Archive of SID

مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۳ - ۳۲، شماره‌ی ۱، ص. ۳-۹

Original Article

کنترل فعال ارتعاشات ورق چندلایه به‌کمک حس‌گرها و عملگرهای پیزوالکتریک

احمد باقری (استاد)
امین صدری * (کارشناس ارشد)
جلال جوادی مقدم (دانشجوی دکتری)
گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان

در این مقاله کنترل ارتعاشات ورق چندلایه به‌کمک حس‌گرها و عملگرهای پیزوالکتریک به بحث گذاشته شده است. معادلات حرکت ورق کامپوزیت به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول، اصل همیلتون و حساب تغییرات به دست آمده است. برای حل معادلات ورق از روش عددی بدون المان گلرکین استفاده شده است. در این روش از کم‌ترین مربعات متحرک برای ساخت توابع شکل براساس توزیع نقاط در میدان مسئله استفاده می‌شود. پس از گسسته‌سازی میدان کرنش و میدان الکتریکی و قرار دادن آنها در رابطه‌ی همیلتون، معادلات دینامیکی حرکت ورق به دست می‌آید. برای تحلیل پاسخ گذرای ورق از روش نیومارک استفاده شده است. پس از صحه‌گذاری مدل ساخته شده برای کنترل فعال ارتعاشات، از روش بازخورد سرعت استفاده شده و تأثیر این روش بر میرایی و کاهش ارتعاشات ورق نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: ارتعاشات ورق، روش بدون شبکه، پیزوالکتریک، حس‌گر و عملگر.

bagheri@guilan.ac.ir
amin.sadri.ac@gmail.com
jalaljavadimoghaddam@gmail.com

۱. مقدمه

یکی از چالش‌های پیش روی مهندسین سازه و کنترل طراحی سازه‌های هوشمند و کارآمد است. سازه‌های هوشمند به سازه‌هایی گفته می‌شود که تغییرات محیطی را دریافت، و با استفاده از بازخوردهای سیستم آن را تصحیح میکنند. ویژگی کوپلینگ الکترومکانیکی سرامیک‌های پیزوالکتریک و قابلیت کاربرد به شکل ورق‌های نازک، پیزوالکتریک را برای استفاده در کنترل سازه‌ها به‌عنوان حس‌گر یا عملگر مناسب ساخته است. با استفاده از خاصیت و اثر مستقیم پیزوالکتریک در حس‌گرها می‌توان تغییر شکل‌های مکانیکی را با اندازه‌گیری پتانسیل الکتریکی ایجادشده اندازه‌گیری کرد. همچنین با به‌کارگیری خاصیت معکوس پیزوالکتریک و با اعمال پتانسیل الکتریکی مناسب، جابه‌جایی و کرنش سازه‌ها، قابل کنترل خواهد بود. با استفاده از حس‌گرها و عملگرهای پیزوالکتریک و کامپوزیت‌های پیشرفته، امکان دست‌یابی به سازه‌هایی فراهم شد که ویژگی‌هایی نظیر وزن کم، سفتی و سختی بالا با قابلیت پایش (مانیتورینگ) و خوداصلاحی دارند. از حس‌گرها و عملگرهای پیزو به‌صورت لایه‌هایی که بر سطوح ورق یا پوسته‌ها چسبانده می‌شود برای کنترل و استهلاک ارتعاشات استفاده می‌شود. در طراحی و تحلیل تیر، ورق یا پوسته‌های هوشمند نکاتی چون نوع و تعداد حس‌گرها و عملگرها و موقعیت آنها، گسسته‌سازی مدل پیوسته برای تحلیل، و نوع کنترل‌کننده‌ی مورد استفاده مد نظر قرار می‌گیرد. با توجه به ویژگی‌ها، قابلیت و جذابیت‌های مختلف مواد هوشمند، تاکنون تحقیقات و مطالعات زیادی در زمینه‌ی کاربردهای این مواد در حوزه‌ی کنترل ارتعاشات، کمانش و شکل حالت‌های سازه، بررسی ترک و پایش و عیب‌یابی سازه‌ها انجام گرفته است.

به‌طور خاص، مطالعات صورت گرفته در زمینه‌ی کنترل ارتعاشات صفحه‌ها توسط حس‌گرها و عملگرهای پیزوالکتریک، در بخش‌های مختلفی نظیر نحوه‌ی مدل‌سازی و حل معادلات، نحوه‌ی استفاده از حس‌گرها و عملگرها در سازه، نوع مواد در نظر گرفته شده برای صفحه و روش‌های کنترلی، قابل تقسیم‌بندی است.

محققین زیادی در زمینه‌ی نحوه‌ی مدل‌سازی و حل معادلات صفحه مجهز به پیزوالکتریک به روش‌های تحلیلی و عددی فعالیت کرده‌اند. بخش عمده‌یی از تحقیقات در این زمینه، شامل مدل‌سازی به روش اجزاء محدود با در نظر گرفتن نظریه‌های مختلف صفحه و انواع مختلف المان است. مدل‌سازی با سایر روش‌های عددی نظیر تفاضل محدود و روش‌های بدون شبکه کم‌تر مورد توجه قرار گرفته است.

مواد مورد استفاده برای صفحه نیز، زمینه‌ی کاری بخشی از محققین را بخود اختصاص داده است. مطالعات مختلفی بر روی مواد ایزوتروپیک، مواد کامپوزیت و مواد رده‌بندی‌شده براساس کاربری (FGM)[1] صورت گرفته است. بخش وسیعی از مطالعات در زمینه‌ی نحوه‌ی استفاده از حس‌گرها و عملگرها در کنترل ارتعاشات صفحه است. گروهی از محققین با در نظرگرفتن حس‌گرها و عملگرهای پیزوالکتریک به‌صورت لایه‌های سرتاسری روی سطوح صفحه، به تحلیل ارتعاشات صفحه پرداخته‌اند. در بخشی از مطالعات نیز با در نظرگرفتن حس‌گرها و عملگرها به‌صورت وصله‌هایی که در موقعیت‌های خاصی از صفحه قرار گرفته‌اند، شکل مدهای مختلف صفحه

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۳/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۳/۸/۱۰، پذیرش ۱۳۹۳/۹/۴.

www.SID.ir

Archive of SID

کنترل شده است. عمده فعالیت‌های صورت گرفته در سال‌های اخیر برای کنترل ارتعاشات صفحه، به روش‌های کنترل ارتعاشات اختصاص دارد. بیشتر محققین با استفاده از نظریه‌های مختلف کنترل ــ نظیر بازخورد حالت، روش لیاپانوف و کنترل بهینه‌ی خطی ــ به کنترل ارتعاشات پرداخته‌اند. در ادامه تاریخچه‌یی از فعالیت‌های صورت گرفته در زمینه‌ی کنترل ارتعاشات صفحه با استفاده از حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک ارائه شده است.

در مطالعاتی که محققین درخصوص عملگرهای پیزوالکتریک متصل به تیر انعطاف‌پذیر انجام داده‌اند،[۱و۲] با استفاده از معادلات تعادل، تحریک یک جفت عملگر پیزوالکتریک مستطیلی مدل‌سازی شده و با استفاده از آزمایش تجربی اعتبار آن بررسی شده است. در بررسی‌هایی که پیرامون مدل ارائه‌شده درمورد صفحات به عمل آمد، مدل‌سازی صفحه به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از روش ریتز پیشنهاد شد.[۳] همچنین در زمینه‌ی فنون کنترلی[۴] برای میرایی ارتعاشات یک ورق FGM از یک سیستم کنترلی تلفیقی حالت لغزنده و روش تجمعی ذرات استفاده شده است. آنان سیستم‌های کنترل هوشمند را برای میرایی ارتعاشات ورق‌های خمیده توسعه داده‌اند.[۵]

محققین از مواد پیزوالکتریک به‌عنوان حسگرهایی برای اندازه‌گیری نرخ کرنش در صفحات و تیرهای انعطاف‌پذیر[۶] بهره گرفته، و به‌منظور اندازه‌گیری و کنترل ارتعاشات یک صفحه‌ی مستطیلی با شرایط مرزی ساده، نسبت به مدل‌سازی آن با روش اجزاء محدود اقدام کردند؛[۷] آنها در این مطالعه از یک المان شش وجهی استفاده کردند. در ادامه مفهوم استفاده‌ی همزمان از المان‌های پیزوالکتریک به‌عنوان حسگر و محرک نیز ارائه شد.[۸]

در مطالعات بعدی، برای مدل‌سازی صفحات چندلایه‌ی مجهز به حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک، از روش اجزاء محدود استفاده شد.[۹]

به‌منظور طراحی کنترل بهینه در آزمایش یک تیر اولر ـ برنولی مجهز به محرک‌های پیزوالکتریک، محققین از روش کنترل بهینه‌ی خطی درجه دوم[۱۰] استفاده کردند. آن‌ها از روش اجزاء محدود برای مدل‌سازی استفاده کردند.

با استفاده از روش اجزاء محدود و نظریه‌ی برشی مرتبه اول، مدل‌سازی تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌های هوشمند انجام شد و نیز نسبت به کنترل ارتعاشات آنها اقدام شد.[۱۱] این اقدامات با استفاده از روش کنترل بازخورد سرعت، روش لیاپانوف و همچنین روش کنترل خطی درجه دوم انجام شد. بخش عمده‌یی از تحقیق مذکور به کنترل ارتعاشات تحت بارهای حرارتی اختصاص دارد. در ادامه محققین با استفاده از یک الگوریتم کنترلی پیش‌خورد تطبیقی به کنترل فعال ارتعاشات صفحه‌های هوشمند پرداختند.[۱۲]

در ادامه‌ی مطالعات، فرمول‌بندی صفحه‌های مرکب همراه با پیزوالکتریک به‌روش بدون شبکه مطرح شد،[۱۳] و با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول و روش بدون المان گلرکین، صفحه‌های چندلایه‌ی مجهز به لایه‌های پیزوالکتریک فرمول‌بندی شد و سپس با استفاده از روش بازخورد سرعت و موقعیت، کنترل ارتعاشات صفحه انجام شد. پژوهش‌گران یک فرمول‌بندی اجزاء محدود از صفحه به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک را با استفاده از نظریه‌ی سنتی کرشهف ارائه دادند[۱۴] و برای کاهش ارتعاشات صفحه از روش بازخورد سرعت استفاده کردند. همچنین با استفاده از روش کنترل‌کننده‌ی خطی درجه دوم گوسی، به کنترل فعال ارتعاشات تیرهای هوشمند پرداختند.[۱۵و۱۶]

در فرمول‌بندی و مدل‌سازی صفحات هوشمند با استفاده از نظریه‌ی لایه‌گرا،[۱۷] پتانسیل الکتریکی در جهت ضخامت لایه به‌صورت یک تابع درجه دو فرض شد و به‌منظور هم‌پتانسیل بودن نقاط مختلف هر الکترود، برای هر الکترود تنها یک درجه آزادی الکتریکی در نظر گرفته شد.

در نوشتار حاضر کنترل ارتعاشات ورق چندلایه به‌کمک حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک بررسی شده است. معادلات حرکت ورق کامپوزیت به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول، اصل همیلتون و حساب تغییرات به دست می‌آید. برای حل معادلات ورق از روش عددی بدون المان گلرکین استفاده شده است. پس از گسسته‌سازی میدان کرنش و میدان الکتریکی، و نیز قرار دادن آنها در روابط همیلتون، معادلات دینامیکی حرکت ورق به دست می‌آید. برای تحلیل پاسخ‌گذاری ورق از روش نیومارک استفاده شده است. پس از صحه‌گذاری مدل ساخته شده، به‌منظور کنترل فعال ارتعاشات از روش بازخورد منفی سرعت با هدف استهلاک دامنه‌ی ارتعاشات استفاده شده است.

۲. روابط و معادلات حاکم بر مسئله

۱.۲. روابط ساختاری پیزوالکتریک

معادلات ساختاری حاکم بر مواد پیزوالکتریک خطی که نشان‌گر کوپلینگ میدان کشسانی و میدان الکتریکی به‌صورت اثر مستقیم و معکوس پیزوالکتریک است به‌صورت روابط ۱ و ۲ آمده است:[۱۸]

$$\{D\} = [e]\{\varepsilon\} + [K]^T\{E\} \qquad (۱)$$

$$\{\sigma\} = [c]\{\varepsilon\} + [c]^T\{E\} \qquad (۲)$$

که در آن D بردار جابه‌جایی الکتریکی، e ماتریس ضرایب کوپلینگ پیزوالکتریک، K ماتریس نفوذپذیری الکتریکی، σ بردار تنش، c ماتریس خواص کشسانی ماده، ε بردار کرنش و E بردار میدان الکتریکی است.

۲.۲. میدان جابه‌جایی و کرنش

در نوشتار حاضر برای در نظرگرفتن اثرات تغییر شکل برشی، از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول که یکی از معتبرترین نظریه‌ها برای تحلیل ورق‌هاست، استفاده شده است. میدان جابه‌جایی در این نظریه طبق رابطه‌ی ۳ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - z\theta_x(x,y),\\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - z\theta_y(x,y),\\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن، u_0، v_0 و w_0 به‌ترتیب جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی ورق در راستاهای x، y و z هستند. θ_x و θ_y نیز به‌ترتیب چرخش‌های خط عمود بر صفحه‌ی میانی ورق حول محور x و y از حالت بدون تغییر شکل‌اند. براساس این فرض، کرنش‌ها را می‌توان برحسب جابه‌جایی‌ها و مشتقات آنان همانند رابطه‌ی ۴ نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_y - \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \theta_x - \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \qquad (۴)$$

www.SID.ir

Archive of SID

۳.۲. اصل همیلتون

با در نظر گرفتن یک صفحه‌ی پیزوالکتریک که در معرض نیروی وارد بر سطح (F_s) و بار الکتریکی سطحی (F_g) است، لاگرانژین (L) به‌صورت مجموع انرژی جنبشی (K)، انرژی پتانسیل کشسانی (U_M)، کار انجام شده توسط نیروی سطحی (W_M)، انرژی الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی (U_E) و کار انجام شده توسط میدان الکتریکی (W_E) تعریف می‌شود:[۱۳]

$$\begin{aligned} L &= \int_V [K] - (U_M - W_M) + (U_E - W_E)\, dv \\ &= \int_V \left[\tfrac{1}{2}\rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \tfrac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} + \tfrac{1}{2} \{E\}^T \{D\} \right] dv \\ &\quad + \int_{S_\sigma} \{F_s\}^T \{u\} ds + \int_{S_\sigma} \{\phi\}^T \{F_q\} ds \end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن ρ چگالی صفحه، u بردار جابه‌جایی و ϕ بردار پتانسیل الکتریکی است. فرم تغییرات معادله‌ی حرکت حاکم بر صفحه با توجه به اصل همیلتون براساس رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید. در این رابطه t_1 و t_2 دو زمان دلخواه و δ اپراتور تغییرات است:

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \\ &\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[-\rho \ddot{u}_i \delta u_i - \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + D_i \delta E_i \right] dv dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left[F_{si} \delta u_i + f_q \delta \phi \right] dS dt = 0 \end{aligned} \qquad (۶)$$

۳. روش عددی بدون المان گلرکین

در سال‌های اخیر، روش‌های عددی جدیدی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ایجاد شده که بسیاری از ضعف‌های روش‌های اجزاء محدود را ندارند و از آنها با نام روش‌های بدون شبکه یاد می‌شود. در روش‌های بدون شبکه، مرزها و میدان مسئله توسط گروهی از نقاط پراکنده توصیف می‌شود. این نقاط یا گره‌ها موجد هیچ شبکه یا مشی نیستند و بنابراین برای تخمین یا درون‌یابی توابع مجهول نیازی به داشتن ارتباط میان نقاط نیست. در واقع ارتباط میان توابع شکل به‌صورت خودکار و براساس همسایگی نقاط تعریف می‌شود. روش بدون المان گلرکین[۱۹] یکی از روش‌های بدون شبکه است. در این روش از کم‌ترین مربعات متحرک برای ساخت توابع شکل براساس توزیع نقاط در میدان مسئله استفاده و از یک ساختار سلولی زمینه‌یی برای انتگرال‌گیری استفاده می‌شود.

۱.۳. روش کم‌ترین مربعات متحرک[۲۰]

روش کم‌ترین مربعات متحرک در بیشتر روش‌های بدون المان برای تقریب توابع مجهول به کار می‌رود. شیوه‌ی تخمین کم‌ترین مربعات متحرک از یک متغیر میدان که توسط مجموعه‌یی از نقاط در دامنه‌اش گسسته شده چنین است:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\, \mathbf{a}(\mathbf{x}) \qquad (۷)$$

که در آن $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ تابع پایه، $\mathbf{x}^T = [x, y]$ مختصات ویژه برای مسائل دوبعدی، و m تعداد جمله‌های تابع پایه است. تابع پایه برای تشکیل یک فضای کامل معمولاً با تک‌جمله‌هایی از مثلث پاسکال ساخته می‌شود. در رابطه‌ی ۷، $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ برداری از ضرایب تابع $\mathbf{x}$ و به‌صورت $\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x})\ a_2(\mathbf{x}) \ldots a_2(\mathbf{x})\}$ است که با کمینه‌سازی تابعی J به دست می‌آید.

$$J = \sum_{i=1}^{n} \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \left[\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\, \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i \right]^2 \qquad (۸)$$

در رابطه‌ی ۸، n تعداد نقطه‌های درون دامنه‌ی پشتیبان با تابع وزنی $\hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \neq 0$ و u_i پارامتر گرهی u در $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ است. از کمینه‌سازی تابعی J نسبت به ضرایب $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ رابطه‌ی ۹ حاصل می‌شود:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\, \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\, \mathbf{u} \qquad (۹)$$

که در آن $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ به‌صورت روابط ۱۰ و ۱۱ بیان می‌شوند:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \hat{w}_i(\mathbf{x})\, \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\, \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \qquad (۱۰)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\hat{w}_1(\mathbf{x})\, \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \hat{w}_2(\mathbf{x})\, \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \ldots \quad \hat{w}_n(\mathbf{x})\, \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \qquad (۱۱)$$

با حل رابطه‌ی ۹ و قرار دادن $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ در رابطه‌ی ۷، روابط ۱۲ و ۱۳ به دست می‌آید:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\mathbf{x})\, u_i = \mathbf{N}^T(x)\, \mathbf{u} \qquad (۱۲)$$

$$\mathbf{N}_I(x) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\, \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\, \mathbf{B}_I(\mathbf{x}) \qquad (۱۳)$$

$\mathbf{N}_I(\mathbf{x})$ تابع شکل ساخته شده به روش کم‌ترین مربعات متحرک است.

۴. ساخت مدل بدون شبکه‌ی ورق به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک

در بیشتر کارهای گذشته برای مدل‌سازی و حل معادلات ورق‌های چندلایه به همراه لایه‌های پیزوالکتریک، از روش عددی اجزاء محدود استفاده شده است. روش‌های عددی بدون شبکه در تحلیل ورق‌های بدون پیزوالکتریک به‌کار برده شده، اما به‌طور خاص در تحلیل ورق‌های چندلایه‌ی مجهز به پیزوالکتریک از روش‌های بدون شبکه‌ی کم‌تر[۱۳] استفاده شده است. در نوشتار حاضر از روش عددی بدون شبکه‌ی گلرکین برای مدل‌سازی و حل معادلات ورق به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک استفاده شده است. به‌منظور کنترل دامنه‌ی ارتعاشات ورق، با در نظر گرفتن لایه‌ی حس‌گر در یک مدار الکتریکی، نرخ بار الکتریکی ظاهر شده در صفحات الکترود پیزوالکتریک به دست آمده که با تقویت این جریان و تبدیل آن به ولتاژ، پتانسیل اعمالی به لایه‌ی عملگر به دست آمده است. برای ساخت مدل بدون شبکه‌ی ورق، ابتدا جابه‌جایی مکانیکی و پتانسیل الکتریکی در روابط ۱۴ و ۱۵ با استفاده از توابع شکل ساخته شده به‌روش کم‌ترین مربعات متحرک، به‌صورت متغیرهای گره‌یی تعریف شده است:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} [N_u] \{u^e\} \qquad (۱۴)$$

$$\{\phi\} = [N_\phi] \{\phi^e\} \qquad (۱۵)$$

www.SID.ir

Archive of SID

$\{u^e\}$ و $\{\theta^e\}$ به‌ترتیب جابه‌جایی گره‌یی و پتانسیل الکتریکی گره‌یی در مختصات عمومی هستند. $[N_u]$ و $[N_\phi]$ توابع شکل ساخته‌شده به‌روش کم‌ترین مربعات متحرک هستند. بردار کرنش و بردار میدان الکتریکی با توجه به متغیرهای گره‌یی، به‌صورت روابط ۱۶ و ۱۷ تعریف می‌شود:

$$\{\varepsilon\} = [B_u]\{u^e\} \quad (۱۶)$$

$$\{E\} = -\nabla\{\phi\} = -[B_\phi]\{\phi^e\} \quad (۱۷)$$

پس از گسسته‌سازی میدان کرنش و میدان الکتریکی، با قرار دادن روابط ۱، ۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۱۷ در رابطه‌ی ۶، معادلات لایه‌ی پیزوالکتریک به‌شکل استاندارد و براساس مدل بدون شبکه به دست می‌آید:

$$[M_{uu}]\{\ddot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = \{F_m\} \quad (۱۸)$$

$$[K_{\phi u}]\{u\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{F_q\} \quad (۱۹)$$

که در آن $[M_{uu}]$ ماتریس جرم عمومی، $[K_{uu}]$ ماتریس سفتی عمومی، $[K_{u\theta}]$ ماتریس کوپلینگ الکترومکانیکی، و $[K_{\phi\phi}]$ ماتریس ضرایب دی‌الکتریک پیزوالکتریک است. بار الکتریکی لایه‌ی حسگر با انتگرال‌گیری از جابه‌جایی الکتریکی روی سطح الکترود به دست می‌آید:

$$Q^{(S)}(t) = \int_A D(t)dA = \frac{1}{2}\left(\int_{A(z=z_k)} D(t)dA + \int_{A(z=z_{k+1})} D(t)dA\right) \quad (۲۰)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱ و رابطه‌ی ۲۰، معادله‌ی بارالکتریکی به‌صورت گسسته از رابطه‌ی ۲۱ به دست می‌آید.

$$Q^{(S)}(t) = \int_A \{e\}\{\varepsilon\}\,dA = \left(\int_A \{e\}[B_u]\,dA\right)\{u\} = \left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\{u\} \quad (۲۱)$$

هنگامی که پیزوالکتریک به‌صورت حسگر نرخ کرنش مورد استفاده قرار می‌گیرد، جریان الکتریکی با مشتق‌گیری از بار الکتریکی نسبت به زمان به دست می‌آید. جریان الکتریکی با استفاده از رابطه‌ی ۲۲ به خروجی ولتاژ مدار باز تبدیل می‌شود:

$$\phi^{(S)} = G_c\frac{dQ^{(S)}}{dt} \quad (۲۲)$$

که در آن G_c مقاومت آمپلی‌فایر حسگر است. با تقویت ولتاژ حسگر توسط آمپلی‌فایری با بهره‌ی G_i، ولتاژ اعمالی به عملگر به دست می‌آید:

$$\phi^{(A)} = -G_iG_c\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\{\dot{u}\} \quad (۲۳)$$

رابطه‌ی ۱۸ برای سیستمی شامل لایه‌ی حسگر و لایه‌ی عملگر به‌صورت رابطه‌ی ۲۴ نوشته می‌شود:

$$[M_{uu}]\{\ddot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} + \left[K_{u\phi}^{(S)}\right]\left\{\phi^{(S)}\right\} = \{F_m\} - \left[K_{u\phi}^{(A)}\right]\left\{\phi^{(A)}\right\} \quad (۲۴)$$

با قرار دادن رابطه‌ی ۲۳ در رابطه‌ی ۲۴ و در نظر گرفتن میرایی رایلی، معادله‌ی دینامیکی ورق پیزوالکتریک حاصل می‌شود:

$$[M_{uu}]\{\ddot{u}\} + \left(\alpha[M_{uu}] + \beta[K_{uu}] - G_iG_c\left[K_{u\phi}^{(A)}\right]\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\right)\{\dot{u}\} + \left([K_{uu}] - \left[K_{u\phi}^{(S)}\right]\left[K_{\phi\phi}^{(S)}\right]^{-1}\left[K_{\phi u}^{(S)}\right]\right)\{u\} = \{F_m\} \quad (۲۵)$$

در رابطه‌ی ۲۵، α و β ضرایب میرایی رایلی هستند.

۵. نتایج عددی، بحث و بررسی

در مطالعه‌ی حاضر پس از ساخت مدل بدون شبکه‌ی ورق، به‌منظور حل زمانی معادلات از روش نیومارک استفاده شده است. در این قسمت برای کسب اطمینان از صحت مدل ساخته شده به‌روش بدون المان گلرکین، پس از صحه‌گذاری و اعتبارسنجی مدل، کنترل ارتعاشات ورق چندلایه با شرایط مرزی ساده و شرایط مرزی دوسر گیردار ـ دوسر آزاد انجام شده است.

۱.۵. صحه‌گذاری مدل

به‌منظور صحه‌گذاری مدل ساخته شده و همچنین اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، ابتدا فرکانس‌های طبیعی صفحه با لایه‌چینی و شرایط مرزی مختلف بدون در نظر گرفتن لایه‌های پیزوالکتریک محاسبه، و با مقادیر پژوهش‌های معتبر مقایسه شده است. سپس برای اطمینان از مدل‌سازی دقیق روابط پیزوالکتریک، یک عملگر پیزوالکتریک مدل‌سازی شده و نتایج حاصل با نتایج تحقیقات منتشره تطبیق داده شده است. در ابتدا یک صفحه‌ی همسان‌گرد با شرایط مرزی گیردار مدل‌سازی می‌شود. مشخصات هندسی و مکانیکی این صفحه در رابطه‌ی ۲۶ آمده است. پس از تحلیل ورق و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی آن، نتایج حاصله با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود و همچنین نتایج مطالعات پیشین[۲۱] مقایسه شده است. برای هماهنگی بیشتر، از رابطه‌ی بسامد بی‌بعد استفاده شده است. در جدول ۱ نتایج فرکانس‌های طبیعی صفحه‌ی همسان‌گرد با شرایط مرزی گیردار برای شش حالت اول ارتعاشی آورده شده، و با نتایج موجود[۲۱] و نتایج حاصل از روش اجزاء محدود مقایسه شده است.

$$Nodes: ۱۷\times۱۷ \qquad \Omega = \omega a\sqrt{\frac{\rho}{G}} \qquad \upsilon_{۱۲} = ۰/۳, \qquad k^۲ = ۰/۸۶, \qquad \frac{a}{b} = ۱, \qquad \frac{a}{h} = ۱۰ \quad (۲۶)$$

جدول ۱. فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد ورق ایزوتروپ.

حالت	$a/h = ۱۰$		
	مطالعه‌ی حاضر	FEM	مرجع[۲۱]
۱	۱/۵۴۱۴	۱/۵۹۳۷	۱/۵۵۸۲
۲	۳/۱۲۱۰	۳/۰۵۹۹	۳/۰۱۸۲
۳	۳/۱۲۱۰	۳/۰۵۹۹	۳/۰۱۸۲
۴	۴/۱۹۲۵	۴/۲۹۶۳	۴/۱۷۱۱
۵	۵/۱۷۷۶	۵/۰۸۹۱	۵/۱۲۱۸
۶	۵/۱۴۲۹	۵/۱۴۲۶	۵/۱۵۹۴

www.SID.ir

Archive of SID

برای بررسی اثر ضخامت صفحه و همچنین ترتیب لایه‌چینی بر دقت نتایج در صفحه‌های اورتوتروپیک، مقدار فرکانس اول صفحه‌ی اورتوتروپیک با شرایط مرزی ساده محاسبه و با مرجع[۲۲] و روش اجزای محدود مقایسه شده است. خواص ورق در نظرگرفته شده، در رابطه‌ی ۲۷ آمده است. در جدول ۲ نیز نتایج به دست آمده ارائه شده است.

$$\frac{E_1}{E_2}=25,\quad \frac{G_{12}}{E_2}=\frac{G_{13}}{E_2}=0.5,\quad \frac{G_{23}}{E_2}=0.2,$$
$$U_{12}=0.25,\quad k^2=\frac{5}{6},\ \frac{a}{b}=1,\quad \Omega=\omega a^2\sqrt{\frac{\rho}{E_2h^2}} \qquad (27)$$

با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده به‌روش بدون المان گلرکین برای ورق ایزوتروپیک و اورتوتروپیک در مقایسه با منابع موجود از دقت بالایی برخوردار است. برای اطمینان از صحت مدل‌سازی روابط پیزوالکتریک، یک تیر یک سرگیردار بایمورف (۱mm × ۵mm × ۱۰۰mm) که از دو لایه‌ی به هم چسبیده‌ی پیزوالکتریک از جنس پلی‌وینیل فلوراید (PVDF) و قطبش معکوس ساخته شده، در نظر گرفته شده است. به‌دلیل قطبش معکوس لایه‌ها، با اعمال اختلاف پتانسیل در راستای ضخامت تیر، لایه‌ی بالایی تحت کشش و لایه‌ی پایینی تحت فشار قرار گرفته، و در نتیجه تیر تحت خمش قرار می‌گیرد. مشخصات ماده‌ی پلی وینیل فلوراید (PVDF) سرامیک پیزوالکتریک (PZT) و گرافیت در جدول ۳ ارائه شده است. در جدول ۴ میزان جابه‌جایی نقاط مختلف تیر در اثر اعمال اختلاف پتانسیل ۱ ولت ارائه شده است. از مقایسه‌ی نتایج حاصله با نتایج موجود[۲۳] تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است.

جدول ۲. بررسی اثر ضخامت صفحه بر پاسخ‌های بسامد طبیعی بی‌بعد.

لایه‌چینی	a/h	کار حاضر	FEM	[۲۲]
[۰/۹۰]	۱۰۰	۹٫۸۸۵۱	۹٫۶۶۲۹	۹٫۶۸۷۳
	۱۰	۸٫۷۴۶۲	۸٫۷۹۴۶	۸٫۸۹۹۸
[۰/۹۰/۰]	۱۰۰	۱۵٫۲۴۳۱	۱۵٫۱۵۵	۱۵٫۱۸۳
	۱۰	۱۱٫۵۸۸	۱۱٫۵۳۴۷	۱۲٫۱۶۳
[۰/۹۰/۹۰/۰]	۱۰۰	۱۵٫۳۳۸۷	۱۵٫۱۶۹۵	۱۵٫۱۸۴
	۱۰	۱۲٫۱۴۴	۱۲٫۱۹۸۲	۱۲٫۲۲۶

جدول ۳. مشخصات مکانیکی مواد.

نوع ماده	E_1	E_2	G_{12}	υ_{12}	ρ	$e_{31,2}$	K_{33}
PVDF	۲	۲	۰٫۷۷۵	۰٫۲۹	۱۸۰۰	۰٫۰۴۶	۰٫۱۰۶e − ۹
PZT	۶۳	۶۳	۲۴٫۲	۰٫۳	۷۶۰۰	۲۲٫۸	۱٫۵e − ۸
گرافیت	۱۷۲	۶٫۹	۳٫۴۵	۰٫۲۵	۱۶۰۰	۲۲٫۸	۱٫۵e − ۸

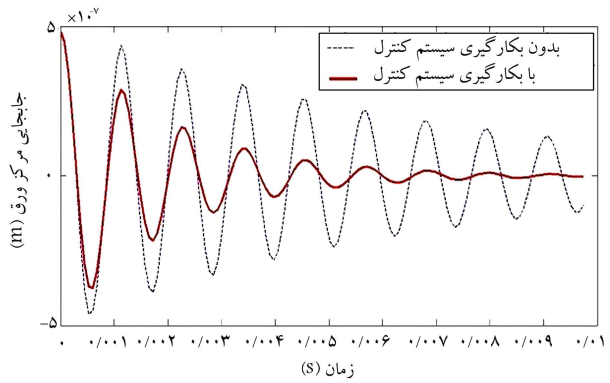
جدول ۴. جابه‌جایی نقاط مختلف تیر بایمورف.

فاصله از تکیه گاه (mm)		۴۰	۶۰	۸۰	۱۰۰
جابه‌جایی 10^{-6}m	کار حاضر	۰٫۰۵۵۱۸	۰٫۱۲۳۳	۰٫۲۲۰۱	۰٫۳۴۳۲
	[۲۳]	۰٫۰۵۵۲	۰٫۱۲۴۰	۰٫۲۲۱۰	۰٫۳۴۵۰

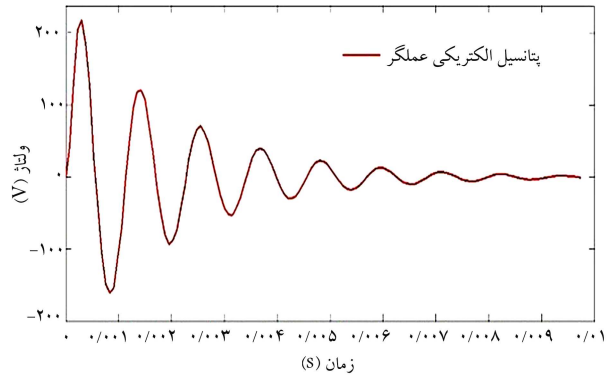
۲.۵. ورق با شرایط مرزی ساده

برای بررسی کاهش ارتعاشات ورق با استفاده از قانون کنترل بازگشتی، ورق مربعی چندلایه با لایه‌چینی [actuator/۰/۹۰/۰/sensor] و شرایط تکیه‌گاهی ساده در نظر گرفته شده است. لایه‌های ورق از جنس گرافیت اپوکسی با ضخامت ۲ mm، و لایه‌های پیزوالکتریک از جنس پلی وینیل فلوراید (PVDF) با ضخامت ۰٫۱ mm هستند. طول و عرض ورق برابر با ۱۸۰ mm است. ورق در اثر بارگسترده‌ی ۱۰۰ N/m^2 دچار جابه‌جایی اولیه می‌شود. سپس بار حذف، و نقاط مختلف ورق مرتعش می‌شود. مقاومت آمپلی‌فایر $G_e = 1/6e7$، بهره‌ی ولتاژ $G_i = 500$، $\alpha = 1e-6$ و $\beta = 0/965e-5$ در نظرگرفته شده است.

در شکل ۱ جابه‌جایی مرکز ورق بدون کنترل ارتعاشات و همچنین با استفاده از سیستم کنترل ارتعاشات نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود دامنه‌ی ارتعاشات در اثر اعمال نیروی کنترلی عملگر به‌طور مؤثر کاهش می‌یابد. اگرچه روش کنترلی بازخورد سرعت باعث افزایش میرایی ورق و کاهش دامنه‌ی ارتعاشات می‌شود، چون ولتاژ عملگر تابعی از نرخ کرنش (تابع سرعت) است با کاهش دامنه‌ی سرعت، مقدار ولتاژ هم کاهش می‌یابد که این امر باعث کاهش تأثیر در ارتعاشات با سرعت پایین می‌شود. در شکل ۲ ولتاژ عملگر نشان داده شده است.



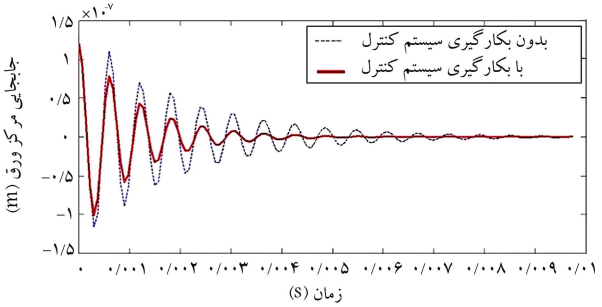
شکل ۱. جابه‌جایی مرکز ورق با شرایط مرزی SSSS.



شکل ۲. ولتاژ اعمالی به لایه‌ی عملگر.

www.SID.ir

Archive of SID



شکل ۳. جابه‌جایی مرکز ورق با شرایط مرزی CFCF.

۳.۵. ورق دوسرگیردار دوسر آزاد

ورق مورد بررسی در قسمت قبل با شرایط تکیه‌گاهی جدید یعنی دوسرگیردار دو سر آزاد، تحت بارگسترده اولیه دچار ارتعاش می‌شود. با توجه به جابه‌جایی مرکز ورق (در شکل ۳) مشاهده می‌شود که به‌علت افزایش فرکانس ورق، دامنه‌ی ارتعاشات نسبت به ورق با شرایط مرزی ساده، سریع‌تر کاهش یافته است.

۶. نتیجه‌گیری

در این تحقیق تحلیل و کنترل ارتعاشات ورق چندلایه به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات ورق براساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اصل همیلتون به دست آمده است. برای حل معادلات دیفرانسیل ورق از روش عددی بدون المان گلرکین و توابع شکل ساخته شده به‌روش کم‌ترین مربعات متحرک استفاده شده است. پاسخ زمانی معادله‌ی حرکت ورق به‌کمک روش نیومارک به دست آمده است. برای صحه‌گذاری و اطمینان از صحت نتایج، فرکانس‌های طبیعی ورق محاسبه و با منابع معتبر مقایسه شده است. همچنین نتایج تحلیل یک تیر بایمورف با نتایج نظریه تطبیق داده شده است. به‌منظور کنترل ارتعاشات ورق از روش کنترلی بازخورد سرعت استفاده شده و تأثیر آن بر کاهش ارتعاشات یک ورق چندلایه با شرایط مرزی ساده و یک ورق دو سر گیردار ـ دو سر آزاد نشان داده شده است. نتایج این پژوهش کارآمد بودن روش بدون المان گلرکین در مدل‌سازی ورق به‌همراه لایه‌های پیزوالکتریک و همچنین اثر کنترل بازخورد سرعت در میراندن ارتعاشات ورق را نشان می‌دهد.

پانوشت

1. functionally graded material

منابع (References)

1. Crawley, E.F. and de Luis, J. "Use of piezoelectric actuators as elements of intelligentstructures", *AIAA Journal*, **25**(10) pp. 1373-1385 (1987).
2. Crawley, E.F. and Anderson, E.H. "Detailed models of piezoceramic actuation of beams", AIAA 89-1388-CP. (1989).
3. Crawley, E.F. and Lazarus, K.B. "Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plate", *AIAA Journal*, **29**(6), pp. 944-951 (1991).
4. Javadi Moghaddam, J. and Bagheri, A. "Supressing vibration in a functionally graded material plate using geneticalgorithm particle swarm optimizationand sliding mode control system", *J Process Mechanical Engineering*, pp. 1-14 (2014).
5. Javadi Moghaddam, J. and Bagheri, A. "Design an intelligent control system to suppress the vibration of simply supported FGM shell", *Journal of Intelligent Automation Systems*, Article in press, Corrected Proot Available online from us February (2014).
6. Lee, C.-K. "Theory of laminated piezoelectric plates for the design of distributed sensors/actuators. Part I: Governing equations and reciprocal relationships", *Journal of the Acoustical Society of America*, **87**(3), pp. 1144-1158 (1990).
7. Tzou, H.S. and Tseng, C.I. "Distributed modal identification and vibration control ofcontinua: Piezoelectric finite element formulation and analysis", *Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **113**, pp. 500-505 (1991).
8. Anderson, E.H. and Hagood, N.W. "Simultaneous piezoelectric sensing/actuation: Analysis and application to controlled structures", *Journal of Sound and Vibration*, **174**(5), pp. 617-639 (1994).
9. Kurylov, Y. and Amabili, M. "Study on finite element analyis and shape control of composite laminate contanining piezoelecrtic", *Act. Mater. Compos. Sinica*, **14**(2), pp. 114-119 (1997).
10. Gabbert, U., Trajkov, T.N. and Koppe, H. "Modelling, control and simulation of piezoelectric smart structures using finite element method and optimal LQ control", *Facta Universitatis, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, **3**, pp. 417-430 (2002).
11. Narayanana, S. and Balamurugan, V. "Finite element modelling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators", *Journal of Sound and Vibration*, **262**, pp. 529-562 (2003).
12. Ma, K. "Vibration control of smart structures with bonded PZT patches: Novel adaptive filtering algorithm andhybrid control scheme", *Smart Mater. Struct.*, **12**, pp. 473-82 (2003).
13. Liewa, K.M., He, X.Q., Tan, M.J. and Lim, H.K. "Dynamic analysis of laminated composite plates with piezoelectric sensor/actuator patches using the FSDT meshfree method", *International Journal of Mechanical Sciences*, **46**, pp. 411-431 (2004).

www.SID.ir

Archive of SID

14. Simoes Moita, J.M., Correia, I.F.P. and MotaSoares, C.M. "Active control of adaptive laminated structures with", *Computers and Structures*, **82**, pp. 1349-1358 (2004).

15. Trindade, M.A., Benjeddou, A. and Ohayon, R. "Piezoelectric active vibration control of damped sandwich beams", *J. Sound Vib.*, **246**, pp. 653-77 (2001).

16. Vasques, C.M.A. and Rodrigues, J.D. "Active vibration of smart piezoelectric beams: Comparison of classical and optimal feedback control strategies", *Computer Structure*, **84**, pp. 1402-14 (2006).

17. Kapuria, S. and Yaqoob Yasin, M. "Active vibration control of piezoelectric laminated beams with electroded actuators and sensors using an efficient finite element", *Smart Mater. Struct.* **19**(4), 15 pp. (2010).

18. Tiersten, H.S., *Linear Piezoelectric Plate Vibrations-Elements of the Linear Theory of Piezoelectricity and the Vibration of Piezoelectric Plates*, New York Plenum Press (1969).

19. Liu, G.R. and Gu, Y.T., *An Introduction to Mesh-free Methods and Their Programming*, Springer, The Netherlands (2005).

20. Lancaster, P. and Salkauskas, K. "Surfaces generated by moving least squares methods", *Mathematics of Computation*, **37**, pp. 141-58 (1981).

21. Liew, K.M., Wang, J., Ng, T.Y. and Tan M.J. "Free vibration and buckling analyses of shear-deformable plates based on FSDT meshfree method", *Journal of Sound and Vibration*, **276**, pp. 997-1017 (2004).

22. Qatu, M.S., *Vibration of Laminated Shells and Plates*, Elsevier Academic Press (2004).

23. Tzou, H.S. and Ye, R. "Analysis of piezoelectric structures with laminated piezoelectric triangle shell elements", *AIAA J*, **34**, pp. 110-5 (1996).

www.SID.ir