی - لورت، و به این ترتیب به دست آورد:^[۱۱]

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{r\varphi} \frac{\partial (rf_w)}{\partial r} = 0 \quad (60)$$

که در آن r فاصله‌ی شعاعی از نقطه‌ی تزریق است. چون در این نوشتار فرض بر این است که فازها غیر قابل تراکم‌اند می‌توان f را به فرم $f(S_w, r) = f_w(S_w)/r$ در نظر گرفت، و در نتیجه:^[۱۱]

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{u}{r\varphi} \frac{\partial f_w(S_w)}{\partial r} = 0 \quad (61)$$

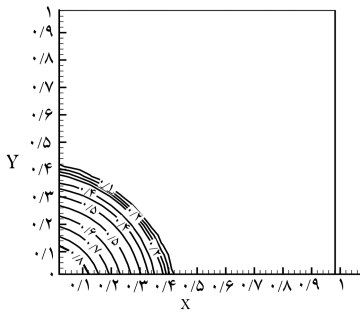
در نهایت داریم:

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = - \frac{u}{r\varphi} \frac{\partial f_w}{\partial S_w} \frac{\partial S_w}{\partial r} \quad (62)$$

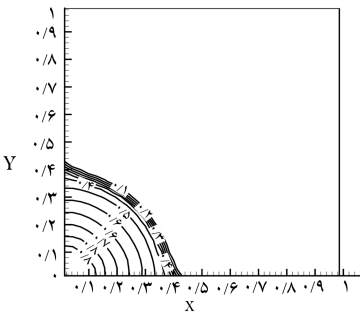
این معادله به روش اختلاف محدود با تعداد نقاط زیاد حل شده و به عنوان روش حل دقیق معرفی شده است. ابتدا برای درک بهتر از این که روش عددی هیبرید چگونه به حل دقیق همگرا می‌شود، مقدار درجه اشباع روی قطر اصلی برای تعداد تقسیمات متفاوت با حل دقیق این معادله مقایسه شده و در شکل ۱۰ نشان داده شده است. چنان که دیده می‌شود روش هیبرید با تعداد شبکه‌ی 50×50 کاملاً به حل دقیق نزدیک می‌شود.

مجدداً برای حل جریان در میدان شکل ۹، دو روش هیبرید و بالادست با یکدیگر مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل‌های ۱۰ و ۱۱ دیده می‌شود که روش هیبرید با تعداد نقاط کم‌تر به جواب بهتری می‌رسد. از طرف دیگر، روش هیبرید با افزایش تعداد تقسیمات با سرعت بیشتری به جواب دقیق نزدیک می‌شود ولی روش بالادست در نقاط ناپوستگی نسبت به افزایش تعداد تقسیمات عکس‌العمل خوبی ندارد. هرچند با افزایش تعداد تقسیمات، مکان‌یابی نقطه‌ی ناپوستگی توسط این روش بهبود می‌یابد ولی با تعداد شبکه‌ی 50×50 همچنان در نقطه‌ی ناپوستگی دارای خطای زیادی است.

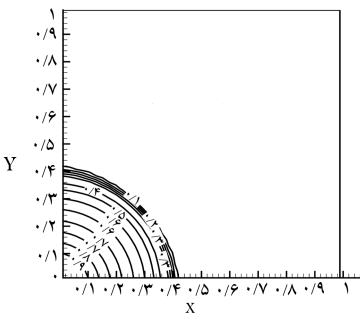
معادلات سرعت و فشار و درجه اشباع به روش اجزاء محدود گلرکین بالادست برای این میدان جریان توسط هوبر حل شده^[۱۱] که نتایج آن در شکل ۱۲ آمده است. چنان که در این شکل مشاهده می‌شود، نتایج روش اجزاء محدود استاندارد بر اثر تغییر زیاد شبکه، چندان تغییر نمی‌کند ولی در روش هیبرید (شکل ۱۰) با تغییر شبکه، نتایج به سرعت به حل دقیق نزدیک می‌شود.



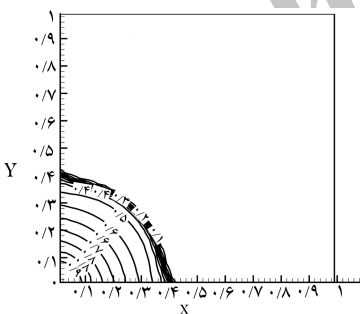
شکل ۱۶. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 30×30 روش بالادست.



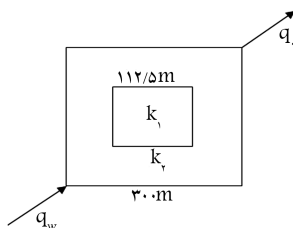
شکل ۱۷. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 30×30 روش هیبرید.



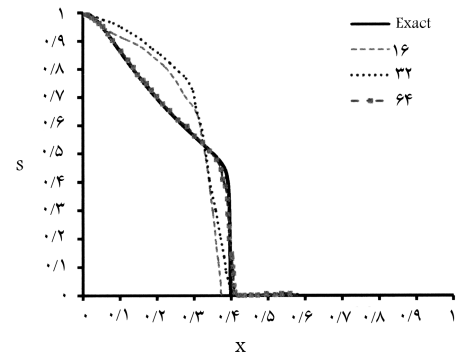
شکل ۱۸. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 50×50 روش بالادست.



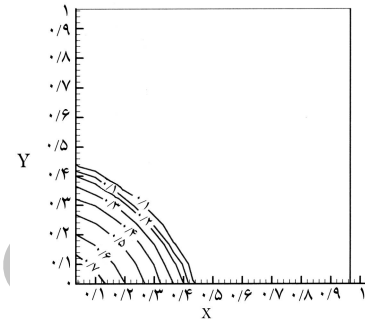
شکل ۱۹. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 50×50 روش هیبرید.



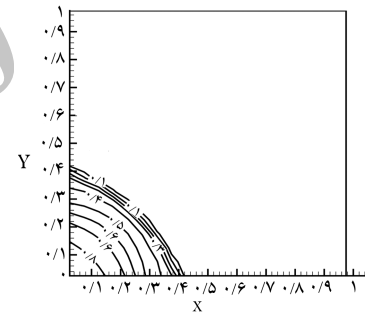
شکل ۲۰. میدان حل پنج نقطه با دو میدان نفوذپذیری متفاوت.



شکل ۱۳. نتایج حاصل از روش فلاکس محدودکننده توسط هویر [۱۱].



شکل ۱۴. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 15×15 روش بالادست.



شکل ۱۵. خطوط تراز درجه اشباع با شبکه 15×15 روش هیبرید.

متفاوت تقریباً یکسان است و چنان که انتظار می رود این روش به تغییر شبکه چندان حساس نیست؛ همچنین جواب های شبکه کم تر با جواب های شبکه زیاد با هم فرق چندانی ندارند. تنها تفاوت موجود بین آنها این است که در شبکه بیشتر مکان یابی نقطه ی ناپیوستگی کمی دقیق تر شده است.

مثال عددی دوبعدی و محیط ناهمگن

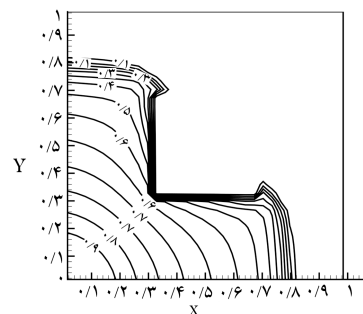
میدان جریانی به صورت شکل ۲۰ در نظر گرفته شده است. این میدان همانند میدان حل شده ی قبلی است با این تفاوت که یک قسمت با نفوذپذیری کم تر، همانند شکل ۲۰، در داخل آن وجود دارد. ضرایب نفوذپذیری این میدان این گونه انتخاب شده اند:

$$K_1 = 10^{-10} m^2$$

$$K_2 = 10^{-7} m^2$$

نفوذ بیشتر است. این طبیعت باعث می شود که در هنگام حل معادلات حاکم بر محیط متخلخل، جواب ها به دقت بودن سرعت حساس باشد. از این رو در هنگام حل معادلات سرعت و فشار باید از روش های با دقت بالا استفاده کرد. اما در روش های کلاسیک به دلیل این که از میدان فشار مشتق گرفته شده و مشتق گیری عددی دارای خطای زیادی است، دقت قابل قبولی ندارند. به همین دلیل برای به دست آوردن جواب های قابل قبول، در این نوشتار معادلات سرعت و فشار توسط اجزاء محدود ترکیبی هیبرید به صورت هم زمان حل شده و لذا عملیات مشتق گیری از میدان فشار حذف شده است. این امر باعث می شود که میدان سرعت به دست آمده از این روش از دقت بالایی برخوردار باشد. نتایج نشان داده است که جواب های به دست آمده از این روش نسبت به روش های دیگر، از جمله روش های اختلاف محدود، به حل دقیق نزدیک تر باشند. هنگامی که جواب های حاصله از روش گالری با جواب های روش هیبرید مقایسه می شوند، قدرت روش هیبرید نمایان می شود. همچنین نشان داده شده که این روش در شبکه های درشت تر دقت مناسب تری در مقایسه با روش های اختلاف محدود دارد.

علاوه بر این روش هیبرید از مهم ترین خاصیت المان محدود برخوردار است که می توان از شبکه های غیر مستطیلی استفاده کرد. لذا برای محیط های متخلخل به شدت ناهمگن نیز قابل کاربرد است.



شکل ۲۱. خطوط تراز درجه اشباع آب در میدان شکل ۲۰.

شکل ۲۱ خطوط تراز درجه اشباع به دست آمده از روش عددی هیبرید را نشان می دهد. چنان که پیداست این روش دامنه ی ناهمگن را هم به خوبی مدل می کند.

نتیجه گیری

جریان در محیط متخلخل به گونه یی است که تأثیر جمله ی جا به جایی معادلات از جمله

پانویس

1. numerical dissipation
2. upwind
3. mixed-finite element
4. saddle point problem
5. mixed-hybrid finite element
6. global pressure
7. global velocity
8. mobility
9. variational
10. todd
11. Buckley-Leverett
12. Lax-Friedrich
13. Lax-Wendroff
14. numerical dispersion
15. five-spot

منابع

1. Chavent, G., and Roberts, J.E. "A unified physical presentation of mixed, mixed-hybrid finite elements and standard finite difference approximations for the determination of velocities in water flow problems", *Adv. Water Resources*, **14**, pp. 329-348 (1991).
2. Durlofsky, L.J. "Accuracy of mixed and control volume finite element approximations to Darcy velocity and related quantities", *Water Resources Research*, **30**, pp. 965-973 (1994).
3. Masud, A., and Hughes, T.J.R. "A stabilized mixed-finite element method for Darcy flow", *Comput. Methods*

Appl. Mech. Engrg, **191**, pp. 4341-4370 (2002).

4. Mose, R.; Siegel, P.; Ackerer, P., and Chavent, G. "Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model: Luxury or necessity?", *Adv. Water Resources*, **30**(11), pp. 3001-3012 (1994).
5. Chavent, G.; and Jaffre, J. "Mathematical models and finite elements for reservoir simulation", North-Holland, Amsterdam, (1986).
6. Aziz, K., and Settari, A. "Petroleum reservoir simulation", Elsevier: New York, (1986).
7. Bastian, P. "Numerical computation of multiphase flows in porous media", Christian-Albrechts-Universität at Kiel, (1999).
8. Ferdousi, P.A., and Manzari, M.T. "A space-time finite element formulation for simulation of immiscible two phase flow in porous media", *Thirteenth Conference on Finite Elements For Flow Problem*, 4-6 April, Swansea, Wales, United Kingdom (2005).
9. Helmig, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface*, Springer, Berlin, (1997).
10. Shokri, N. "Numerical simulation of two-phase flow in porous media using flux limiters", MSc Thesis, School of Mechanical Engineering, Sharif Univ. Tech. (2006).
11. Huber, R., and Helmig, R. "Multiphase flow in heterogeneous porous media : a classical finite element method versus an implicit pressure-explicit saturation-based mixed finite element-finite volume approach", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **29**, pp. 899-920 (1999).