

# جبران سازی خطاهای سرعت و موقعیت یک سیستم ناوبری تلفیقی اینرسی/سماوی به کمک هموارسازی و فیلتر کالمن درجه دوم

Original Article

هادی نوبهاری\* (استادیار)

حبیب قنبرپور اصل (استادیار)

دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف

سید فرهاد ابطحی (دانشجوی دکتری)

بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه شراز

هدف نوشتار حاضر جبران خطای سرعت و موقعیتی است که در ابتدای عملکرد حساسه‌ی ستاره‌نگر در یک سیستم ناوبری تلفیقی اینرسی/سماوی وجود دارد. این دو سیستم ناوبری به وسیله‌ی فیلتر کالمن درجه دوم تلفیق شده‌اند. به منظور حل دقیق معادلات ناوبری، از الگوریتم انتگرال‌گیری دیجیتال استفاده شده است. به علاوه، به منظور کاهش بار محاسباتی، در تمامی مراحل ناوبری و تلفیق از کواترنیون‌ها استفاده شده است. با استفاده از معادلات غیرخطی و به کارگیری هموارسازی و پسروی، وضعیت اولیه و بایاس شتاب‌سنج‌ها با دقت زیاد تخمین زده شده است. افزون بر این، در حین پسروی و هموارسازی، وضعیت وسیله در لحظات پیشین به دقت تخمین زده می‌شود. در ادامه، با انجام یک ناوبری موازی جدید، که براساس وضعیت برآورد شده‌ی لحظات پیشین و جبران‌سازی بایاس شتاب‌سنج‌ها صورت می‌گیرد، خطاهای سرعت و موقعیت جبران می‌شود. در انتها با انجام شبیه‌سازی برای یک ماهواره‌بر، روش ناوبری ارائه شده بررسی شده است.

واژگان کلیدی: ناوبری اینرسی، ناوبری سماوی، ناوبری تلفیقی، فیلتر کالمن مرتبه دوم، هموارسازی، پسروی.

## ۱. مقدمه

امروزه سیستم ناوبری اینرسی متصل به بدنه (SINS) در حوزه‌ی ناوبری کاربرد گسترده‌ی دارد. این سیستم ناوبری خودگردان است و معمولاً نرخ داده‌دهی بالایی دارد. سیستم ناوبری اینرسی قادر به محاسبه‌ی وضعیت، سرعت و موقعیت است اما، در کاربردهای درازمدت -- نظیر ناوبری ماهواره‌برها -- محاسبات آن به دلیل رشد خطای غیردقیق است. برای جبران خطا، تلفیق ناوبری اینرسی با نوعی ناوبری که خطای افزاینده با زمان نداشته باشد، مورد نیاز است. ناوبری سماوی<sup>۱</sup> یکی از گزینه‌هاست که می‌توان از آن در ناوبری بسیاری از وسایل پرنده نظیر ماهواره‌برها بهره برد. ناوبری سماوی غیرفعال، ساده و نسبتاً ارزان است و افزون بر این خطای افزاینده با زمان ندارد.

از ناوبری سماوی می‌توان در تعیین وضعیت و موقعیت استفاده کرد. در تعیین وضعیت می‌توان از روش سنجنش مستقیم افق<sup>۲</sup> استفاده کرد؛<sup>[۱-۳]</sup> البته به دلیل دقت کم سیستم‌های سنجنش افق، تعیین موقعیت با این روش با خطای زیادی همراه است.

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۴/۶/۲، پذیرش ۱۳۹۴/۷/۶.

nobahari@sharif.edu  
ghanbarpour@sharif.edu  
farhadabtahishz@gmail.com

روش دیگر در تعیین موقعیت، استفاده از سنجنش غیرمستقیم افق<sup>۳</sup> است که در آن از شکست نور ستارگان به وسیله‌ی اتمسفر در سنجنش افق استفاده می‌شود.<sup>[۴-۶]</sup> اگرچه دقت این روش از روش سنجنش مستقیم بیش تر است، کاربرد آن محدود به ناوبری در نزدیکی زمین است. افزون بر این، محدودیت تعداد ستارگانی که پرتو آن‌ها دچار شکست شده و همچنین عدم قطعیت در مدل اتمسفری، به ایجاد خطا در تعیین موقعیت به این روش منجر می‌شود. از ترکیب دو روش پیش‌گفته به کمک فیلتر کالمن درجه دوم<sup>۴</sup> دقت بیشتری در ناوبری حاصل شده است؛<sup>[۷]</sup> البته استفاده از این روش، همچنان محدود به نزدیک زمین است. همچنین با استفاده از داده‌های واحد اندازه‌گیری اینرسی<sup>۵</sup> و ستاره‌نگر<sup>۶</sup> و تلفیق آن‌ها از طریق فیلتر ذرات درجه دوم<sup>۷</sup> یک سیستم ناوبری دقیق طراحی شده است.<sup>[۸]</sup> استفاده از این سیستم ناوبری، در وسایلی همچون ماه‌نشین‌ها که در آنها ارتفاع ستارگان از افق با دقت قابل سنجنش است، مناسب است.

با استفاده از ناوبری سماوی، وضعیت وسیله را نسبت به دستگاه اینرسی نیز می‌توان تعیین کرد. با تلفیق وضعیت سنجنده شده با محاسبات سیستم ناوبری اینرسی، ناوبری دقیق‌تری حاصل می‌شود. پس از رسیدن وسیله به ارتفاع کافی، سیستم

## ۲. مدل سازی

در این بخش به بررسی عملکرد و چگونگی به کارگیری سیستم ناوبری اینرسی، سیستم ناوبری سماوی و فیلتر کالمن درجه دوم در مطالعه‌ی حاضر می‌پردازیم. معادلات نیوتن در دستگاه اینرسی<sup>۱۳</sup> بیان ساده‌تری دارند.<sup>[۱۴]</sup> همچنین حساسه‌ی ستاره‌نگر تعیین‌کننده‌ی وضعیت وسیله نسبت به دستگاه اینرسی است. در این نوشتار به منظور رعایت سادگی از دستگاه اینرسی استفاده شده است. از سوی دیگر، به دلیل استفاده از فیلتر غیرخطی، نیازی به خطی‌سازی معادلات ناوبری نیست. در این نوشتار از چارچوب اینرسی<sup>۱۴</sup> و چارچوب بدنی<sup>۱۵</sup> استفاده شده است. مرکز چارچوب اینرسی در مرکز زمین، محور  $x$  و  $y$  آن در صفحه‌ی استوا و محور  $z$  آن در راستای محور چرخش زمین است.<sup>[۱۶]</sup> مرکز چارچوب بدنی در مرکز جرم وسیله است؛ نسبت به بدنه‌ی وسیله، محور  $x$  در راستای روبه‌رو، محور  $y$  در راستای سمت راست، و محور  $z$  به سمت پایین است. وضعیت وسیله را می‌توان به کمک زوایای اوپلر، ماتریس انتقال یا کواترنیون نمایش داد. معادله‌ی دیفرانسیل مربوط به کواترنیون عبارت است از:<sup>[۱۷]</sup>

$$\dot{q}_b^i = \omega_{ib}^i * p_{ib}^b \quad (۱)$$

که در آن، کواترنیونی برای انتقال از چارچوب بدنی به چارچوب اینرسی، و  $*$  نشانه‌ی ضرب کواترنیون‌هاست. همچنین بردار  $p_{ib}^b$  برابر با  $[\omega_{ib}^b]^T$  و نیز  $\omega_{ib}^b$  بردار سرعت زاویه‌ی جسم نسبت به محور اینرسی در دستگاه بدنی است و به صورت  $[\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T = \omega_{ib}^b$  به مؤلفه‌های تجزیه می‌شود. در این نوشتار، خروجی ژيروسکوپ‌ها  $\omega_{ib}^b$  مطابق رابطه‌ی ۲ مدل‌سازی می‌شود:

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ib}^b - \epsilon_c^b - \epsilon_r^b \quad (۲)$$

که در آن،  $\epsilon_c^b = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z]^T$  و  $\epsilon_r^b = [w_{gx} \ w_{gy} \ w_{gz}]^T$  به ترتیب نمایان‌گر بایاس و نویز سنجش ژيروسکوپ‌هاست. بردار  $q_b^i$  کواترنیون تبدیل بین دستگاه‌های بدنی و اینرسی است و مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از:

$$q_b^i = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (۳)$$

معادلات دیفرانسیل مربوط به سرعت و موقعیت در سیستم ناوبری اینرسی عبارت است از:<sup>[۱۷]</sup>

$$\dot{v}^i = C_b^i f^b + g^i \quad (۴)$$

$$\dot{r}^i = v^i \quad (۵)$$

$C_b^i$  ماتریس انتقالی است که از کواترنیون  $q_b^i$  حاصل می‌شود:

$$C_b^i = \begin{bmatrix} (q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 - q_4^2) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) \\ 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & (q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 - q_4^2) & 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) \\ 2(q_2 q_4 - q_1 q_3) & 2(q_2 q_4 + q_1 q_3) & (q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2) \end{bmatrix} \quad (۶)$$

همچنین  $f^b$  نیروی مخصوص وارد شده بر وسیله است و ارتباط آن با خروجی شتاب‌سنج‌ها  $\tilde{f}^b$  در این نوشتار چنین است:

$$f^b = \tilde{f}^b - b - w_a \quad (۷)$$

ناوبری سماوی می‌تواند به کمک رصد ستارگان توسط ستاره‌نگر، وضعیت وسیله را نسبت به دستگاه اینرسی با دقت زیادی بسنجد؛ اگرچه این سنجش همراه با نویز است. با تلفیق سیستم‌های ناوبری اینرسی و سماوی می‌توان وضعیت کنونی وسیله و همچنین بایاس ژيروسکوپ‌ها را به‌طور دقیق تخمین زد. بدین منظور، محققین پس از خطی‌سازی معادلات وضعیت،<sup>[۹]</sup> سیستم‌های ناوبری اینرسی و سماوی را به کمک فیلتر ذرات درجه دوم تلفیق کرده‌اند. در نتیجه، وضعیت وسیله با دقت زیاد برآورد می‌شود و نرخ افزایش خطای سرعت به شدت کاهش می‌یابد؛ پس از آن نرخ افزایش خطای موقعیت کم می‌شود. با این وجود، معادلات خطی‌شده به اندازه‌ی معادلات اصلی دقیق نیستند. افزون بر این، به علت خطای اولیه‌ی وضعیت و خطای سنجش حس‌گرهای اینرسی، در آغاز تلفیق خطای سرعت و موقعیت زیادی وجود دارد که با تلفیق، قابل تخمین و جبران نیستند. به منظور جبران این خطا، محققین خطی‌سازی معادلات ناوبری و ماتریس انتقال<sup>۸</sup> را به کار گرفتند.<sup>[۱۰]</sup> همچنین راهکاری برای تخمین بایاس شتاب‌سنج‌ها پس از خاموش شدن موتور ارائه شده است. اگرچه بدین ترتیب خطای ناوبری کاهش می‌یابد، اما خطای خطی‌سازی همچنان وجود دارد. در بررسی‌های بعدی معادلات خطای کانال‌های موقعیت استخراج شده<sup>[۱۱]</sup> و سهم خطای هر یک از حس‌گرهای اینرسی در خطای موقعیت مطالعه شده است. در ادامه به کمک وضعیت و موقعیتی که به کمک حس‌گر ستاره‌نگر حاصل می‌شود، و بازنویسی معادلات ناوبری اینرسی با کمک داده وضعیت، خطای تخمین در کانال ارتفاع کاهش یافته است. حاصل تلفیق سیستم‌های ناوبری اینرسی و سماوی با سامانه‌ی موقعیت‌یاب جهانی (GPS)، یک سیستم دقیق ناوبری برای تخمین موقعیت، سرعت و وضعیت است.<sup>[۱۲]</sup> با این وجود، از آنجا که GPS همیشه در دسترس نیست و همچنین داده‌های آن بعضاً خطای عمدی دارد، این سیستم آسیب‌پذیر است.

در این نوشتار، به منظور دست‌یابی به دقت بیشتر، از معادلات غیرخطی به عنوان معادلات سیستم تلفیقی استفاده شده است. از سوی دیگر، در سیستم ناوبری تلفیقی اینرسی/سماوی فقط وضعیت و بایاس ژيروسکوپ‌ها مشاهده‌پذیرند. به منظور کاهش حجم محاسبات، در تلفیق فقط از معادلات ناوبری وضعیت استفاده شده، و لذا بردار حالت<sup>۹</sup> فقط شامل وضعیت و بایاس ژيروسکوپ‌هاست. برای تلفیق از فیلتر کالمن درجه دوم (UKF) استفاده شده است، زیرا از فیلتر کالمن توسعه‌یافته<sup>۱۰</sup> دقیق‌تر بوده<sup>[۱۱]</sup> و نیز از فیلتر ذرات درجه دوم هزینه‌ی محاسباتی کم‌تری دارد. از سوی دیگر حل معادلات ناوبری با دقت زیاد ضرورت دارد و بدین منظور از الگوریتم انتگرال‌گیری دیجیتال<sup>[۱۵]</sup> در حل معادلات استفاده شده است. افزون بر این، به منظور کاهش هزینه‌ی محاسبات و پرهیز از تکینگی، در تمامی مراحل ناوبری و تلفیق از کواترنیون‌ها استفاده شده است. از آنجا که کواترنیون‌ها فضای برداری خاص خود را دارند، در تلفیق تمهیدات خاصی لحاظ شده است. چنان‌که پیش‌تر عنوان شد، در آغاز تلفیق ناوبری اینرسی و سماوی با خطای سرعت و موقعیت زیادی مواجهیم که با تلفیق از میان نمی‌رود. برای جبران این خطا، در نوشتار حاضر وضعیت اولیه به کمک پس‌روی و هموارسازی تخمین زده شده است. همچنین روشی برای تخمین بایاس شتاب‌سنج‌ها در هر دو مرحله‌ی پرواز تحت نیرو<sup>۱۱</sup> و پرواز آزاد<sup>۱۲</sup> ارائه شده است. در ادامه بر پایه‌ی وضعیت اولیه و بایاس تخمینی، یک ناوبری جدید و دقیق به موازات ناوبری جاری صورت می‌گیرد و داده‌های سرعت و موقعیت ناوبری جدید، جایگزین داده‌های مربوط به ناوبری جاری می‌شود. در تمامی مراحل ناوبری، از تخمین مستقیم و معکوس کواترنیون‌ها برای حل معادلات وضعیت استفاده شده است. به این ترتیب هیچ عبارت سینوس و کسینوس در کل سیستم ناوبری ظاهر نمی‌شود و بار محاسباتی ناشی از محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای اوپلر به سیستم تحمیل نمی‌شود.

که در آن،  $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$  نمایانگر بایاس و  $\mathbf{w}_a = [w_{ax} \ w_{ay} \ w_{az}]^T$  نوز سنجش شتاب سنج‌هاست. در معادله ۴،  $\mathbf{g}^i$  معرف بردار جاذبه در چارچوب اینرسی است که در اینجا برای محاسبه‌ی آن از مدل J۲ استفاده شده است.<sup>[۱۶]</sup>

استفاده از روش‌هایی مانند اوپلر و رانج‌کوتا در طی گنسته‌سازی و حل معادلات ناوبری -- حتی اگر شرایط اولیه و سنجش حس‌گرهای اینرسی دقیق باشند -- با بروز خطاهای زیادی همراه است. به منظور حل دقیق معادلات ناوبری و نزدیک بودن نتایج حل به نتایج انتگرال‌گیری پیوسته‌ی معادلات ناوبری، از الگوریتم انتگرال‌گیری دیجیتال<sup>[۱۵]</sup>، در گنسته‌سازی و حل معادلات ناوبری استفاده شده است. نوز زاویه<sup>۱۶</sup> و نوز سرعت<sup>۱۷</sup> مطابق روابط ۸ و ۹ محاسبه می‌شود:

$$\Delta \mathbf{v}_{g,k}^i = \mathbf{g}_{k-\frac{1}{2}}^i \Delta t \quad (17)$$

موقعیت عبارت است از:

$$\mathbf{r}_{k-\frac{1}{2}}^i = \mathbf{r}_k^i + \frac{1}{2} \mathbf{v}_{k-1}^i \Delta t \quad (18)$$

موقعیت وسیله نیز چنین منتشر می‌شود:

$$\mathbf{r}_k^i = \mathbf{r}_{k-1}^i + \mathbf{v}_{k-1/2}^i \Delta t \quad (19)$$

که در آن بردار  $\mathbf{v}_{k-1/2}^i$  عبارت است از:

$$\mathbf{v}_{k-1/2}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_k^i + \mathbf{v}_{k-1}^i) \quad (20)$$

موقعیت ستارگان در چارچوب اینرسی را می‌توان ثابت در نظر گرفت. از طرف دیگر، یک ستاره‌نگر می‌تواند وضعیت خود نسبت به ستارگان به‌کمک رصد حداقل سه ستاره و استفاده از جدول ستارگان<sup>۱۸</sup> بسنجد.<sup>[۱۸]</sup> بنابراین اگر وضعیت نصب ستاره‌نگر بر وسیله معلوم باشد، می‌توان وضعیت وسیله را نسبت به چارچوب اینرسی محاسبه کرد. هرچه تعداد ستارگان رصد شده بیشتر باشد، سنجش وضعیت دقیق‌تر خواهد بود. با تلفیق وضعیت سنجیده شده با محاسبات سیستم ناوبری اینرسی می‌توان وضعیت و بایاس ژيروسکوپ‌ها را با دقت زیادی تخمین زد. با توجه به معادله ۴، خطای وضعیت نقش مهمی در ایجاد خطای سرعت و به تبع آن خطای موقعیت دارد. بنابراین، با تخمین دقیق وضعیت شاهد کاهش چشمگیر نرخ افزایش خطای سرعت خواهیم بود.

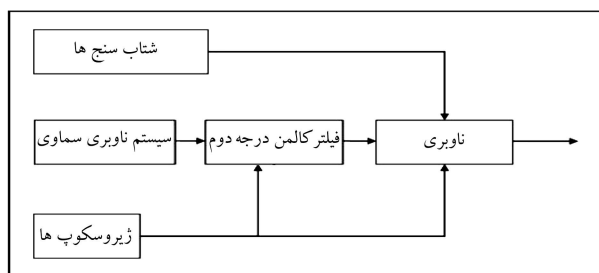
در این نوشتار از فیلتر کالمن درجه دوم در تلفیق ناوبری اینرسی و سماوی استفاده شده است (شکل ۱). مدل گنسته‌ی فضای حالت سیستم غیرخطی مورد مطالعه عبارت است از:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k, \mathbf{u}_k) \quad (21)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) \quad (22)$$

که در آن  $\mathbf{x}$  بردار حالت سیستم،  $\mathbf{w}$  نوز فرایند<sup>۱۹</sup>،  $\mathbf{v}$  نوز سنجش<sup>۲۰</sup>،  $\mathbf{u}$  ورودی، و  $\mathbf{y}$  بردار مشاهدات است. در سیستم مورد مطالعه‌ی این نوشتار، معادله ۲۲ را می‌توان ساده کرد به:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{q}(\mathbf{v}_k) * (\mathbf{H} \mathbf{x}_k) \quad (23)$$



شکل ۱. تلفیق سیستم‌های ناوبری اینرسی و سماوی به وسیله‌ی فیلتر کالمن درجه دوم.

که در آن،  $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$  نمایانگر بایاس و  $\mathbf{w}_a = [w_{ax} \ w_{ay} \ w_{az}]^T$  نوز سنجش شتاب سنج‌هاست. در معادله ۴،  $\mathbf{g}^i$  معرف بردار جاذبه در چارچوب اینرسی است که در اینجا برای محاسبه‌ی آن از مدل J۲ استفاده شده است.<sup>[۱۶]</sup>

$$\Delta \theta_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega_{ib}^b dt \approx \frac{\omega_{ib}^b(k) + \omega_{ib}^b(k-1)}{2} (t_k - t_{k-1}) \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^b = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}^b dt \approx \frac{\mathbf{f}^b(k) + \mathbf{f}^b(k-1)}{2} (t_k - t_{k-1}) \quad (9)$$

کواترنیون وضعیت چنین به‌روز می‌شود:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^i = \mathbf{q}_{b(k-1)}^i * \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (10)$$

که  $\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)}$  کواترنیون حل معادلات وضعیت است و مطابق رابطه ۱۱ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos(\|\delta \varphi_k\|) \\ \frac{\sin(\|\delta \varphi_k\|)}{\|\varphi_k\|} (\varphi_k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

و در آن  $\varphi_k$  بردار چرخش از چارچوب بدنی در زمان  $t_k$  به چارچوب بدنی در زمان  $k+1$  است و این‌گونه محاسبه می‌شود:<sup>[۸]</sup>

$$\varphi_k \approx \Delta \theta_k + \frac{1}{12} \Delta \theta_{k-1} \times \Delta \theta_k \quad (12)$$

به دلیل زیاد بودن نرخ به روزرسانی داده ژيروسکوپ‌ها، می‌توان به جای محاسبه‌ی سینوس و کسینوس زاویه‌ی چرخش  $\varphi_k$ ، که هزینه‌ی محاسباتی دارد، چند عبارت محدود از بسط تیلور را محاسبه کرد. در این نوشتار تنها از سه جمله‌ی اول بسط تیلور سینوس و کسینوس استفاده شده است. بنابراین رابطه‌ی ۱۱ تبدیل خواهد شد به:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\|\delta \varphi_k\|^2}{2} + \frac{\|\delta \varphi_k\|^4}{24} \\ \frac{\|\delta \varphi_k\|}{2} \left( \frac{\|\delta \varphi_k\|^2}{6} - \frac{\|\delta \varphi_k\|^4}{120} \right) \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \end{bmatrix} \quad (13)$$

معادله‌ی سرعت نیز مطابق رابطه‌ی ۱۴ منتشر می‌شود:<sup>[۱۴]</sup>

$$\mathbf{v}_k^i = \mathbf{v}_{k-1}^i + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^i + \Delta \mathbf{v}_{g,k}^i \quad (14)$$

که در آن  $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^i$  نمایانگر نوز سرعت بر اثر نیروی مخصوص و  $\Delta \mathbf{v}_{g,k}^i$  نمایانگر نوز سرعت بر اثر نیروی جاذبه است. نوز بر اثر نیروی مخصوص مطابق رابطه‌ی ۱۵ محاسبه می‌شود:<sup>[۱۵]</sup>

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^i = \mathbf{C}_{b(k-1)}^i \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (15)$$

ماتریس انتقال  $\mathbf{C}_{b(k-1)}^i$  از کواترنیون  $\mathbf{q}_{b(k-1)}^i$  حاصل می‌شود. همچنین از رابطه‌ی ۱۶ محاسبه می‌شود:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_{b(k)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^b dt \approx \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{2} \Delta \theta_k \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{12} (\Delta \theta_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \theta_k) \quad (16)$$

در این نوشتار،  $\mathbf{x}$ ،  $\mathbf{u}$ ،  $\mathbf{w}$ ،  $\boldsymbol{\nu}$  و  $\mathbf{H}$  چنین تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{x} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\mathbf{u} = [\tilde{\omega}_x \ \tilde{\omega}_y \ \tilde{\omega}_z]^T \quad (25)$$

$$\mathbf{w} = [w_{gx} \ w_{gy} \ w_{gz}]^T \quad (26)$$

$$\boldsymbol{\nu} = [\nu_x \ \nu_y \ \nu_z]^T \quad (27)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

که  $\mathbf{u}$  و  $\mathbf{w}$  به ترتیب خروجی و نویز اندازه‌گیری ژيروسکوپ‌ها، و بردار چرخش  $\boldsymbol{\nu}$  نویز اندازه‌گیری حساسه‌ی ستاره‌نگر است. فرض بر این است که نویزهای فرایند و سنجش، مستقل از هم، سفید و دارای توزیع گاوسی هستند. بردار  $\mathbf{q}(\boldsymbol{\nu})$  کوآرتزیون معادل با بردار چرخش  $\boldsymbol{\nu}$  است. همچنین در این نوشتار تابع  $\mathbf{f}$  مطابق روابط ۱۰، ۱۲ و ۱۳ محاسبه می‌شود.

در فیلتر کالمن درجه دوم، با استفاده از یک مجموعه نقاط سیگما<sup>۲۱</sup>، میانگین و کواریانس حالت‌ها تقریب زده می‌شوند. با حل معادلات سیستم این نقاط به‌وسیله‌ی معادله‌ی سیستم غیرخطی، میانگین و کواریانس پسین با دقت درجه سوم بسط تیلور حاصل می‌شود.<sup>[۱۲]</sup> اگرچه فیلتر کالمن درجه دوم و فیلتر کالمن توسعه‌یافته (EKF) از نظر پیچیدگی در یک محدودند، عموماً دقت UKF بیش‌تر از EKF است.<sup>[۱۲]</sup> در ادامه نحوه‌ی عملکرد UKF توضیح داده شده است.<sup>[۱۹]</sup>

۱. مقداردهی اولیه: در این مرحله بردار حالت، ماتریس کواریانس، بردار حالت رشدیافته<sup>۲۲</sup> و ماتریس کواریانس رشدیافته<sup>۲۳</sup> مطابق رابطه‌ی ۲۹ مقداردهی اولیه می‌شوند.

$$\hat{\mathbf{x}}_0^a = [\hat{\mathbf{x}}_0^T \ \mathbf{0}]^T \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_0^a = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}$$

که در آن  $\hat{\mathbf{x}}_0^a$  حدس اولیه‌ی بردار حالت، و  $\mathbf{P}_0^a$  ماتریس اولیه کواریانس است که با توجه به عدم قطعیت بردار  $\hat{\mathbf{x}}_0^a$  تعیین می‌شود. بردار  $\hat{\mathbf{x}}_0^a$  بردار حالت رشدیافته و  $\mathbf{P}_0^a$  ماتریس کواریانس رشدیافته است. همچنین  $\mathbf{Q}$  ماتریس کواریانس نویز فرایند است.

۲. تولید نقاط سیگما: در این مرحله، با استفاده از  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a$  و  $\mathbf{P}_{k-1}^a$  نقاط سیگما تولید می‌شود. ابتدا بردار  $\Delta \mathbf{x}$  مطابق رابطه‌ی ۳۰ تعریف می‌شود:

$$\Delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}' \\ \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{x}^w \end{bmatrix} \quad (30)$$

بردار چرخش  $\boldsymbol{\varphi}'$  و بردارهای  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  و  $\mathbf{x}^w$  به ترتیب به‌منظور ایجاد نقاط سیگمای مربوط به تخمین وضعیت، بایاس ژيروسکوپ‌ها و نویز فرایند حول تخمین کنونی در هر گام زمانی به‌کار می‌روند و چنین محاسبه می‌شوند:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{x}_{k-1}^i &= \gamma(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a})_i \\ \Delta \mathbf{x}_{k-1}^{i+L} &= -\gamma(\sqrt{\mathbf{P}_{k-1}^a})_i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (31)$$

$L$  بعد ماتریس  $\mathbf{P}$  و در سیستم مورد مطالعه برابر ۶ است. همچنین  $\gamma$  مطابق رابطه‌ی ۳۲ محاسبه می‌شود:

$$\gamma = \sqrt{L + \lambda} \quad (32)$$

که در آن  $\lambda$  یک عامل تناسب<sup>۲۴</sup> است و عبارت است از:

$$\lambda = \alpha^r (L + \kappa) - L \quad (33)$$

مقدار ثابت  $\alpha$  نحوه‌ی پخش نقاط سیگما را معین می‌کند و معمولاً در بازه ۰٫۰۰۱ تا ۱ است. مقدار ثابت  $\kappa$  برای تنظیم و دست‌یابی به دقت بیشتر به کار می‌رود. در نهایت نقاط سیگما مطابق رابطه‌ی ۳۴ محاسبه می‌شوند:

$$\mathbf{x}_{k-1}^{a(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^a$$

$$\mathbf{x}_{k-1}^{w(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\boldsymbol{\varphi}_{k-1}^i) * \mathbf{q}_{k-1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k-1}^i \\ \mathbf{x}_k^{w(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 2L \quad (34)$$

۳. به‌روزرسانی زمان: در این مرحله، نقاط سیگما به‌وسیله‌ی تابع سیستم و مدل سنجش پردازش می‌شود:

$$\mathbf{x}_k^{x(i)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}^{x(i)}, \mathbf{x}_{k-1}^{w(i)}, \mathbf{u}_k) \quad (35)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k^i = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^{x(i)}) \quad (36)$$

$\mathbf{x}_k^{x(i)}$  برداری است که از  $n$  عضو اول بردار  $\mathbf{x}_k^{a(i)}$  حاصل می‌شود؛  $n$  طول بردار حالت و در سیستم مورد مطالعه برابر ۷ است. همچنین  $\mathbf{x}_{k-1}^{w(i)}$  برداری است که از  $q$  عضو بعدی ساخته می‌شود؛  $q$  طول بردار  $\mathbf{w}_k$  است. ابتدا بردار میانگین بردارهای حالت پیش‌بینی شده محاسبه می‌شود. از آنجا که بردارهای مربوط به پیش‌بینی کوآرتزیون‌های وضعیت، فضای برداری مختص به خود را دارند، در میانگین‌گیری آن‌ها باید تمهیدات خاصی لحاظ شود. ابتدا بردار  $\mathbf{x}_k^{x(i)}$  مطابق رابطه‌ی ۳۷ تجزیه می‌شود:

$$\mathbf{x}_k^{x(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{q(i)} \\ \mathbf{x}_k^{\boldsymbol{\varepsilon}(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 2L \quad (37)$$

به‌طور کلی اگر میانگین‌گیری از کوآرتزیون‌های دلخواه  $i = 0, 1, \dots, p-1$  مد نظر باشد می‌توان از الگوریتم زیر استفاده کرد:<sup>[۲۰]</sup>

۱.۳. یکی از کوآرتزیون‌ها به‌عنوان میانگین انتخاب و  $\bar{\mathbf{q}}$  نمایش داده می‌شود.

۲.۳. بردار کوآرتزیون اختلاف وضعیت هر کوآرتزیون با  $\bar{\mathbf{q}}$  به کمک رابطه‌ی  $\mathbf{q}_{\phi,i} = \mathbf{q}_i * \bar{\mathbf{q}}^{-1}$  محاسبه می‌شود.

۳.۳. بردارهای  $\mathbf{q}_{\phi,i}$  به بردار چرخش معادل‌شان  $(\boldsymbol{\varphi}_i)$  تبدیل می‌شود. به‌طور کلی، بردار چرخش معادل یک کوآرتزیون از رابطه‌ی ۳۸ حاصل می‌شود:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{q}) = \frac{1}{f} [q_2 \ q_3 \ q_4]^T$$

$$f = \frac{\sin \|\boldsymbol{\varphi}\|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|} \approx \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|^2}{3!} + \frac{\|\boldsymbol{\varphi}\|^4}{5!} \right)$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}\| = \frac{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}}{q_1} \quad (38)$$

۴. به روزرسانی اندازه‌گیری: در این مرحله، ماتریس نوآوری<sup>۲۶</sup> و ماتریس اصلاح ضربدوری<sup>۲۷</sup> با استفاده از بردار سنجش محاسبه می‌شود:

$$P_k^{e_y e_y} = \sum_{i=0}^{L} W_i^{cov} [\delta y_k^i] [\delta y_k^i]^T + R \quad (45)$$

$$P_k^{e_x e_y} = \sum_{i=0}^{L} W_i^{cov} [\delta x_k^i] [\delta y_k^i]^T \quad (46)$$

که در آن  $R$  کواریانس نویز اندازه‌گیری است و بردار  $\delta y_k^i$  عبارت است از:

$$\delta y_k^i = \varphi(\gamma_k^i * (\hat{y}_k^-)^{-1}) \quad (47)$$

با استفاده از این دو ماتریس، بهره‌ی کاملن<sup>۲۸</sup> محاسبه می‌شود:

$$K_k = P_k^{e_x e_y} (P_k^{e_y e_y})^{-1} \quad (48)$$

حال بردار اصلاح به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$c_k = K_k \varphi(y_k * (\hat{y}_k^-)^{-1}) \quad (49)$$

که سه عضو اول بردار  $c$  مربوط به اصلاح وضعیت است و با  $c_k^\phi$  نشان داده می‌شود؛ سه عضو بعدی مربوط به اصلاح تخمین بایاس ژيروسکوپ‌هاست و با  $c_k^\varepsilon$  نمایش داده می‌شود. در نهایت بردار حالت و کواریانس آن مطابق رابطه‌های ۵۰ و ۵۱ به روزرسانی می‌شوند:

$$\hat{x}_k^+ = \begin{bmatrix} q(c_k^\phi * \hat{q}_k^-) \\ \hat{\varepsilon}_k^- + c_k^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$P_k^+ = P_k^- - K_k P_k^{e_y e_y} K_k^T \quad (51)$$

### ۳. جبران خطای سرعت و موقعیت

با به‌کارگیری تلفیق مستقیم، که عملکرد کلی آن در شکل ۱ تشریح شد، وضعیت کنونی وسیله و بایاس ژيروسکوپ‌ها به دقت تخمین زده می‌شود. با این وجود، به دلیل خطای اولیه‌ی وضعیت، بایاس شتاب‌سنج‌ها و همچنین بایاس ژيروسکوپ‌ها که تا رسیدن وسیله به ارتفاع مناسب قابل تخمین نیست، در لحظه‌ی آغاز تلفیق خطای زیادی در محاسبه‌ی سرعت و موقعیت وجود دارد که مشاهده‌پذیر نیست. بنابراین، این خطا به روش تلفیق مستقیم قابل جبران نیست. بنابراین در این نوشتار با به‌کارگیری پس‌روی و هموارسازی، وضعیت اولیه تخمین زده می‌شود، و نیز روشی نوین برای تخمین بایاس شتاب‌سنج‌ها ارائه شده است. در ادامه به شرح موارد پیش‌گفته می‌پردازیم.

در روش ارائه‌شده، خروجی ژيروسکوپ‌ها در هر گام زمانی ضبط می‌شود. با حل معادلات ناوبری وضعیت در جهت عکس و جبران بایاس ژيروسکوپ‌ها که در تلفیق مستقیم تخمین زده می‌شود، می‌توان وضعیت اولیه را تخمین زد. در پس‌روی نیز از الگوریتم انتگرال‌گیری دیجیتال استفاده شده است. پس‌روی وضعیت چنین صورت می‌گیرد:

$$q_{b(k-1)}^i = q_{b(k)}^i * q_{b(k-1)}^{b(k)} \quad (52)$$

۴.۳. میانگین وزنی بردارهای چرخش به کمک رابطه‌ی  $\varphi_i = \sum_{i=0}^{p-1} W_i^{mean} \varphi_i$  محاسبه می‌شود. نحوه‌ی محاسبه‌ی  $W_i^{mean}$  در ادامه (رابطه‌ی ۴۴) آمده است.

۵.۳. کواریانس معادل بردار چرخش  $\bar{q}$  محاسبه و با  $q_\phi$  نمایش داده می‌شود.

۶.۳. کواریانس میانگین به وسیله‌ی رابطه‌ی  $\bar{q} := q_\phi * \bar{q}$  محاسبه می‌شود.

۷.۳. گام‌های ۲ تا ۶ تا رسیدن  $\|\bar{q}\|$  به دقت مورد نظر تکرار می‌شود.

با استفاده از الگوریتمی که توضیح داده شد، میانگین کواریانس‌های  $\chi_k^{q(i)}$ ،  $i = 0, 1, 2, \dots, 2L$  محاسبه می‌شود. میانگین بردارهای  $\chi_k^{\varepsilon(i)}$ ،  $i = 0, 1, 2, \dots, 2L$  مطابق رابطه‌ی ۳۹ محاسبه می‌شود:

$$\hat{\varepsilon}_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{mean} \chi_k^{\varepsilon(i)} \quad (39)$$

در نهایت، میانگین بردارهای حالت پیش‌بینی شده از رابطه‌ی ۴۰ به دست می‌آید:

$$\hat{x}_k^- = \begin{bmatrix} \hat{q}_k^- \\ \hat{\varepsilon}_k^- \end{bmatrix} \quad (40)$$

در ادامه، اختلاف هریک از بردارهای پیش‌بینی شده ( $\chi_k^{x(i)}$ ) و میانگین آن‌ها ( $\hat{x}_k^-$ ) با  $\delta x_k^i$  نمایش داده می‌شود. مؤلفه‌های این بردار عبارت‌اند از:

$$\delta x_k^i = \begin{bmatrix} \varphi''^i_k \\ \delta \varepsilon_k^i \end{bmatrix} \quad (41)$$

محاسبه‌ی بردارهای  $\varphi''^i_k$  و  $\delta \varepsilon_k^i$  مطابق رابطه‌ی ۴۲ انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi''^i_k &= \varphi(\chi_k^{q(i)} * (\hat{q}_k^-)^{-1}) \\ \delta \varepsilon_k^i &= \chi_k^{\varepsilon(i)} - \hat{\varepsilon}_k^- \end{aligned} \quad (42)$$

که در آن  $\varphi(\chi_k^{q(i)} * (\hat{q}_k^-)^{-1})$  بردار چرخش معادل کواریانس  $\chi_k^{q(i)} * (\hat{q}_k^-)^{-1}$  است. نهایتاً، ماتریس کواریانس پیش‌بینی شده چنین محاسبه می‌شود:

$$P_k^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{cov} (\delta x_k^i) (\delta x_k^i)^T \quad (43)$$

در ادامه با استفاده از الگوریتم شرح داده شده برای میانگین‌گیری از کواریانس‌ها، میانگین کواریانس‌های  $\gamma_k^i$  محاسبه و با  $\hat{y}_k^-$  نمایش داده می‌شود. این بردار که در سیستم مورد مطالعه ۴ عضو دارد، بردار اندازه‌گیری میانگین<sup>۲۵</sup> نام دارد. همچنین وزن‌های  $W_i^{cov}$  و  $W_i^{mean}$  مطابق رابطه‌ی ۴۴ تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} W_i^{mean} &= \frac{\lambda}{L + \lambda} \\ W_i^{cov} &= \frac{\lambda}{L + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta) \\ W_i^{mean} &= W_i^{cov} = \frac{1}{2(L + \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2L \end{aligned} \quad (44)$$

که در آن  $\beta$  به منظور کمینه‌سازی جملات خطای درجه چهارم مربوط به توزیع حالت استفاده می‌شود و برای توزیع گاوسی مقدار ۲ برای آن بهینه است.<sup>[۱۲]</sup>

۲. به روزرسانی زمان: مجموعه نقاط سیگما توسط تابع سیستم معکوس و مدل سنجش منتشر می‌شود: [۲۰]

$$\mathbf{X}_k^{x(i)} = \mathbf{f}_b(\mathbf{X}_{k+1}^{x(i)}, \mathbf{X}_{k+1}^{w(i)}, \mathbf{u}_k) \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_k^i = \mathbf{h}(\mathbf{X}_k^{x(i)}) \quad (57)$$

که در آن  $\mathbf{f}_b$  تابع سیستم معکوس است و از روابط ۱۲، ۵۲ و ۵۴ حاصل می‌شود. بردار میانگین و ماتریس کواریانس مطابق رابطه‌ی ۵۸ و ۵۹ پیش‌بینی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_k^- \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^- \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \sum_{i=0}^{\nu L} W_i^{cov} (\delta \mathbf{x}_k^i) (\delta \mathbf{x}_k^i)^T \quad (59)$$

نحوی محاسبه‌ی بردارهای  $\hat{\mathbf{q}}_k^-$ ،  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^-$  و  $\delta \mathbf{x}_k^i$  در شرح فیلتر مالمن درجه دوم توضیح داده شد. همچنین، بردار اندازه‌گیری میانگین  $(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_k^-)$ ، با میانگین‌گیری از کواریانس‌های  $\boldsymbol{\gamma}_k^i$  مطابق الگوریتم معرفی شده، حاصل می‌شود.

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_k^- = \sum_{i=0}^{\nu L} W_i^{mean} \boldsymbol{\gamma}_k^i \quad (60)$$

۳. به روزرسانی سنجش: در این مرحله ماتریس نوآوری  $\boldsymbol{\nu}^2$  و ماتریس اصلاح ضربدری  $\boldsymbol{\nu}^3$  با استفاده از بردار سنجش محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{P}_k^{\varepsilon_y \varepsilon_y} = \sum_{i=0}^{\nu L} W_i^{cov} [\delta \mathbf{y}_k^i] [\delta \mathbf{y}_k^i]^T + \mathbf{R} \quad (61)$$

$$\mathbf{P}_k^{\varepsilon_x \varepsilon_y} = \sum_{i=0}^{\nu L} W_i^{cov} [\delta \mathbf{x}_k^i] [\delta \mathbf{y}_k^i]^T \quad (62)$$

که در آن بردار  $\delta \mathbf{y}_k^i$  به کمک معادله‌ی ۴۷ محاسبه می‌شود. با استفاده از ماتریس‌های  $\mathbf{P}_k^{\varepsilon_x \varepsilon_y}$  و  $\mathbf{P}_k^{\varepsilon_y \varepsilon_y}$  به محاسبه‌ی بهره‌ی کاملن می‌پردازیم:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{\varepsilon_x \varepsilon_y} (\mathbf{P}_k^{\varepsilon_y \varepsilon_y})^{-1} \quad (63)$$

و در نهایت بردار حالت و کواریانس آن به روزرسانی می‌شود:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\mathbf{c}_k^\phi) * \hat{\mathbf{q}}_k^- \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^- + \mathbf{c}_k^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_k^{\varepsilon_y \varepsilon_y} \mathbf{K}_k^T \quad (65)$$

بردارهای  $\mathbf{c}_k^\varepsilon$  و  $\mathbf{c}_k^\phi$  به کمک رابطه‌ی ۴۹ حاصل می‌شود.

از آنجا که در پرواز آزاد، فقط نیروی جاذبه بروسیله وارد می‌شود، با میانگین‌گیری از خروجی شتاب‌سنج‌ها می‌توان بایاس شتاب‌سنج‌ها را تخمین زد. در این نوشتار روشی ارائه شده که می‌توان به وسیله‌ی آن بایاس شتاب‌سنج‌ها در مرحله‌ی پرواز تحت پیش‌رانش را نیز به دقت تخمین زد و به کمک آن دقت ناوبری را در مرحله‌ی پرواز تحت پیش‌رانش نیز افزایش داد. موقعیت وسیله لحظاتی پیش از برخاست با دقت بسیار زیادی مشخص است. از آنجا که در این لحظات ماهواره‌بر نسبت به زمین ثابت است، نیروی مخصوص وارده بروسیله در لحظات پیش از پرتاب به کمک بردار موقعیت محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{f}_{k'}^i = \boldsymbol{\omega}_{ie}^i \times (\boldsymbol{\omega}_{ie}^i \times \mathbf{r}_{k'}^i) - \mathbf{g}_{k'}^i, \quad k' = 1, 2, \dots, N \quad (66)$$

که در آن  $\mathbf{q}_{b(k-1)}^{b(k)}$  کواریانس انتقال مرتبط با پسروی در هر گام زمانی است و چنین محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{q}_{b(k-1)}^{b(k)} = \begin{bmatrix} \cos(\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|) \\ -\frac{\sin(\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|)}{\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|} (\boldsymbol{\omega}_{\phi k}) \end{bmatrix} \quad (53)$$

که در آن  $\boldsymbol{\omega}_{\phi k}$  از رابطه‌ی ۱۲ حاصل می‌شود. به منظور کاهش بار محاسباتی، رابطه‌ی ۵۳ چنین ساده می‌شود:

$$\mathbf{q}_{b(k-1)}^{b(k)} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|^2}{2} + \frac{\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|^4}{24} \\ -(\frac{\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|}{6} + \frac{\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|^3}{120}) \frac{\boldsymbol{\omega}_{\phi k}}{\|\boldsymbol{\omega}_{\phi k}\|} \end{bmatrix} \quad (54)$$

از آنجا که تخمین وضعیت و بایاس زیرسکوپ‌ها در تلفیق مستقیم چندان دقیق نیست، اگر پسروی بدون فیلتر صورت گیرد تخمین وضعیت اولیه همراه با خطای زیادی است. بنابراین در حین تلفیق مستقیم خروجی ستاره‌نگر ضبط و در طی پسروی مجدداً برای فیلتر کردن مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ این روند را «هموارسازی» می‌نامند.

هموارسازی زمانی به کار می‌رود که اصلاح یک تخمین در زمان گذشته با استفاده از سنجش کنونی مطلوب باشد. [۲۱] هموارسازی به سه دسته‌ی بازه ثابت ۲۹، نقطه ثابت ۳۰ و تأخیر ثابت ۳۱ تقسیم می‌شود. [۲۲]

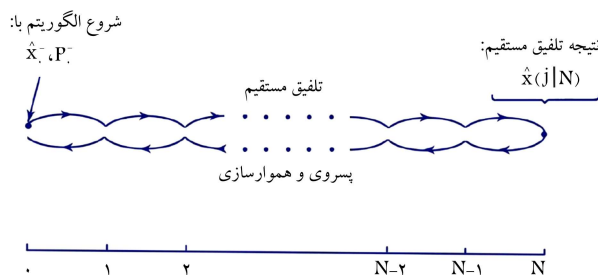
در هموارسازی بازه ثابت، کل یا بخشی از یک بازه به صورت بهینه تخمین زده می‌شود. در شکل ۲ فرایند هموارسازی بازه ثابت نشان داده شده است. با به کارگیری هموارسازی بازه ثابت، علاوه بروضعیت نقطه‌ی شروع به کار سیستم ناوبری سماوی، وضعیت وسیله در کل بازه‌ی که در آن پسروی و تلفیق صورت گرفته، به صورت بهینه تخمین زده می‌شود. بنابراین، در این نوشتار از هموارسازی بازه ثابت استفاده شده است. در این نوع هموارسازی، تلفیق در جهت معکوس مورد نیاز است که روندی مشابه تلفیق در جهت مستقیم دارد.

در تلفیق معکوس نیازی به مقداردهی اولیه نیست، زیرا هموارسازی از نقطه‌ی آغاز می‌شود که بردار حالت و ماتریس کواریانس آن به روش تلفیق مستقیم تخمین زده شده است. روند تلفیق در جهت عکس به این ترتیب است:

۱. محاسبه‌ی نقاط سیگما: با استفاده از بردار حالت و ماتریس کواریانس نقاط سیگما محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{X}_{k+1}^{a(i)} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^a \quad (55)$$

$$\mathbf{X}_{k+1}^{a(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\boldsymbol{\varphi}'_{k+1}) * \mathbf{q}_{k+1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \\ \mathbf{x}_{k+1}^{w(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, \nu L$$



شکل ۲. فرایند هموارسازی بازه ثابت. [۲۱]

اندیس  $k'$  بیان‌گر گام زمانی پیش از برخاست است؛  $\omega_e^i$  نرخ چرخش زمین،  $r_{k'}^i$  بردار موقعیت و  $g_{k'}^i$  بردار شتاب جاذبه است که همگی در چارچوب اینرسی بیان شده‌اند. چنان که ذکر شد، به‌کمک پسروری و هموارسازی، وضعیت اولیه با دقت زیادی تخمین زده می‌شود. اگر خروجی ژيروسکوپ‌ها در لحظات پیش از پرتاب ضبط شده باشد، با ادامه‌ی پسروری می‌توان وضعیت وسیله را نسبت به چارچوب اینرسی در لحظات پیش از پرتاب نیز به دقت تخمین زد. بنابراین نیروی مخصوص وارد بر وسیله، با دقت زیاد عبارت است از:

$$f_{k'}^b = C_i^{b(k')} f_{k'}^i \quad (67)$$

از سوی دیگر، خروجی شتاب‌سنج‌ها و نیروی مخصوص مطابق رابطه‌ی ۶۸ مرتبط‌اند:

$$\tilde{f}_{k'}^b = f_{k'}^b + b + w_{k'}^a \quad (68)$$

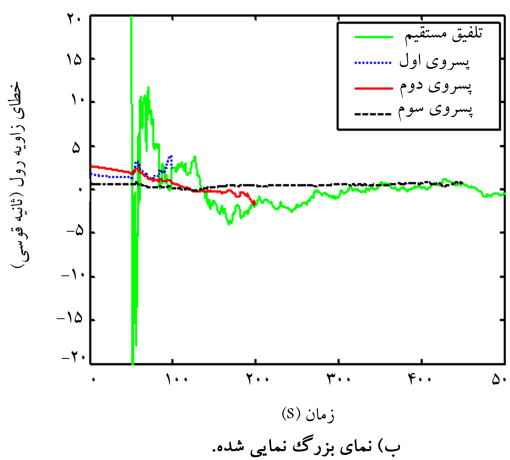
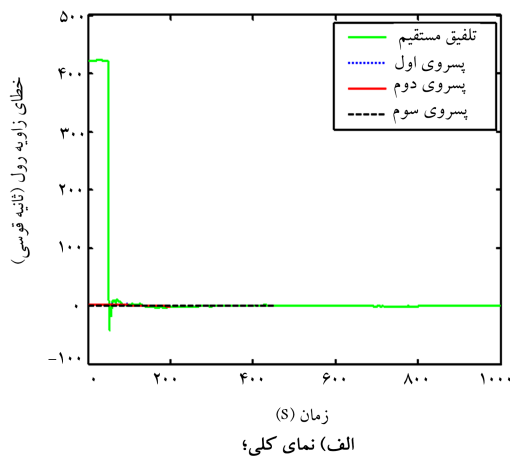
با فرض نویز با میانگین صفر، بایاس شتاب‌سنج‌ها تخمین زده می‌شود:

$$b \approx \frac{1}{n} \sum_{k'=-n}^{-1} (\tilde{f}_{k'}^b - f_{k'}^b) \quad (69)$$

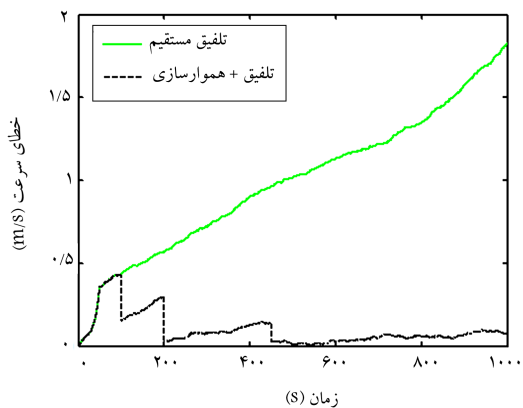
به این ترتیب، وضعیت وسیله در لحظات پیشین و بایاس شتاب‌سنج‌ها با دقت زیاد تخمین زده می‌شوند. با انجام یک ناوبری جدید براساس وضعیت هموار شده‌ی لحظات پیشین و همچنین جبران خطای حس‌گرهای اینرسی، یک ناوبری جدید به موازات ناوبری جاری، برای سرعت و موقعیت صورت می‌گیرد. با رسیدن ناوبری جدید به ناوبری جاری (زمان حال)، داده‌های سرعت و موقعیت ناوبری جدید، که بسیار دقیق‌ترند، جایگزین داده‌های ناوبری جاری می‌شود. به این ترتیب خطای سرعت و موقعیت با دقت زیاد جبران می‌شود.

به‌منظور بررسی عملکرد سیستم ناوبری تلفیقی طراحی شده در نوشتار حاضر، این سیستم برای ناوبری یک ماهواره بر شبیه‌سازی شده است. در این شبیه‌سازی، ماهواره بر یک ماهواره را در مداری دایره‌یی به ارتفاع  $200$  کیلومتر تزریق می‌کند. زاویه‌ی میل مدار صفر است و ماهواره بر از استوا و طول جغرافیایی  $52$  درجه پرتاب و پس از  $437$  ثانیه در مدار تزریق می‌شود؛ مرحله‌ی پرواز با پیش‌رانش نیز همین مقدار به طول می‌انجامد. مدت شبیه‌سازی  $1000$  ثانیه است، و بایاس و خطای تصادفی ژيروسکوپ‌ها به ترتیب  $0.1^\circ/h$  و  $0.5^\circ/h$  است؛ بایاس و خطای تصادفی شتاب‌سنج‌ها به ترتیب  $100 \mu g$  و  $50 \mu g$  اختیار شده، و خطای ستاره‌نگر برابر  $15''$  فرض شده است. خطای تراز اولیه‌ی سیستم ناوبری اینرسی برابر  $15''$  و خطای اولیه‌ی سمت آن  $7'$  است.

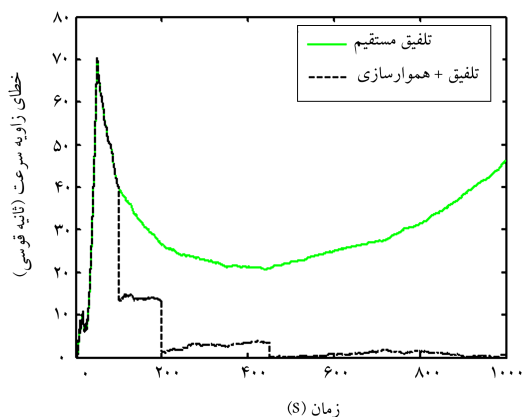
سیستم ناوبری سماوی  $50$  ثانیه پس از پرتاب ماهواره بر شروع به‌کار می‌کند. بنابراین، از لحظه‌ی پرتاب به مدت  $50$  ثانیه، ناوبری اینرسی بدون تلفیق انجام می‌شود. به محض شروع به‌کار سیستم ناوبری سماوی تلفیق مستقیم آغاز می‌شود و وضعیت و بایاس ژيروسکوپ‌ها، مطابق شکل ۱ تخمین زده می‌شود. از ثانیه‌ی  $100$  یک فرایند هموارسازی آغاز می‌شود و به وسیله‌ی آن وضعیت وسیله در لحظه‌ی پرتاب تخمین زده می‌شود. همچنین به‌کمک روش ارائه شده، بایاس شتاب‌سنج‌ها برآورد می‌شود. افزون بر این، طی فرایند هموارسازی وضعیت وسیله در لحظات پیش از  $100$  ثانیه به دقت تخمین زده می‌شود. براساس این داده‌ی وضعیت و همچنین جبران خطای حس‌گرهای اینرسی، یک ناوبری جدید تا نقطه‌ی آغاز هموارسازی صورت می‌گیرد و نتایج مربوط به سرعت و موقعیت ناوبری جدید، جایگزین نتایج ناوبری جاری می‌شود. براساس وضعیت و بایاس ژيروسکوپ تخمینی که از تلفیق



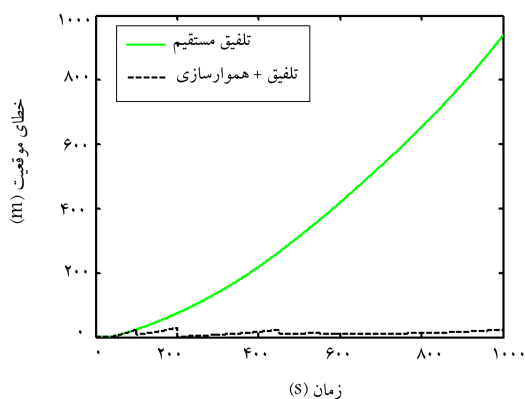
شکل ۳. خطای تخمین زاویه  $\phi$  در تلفیق مستقیم و هموارسازی.



شکل ۶. مقایسه‌ی اندازه اختلاف میان سرعت تخمینی و سرعت واقعی.



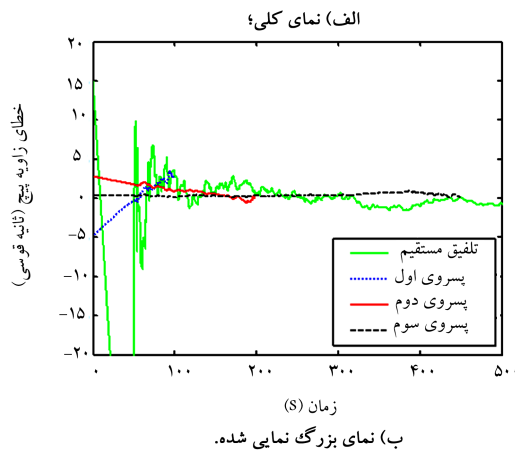
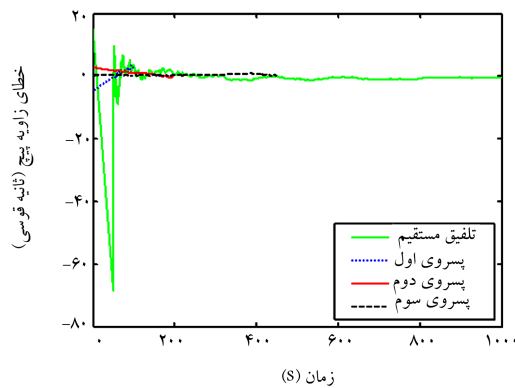
شکل ۷. مقایسه‌ی زاویه‌ی بین سرعت تخمینی و سرعت واقعی.



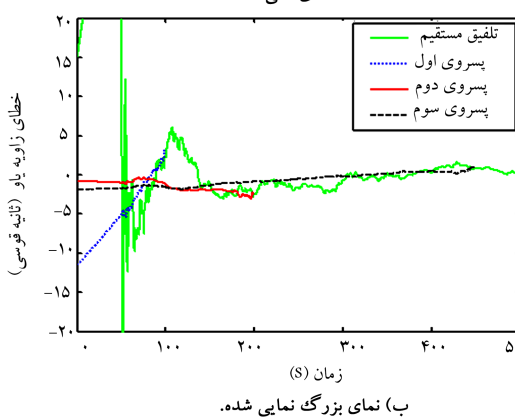
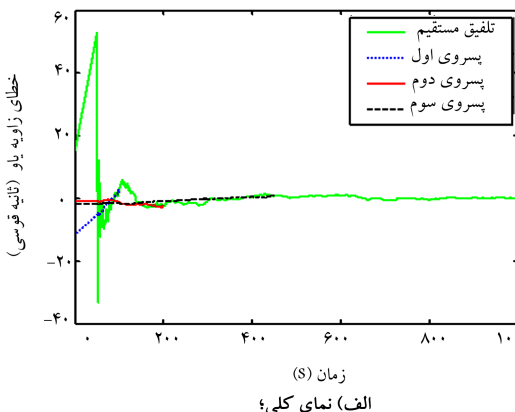
شکل ۸. مقایسه‌ی فاصله‌ی مکان تخمینی از مکان واقعی.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این نوشتار روشی ارائه شد که به کمک آن خطای سرعت و موقعیتی که در هنگام شروع به کار حساسه‌ی ستاره‌نگر در یک سیستم تلفیقی اینرسی سماوی وجود دارد، جبران شود. در مطالعات پیشین<sup>[۹]</sup> علی‌رغم استفاده از UPF و تحمیل بار محاسباتی، خطاهای سرعت و موقعیت جبران نمی‌شود. اما در روش پیشنهادی با به‌کارگیری UKF، که هزینه‌ی محاسباتی کمتری دارد، جبران این خطاها با دقت زیاد میسر شده است. افزون بر این، در نتیجه‌ی



شکل ۴. خطای تخمین زاویه  $\theta$  در تلفیق مستقیم و هموارسازی.



شکل ۵. خطای تخمین زاویه  $\theta$  در تلفیق مستقیم و هموارسازی.



افزون بر این، در مطالعات یادشده از زوایای اوپلر و ماتریس انتقال در ناوبری و تلفیق استفاده شده که این عمل بار محاسباتی را زیاد می‌کند و به علاوه احتمال تکنیکی وجود دارد. در نوشتار حاضر، در تمامی مراحل از کواترانیون‌ها استفاده شده و تمهیدات لازم برای تلفیق لحاظ شده است. در نتیجه هیچ نرم سینوس و کسینوس ظاهر نمی‌شود که این امر موجب کاهش چشمگیر بار محاسباتی می‌شود. از آنجا که در تلفیق مستقیم معکوس از UKF استفاده شده است و در این فیلتر تابع توزیع احتمال به صورت گوسی فرض می‌شود، پیشنهاد می‌شود برای افزایش دقت از فیلترهای پیشرفته‌تری که برای همه توابع توزیع احتمال کاربرد دارد استفاده شود. البته باید بررسی شود که فیلتر جایگزین، هزینه‌ی محاسباتی زیادی تحمیل نکند.

خطی‌سازی دقت تلفیق مستقیم از دقت تلفیق روش ارائه شده از معادلات غیرخطی استفاده می‌کند، کم‌تر است. در یکی از مطالعات دیگر<sup>[۱۰]</sup> با خطی‌سازی معادلات ناوبری و استفاده از ماتریس انتقال سعی در جبران خطاهای سرعت و موقعیت شده است. چنان که گفته شد، روش ارائه شده در مطالعه‌ی مذکور به دلیل استفاده از معادلات غیرخطی، الگوریتم انتگرال‌گیری دیجیتال، پسروی و هموارسازی دقت بیشتری دارد. از سوی دیگر، در این مرجع روشی برای تخمین بایاس شتاب‌سنج‌ها در پرواز آزاد ارائه شده است. اما در نوشتار حاضر روشی ارائه شده که هم در پرواز تحت پیش‌رانش و هم در پرواز آزاد قادر به تخمین بایاس شتاب‌سنج‌هاست.

## پانویس‌ها

1. celestial navigation
2. direct horizon-sensing
3. indirect horizon-sensing
4. unscented Kalman filter
5. inertial measurement unit
6. star sensor
7. unscented particle filter
8. transition matrix
9. state vector
10. extended Kalman filter
11. forced flight
12. free flight
13. inertial mechanization
14. inertial frame
15. body frame
16. incremental angles
17. incremental velocities
18. star catalog
19. process noise
20. measurement noise
21. sigma points
22. augmented state vector
23. augmented covariance matrix
24. scaling factor
25. mean observation
26. innovation matrix
27. cross-correlation matrix
28. Kalman gain
29. fixed-interval
30. fixed-point
31. fixed-lag
32. innovation matrix
33. cross-correlation matrix

## منابع (References)

1. Long, A.C., Leung, D., Folta, D. and Gramling, C. "Autonomous navigation of high-Earth satellites using celestial objects and Doppler measurements", *In Proceedings of AIAA/AAS Astrodynamics Specialist* (2000).
2. White, R.L. and Gounley, R.B. "Satellite autonomous navigation with SHAD", The Charles Stark Draper Laboratory (April 1987).
3. Lillestrand, R.L. and Carroll J.E. "Horizon-based satellite navigation system", *IEEE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics*, **9**(1), pp. 127-131 (1964).
4. Xinlong, W. and Shan, M. "A celestial analytic positioning method by stellar horizon atmospheric refraction", *Chinese Journal of Aeronautics*, **22**(3), pp. 293-300 (2009).
5. Riant, P. "Analysis of a satellite navigation system by stellar refraction", in: *36th Congress of the International Astronautical Federation*, Stockholm, Sweden, pp. 1-8 (7-12 October 1986).
6. Gounley, R., White, R. and Gait, E. "Autonomous satellite navigation by stellar refraction", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **7**(2), pp. 129-134 (1984).
7. Ning, X. and Fang, J. "An autonomous celestial navigation method for LEO satellite based on unscented Kalman filter and information fusion", *Aerospace Science and Technology*, **11**(2), pp. 222-228 (2007).
8. Ning, X. and Fang, J. "A new autonomous celestial navigation method for the lunar rover", *Robotics and Autonomous Systems*, **57**(1), pp. 48-54 (2009).
9. Ali, J. and Fang, J. "Realization of an autonomous integrated suite of strapdown astro-inertial navigation systems using unscented particle filtering", *Computers & Mathematics with Applications*, **57**(2), pp. 169-183 (2009).
10. Xu, F. and Fang, J. "Velocity and position error compensation using strapdown inertial navigation system/celestial navigation system integration based on ensemble neural network", *Aerospace Science and Technology*, **12**(4), pp. 302-307 (2008).
11. Moghtadaei Rad, A., Heyrani Nobari, J., Nikkha, A.A., "Error analysis and compensation of inertial navigation system height channel in high altitude aiding star tracker", *Journal of Control*, **6**(4), pp.61-76, (in Persian) (2013).

12. Li, Y.-H., Fang, J.-C. and Jia, Z.-K. "Simulation of INS/CNS/GPS integrated navigation", *Journal of Chinese Inertial Technology*, **6**, p.1 (2002).
13. Wang, H.-B. and Chai, Y.-B. "Position and attitude integrated method for INS/GPS/CNS integrated systems based on federated filter", *Journal of Chinese Inertial Technology*, **2**, (2008).
14. Wan, E.A. and Van Der Merwe, R. "The unscented Kalman filter for nonlinear estimation", *In proceedings of Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000, AS-SPCC, The IEEE 2000, Lake Louise, Alta, N88-13313*, pp. 153-158 (1987).
15. Savage, P.G., *Strapdown Analytics*, Strapdown Associates, **1**, 1556 p. (2000).
16. Britting, K.R., *Inertial Navigation Systems Analysis*, Wiley, New York (1971).
17. Titterton, D. and Weston, J. *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Second Edition, IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series, **17**, 549 p. (2004).
18. Roshanian, J., Hasani, S.M., Yazdani, Sh. and Ebrahimi, M. "Star catalog criteria selection and mission catalog update for a typical star tracker", *Journal of Space Science and Technology (ISST)*, **5**(2), pp.1-8, (in Persian) (2012).
19. Crassidis, J.L. and Junkins, J.L., *Optimal Estimation of Dynamic Systems*, **24**, CRC press (2011). Aerospace and Navigational Electronics 1963, **10**(3), pp. 247-270, Conference, Denver, CO (August 2000).
20. Shin, E.H., *Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation*, UCGE Report 20219 (2005).
21. Brown, R.G. and Hwang, P.Y., *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*, John Wiley & Sons (1992).
22. Meditch, J.S., *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw- Hill (1969).