

## ارزیابی تجربی روش‌های انتقال حرارت معکوس

سمیه داودآبادی فراهانی\* (دانشجوی دکتری)

علیرضا نجفی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

فرشاد کونوی (استاد)

دانشکده فنی، دانشگاه تهران

Original Article

در این مطالعه کاربرد روش هدایت حرارتی معکوس با استفاده از دماهای اندازه‌گیری شده از مدل‌های آزمایشگاهی، به منظور تخمین پارامترهای مطلوب انتقال حرارت بررسی شده است. برای تحقق این مهم دو آزمایش کلاسیک انتقال حرارت طراحی شده که دماهای اندازه‌گیری شده در این دو آزمایش به‌عنوان ورودی الگوریتم انتقال حرارت معکوس کاربرد دارد؛ در آزمایش اول شار حرارتی و در آزمایش دوم ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی، مجهولات مسئله است. نتایج نشان می‌دهد روش معکوس با دقت خوبی شار حرارتی و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را برآورد کرده است. الگوریتم حل هدایت حرارتی معکوس در شرایط واقعی که امکان اندازه‌گیری دما در سطوح مورد نظر جسم غیرممکن است، دقت قابل قبولی دارد و ابزاری قدرتمند در بررسی‌های تجربی است.

واژگان کلیدی: انتقال هدایت حرارتی معکوس، روش حل دنباله‌ی، تخمین شار حرارتی، تخمین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی.

### ۱. مقدمه

معکوس در برد وضع بودن مسائل معکوس است. ثابت شده که مسائل هدایت حرارتی معکوس به خطاهای اندازه‌گیری به شدت حساس است و کوچک‌ترین تغییری در مقادیر ثبت‌شده باعث اختلافات زیادی در نتایج محاسبه شده می‌شود. راه حل‌های مختلفی برای این مشکل ارائه شده که یکی از آن‌ها با عنوان «روش مرتب‌سازی» حساسیت مسائل بدوضع به خطاهای اندازه‌گیری را کاهش می‌دهد.<sup>[۱]</sup> روش‌های حل هدایت حرارتی معکوس به‌طور معمول به دو بخش روش‌های تمام‌دامنه و روش‌های دنباله‌ی تقسیم می‌شود. در روش تمام‌دامنه دسترسی به کل اطلاعات تاریخچه‌ی حرارتی برای حل مسئله نیاز است و جواب آن از دقت قابل قبولی برخوردار است. اولین پیشگامان این روش فرانک (۱۹۶۳)<sup>[۲]</sup> و دیویس (۱۹۶۶)<sup>[۳]</sup> بوده‌اند. روش حل دنباله‌ی که اولین بار توسط بک در سال ۱۹۶۱<sup>[۴]</sup> پیشنهاد شد این قابلیت را دارد که همزمان با انجام آزمایش مورد استفاده قرار گیرد.<sup>[۵]</sup> به همین سبب این روش نیاز کم‌تری به حافظه و زمان محاسباتی دارد اگرچه نسبت به روش تمام‌دامنه از دقت کم‌تری برخوردار، و به خطاهای اندازه‌گیری حساس‌تر است. در حال حاضر نیز مقالات متعددی با استفاده از روش‌های هدایت حرارتی معکوس در دو بعد به رشته‌ی تحریر درآمده است. به‌طور مثال یاس توانسته ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی غیریکتواخت روی یک استوانه را به‌صورت دائمی با یک الگوریتم معکوس تخمین بزند.<sup>[۶]</sup> محققین دیگری نیز با روش تمام‌دامنه ماتریس متغیر شار حرارتی روی یک صفحه تخت دوبعدی را تخمین زده‌اند.<sup>[۷]</sup> در مطالعات بعدی<sup>[۸،۹]</sup> روش‌های جدیدی بدون نیاز به سلول‌بندی و انتگرال‌گیری برای حل مسائل هدایت حرارتی معکوس توسعه داده‌اند. حتی

توزیع دمای درون هر جسم را می‌توان با معلوم بودن مقادیر شار حرارتی یا دمای مرزهای آن جسم، و حل معادلات مشتق جزئی مربوط به آن به دست آورد؛ به این روش در انتقال حرارت، مسئله‌ی هدایت حرارتی مستقیم گفته می‌شود. اما در بسیاری از مسائل واقعی و صنعتی با توجه به مشکلات مختلف از جمله شرایط دمایی فوق‌العاده بد مرزها (مانند موتورهای احتراق داخلی و سفینه‌های فضایی)، شرایط سخت فیزیکی (مانند محیط‌های اسیدی و خورنده)، و ایجاد اغتشاش در جریان سیال (مانند جت‌های برخوردی و غیره) نمی‌توان دما را در سطح جسم اندازه‌گیری کرد. بنابراین باید دماها در درون جسم یا در تماس با سطح عایق اندازه‌گیری، و سپس شار حرارتی یا دما در مرزها محاسبه شود. این روش را «مسئله‌ی هدایت حرارتی معکوس» می‌نامند.<sup>[۱]</sup> البته مسائل هدایت حرارتی معکوس را می‌توان برای محاسبه‌ی خواص ترموفیزیکی جسم، هندسه‌ی آن، یا پارامترهای نامعلوم دیگر نیز به کار برد. یکی از اولین مقالات در زمینه‌ی هدایت حرارتی معکوس در سال ۱۹۶۰ به چاپ رسید<sup>[۲]</sup> که به محاسبه‌ی نرخ انتقال حرارت در هنگام فرایند خنک‌کاری اجسام با هندسه‌ی ساده می‌پرداخت. البته مقاله‌های مختلف دیگری نیز توسط محققین روسی در این زمینه به‌طور همزمان چاپ شده است. یکی دیگر از تفاوت‌های مهم روش هدایت حرارتی مستقیم با هدایت حرارتی

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۷/۱۶، اصلاحیه ۱۳۹۴/۲/۸، پذیرش ۱۳۹۴/۲/۱۹

به صورت ماتریسی خواهیم داشت:

$$T = \hat{T}|_{q=0} + Xq \quad (2)$$

که در آن:

$$\hat{T}_{r \times 1}|_{q=0} = \begin{bmatrix} T_M|_{q_M=0} \\ T_{M+1}|_{q_M=q_{M+1}=0} \\ \vdots \\ T_{M+r-1}|_{q_M=q_{M+1}=\dots=q_{M+r-1}=0} \end{bmatrix}_{r \times 1} \quad (3)$$

$$\hat{T}_{r \times 1} = \begin{bmatrix} T_M \\ T_{M+1} \\ \vdots \\ T_{M+r-1} \end{bmatrix}_{r \times 1} \quad (4)$$

$$q_{r \times 1} = \begin{bmatrix} q_M \\ q_{M+1} \\ \vdots \\ q_{M+r-1} \end{bmatrix}_{r \times 1} \quad (5)$$

$$X_{r \times r} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \Delta\phi_{r-1} & \dots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

با فرض:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_i &= \phi_{i+1} - \phi_i \\ \Delta\phi_0 &= \phi_1 \end{aligned} \quad (7)$$

در روابط بالا ماتریس  $X$  ماتریس ضرایب حساسیت بوده و از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} X_{i,j} = 0 & i < j \\ X_{i,j} = \frac{\partial T_i}{\partial q_j} & i > j \end{cases} \quad (8)$$

برای محاسبه‌ی ضرایب حساسیت باید با توجه نوع مسئله، معادله‌ی انتقال حرارت مربوطه را نوشت و سپس با مشتق گرفتن از آن معادله نسبت به پارامتر اندازه‌گیری، به معادله‌ی  $X$  رسید. معادله‌ی  $X$  یک معادله‌ی مشتق جزئی است که باید با روش‌های موجود حل شود. حال برای بهینه کردن تابع هدف نسبت به پارامتر مورد نظر یعنی شار باید از آن مشتق بگیریم:

$$\frac{\partial S}{\partial q_M} = 0 \quad (9)$$

که در نهایت با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$q_M = \frac{\sum_{i=1}^r \phi_i (Y_{m+i-1} - T_{m+i-1}|_{q=0})}{\sum_{i=1}^r \phi_i^2} \quad (10)$$

مسائل پیچیده‌تر در حوزه‌ی هدایت حرارتی معکوس مانند محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت وابسته به زمان با شرایط مرزی غیرخطی<sup>[۱۳]</sup> یا حل مسئله‌ی انتقال حرارت معکوس غیرخطی<sup>[۱۴]</sup> مورد بررسی قرار گرفته است. دو روش لوینبرگ مارکوت و تجزیه‌ی مقادیر تکین در برآورد ضریب انتقال حرارت در یک تیوپ به صورت عددی مقایسه شد.<sup>[۱۵]</sup> برای حل مسائل معکوس در محیط‌های غیر ایزوتروپیک نیز روشی ارائه شد.<sup>[۱۶]</sup> محققین برای افزایش دقت و پایداری روش‌های استاندارد معکوس، از نوعی فیلتر برای نویزدایی دماهای شبیه‌سازی شده استفاده کردند.<sup>[۱۷]</sup> در تحقیقی دیگر<sup>[۱۸]</sup> دو روش نویزدایی در تخمین پارامترهای وابسته در مواد مرکب، طی فرایند درمان با استفاده از روش معکوس مقایسه شد. برای حل مسئله، روش معکوسی به صورت فیلتر دیجیتال با استفاده از روش تنظیم تیخونو<sup>[۱۹]</sup> ارائه شد.

چنان که مشاهده می‌شود، در بیشتر تحقیقات صورت گرفته درخصوص هدایت حرارتی معکوس، داده‌های اندازه‌گیری شده‌ی مورد نیاز الگوریتم با استفاده از شبیه‌سازی عددی و اضافه کردن خطا به آن انجام شده است. به دلیل داشتن مدل ریاضی و تولید داده‌ها به کمک آن، خطای ناشی از یافتن مدل ریاضی متناسب و شرایط مرزی و پیچیدگی‌های آن که به ناپایداری مسئله‌ی معکوس کمک می‌کند، نادیده گرفته شده است. در نوشتار حاضر با طراحی دو آزمایش تجربی و استفاده از خروجی‌های اندازه‌گیری شده به عنوان ورودی سیستم الگوریتم هدایت حرارتی معکوس، این مسئله مورد بررسی قرار گرفته است. روش حل دنباله‌ی به دلیل مزایای ذکر شده به عنوان روشی برای تخمین پارامترهای مجهول انتخاب شده است.

در مسئله‌ی اول یک صفحه‌ی تخت فلزی که از یک طرف در معرض شار حرارتی ثابتی قرار دارد و از طرف دیگر عایق شده است، به عنوان یکی از مسائل کلاسیک انتقال حرارت مورد بررسی قرار می‌گیرد. هدف از قرار دادن حسگرها روی سطح غیرفعال جسم، سنجش شرایط بد وضعی مسئله و تأثیر دور بودن حسگر از سطح فعال در الگوریتم معکوس است. در مسئله‌ی بعدی صفحه مسئله‌ی قبل از یک طرف در کنار شار ثابت و از طرف دیگر در معرض هوای آزاد قرار دارد؛ هدف از این آزمایش محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی هوای آزاد و همچنین بررسی میزان هدررفت شار اعمال شده به محیط و سطوح عایق است.

## ۲. روش حل هدایت حرارتی معکوس

برای حل مسائل معکوس در این مقاله از روش دنباله‌ی تخمین توابع متوالی (SFSM)<sup>۱</sup> که روشی است دنباله‌ی و بسیار کاربردی استفاده می‌شود. در این روش با استفاده از یک پارامتر تنظیم می‌توان شار را از دماهای اندازه‌گیری شده تخمین زد. هدف اصلی به دست آوردن توزیع شار حرارتی روی سطح فعال مسئله است، طوری که تابع هدف ۱ کمینه شود:

$$S(q_m) = \sum_{i=1}^r [Y_{m+i-1} - T_{m+i-1}|_{q=0} - \phi_i q_M]^2 \quad (1)$$

که در آن  $Y$  دمای اندازه‌گیری شده، و  $T$  دمای محاسبه شده است.  $r$  نیز پارامتر تنظیم است که با زیاد کردن آن از نقاط بیشتری کمک گرفته می‌شود؛ بدین ترتیب خطای بایاس در حل زیاد و تأثیر اغتشاشات کم می‌شود. برای محاسبه‌ی مقادیر  $T$

که در آن پارامتر  $\alpha$  ضریب پخش حرارتی است. این معادله همراه با شرایط اولیه و مرزی زیر (رابطه‌ی ۱۳) است:

$$T(x, y, 0) = T_0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{q(t)}{k}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=L_2} = 0 \quad (13)$$

چنان که در شکل مشاهده می‌شود  $q$  شار اعمالی به سطح بالایی صفحه فولادی با ابعاد  $L_1 \times L_2$  و  $k$  ضریب رسانش حرارتی است. یکی دیگر از گام‌های مورد نیاز برای کاربرد روش معکوس دانستن حساسیت مسئله نسبت به پارامتر مجهول است. معادله‌ی ضریب حساسیت نیز با مشتق گرفتن از دو معادله‌ی بالا نسبت به پارامتر مجهول یعنی  $q$  به دست می‌آید که می‌توان با حل آن ضریب حساسیت در نقاط مختلف فلز را به دست آورد.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial X}{\partial t}$$

$$X(x, y, 0) = X_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=L_1} = \left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=L_2} = 0$$

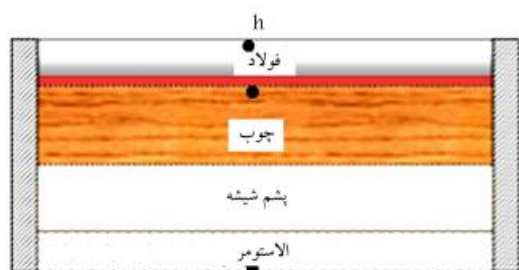
$$\left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{1}{k}$$

(۱۴)

حال با حل معادله‌ی ضریب حساسیت و به دست آوردن ضرایب اعمال الگوریتم معکوس روی دماهای اندازه‌گیری شده، شار حرارتی مورد نظر را تخمین می‌زنیم.

### ۲.۳. آزمایش دوم

در این آزمایش صفحه‌ی فولادی آزمایش قبلی از یک طرف با گرمکن گرم می‌شود و از طرف دیگر در معرض هوای آزاد قرار دارد. سطح دیگر گرمکن با لایه‌های عایق چوب (mm) ۱۶، پشم شیشه (mm) ۶ و عایق الاستومر (mm) ۶ مطابق شکل ۲ پوشانیده شده است. نوع عایق و ضخامت آن‌ها با انجام یک سری شبیه‌سازی عددی انتخاب شده است. همچنین چوب که اولین لایه‌ی عایق بعد از گرمکن قرار داده شده تا با روشن شدن گرمکن و انجام آزمایشات نسوز؛ بدین‌ترتیب در روش معکوس به دلیل ضریب رسانایی بالاتری که دارد می‌توان به



• ترموکوپل

شکل ۲. شماتیک آزمایش دوم.

برای محاسبه‌ی مقدار انحراف شار به دست آمده از مقادیر اصلی آن، پارامتر  $e_{rms}$  را چنین تعریف می‌کنیم:

$$e_{rms} = \frac{\left( \sum_{i=1}^n (q_{i,estimate} - q_{i,actual})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \quad (11)$$

### ۳. آزمایش‌های تجربی

برای مدل‌سازی هدایت حرارتی معکوس در جسم دو آزمایش طراحی شده است. جسم مورد آزمایش یک سطح فلزی از جنس فولاد گرین دار ۳۰۴ (AISI۳۰۴) به ابعاد ۲۵۰ در ۷۰ میلی‌متر و ضخامت ۵ میلی‌متر است که توسط یک گرمکن هم‌اندازه با آن گرم می‌شود. دماهای صفحه‌ی فولادی در لحظات مختلف توسط ترموکوپل‌هایی از نوع  $k$  (مدل TP۰۱) اندازه‌گیری می‌شود و با استفاده از یک سیستم داده‌برداری ثبت می‌شود.

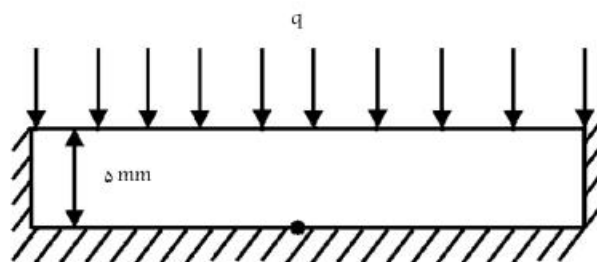
#### ۱.۳. آزمایش اول

در این آزمایش صفحه‌ی فولادی در دمای محیط از یک طرف در معرض شار حرارتی ثابت — که توسط گرمکن تأمین می‌شود — قرار داده شده، و از طرف دیگر با مواد عایق پوشانیده شده است (شکل ۱). این آزمایش یکی از مسائل کلاسیک انتقال حرارت است و مشابه آن دسته از مسائل صنعتی است که به دلیل مشکلات زیاد — نظیر عدم ایجاد آشفته‌گی یا مشکلات ساختی و تجهیزاتی — نمی‌توان ترموکوپل را روی سطح فعال نصب کرد. با توجه به محدودیت‌ها دمای سطح غیرفعال اندازه‌گیری، و در محاسبات استفاده شده است. ترموکوپل‌های نوع  $k$  را در مجاورت سطح عایق قرار داده و با روشن کردن گرمکن دماها ثبت می‌شود. هدف از این کار به دست آوردن شار مورد نظر اعمالی با استفاده از الگوریتم دنباله‌ی SFSM است. یکی از گام‌های ضروری در استفاده از روش معکوس، مدل‌سازی ریاضی مسئله‌ی مورد نظر است.

#### ۱.۱.۳. مدل ریاضی

در شکل ۱ شماتیکی از هندسه، شرایط مرزی و موقعیت حس‌گر دما نشان داده شده است. با فرض خواص حرارتی ثابت، معادله‌ی انتقال حرارت حاکم بر مسئله عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$



شکل ۱. شماتیک آزمایش اول.

نتایج بهتری دست یافت. این مجموعه در محیط آزمایشگاه قرار داده شده و هدف نهایی از انجام آزمایش، محاسبه ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی هوای آزاد ( $h$ ) در یک طرف صفحه فلزی است. ترموکوپل‌های مختلف دمای درون صفحه فلزی (فاصله ۵/۵ میلی‌متری از سطح در معرض هوای آزاد)، دمای درون چوب، دمای محیط آزمایشگاه و همچنین دمای سطح نهایی عایق الاستومر را اندازه‌گیری می‌کنند. با این کار می‌توان حتی از عایق‌کاری مناسب سامانه‌ی آزمایشگاهی مطمئن شد.

### ۱.۲.۳. مدل ریاضی

معادلات مربوطه به لایه‌های عایق و چوب مانند معادلات بخش قبلی (معادلات ۱۲ و ۱۳) است با این تفاوت که در هر قسمت حل باید خواص فیزیکی مربوط به همان لایه در معادلات لحاظ شود. روش حل مسئله به این صورت است که ابتدا از سطح عایق الاستومر شروع کرده و با استفاده از الگوریتم معکوس، شار ورودی به لایه پشم شیشه را محاسبه می‌کنیم. سپس با شار به دست آمده معادله‌ی معکوس مربوط به پشم شیشه را حل می‌کنیم. با تکرار این عمل برای چوب می‌توان شرایط مرزی یعنی شار نهایی یک طرف صفحه فلزی را تخمین زد. حال به بررسی معادله‌ی حاکم بر صفحه فولادی می‌پردازیم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$T(x, y, 0) = T_0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{q}{k} = \frac{h(T_s - T_\infty)}{-k} + \frac{\varepsilon\sigma(T_s^+ - T_\infty^+)}{-k}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=L_y} = \frac{q}{k} \quad (15)$$

از معادله‌ی ۱۵ چنین استنباط می‌شود که در محاسبات انجام گرفته، علاوه بر انتقال حرارت جابه‌جایی، انتقال حرارت تشعشعی سطح فلزی، در شرایط مرزی لحاظ شده است.

برای به دست آوردن معادله‌ی ضریب حساسیت باید از معادله‌ی انتقال حرارت بالا نسبت به پارامتر مجهول یعنی  $h$  مشتق بگیریم! این راه حل را روش مستقیم تخمین ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی می‌نامند. مشاهده می‌شود که معادله‌ی حاصل از این مشتق‌گیری غیرخطی است و نیاز به الگوریتم تکراری و محاسبات زمان‌بر دارد. برای رفع این مشکل از تخمین غیرمستقیم  $h$  استفاده می‌شود. به این صورت که یک شار فرضی  $q$  در سطح آزاد صفحه فلزی قرار می‌دهیم و پس از تخمین زدن آن با الگوریتم معکوس، با استفاده از قانون سرمایه‌ی نیوتن مقدار ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی را به دست می‌آوریم.

$$h(t) = \frac{q(t) - \varepsilon\sigma(T_s^+ - T_\infty^+)}{T_s - T_\infty} \quad (16)$$

$\varepsilon$  و  $\sigma$  به ترتیب ضریب صدور سطحی و ضریب استفان بولتزمن است. با این کار مشکل غیرخطی بودن معادله‌ی ضریب حساسیت از بین می‌رود. حال با مشتق‌گیری از معادله‌ی ۱۵ نسبت به پارامتر مجهول  $q$ ، معادله‌ی ضریب حساسیت به دست

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial X}{\partial t}$$

$$X(x, y, 0) = X_0 = 0$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=L_x} = \left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=L_y} = 0$$

$$\left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{1}{k} \quad (17)$$

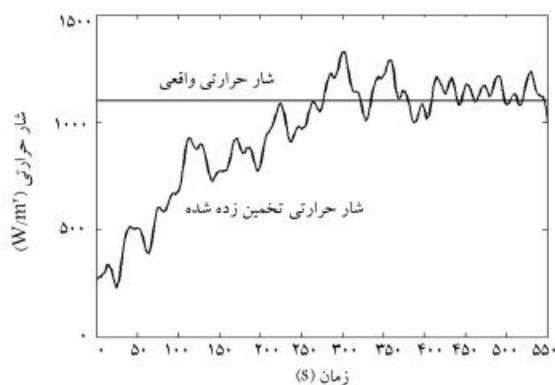
معادله‌ی ۱۷ نشان می‌دهد که ضریب حساسیت در تخمین غیرمستقیم خطی است و در تمام محاسبات ثابت است.

## ۴. نتایج و بحث

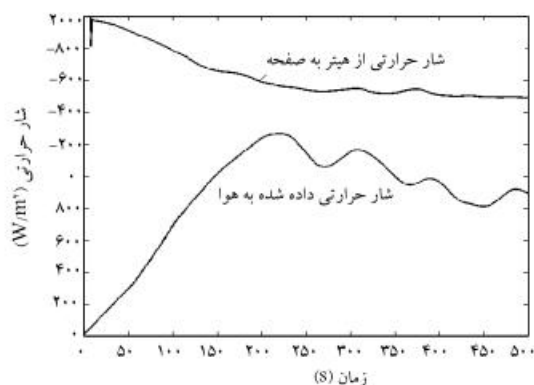
با انجام دو آزمایش طراحی شده، دماهای مورد نیاز توسط ترموکوپل‌های نوع  $k$ ، با ثابت زمانی ۰/۱ ثانیه ثبت شده است. حال با وارد کردن دماهای اندازه‌گیری شده به عنوان ورودی الگوریتم معکوس و حل آن با گام زمانی ۰/۱ ثانیه می‌توان مجهولات مسئله — شار حرارتی در مسئله‌ی اول و ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی در مسئله‌ی دوم — را تخمین زد. قبل از انجام آزمایشات با انجام یک سری شبیه‌سازی‌های عددی مقدار پارامتر تنظیم ( $\nu$ ) در روش SFSM برابر ۵ به دست آمده است. بنابراین برای آزمایشات واقعی همان مقدار در نظر گرفته شده است. تمامی الگوریتم در محیط نرم‌افزار MATLAB نوشته شده و برای حل مستقیم معادلات از روش تفاضل محدود استفاده شده است.

در آزمایش اول، هدف برآورد شار حرارتی اعمالی با استفاده از اندازه‌گیری دما در سطح عایق است. چنان که پیش‌تر نیز توضیح داده شد، در مسائل تجربی ممکن است اندازه‌گیری دما در سطح فعال امکان‌پذیر نباشد و دما در سطوح دیگر اندازه‌گیری شود. هنگامی که ترموکوپل از سطح فعال دور می‌شود، تغییرات دما در آن محل نسبت به تغییرات شار حرارتی در سطح فعال به‌خاطر پدیده‌ی پراکنش (دیفیوژن) و تأخیر زمانی کم‌تر می‌شود. در این آزمایش با استفاده از بدترین حالت ممکن (یعنی اندازه‌گیری دما در سطح غیر فعال)، قابلیت روش معکوس در این حالت بررسی شده است.

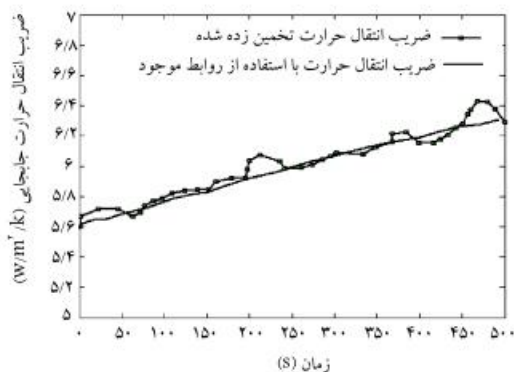
در شکل ۳ شار حرارتی محاسبه شده توسط روش معکوس برای آزمایش اول ترسیم شده است. چنان که مشاهده می‌شود مقادیر به دست آمده با مقدار معلوم شار (۱۲۰۰ وات بر متر مربع) مطابقت خوبی دارد. یادآور می‌شود که گرمکن مورد



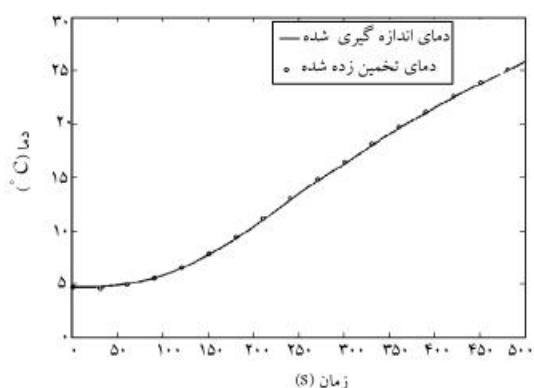
شکل ۳. شار حرارتی تخمین زده شده در مسئله‌ی اول در زمان انجام آزمایش.



شکل ۶. شار حرارتی دو طرف سطح فولادی.



شکل ۷. ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی تخمین زده شده در آزمایش دوم.



شکل ۸. مقایسه‌ی دماهای اندازه‌گیری شده توسط ترموکوپل‌ها و دماهای تخمین زده شده با روش معکوس در آزمایش دوم.

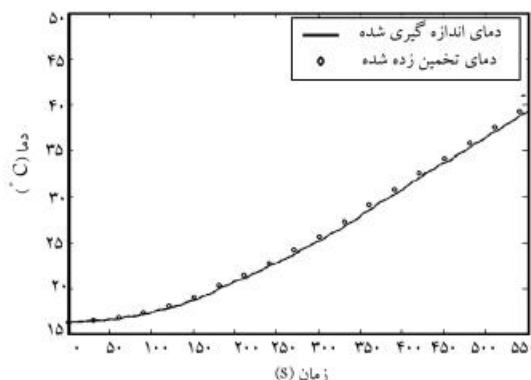
شارهای تخمین زده شده وارده به دو طرف سطح فلزی در شکل ۶ نشان داده شده است. ضریب صدور سطح فلزی نیز با دستگاه ترمومتر تشعشعی مادون قرمز اندازه‌گیری شده و مقدار آن برابر با ۸۵/۰ محاسبه شده است.

شکل ۷ ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی سطح آزاد تخمین زده شده در آزمایش دوم را نشان می‌دهد. مقدار ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی تخمین زده شده نسبت به مقدار محاسبه شده از طریق فرمول مربوط به جابه‌جایی سطوح افقی رو به بالا در کتاب «انتقال حرارت»<sup>[۲۰]</sup> که با استفاده از آن میزان  $h$  برابر ۵/۸ به دست می‌آید، مطابقت خوبی دارد و خطای مقدار برآورد شده با استفاده از الگوریتم معکوس برابر با ۱۷/۵٪ است. لازم به ذکر است که مقدار متوسط  $h$  براساس دماهای سطح در

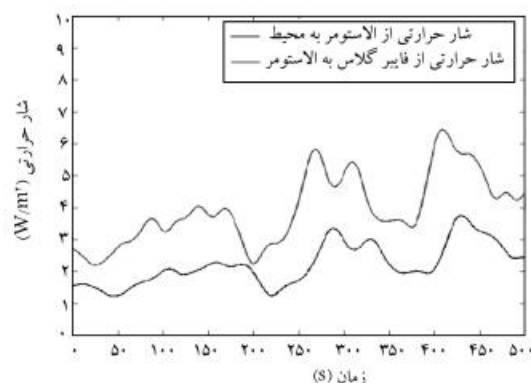
نظر سیلیکونی و بسیار نازک است و در چند ثانیه بعد از روشن شدن به توان مورد نظر می‌رسد؛ داده‌برداری ۱۵ دقیقه پس از روشن شدن گرمکن انجام شده است. بنابراین می‌توان شار تولیدی گرمکن را ثابت فرض کرد. برای محاسبه‌ی دقت روش مذکور، ریشه دوم میانگین مربع از رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود.

$$e_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (q_{i,estimated} - q_{i,actual})^2} \quad (18)$$

با محاسبات انجام گرفته میزان  $e_{rms}$  برابر با ۱۶/۴٪ به دست می‌آید. در روش‌های دنباله‌ی به دلیل هم‌زمانی الگوریتم حل با انجام آزمایش، مقادیر پارامتر تخمین زده شده به صورت موجی و متغیر است که در این نمودار نیز رؤیت می‌شود. یکی دیگر از مشکلات در این آزمایش، اندازه‌گیری دماها در سطح غیرفعال جسم است که سبب بروز این نوع خطا شده است. در صورتی که اگر دماها در سطح فعال یعنی در تماس با گرمکن اندازه‌گیری می‌شد، الگوریتم معکوس به نتایجی به مراتب دقیق‌تر و با نوسان کم‌تر منجر می‌شد. در شکل ۴ دمای اندازه‌گیری شده توسط یکی از ترموکوپل‌ها با دمای تخمین زده شده توسط الگوریتم معکوس برهم منطبق شده‌اند. در آزمایش دوم با حل لایه لایه مشخص شد که هدرفت حرارتی از لایه‌ی انتهایی عایق به محیط اطراف بسیار ناچیز بوده (شکل ۵)، چنان‌که می‌توان در محاسبات بعدی حتی از آن صرف نظر کرد. همچنین دیده می‌شود مقداری گرمای ورودی به این لایه از مرزهای اطراف آن خارج می‌شود و مقداری شار نیز در این لایه ذخیره می‌شود. اما مقدار گرمای زیادی را چوب در خود ذخیره می‌کند. مقادیر



شکل ۴. مقایسه‌ی دماهای اندازه‌گیری شده توسط ترموکوپل‌ها و دماهای تخمین زده شده با روش معکوس در آزمایش اول.



شکل ۵. اتلاف شار حرارتی تخمین زده شده از لایه‌های عایق در مسئله‌ی دوم در زمان انجام آزمایش.

## ۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار با طراحی دو آزمایش کلاسیک انتقال حرارت و اندازه‌گیری تجربی دماهای مورد نیاز، دقت و صحت الگوریتم حل هدایت حرارتی معکوس مورد بررسی قرار گرفت. در آزمایش اول مقدار شار حرارتی اعمال شده به یک سطح فلزی، و در آزمایش دوم مقدار ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد در تماس با یک صفحه‌ی فلزی برآورد شد. مشاهده شد که محدودیت‌های اندازه‌گیری بر جواب‌های تخمین زده شده به شدت تأثیرگذار است، اما در روش به کار گرفته شده پارامترهای مجهول با دقت قابل قبولی محاسبه شده است.

آزمایش دوم در این نوشتار برای محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی آزاد طراحی شده بود و با به دست آوردن نتایج مناسب در این مرحله می‌توان از این روش برای محاسبه‌ی ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی اجباری مانند جریان‌های هوای عبوری از روی سطوح یا جت‌های برخوردی بهره‌مند شد.

در نهایت، یادآوری می‌شود که روش‌های هدایت حرارتی معکوس ذکر شده به لحاظ اجرا و آزمایشگاهی بسیار کم‌هزینه‌تر و مقرون به صرفه‌تر از روش‌های مشابه دیگر است.

جدول ۱. منبع خطا.

منبع خطا	بایاس (%)
ترموتر	$\pm 0.1^\circ\text{C}$
هندسه و خواص فیزیکی	$\pm 1\%$

نظر گرفته شده است. در شکل ۸ نیز مطابقت دمای اندازه‌گیری شده و تخمین زده شده در صفحه‌ی فلزی به وضوح مشاهده می‌شود.

در انجام هر آزمایش خطاهای موجود را می‌توان به دو نوع ثابت و تصادفی تقسیم‌بندی کرد که خطاهای ثابت یک مقدار مشخص بوده ولی خطاهای تصادفی در هر آزمایش مقداری متغیر دارد. با استفاده از روش‌های درجه‌بندی مناسب می‌توان خطاهای ثابت را حذف کرد ولی خطاهای تصادفی همچنان در نتایج آزمایش اشکال به وجود می‌آورند. این خطاها و عدم قطعیت از طرف وسایل اندازه‌گیری (ترموکوپل) و خطای هندسه و ساخت قطعات و همچنین خطاهای داده‌برداری است که در جدول ۱ فهرست شده است. نتایج به دست آمده از دو آزمایش نشان می‌دهد که روش عددی هدایت حرارتی معکوس مطابقت مناسبی با آزمایش‌های تجربی دارد و از دقت بالایی برخوردار است.

## پانویس

1. Sequential function sequential method

## منابع (References)

1. Beck, J.V., Blackwell, B. and Clair, S.R., *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*, Wiley, New York (1988).
2. Stolz, Jr., G. "Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes", *Journal of Heat Transfer*, **82**, pp. 20-26 (1960).
3. Tikhonov, A.N. and Arsenin, V.Y., *Solution of Ill-Posed Problems*, Winston and Sons, Washington. DC. (1977).
4. Frank, I. "An application of least square methods to the solution of the inverse problem of heat conduction", *Journal of Heat Transfer*, **85**, pp. 378-379 (1963).
5. Davies, J.M. "Input power determined from temperatures in simulated skin protected against thermal radiation", *Journal of Heat Transfer*, **88**, pp. 154-160 (1966).
6. Beck, J.V. "Calculation of surface heat flux from an internal temperature history", *Nuclear Engineering and Design*, **7**, pp. 170-178 (1968).
7. Beck, J.V. "Surface heat flux determination using an integral method", *Nucl. Eng. Des.*, **7**, pp. 170-178 (1968).
8. Beck, J.V. "Nonlinear estimation applied to the nonlinear heat conduction problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **13**, pp. 703-716 (1970).
9. Bass, J.V., *Incap: A Finite Element Program for one-Dimensional Nonlinear Inverse Heat conduction Analysis*, Technical Report NRC/NUREG/CSD/TM-8, Oak Ridge National Laboratory (1979).
10. Kowsary, F., Behbahaninia, A. and Pourshaghaghay, A. "Transient heat flux function estimation utilizing the variable metric method", *International Communications in Heat and Mass Transfer (Elsevier)*, **33**, pp. 800-810 (2006).
11. Hon, Y.C. and Wei, T. "A fundamental solution method for inverse heat conduction problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **28**, pp. 489-495 (2004).
12. Yan, L., Fu, C. and Yang, F. "The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **32**, pp. 216-222 (2008).
13. Slodicka, M., Lesnic, D. and Onyango, T.T.M. "Determination of a time-dependent heat transfer coefficient in a nonlinear inverse heat conduction problem", *Inverse Problems in Science and Engineering*, **18**(1), pp. 65-81 (2010).
14. Raynaud, M. and Bransier, J. "A new finite-difference method for the nonlinear inverse heat conduction problem", *Numerical Heat Transfer*, **9**, pp. 27-42 (1986).
15. Taler, J. "Determination of local heat transfer coefficient from the solution of the inverse heat conduction problem", *Forsch. Ingenieurwes*, **71**, pp. 69-78 (2007).
16. Dong, C.F., Sunb, F.Y. and Mengc, B.Q. "A method of fundamental solutions for inverse heat conduction problems in an anisotropic medium", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **31**, pp.75-82 (2007).

17. Kowsary, F. and Farahani, S.D. "The smoothing of temperature data using the mollification method in heat flux estimating", *Numerical Heat Transfer: Part A*, **58**, pp. 227-246 (2010).
18. Farahani, S.D., Sefidgar, M. and Kowsary, F. "Estimation of kinetic parameters of composite materials during the cure process by using wavelet transform and mollification method", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **38**, pp. 1305-1311 (2011).
19. Woodbury, K.A. and Beck, J.V. "Estimation metrics and optimal regularization in a Tikhonov digital filter for the inverse heat conduction problem", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **62**, pp. 31-39 (2013).
20. Incropera, F.P., Dewitt, D.P., Bergman, T.L. and Lavine, A.S., *Introduction to Heat Transfer*, Wiley Press (2006).