

# تحلیل کمانش سازه‌های استوانه‌یی کرکره‌یی برای دست‌یابی به بالاترین «نسبت استحکام به وزن»

هاشم اعظمی (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

محمد فدایی\* (استادیار)

گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی قم

مهندسی مکانیک شریف، (پاییز ۱۳۹۵)  
دوره‌ی ۲ - ۳، شماره‌ی ۲، ص. ۸۳-۷۳

یکی از مشخصه‌های سازه‌های کرکره‌یی -- که در مقایسه با سازه‌های مشابه «نسبت استحکام به وزن بالایی» دارند -- استحکام کمانشی آنهاست و از این جهت در صنایع مختلف مورد توجه قرار گرفته‌اند. در مطالعه‌ی حاضر، کمانش سازه‌های کرکره‌یی استوانه‌یی با الگوی هندسی دوزنقه تحت بار محوری با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل سازه با استفاده از نظریه‌ی مرتبه اول برشی استخراج شده است. خواص مکانیکی استوانه‌ی کرکره‌یی به کمک استوانه‌ی مدور اورتوتروپیک معادل آن به دست آمده است. به منظور صحت‌گذاری نتایج تحلیلی، از یک مدل اجزاء محدود استفاده شده و نیز تأثیر پارامترهای مختلف شامل تعداد کرکره، ضخامت استوانه، طول استوانه، شعاع استوانه، زاویه‌ی کرکره و ضریب شکل بر رفتار کمانشی استوانه کرکره‌یی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاضر، دقت و کارایی طراحی اینگونه سازه‌ها را برای مهندسان بالاتر خواهد برد.

واژگان کلیدی: استوانه‌ی کرکره‌یی، استحکام کمانشی، مدل اجزاء محدود، کرکره‌ی دوزنقه‌یی.

hazami@mecheng.iust.ac.ir

fadaei@qut.ac.ir

## ۱. مقدمه

یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های مهندسان و طراحان در صنایع عمران، مکانیک و به‌ویژه هوافضا دست‌یابی به سازه‌هایی با نسبت استحکام به وزن بالاست. همین امر از گذشته‌های دور مهندسان را به نوآوری در این زمینه ترغیب کرده است. روش‌های متفاوت موجود برای افزایش نسبت استحکام به وزن سازه معمولاً به دو دسته تقسیم می‌شود: ۱. روش‌هایی که در آن، تغییر جنس سازه به افزایش استحکام سازه منجر می‌شود، مانند آنچه که در سازه‌های کامپوزیتی مشاهده می‌شود؛ ۲. روش‌هایی که در آن تغییر هندسه‌ی سازه به افزایش «نسبت استحکام به وزن» سازه می‌انجامد، نظیر آنچه که در سازه‌های کرکره‌یی مشاهده می‌شود. سازه‌های کرکره‌یی سازه‌های جدیدی هستند که در صنعت برای افزایش استحکام کمانشی، برشی، خمشی و... کاربرد دارند. این نوع سازه‌ها در انواع مختلف -- مانند صفحه‌های کرکره‌یی<sup>[۱]</sup>، سیلندرهای کرکره‌یی، ستون‌های کرکره‌یی، تیرها با وب‌های کرکره‌یی و... -- و با کرکره‌هایی با اشکال هندسی مختلف، مانند دوزنقه‌یی، سینوسی و... وجود دارند.

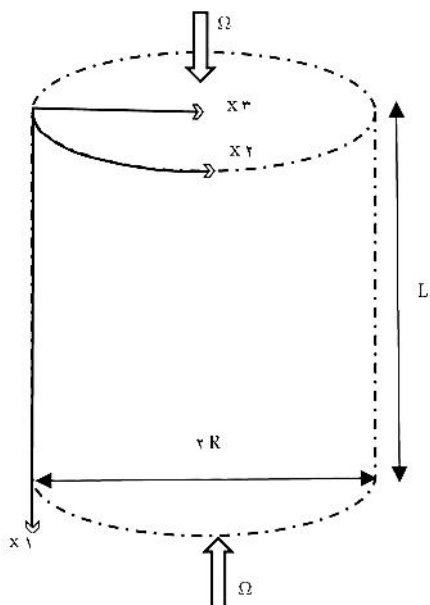
موده‌های کمانشی سازه‌های کرکره‌یی عموماً به دو دسته تقسیم می‌شوند: کمانش کلی و کمانش محلی. نوع کمانش رخ داده به میزان افت باری که بعد و قبل از کمانش رخ می‌دهد بستگی دارد، به طوری که اگر بعد از کمانش، قسمت عمده‌ی از باربری سازه از دست برود، کمانش عمومی رخ داده است و اگر بعد از کمانش درصد کمی

از باربری سازه از دست برود و همچنان سازه تحمل بار کند، کمانش محلی است. برای اولین بار در سال ۱۹۹۹، ورق کرکره‌یی دوزنقه‌یی مورد تحلیل هندسی غیرخطی قرار گرفت، و طی آن تحلیل سه‌بعدی مدل ارتوتروپیک معادل سازه‌ی کرکره‌یی -- شامل سفتی‌های خمشی و کششی -- انجام شد.<sup>[۱]</sup> در سال ۲۰۰۶ مقاومت خستگی و استاتیکی تیرهای فولادی با وب کرکره‌یی سینوسی، براساس آزمون و تحلیل نظری بررسی شد.<sup>[۲]</sup> در ادامه، محققین به بررسی رفتار تیر صفحه‌یی با وب کرکره‌یی دوزنقه‌یی تحت بارگذاری خستگی پرداختند.<sup>[۳]</sup> در سال ۲۰۰۷ صفحه‌های کرکره‌یی تقویت شده و تقویت نشده، با استفاده از روش مش آزاد گالرکین و براساس نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)<sup>[۴]</sup> مورد تحلیل هندسی غیرخطی قرار گرفت.<sup>[۴]</sup> سپس در سال ۲۰۰۹ در خصوص استحکام برشی و طراحی وب‌های فولادی کرکره‌یی با کرکره‌ی دوزنقه‌یی، مطالعاتی انجام شد.<sup>[۵]</sup> در همین سال، کمانش برشی عرضی اشکال با وب کرکره‌یی تحت خمش یکنواخت مورد بررسی قرار گرفت، و سپس نتایج نظری و نیز آنالیز اجزاء محدود کمانش برشی عرضی تیر اشکال با وب کرکره‌یی تحت خمش یکنواخت ارائه شد.<sup>[۶]</sup>

محققین با بررسی رفتار کمانش برشی متقابل وب‌های فولادی کرکره‌یی دوزنقه‌یی، در خصوص مطالعه‌ی اثرات پارامترهای هندسی استحکام و مودهای کمانش برشی متقابل مجموعه‌یی از آنالیزهای اجزاء محدود را ارائه دادند و نهایتاً براساس نتایج حاصل از این آنالیزها، رابطه‌یی برای استحکام کمانش برشی متقابل پیشنهاد شد.<sup>[۷]</sup>

\* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۲/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۴/۸/۳۰، پذیرش ۱۳۹۴/۹/۹.



شکل ۱. مشخصات استوانه‌ای مورد مطالعه.

مطالعاتی دیگر، استحکام کمانش برشی و طراحی وب‌های فولادی کرکریه‌یی خم‌شده برای پل‌ها با در نظر گرفتن غیرکشسان بودن ماده بررسی شد.<sup>[۸]</sup> سپس نتایج نظری و آنالیز اجزاء محدود کمانش پیچشی جانبی برای تیر I شکل با وب‌های کرکریه‌یی و با مهار عرضی که تحت خمش بکنواخت قرار دارد توسط محققین ارائه شد.<sup>[۹]</sup> در سال ۲۰۱۲، آنالیز غیرخطی تیر قوسی شکل<sup>۴</sup> با وب‌های فولادی کرکریه‌یی تحت پیچش خالص انجام شد.<sup>[۱۰]</sup> در همین سال، پانل‌های کرکریه‌یی با پانل‌های ساده‌یی که به هندسه‌ی پانل و خواص سفتی پانل غیر کرکریه‌یی وابسته بود معادل‌سازی شد، به طوری که حل تحلیلی آن‌ها برای هر شکل کرکریه‌یی قابل استفاده است.<sup>[۱۱]</sup>

چنان که از تاریخچه‌ی کارهای انجام‌شده برمی‌آید، در زمینه‌ی تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌یی کرکریه‌یی فعالیت‌های اندکی صورت گرفته، تا جایی که می‌توان به صراحت گفت هیچ تحقیقی در خصوص کمانش این‌گونه سازه‌ها با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول انجام نگرفته است. از این رو، در نوشتار حاضر کمانش سازه‌های کرکریه‌یی استوانه‌یی با الگوی هندسی دوزنقه‌یی تحت بار محوری، با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول پوسته‌ها بررسی شده است. برای اعتبارسنجی نتایج تحلیلی، از یک مدل اجزاء محدود استفاده شده است. تأثیر پارامترهای مختلف نظیر تعداد کرکره، ضخامت استوانه، طول استوانه، شعاع استوانه، زاویه‌ی کرکره و ضریب شکل بر رفتار کمانشی استوانه‌ی کرکریه‌یی بررسی شده است. نتایج حاصله حاکی از دقت و کارایی بالای شیوه‌ی حل تحلیلی حاضر دارد.

## ۲. حل تحلیلی

برای به دست آوردن بارکمانش، ابتدا با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه اول دائل و اصل همیلتون، معادلات حاکم بر کمانش استوانه استخراج می‌شود. سپس با استفاده از روش ارائه‌شده توسط سامانتا و سیمانیویک، سفتی‌های کششی، خمشی و برشی کرکریه‌ی دوزنقه‌یی محاسبه می‌شود؛ و در نهایت با اعمال شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، بارکمانش مود اول کمانش محاسبه می‌شود. شایان ذکر است که حل تحلیلی و حل اجزاء محدود برای هر دو استوانه‌ی کرکریه‌یی و مدور صورت گرفته است.

### ۲.۱. استخراج معادلات تعادل

ابتدا استوانه‌یی با متغیرهای شعاع ( $R$ )، ضخامت ( $h$ ) و طول ( $L$ ) در نظر گرفته شده است (شکل ۱).  $x_1, x_2, x_3$  به ترتیب نشان‌گر محورهای طولی، محیطی و شعاعی هستند و  $\Omega$  نیز نماینده‌ی بار کمانش<sup>۵</sup> اعمالی بر استوانه (برحسب نیوتن بر متر) است.

حال بر اساس نظریه‌ی برشی مرتبه اول، جابه‌جایی‌های استوانه به صورت معادله‌ی ۱ در نظر گرفته می‌شود.  $u_1, u_2, u_3$  به ترتیب جابه‌جایی‌های استوانه در راستای طولی، محیطی و شعاعی را نشان می‌دهد، و  $u$  و  $v$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی استوانه در راستای طولی، محیطی و شعاعی هستند که فقط تابع متغیرهای طولی و محیطی‌اند.  $\psi_1$  و  $\psi_2$  نیز به ترتیب توابع چرخش حول محورهای  $x_1$  و  $x_2$  هستند.<sup>[۱۲]</sup>

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= u(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) &= v(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

در مواد ارتوئوتروپیک و حالت تنش صفحه‌یی رابطه‌ی تنش و کرنش به صورت

معادله‌ی ۲ ارائه می‌شود که در آن  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6, \sigma_4, \sigma_5$  به ترتیب تنش نرمال در راستای طولی، تنش نرمال در جهت محیطی، تنش برشی در صفحه  $x_1x_2$ ، تنش برشی در صفحه  $x_2x_3$  و تنش برشی در صفحه  $x_1x_3$  است و  $\epsilon$ ها نیز کرنش‌های معادل تنش‌ها هستند.  $k_{44}$  و  $k_{55}$  ضریب تصحیح برشی هستند.<sup>[۱۲]</sup>

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{44}^Y c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55}^Y c_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{\epsilon_6} \\ \gamma_{\epsilon_4} \\ \gamma_{\epsilon_5} \end{pmatrix} \quad (2)$$

کرنش‌های مورد نظر به وسیله‌ی رابطه‌ی ۳ برحسب جابه‌جایی‌های نظریه‌ی مرتبه اول محاسبه می‌شود که در آن  $\epsilon^1, \epsilon^2$ ها به ترتیب کرنش‌ها و انحنای صفحه‌ی میانی پوسته‌اند. سپس با استفاده از اصل همیلتون (رابطه‌ی ۴)، معادلات تعادل استوانه حاصل می‌شود.  $U, T, V$  به ترتیب معرف انرژی جنبشی، انرژی درونی و انرژی پتانسیل استوانه‌اند؛ از انرژی جنبشی جسم به‌علت استاتیکی بودن سازه صرف‌نظر می‌شود ولی انرژی درونی و انرژی پتانسیل مطابق رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود.<sup>[۱۲]</sup> با جایگذاری روابط ۱، ۳ و ۵ در رابطه‌ی ۴ و ساده‌سازی آن با استفاده از رابطه‌ی ۶، معادلات تعادل برای کمانش استوانه‌ی مدور (رابطه‌ی ۷) نتیجه می‌شود. در رابطه‌ی ۷، اختصارات  $N$  و  $M$  معرف نیروها و ممان‌های داخل صفحه‌یی استوانه‌اند که با کرنش‌ها و انحنای صفحه‌ی میانی پوسته طبق رابطه‌ی ۸ در ارتباط‌اند.<sup>[۱۲]</sup> برای حل معادلات رابطه‌ی ۷، مقادیر  $M$  و  $N$ ها مستقیماً برحسب رابطه‌ی ۸ معادل‌گذاری می‌شود و مقادیر  $Q$  با استفاده از دو رابطه‌ی ۶ و ۲ حاصل می‌شود.<sup>[۱۲]</sup>

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{r} (u_{i,j} + u_{j,i}) & \epsilon_6^* &= \frac{1}{r} (u_{,r} + v_{,1}) \\ \epsilon_i &= \epsilon_i^* + x_3 \epsilon_i^1 & \epsilon_4^* &= \frac{1}{r} (\psi_{1,r} + \psi_{2,1}) \\ \epsilon_1^* &= u_{,1} & \epsilon_5^* &= \frac{1}{r} (\psi_{2,r} + w_{,2} - \frac{v}{R}) \end{aligned}$$

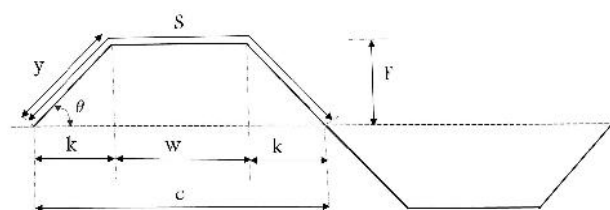
کاهش می‌یابد. پس به جای سفتی‌های معادل استوانه‌ی کرکره‌یی از سفتی‌های معادل صفحه‌ی کرکره‌یی استفاده شده است. محققین با استفاده از روش انرژی، و با برابر قرار دادن جابه‌جایی‌های صفحه کرکره‌یی با صفحه غیر کرکره‌ی ارتوتروپیک معادل صفحه کرکره‌یی، سفتی‌های کششی معادل را مطابق رابطه‌ی ۹ استخراج کرده‌اند. متغیرهای مختلف کرکره‌ی دوزنقه‌یی، صفحه‌ی کرکره‌یی و معادل در شکل‌های ۲ تا ۴ نشان داده شده است، به طوری که  $l$  طول یال دوزنقه،  $W$  قاعده‌ی کوچک دوزنقه،  $c$  قاعده‌ی بزرگ دوزنقه،  $F$  ارتفاع دوزنقه،  $\theta$  زاویه‌ی کرکره،  $s$  طول گسترش یافته‌ی کرکره و  $h$  ضخامت صفحه است.<sup>[۱]</sup>

$$A_{11} = \frac{shE}{c}$$

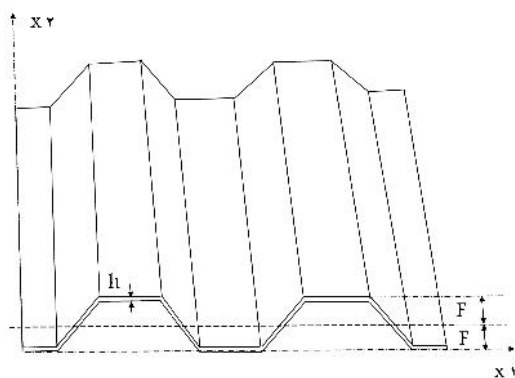
$$A_{22} = \frac{E(\frac{h}{F})^2 h}{\phi \left( \frac{1}{c} \left( \frac{c-s \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right) + \frac{1}{rc} \frac{F}{\sin \theta} \right)}$$

$$A_{12} = A_{21} \nu$$

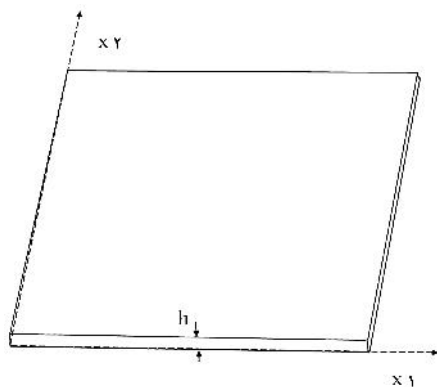
$$A_{\phi\phi} = G_{\phi\phi} h = \frac{c}{s} \frac{Eh}{2(1 + \nu)}$$



شکل ۲. مشخصات هندسی یک موج از کرکره دوزنقه‌یی.



شکل ۳. صفحه کرکره‌یی دوزنقه‌یی.



شکل ۴. صفحه‌ی غیرکرکره‌یی ارتوتروپیک معادل صفحه‌ی کرکره‌یی.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \psi_{1,1} & \varepsilon_1^1 &= 0 \\ \varepsilon_2^0 &= v_{,2} + \frac{w}{R} & \varepsilon_2^1 &= \frac{1}{r}(\psi_1 + w_{,1}) \\ \varepsilon_3^0 &= \psi_{2,2} & \varepsilon_3^1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta(U + V)) dt = 0$$

$$t = t_1, t_2$$

$$\delta u = \delta v = \delta w = \delta \psi_1 = \delta \psi_2 = 0 \quad (4)$$

$$\delta U = \int \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV$$

$$\delta V = - \int \Omega \frac{\partial W}{\partial x_1} \delta \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} \right) dA \quad (5)$$

$$(N_i, M_i) = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \sigma_i(l, x_r) dx_r$$

$$Q_1 = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \sigma_\delta dx_r$$

$$Q_2 = \int_{-\frac{h}{r}}^{\frac{h}{r}} \sigma_\tau dx_r \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_{1,1} + N_{\phi,2} &= 0 \\ N_{2,2} + N_{\phi,1} + \frac{Q_2}{R} &= 0 \\ M_{1,1} + M_{\phi,2} - Q_1 &= 0 \\ M_{2,2} + M_{\phi,1} - Q_2 &= 0 \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} - \frac{N_2}{R} - \Omega w_{,11} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_\phi \\ M_1 \\ M_2 \\ M_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{\phi\phi} & 0 & 0 & B_{\phi\phi} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{\phi\phi} & 0 & 0 & D_{\phi\phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ 2\varepsilon_\phi^0 \\ \varepsilon_1^1 \\ \varepsilon_2^1 \\ 2\varepsilon_\phi^1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

## ۲.۲. سفتی معادل استوانه‌ی کرکره‌یی

کرکره‌یی کردن سازی ایزوتروپیک، باعث ناهمسانی سفتی‌ها و مدول برشی، در جهات مختلف می‌شود. پس می‌توان در حل تحلیلی از یک استوانه‌ی مدور ارتوتروپیک به جای استوانه‌ی کرکره‌یی استفاده کرد، به نحوی که خواص کرکره‌یی بودن در سفتی‌ها و مدول برشی استوانه‌ی مدور اعمال شود. این استوانه‌ی مدور را «استوانه‌ی مدور معادل» می‌نامند.

یک کرکره‌ی کامل در استوانه‌ی کرکره‌یی نسبت به صفحه‌ی کرکره‌یی اندکی انحنای دارد که با افزایش تعداد کرکره و با ثابت ماندن دیگر متغیرها، مقدار این انحنای نیز

بازنویسی شود. در نتیجه پارامترهای ضریب  $k_1$  مطابق رابطه‌ی ۱۴ ساده می‌شود.

$$r\gamma = 2s \quad (14)$$

$$\phi = \frac{2\pi R}{n}$$

در نتیجه ضریب  $k_1$  عبارت خواهد بود از:

$$k_1 = \frac{sn}{\pi R} \quad (15)$$

و در نهایت سفتی‌های داخل صفحه و مدول‌های برشی خارج صفحه به صورت جدول ۱ ارائه می‌شود.

### ۳.۲. شرایط مرزی و اعمال آن در معادلات

در این تحقیق شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده بررسی می‌شود. برای اعمال این نوع شرط مرزی، به جای جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی استوانه و توابع چرخشی، از روابط ۱۶ استفاده می‌شود.<sup>[۱۸]</sup>

$$u(x_1, x_2) = U_{mn} \cos(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2)$$

$$v(x_1, x_2) = V_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2)$$

$$\psi_1(x_1, x_2) = \Psi_{1mn} \cos(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2)$$

$$\psi_2(x_1, x_2) = \Psi_{2mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2)$$

$$w(x_1, x_2) = W_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2) \quad (16)$$

سپس با جایگذاری رابطه‌ی ۱۶ و ۱۷ (همراه روابط ارائه‌شده در جدول ۱) در رابطه‌ی ۶، این رابطه به یک دستگاه ۵ معادله و ۵ مجهول همانند رابطه‌ی ۱۸ تبدیل می‌شود.

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{L} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\beta_n = \frac{n}{R} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

$$[Z] \begin{bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ \Psi_{1mn} \\ \Psi_{2mn} \\ W_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Z = f(\Omega, m, n) \quad (18)$$

جدول ۱. سفتی‌های داخل صفحه و مدول‌های برشی خارج صفحه.

سفتی خمشی	سفتی کششی	مدول برشی خارج صفحه
$D_{11} = \frac{Eh}{12} I_T$	$A_{11} = \frac{shE}{c}$	$G_{12} = GK_1$
$D_{22} = \frac{c}{s} \frac{Eh^2}{12}$	$A_{22} = \frac{E(\frac{h}{c})^2 h}{\epsilon \left( \frac{c-s}{c} \cos^2 \theta + \frac{\epsilon}{12c} \sin^2 \theta \right)}$	$G_{22} = \frac{G}{K_T}$
$D_{12} = 0$	$A_{12} = A_{21} \nu$	
$D_{\epsilon\epsilon} = \frac{s}{c} \frac{Eh^2}{\epsilon(1+\nu)}$	$A_{\epsilon\epsilon} = \frac{c}{s} \frac{Eh}{\tau(1+\nu)}$	

همچنین در مطالعات انجام شده<sup>[۱۵-۱۳]</sup> سفتی‌های خمشی صفحه‌ی کرکره‌بی به صورت رابطه‌ی ۱۰ ارائه شده است.

$$D_{22} = \frac{c}{s} \frac{Eh^2}{12}$$

$$D_{11} = \frac{Eh}{12c} I_T$$

$$I_T = \left( \frac{2F^2}{3 \sin(\theta)} \right) + \left( 2F^2 \left( c - \frac{2F}{\tan(\theta)} \right) \right)$$

$$D_{12} = 0$$

$$D_{\epsilon\epsilon} = \frac{s}{c} \frac{Eh^2}{\epsilon(1+\nu)} \quad (10)$$

برای به دست آوردن مدول‌های برشی خارج صفحه  $G_{12}$  و  $G_{22}$  که به ترتیب معادل ضرایب  $c_{22}$  و  $c_{55}$  در معادله‌ی ۲ هستند از روابط داده شده در مطالعات دیگر<sup>[۱۷،۱۶]</sup> استفاده می‌شود. در این مطالعه نشان داده شده که مدول‌های برشی از رابطه‌ی ۱۱ برای هر نوع شکل کرکره به دست می‌آید.

$$G_{12} = GK_1$$

$$G_{22} = \frac{G}{K_T} \quad (11)$$

که در آن ضرایب  $k_1$  و  $k_2$  از رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود و پارامترهای مختلف آن در شکل ۵ نشان داده شده است.  $R$  نشان‌گر شعاع استوانه،  $r$  شعاع انحنای هر کرکره،  $\gamma$  زوایه‌ی کرکره با مرکز انحنای کرکره، و  $\phi$  بیان‌گر زوایه‌ی بی است که هر کرکره با مرکز استوانه می‌سازد.

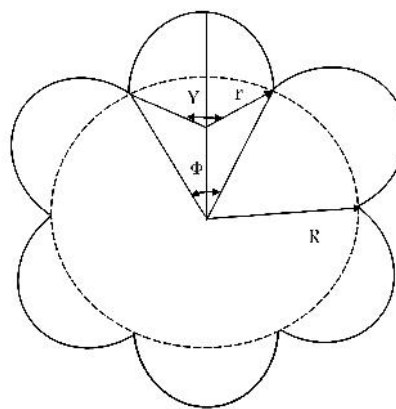
$$k_1 = \frac{r}{R} \frac{\gamma}{\phi}$$

$$k_2 = \epsilon k_1^2 \left( \frac{r}{h} \right)^2 \left( 1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} - \lambda \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{r}}{\gamma^2} \right) + \frac{k_1}{2} \left( 1 + \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right) \quad (12)$$

با افزایش تعداد کرکره، پارامتر  $\gamma$  به صفر نزدیک می‌شود و مقدار  $\frac{\sin \gamma}{\gamma}$  به ۱ میل می‌کند و در نتیجه مقدار ضریب  $k_2$  به  $k_1$  نزدیک می‌شود. پس:

$$k_2 \cong k_1 \quad (13)$$

از آنجا که عبارت  $k_1$  برای هر شکل کرکره‌بی بیان شده، باید برای کرکره‌ی دوزنقه‌بی

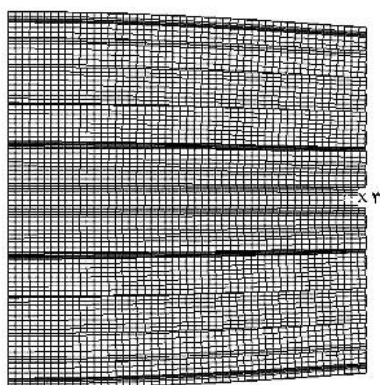


شکل ۵. سطح مقطع استوانه‌ی کرکره‌بی.

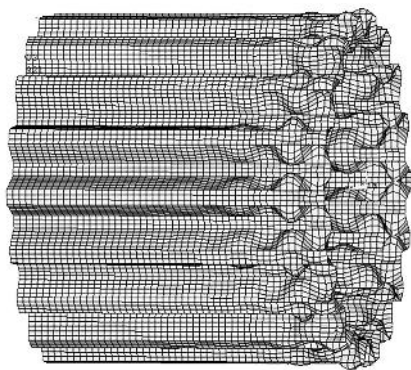
هر دو مورد استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور، برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده در نرم‌افزار اجزاء محدود مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. در این نوع شرایط مرزی، جابه‌جایی ابتدا و انتهای استوانه در راستای محیطی و شعاعی محدود می‌شود و بار کمانش به صورت فشاری به دو سر استوانه وارد می‌شود. چون با این نوع مدل‌سازی هیچ قید حرکتی در راستای طولی (راستای اعمال بار) وجود ندارد، به جای این که کمانش در سازه رخ دهد سازه دچار کرنش طولی و حرکت در امتداد طول استوانه می‌شود و جواب به دست آمده قابل استناد نیست. برای اجتناب از این موضوع استوانه را به صورت متقارن مدل‌سازی می‌کنیم. در این نوع مدل‌سازی نصف استوانه مدل‌سازی می‌شود، طوری که شرایط تکیه‌گاه ساده - ساده و بار کمانش به ابتدای استوانه، و شرط متقارن بودن بر خطوط موجود در وسط استوانه اعمال می‌شود. بدین ترتیب نرم‌افزار نصف دیگر استوانه را به طور ضمنی در نظر می‌گیرد و مشکل عدم کمانش برطرف می‌شود.

برای تحلیل کمانش باید بارگذاری اولیه روی مدل اعمال شود؛ برای این کار می‌توان نیرویی یکنواخت روی گره‌های ابتدای استوانه گذاشت یا این که یک فشار یکنواخت بر آن قرار دارد. چنانچه گره‌های ابتدای استوانه تحت فشار یکنواخت قرار گیرد، توزیع نیرو وابسته به شکل بندی نخواهد بود و بارگذاری یکنواخت و متقارن خواهد بود؛ در این صورت نرم‌افزار خروجی بار کمانشی را برحسب نیوتن بر متر نشان می‌دهد. میزان فشار اعمالی بر استوانه یک نیوتن بر متر در نظر گرفته شده است.

در استوانه‌ی مدور فقط شاهد کمانش کلی هستیم، در صورتی که در استوانه‌ی کرکره‌یی دو نوع کمانش کلی و محلی رخ می‌دهد. در شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب کمانش کلی و محلی در استوانه‌ی کرکره‌یی نشان داده شده است.



شکل ۸. کمانش کلی در استوانه‌ی کرکره‌یی.



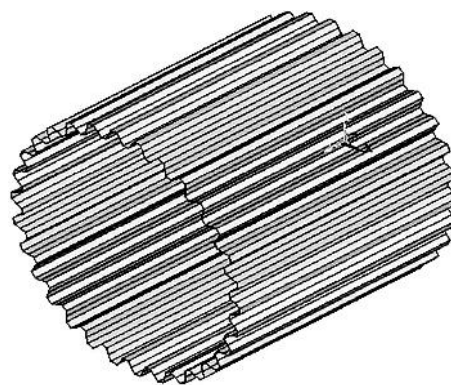
شکل ۹. کمانش محلی در استوانه‌ی کرکره‌یی.

ماتریس  $Z$  یک ماتریس  $5 \times 5$  است که به آن ماتریس ضرایب می‌گویند. این ماتریس تابعی از بار کمانش و مودهای کمانش ( $m$  و  $n$ ) است و برای این که دستگاه معادلات ما دارای جواب باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. با استفاده از این شرط جواب بار کمانش به دست می‌آید و باید یادآور شد که مسئله‌ی مورد نظر برای یافتن اولین بار کمانش بوده، پس به ازای  $m$  و  $n$ ‌های مختلف، کم‌ترین مقدار بار کمانشی که حاصل می‌شود همان اولین بار کمانش است، و این امر با استفاده از نرم‌افزار Mathematica انجام شده است.

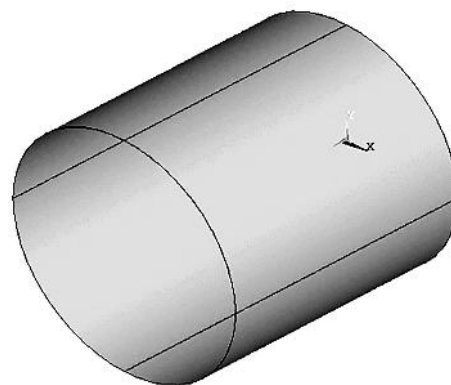
### ۳. تحلیل اجزاء محدود

برای بررسی بیشتر استوانه‌ی کرکره‌یی و صحت‌گذاری بر حل تحلیلی، از یک مدل اجزاء محدود سه‌بعدی کارآمد، یعنی شل ۱۸۱ در نرم‌افزار ANSYS استفاده شده است. این نوع المان برای تحلیل سه‌بعدی سازه‌های پوسته‌یی نازک و تا حدی ضخیم مناسب است.

شل ۱۸۱ دارای چهار گره و در هر گره دارای شش درجه آزادی است، و در هر سه جهت محور مختصات می‌تواند حرکت داشته و حول هر سه محور  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌تواند بچرخد. تحلیل اجزاء محدود بر هر دو استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور صورت گرفته است. در شکل ۶ و ۷ به ترتیب مدل اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور نشان داده شده است. گفتنی است که در مدل اجزاء محدود از مدل مادی ایزوتروپیک برای مدل‌سازی سازه استفاده شده است.



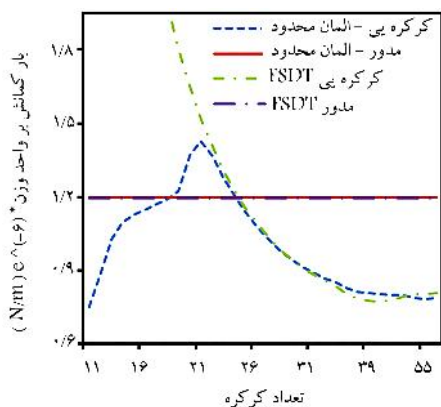
شکل ۶. مدل اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌یی.



شکل ۷. مدل اجزاء محدود استوانه‌ی مدور.

#### ۴. نتایج عددی و بحث

برای بررسی نتایج حاصل از مدل‌سازی اجزاء محدود و مقایسه‌ی آن با نتایج حاصل از مطالعه‌ی تحلیلی، خواص شاخص نظیر رابطه‌ی ۱۹ در نظر گرفته شده است. در این بخش شکل ۲ نیز مشخصات کرکره‌ی مورد مطالعه نشان داده شده است. در این بخش تغییرات پارامترهای طول ( $L$ )، شعاع ( $R$ ) و ضخامت استوانه ( $h$ ) و همچنین تعداد کرکره‌ها ( $n$ )، ضریب شکل ( $a$ ) و زاویه‌ی کرکره ( $\theta$ ) مورد بحث و بررسی قرار گرفته و سایر پارامترهای موجود، تابعی از متغیرهای مورد بررسی هستند. در هر تحلیل، استوانه‌ی مدور و کرکره‌بی با هندسه و خواص مشابه (طول و شعاع و مدول کشسانی ( $E$ ) و ضخامت و ضریب پواسون ( $\nu$ )) با هم مقایسه شده است.



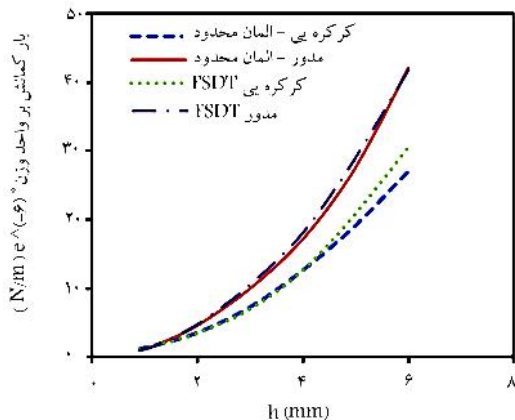
شکل ۱۰. تأثیر تعداد کرکره روی بار کماتش بر واحد وزن.

جدول ۲. نسبت بار کماتش و بار کماتش بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور برای تعداد کرکره‌های مختلف.

نسبت بار کماتش		تعداد کرکره
استوانه کرکره‌بی	بر واحد وزن استوانه کرکره‌بی به مدور	
۱٫۵۰	۱٫۰۲	۱۹
۱٫۶۸	۱٫۱۴	۲۰
۱٫۷۶	۱٫۱۹۲	۲۱
۱٫۶۹	۱٫۱۴۳	۲۲
۱٫۵۸	۱٫۰۷	۲۳
۱٫۴۹	۱٫۰۰۳	۲۴
۱٫۴۱	۰٫۹۵	۲۵

#### ۱.۴. بررسی تأثیر تعداد کرکره‌های استوانه بر بار کماتش

در شکل ۱۰ حاوی چهار نمودار مختلف است که دو مورد از آن‌ها مربوط به حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه کرکره‌بی و دو نمودار دیگر حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه مدور را نشان می‌دهد که تأثیر افزایش تعداد کرکره بر روی بار بر واحد وزن سازه را نشان می‌دهد. نتایج اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌بی، با نتایج حاصل از حل تحلیلی برای تعداد کرکره‌ی بیشتر از ۲۲ عدد مطابقت قابل قبولی دارد و مقدار خطا ناچیز است. این اختلاف ناشی از دو نکته است: ۱. در حل تحلیلی معادل‌سازی استوانه‌ی کرکره‌بی با استوانه‌ی مدور معادل انجام شده و همین امر موجب ایجاد خطا به دلیل شکل ناهمگون سطح مقطع استوانه‌ی کرکره‌بی در مقایسه با استوانه‌ی مدور معادل شده است (با افزایش تعداد کرکره‌ها این ناهمگونی بین استوانه‌ی کرکره‌بی و استوانه‌ی مدور معادل کاهش می‌یابد)؛ ۲. استفاده از روش ارائه شده برای به دست آوردن سفتی معادل استوانه‌ی کرکره‌بی، که در این روش از روابط کرکره‌ی تخت مربوط به صفحه‌ی کرکره‌بی استفاده شده و این در حالی است که در استوانه‌ی کرکره‌بی، کرکره به صورت محدب است ولی افزایش تعداد کرکره موجب کاهش طول آن و در نتیجه باعث نزدیک شدن کرکره‌ی محدب به کرکره‌ی تخت می‌شود و با افزایش هرچه بیشتر تعداد کرکره، خطای به وجود آمده کم‌تر می‌شود.



شکل ۱۱. تأثیر ضخامت بر بار کماتش بر واحد وزن.

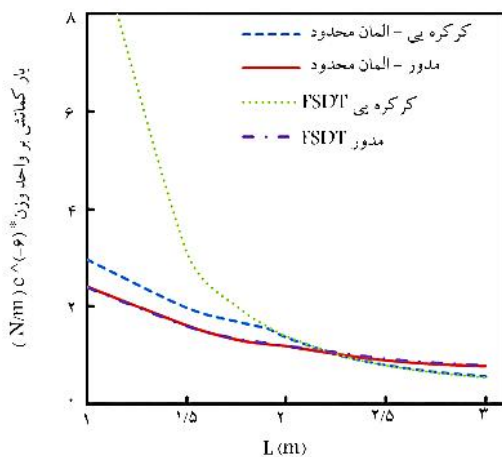
جدول ۲ نسبت بار کماتش و بار کماتش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌بی به مدور برای بازه کرکره‌ی ۱۹ تا ۲۵ عدد ارائه شده است.

#### ۲.۴. بررسی تأثیر ضخامت سازه بر بار کماتش

در شکل ۱۱ تأثیر ضخامت بر بار کماتش بر واحد وزن نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌بی اختلاف ناچیزی دارند که خود نشان‌گر دقت بالای حل تحلیلی است. همچنین برای استوانه‌ی مدور شاهد دقتی خاص هستیم. در هر دو استوانه‌ی مدور و استوانه‌ی کرکره‌بی کاهش

برای تعداد کرکره‌ی کم‌تر از ۲۲ عدد، حل تحلیلی اختلاف بسیار زیادی با حل اجزاء محدود دارد. علت آن است که در حل تحلیلی فقط کماتش کلی محاسبه می‌شود و محاسبه‌ی دیگر انواع کماتش ممکن نیست؛ این در حالی است که برای تعداد کرکره‌های کم‌تر از ۲۲ عدد، کماتش محلی و برای تعداد کرکره‌های بیشتر کماتش کلی رخ می‌دهد. نمودارهای تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی مدور نیز تقریباً برهم منطبق‌اند که بیان‌گر دقت بالای حل تحلیلی است و چون با افزایش تعداد کرکره‌ها پارامترهای استوانه‌ی مدور تغییر نمی‌کند، بار کماتش آن ثابت می‌ماند.

در نمودارهای شکل ۱۰ تعداد کرکره در محدوده‌ی ۱۹ تا ۲۵ عدد مورد توجه است، زیرا در این بازه مقدار بار کماتش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌بی از استوانه‌ی مدور بیشتر است و مقدار بیشینه آن در ۲۱ عدد کرکره اتفاق می‌افتد که تقریباً ۱٫۲ برابر استوانه‌ی مدور است. این بدین معناست که استوانه‌ی کرکره‌بی ۱٫۲ برابر استوانه‌ی مدور معادل هم‌وزن خود بار تحمل می‌کند که معادل افزایش ۲۰ درصدی بار کماتش بر وزن سازه بوده و بیان‌گر نسبت استحکام به وزن بالای سازه‌ی کرکره‌بی است. در



شکل ۱۲. تأثیر طول روی بار کماتش بر واحد وزن.

جدول ۴. نسبت بار کماتش و بار کماتش بر واحد وزن استوانه کرکره ای به مدور برای طول های مختلف.

طول استوانه (m)	نسبت بار کماتش	
	بر واحد وزن استوانه کرکره ای به مدور	استوانه کرکره ای
۱	۱٫۲۲۹	۱٫۸۱۹
۱٫۵	۱٫۲۲۲	۱٫۸۰۸
۱٫۷۵	۱٫۲۷۷	۱٫۸۹
۱٫۹۱	۱٫۲۵۴	۱٫۸۵۶
۱٫۹۴	۱٫۲۱۶	۱٫۷۹۹
۱٫۹۵	۱٫۲۰۴	۱٫۷۸۱
۲	۱٫۱۴۳	۱٫۶۹۱
۲٫۲۵	۰٫۹۸۴	۱٫۴۵۶

نمودارهای مذکور اختلاف قابل توجه حل تحلیلی و اجزاء محدود در طول های کم تر از ۱٫۹۴ متر است. علت این موضوع تغییر نوع کماتش از کماتش کلی به محلی برای طول های کم تر از ۱٫۹۴ متر است و حل تحلیلی فقط توانایی پیش بینی کماتش کلی را دارد پس خطای به وجود آمده یک امر کاملاً بدیهی است. در مورد استوانه ای مدور نیز می توان گفت که به ازای هر طولی، حل اجزاء محدود و حل تحلیلی دقت بالایی دارد.

در تمامی طول ها بار کماتش بر واحد وزن استوانه ای کرکره ای از مدور بیشتر نیست. برای طول استوانه ای کم تر از ۲٫۲ متر، بار کماتش بر واحد وزن سازه ی کرکره ای نسبت به مدور بیشتر می شود؛ به عبارت دیگر با کاهش طول استوانه تا ۱٫۹۴ متر، استحکام کماتشی استوانه ای کرکره ای افزایش می یابد ولی استحکام کماتشی استوانه ای مدور تقریباً ثابت می ماند. دلیل این امر تغییر نوع کماتش طولی و محیطی با تغییر طول استوانه در سازه ی کرکره ای است، به طوری که در طول های پایین تر بیشتر شاهد کماتش طولی هستیم اما در طول های بالاتر بیشتر کماتش محیطی رخ می دهد. چنان که پیش تر بیان شد استحکام کماتشی طولی از محیطی در این نوع سازه بیشتر است؛ پس هرچه طول افزایش یابد سازه از کماتش نوع طولی (مستحکم تر) به نوع محیطی (ضعیف تر) تغییر پیدا می کند.

در جدول ۴ نسبت بار کماتش و بار کماتش بر واحد وزن استوانه کرکره ای به مدور در طول های مختلف ارائه شده است. مشاهده می شود که ناحیه ی پر کاربرد

جدول ۳. نسبت بار کماتش، و بار کماتش بر واحد وزن استوانه کرکره ای به مدور برای ضخامت های مختلف.

ضخامت استوانه (mm)	نسبت بار کماتش	
	بر واحد وزن استوانه کرکره ای به مدور	استوانه کرکره ای
۰٫۹	۱٫۲۱۲	۱٫۷۹۳
۰٫۹۴	۱٫۲۱۸	۱٫۸۰۲
۰٫۹۵	۱٫۲۰۵	۱٫۷۸۳
۱	۱٫۱۴۳	۱٫۶۹۱
۱٫۲	۱٫۰۱	۱٫۴۹۴

ضخامت منجر به کاهش اختلاف حل تحلیلی و اجزاء محدود می شود، اما افزایش ضخامت به افزایش اختلاف حل تحلیلی و اجزاء محدود می انجامد. به عبارت دیگر، کاهش ضخامت باعث افزایش دقت حل تحلیلی می شود که با ذات نظریه ی برشی مرتبه اول به کار رفته در روش تحلیلی مطابقت دارد. نکته ی دیگر در مورد دقت حل تحلیلی استوانه ای کرکره ای این است که برای ضخامت های کم تر از ۰٫۹۴ میلی متر نوع کماتش از کماتش کلی به کماتش محلی تغییر می کند، و باعث افزایش خطای حل تحلیلی در قیاس با اجزاء محدود می شود. با مشاهده ی شکل ۱۱ می توان دریافت که کاهش هرچه بیشتر ضخامت بر استحکام استوانه ای کرکره ای در مقایسه با استوانه ای مدور می افزاید و بالعکس؛ و این امر بیانگر آن است که ناحیه ی پر کاربرد این نوع سازه ها، ضخامت پایین است. این نوع رفتار به موجب رفتار دوگانه ی سفتی خمشی راستای طولی در دو استوانه است. سفتی خمشی استوانه ای مدور در راستای طولی با توان سوم ضخامت، رابطه ی مستقیم دارد، این در حالی است که سفتی خمشی استوانه ای کرکره ای در راستای طولی فقط با توان اول ضخامت سازه رابطه ی مستقیم دارد. در نتیجه با کاهش ضخامت، بار کماتشی استوانه ای کرکره ای با شدت کمتری نسبت به استوانه ای مدور کاهش می یابد.

در ضخامت های کم تر از ۱٫۲ میلی متر بار کماتش بر واحد وزن سازه در استوانه ای کرکره ای از مدور بیشتر است و با کاهش ضخامت تا ۰٫۹۴ میلی متر میزان بار کماتش بر واحد وزن افزایش می یابد و برای مقادیر کم تر از ۰٫۹۴ به دلیل بروز پدیده ی کماتش محلی این روند معکوس می شود.

در جدول ۳ نسبت بار کماتش و بار کماتش بر واحد وزن استوانه ای کرکره ای به مدور ارائه شده است و نشان می دهد که ناحیه ی پر کاربرد در طراحی استوانه های کرکره ای، نواحی با ضخامت پایین است به طوری که برای متغیرهای مرجع به کار برده شده، بیشترین مقدار نسبت بار کماتش بر واحد وزن استوانه ای کرکره ای به مدور در ضخامت ۰٫۹۴ میلی متر بوده و در حدود ۱٫۲۲ است، به عبارت دیگر استوانه ای کرکره ای در قیاس با استوانه هم وزنش و معادلش، میزان ۲۲ درصد بار کماتشی بیشتری تحمل می کند.

### ۳.۴. بررسی تأثیر طول سازه بر بار کماتش

در شکل ۱۲ تأثیر طول استوانه های کرکره ای و مدور روی بار کماتش بر واحد وزن نشان داده شده است. دو نمودار تحلیلی و اجزاء محدود استوانه ای کرکره ای برای طول های بیشتر از ۱٫۹۴ متر دقت بسیار خوبی دارد، به طوری که بیشینه خطای حل تحلیلی نسبت به حل اجزاء محدود حدود ۲٫۷ درصد است که این مقدار خطا با افزایش طول کاهش می یابد، به طوری که برای طول ۲٫۵ متر به ۰٫۱۶ درصد می رسد و این نشانگر دقت بالای روش مورد استفاده است. نکته ی قابل توجه دیگر در مورد

جدول ۵. نسبت بارکمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای شعاع‌های مختلف.

شعاع استوانه (m)	نسبت بارکمانش	
	بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور	استوانه کرکره‌یی به مدور
۰٫۲	۰٫۷۰۸	۱٫۸۱۹
۰٫۳	۰٫۷۱۸	۱٫۸۰۸
۰٫۴	۰٫۷۷۶	۱٫۸۹
۰٫۵	۱٫۱۴۳	۱٫۸۵۶
۰٫۵۱	۱٫۲۱۵	۱٫۷۹۹
۰٫۵۵	۱٫۲۲۱	۱٫۷۸۱
۰٫۷	۱٫۰۱۶	۱٫۶۹۱
۱	۰٫۹۱۴	۱٫۴۵۶

در طراحی استوانه‌های کرکره‌یی، نواحی با طول کم تر است. نکته‌ی جالب در جدول مذکور طول استوانه‌ی ۱٫۷۵ متر است که بیان می‌دارد تحمل بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی تقریباً ۱٫۲۸ برابر استوانه‌ی مدور است. این بدان معناست که استحکام کمانشی استوانه‌ی کرکره ۲۸ درصد بیشتر از استوانه‌ی مدور هم‌وزنش است که استحکام کمانشی بالای استوانه‌ی کرکره‌یی را نشان می‌دهد.

#### ۴.۴. بررسی تأثیر شعاع سازه بر بارکمانش

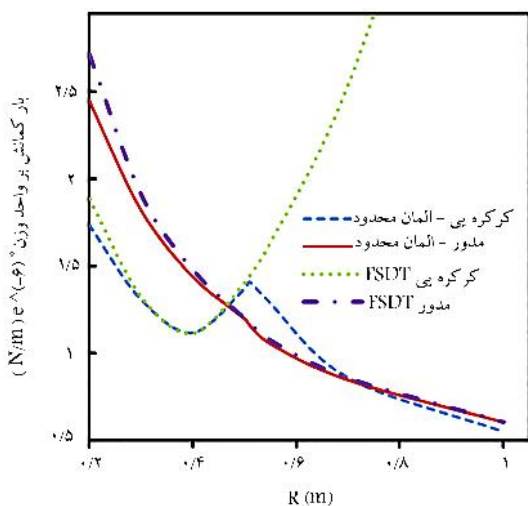
در شکل ۱۳ تأثیر شعاع استوانه روی بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی و مدور نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، حل تحلیلی استوانه‌ی کرکره‌یی دقت بسیار بالایی در محدوده‌ی شعاعی کم‌تر از ۰٫۵۱ متر دارد، به طوری که دو نمودار تحلیلی و اجزاء محدود بر هم منطبق‌اند و فقط با کاهش شعاع مقداری اختلاف مشاهده می‌شود. در محدوده‌ی شعاعی بیشتر از ۰٫۵۱ متر به علت تغییر نوع کمانش از کمانش کلی به محلی، و این که حل تحلیلی توانایی تخمین کمانش محلی را ندارد، اختلاف مشاهده شده بین حل تحلیلی و اجزاء محدود پیش‌بینی شده و منطقی است. همچنین حل تحلیلی استوانه‌ی مدور برای هر شعاعی معتبر است و در شعاع‌های پایین‌تر نسبت به شعاع‌های بالاتر دقت کم‌تری دارد و با افزایش شعاع، دقت روش تحلیلی نسبت به اجزاء محدود افزایش می‌یابد.

در تمامی شعاع‌ها بارکمانش بر واحد وزن سازه‌ی کرکره‌یی از مدور بیشتر نیست و تنها برای شعاع بیشتر از ۰٫۴۷ و کم‌تر از ۰٫۷۵ متر شاهد بهتر شدن استحکام کمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی نسبت به مدور هستیم. این محدوده‌ی جالبی برای طراحی است که با توجه به جدول ۵ بیشترین میزان بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی ۱٫۲۲۱ برابر استوانه‌ی مدور است که مربوط به شعاع ۰٫۵۵ متر است؛ به عبارت دیگر استحکام کمانشی استوانه‌ی کرکره‌یی از استوانه‌ی مدور هم‌وزنش ۲۲ درصد بیشتر است. در محدوده‌ی شعاع بهینه، افزایش شعاع منجر به افزایش سفتی استوانه در راستای طولی و کاهش سفتی محیطی می‌شود؛ این در حالی است که نوع کمانش یخ داده از نوع طولی است. از طرف دیگر، پوسته‌ی کرکره‌یی نسبت به استوانه‌ی ساده، سفتی خمشی طولی بیشتری دارد. در نتیجه استحکام کمانشی پوسته‌ی کرکره‌یی از ساده بیشتر می‌شود و این افزایش استحکام تا جایی ادامه می‌یابد که استوانه‌ی کرکره‌یی به علت وجود کرکره‌ها، دچار کمانش محلی می‌شود. با کاهش باربری سازه شاهد کاهش استحکام خواهیم بود.

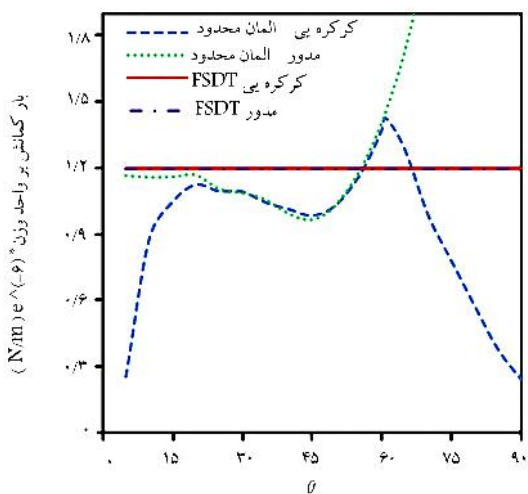
#### ۵.۴. بررسی تأثیر زاویه‌ی کرکره بر بارکمانش

در شکل ۱۴ تأثیر زاویه‌ی کرکره روی بارکمانش بر واحد وزن، در استوانه‌های کرکره‌یی و مدور نشان داده شده است، که برای زوایای بیشتر از ۱۴ و کم‌تر از ۶۱ درجه شاهد دقت بالای حل تحلیلی در مقایسه با حل اجزاء محدود هستیم. در زوایای بیشتر از ۶۱ و در زوایای کم‌تر از ۱۴ درجه به علت بروز کمانش محلی و مبتنی بودن حل تحلیلی بر کمانش کلی، بین حل تحلیلی و اجزاء محدود خطا ایجاد می‌شود. همچنین حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی مدور در دو نمودار یادشده دارای دقت بالایی است و یادآور می‌شویم که با تغییر زاویه‌ی کرکره، متغیرهای استوانه‌ی مدور تغییر نمی‌کنند و در نتیجه، مقدار بارکمانش آن ثابت می‌ماند.

در اکثر زاویه‌ها، بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی از مدور بیشتر نیست و در ناحیه‌ی ۵۷ تا ۶۷ درجه، بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی به مدور بیشتر است و بیشینه‌ی آن در زاویه‌ی ۶۱ درجه اتفاق می‌افتد. جدول ۶ نسبت بار



شکل ۱۳. تأثیر شعاع روی بارکمانش بر واحد وزن.



شکل ۱۴. تأثیر زاویه روی بارکمانش بر واحد وزن.



جدول ۷. نسبت بارکمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای ضرایب شکل مختلف.

نسبت بارکمانش		
ضریب شکل	بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور	استوانه کرکره‌یی به مدور
۰٫۵	۱٫۵۱۷	۰٫۹۲۳
۰٫۷۵	۱٫۶۳۰	۱٫۰۵۱
۰٫۹۱	۱٫۸۰۷	۱٫۲۰۲
۰٫۹۵	۱٫۷۵۳	۱٫۱۷۴
۱	۱٫۶۹۱	۱٫۱۴۳
۱٫۱	۱٫۵۷۹	۱٫۰۸۵
۱٫۲	۱٫۴۸۴	۱٫۰۳۴
۱٫۳	۱٫۴۰۲	۰٫۹۹۰
۱٫۴	۱٫۳۳۰	۰٫۹۵۲
۱٫۵	۱٫۲۶۸	۰٫۹۱۸
۱٫۶	۱٫۲۱۵	۰٫۸۹۰
۱٫۷	۱٫۱۷۱	۰٫۸۶۶

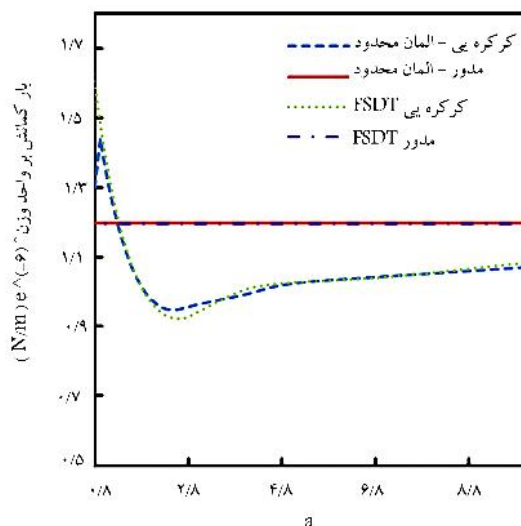
با افزایش ضریب شکل دقت حل تحلیلی افزایش می‌یابد. در ضریب شکل‌های بیشتر از ۰٫۹۱، کمانش کلی رخ می‌دهد، ولی در ضریب شکل‌های کم‌تر از ۰٫۹۱، نوع کمانش عوض شده و کمانش محلی رخ می‌دهد. به همین علت حل تحلیلی فقط برای محاسبه‌ی کمانش کلی انجام شده، و در نتیجه اختلاف به وجود آمده میان دو حل انجام شده کاملاً منطقی است. حل تحلیلی و اجزاء محدود استوانه‌ی مدور نیز در دو نمودار یادشده دقت بالایی دارند، و یادآور می‌شویم که با تغییر ضریب شکل، متغیرهای استوانه‌ی مدور تغییر نمی‌کنند، در نتیجه مقدار بارکمانش آن ثابت می‌ماند.

برای ضریب شکل کم‌تر از ۱٫۳، استوانه‌ی کرکره‌یی بارکمانش بر واحد وزن بیشتری از استوانه‌ی مدور تحمل می‌کند؛ بیشترین مقدار بارکمانش بر وزن سازه استوانه‌ی کرکره‌یی ۱٫۴۴ نیوتن بر متر است که برای ضریب شکل ۰٫۹۱، جایی که نوع کمانش از کلی به محلی تغییر می‌کند، اتفاق می‌افتد. برای مقادیر ضریب شکل کم‌تر از ۲٫۷۵، با کاهش ضریب شکل مقدار بارکمانش بر واحد وزن افزایش می‌یابد و این امر تا جایی ادامه می‌یابد که کمانش محلی رخ دهد. برای مقادیر ضریب شکل بیشتر از ۲٫۷۵ با افزایش ضریب شکل، بارکمانش بر وزن سازه افزایش می‌یابد ولی این افزایش به حدی نیست که به بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی مدور برسد. دلیل افزایش بارکمانش بر واحد وزن با کاهش ضریب شکل این است که با کاهش ضریب شکل سفتی خمشی و کششی راستای طولی افزایش و راستای محیطی کاهش می‌یابد. بدین ترتیب، سفتی راستای مستحکم‌تر در سازه‌ی کرکره‌یی افزایش و راستای ضعیف‌تر کاهش می‌یابد و این تا جایی ادامه می‌یابد که راستای طولی به شدت تضعیف می‌شود و کمانش محلی رخ می‌دهد. ولی برای ضریب شکل بزرگ‌تر از ۲٫۷۵ به دلیل این که وزن سازه به شدت کاهش می‌یابد مقدار بارکمانش به وزن سازه مقداری افزایش می‌یابد.

در جدول ۷ نسبت بارکمانش و بارکمانش بر وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای ضریب شکل‌های مختلف ارائه شده است. بیشینه‌ی این نسبت متعلق به ضریب شکل ۰٫۹۱ است که حدوداً ۱٫۲۰۲ است؛ این بدان معناست که استوانه‌ی کرکره‌یی نسبت به استوانه‌ی مدور هم‌وزنش ۱٫۲۰۲ برابر بیشتر بارکمانشی تحمل می‌کند؛

جدول ۶. نسبت بارکمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور برای زاویه‌های مختلف کرکره.

نسبت بارکمانش		زاویه‌ی کرکره (درجه)
استوانه کرکره‌یی به مدور	بر واحد وزن استوانه کرکره‌یی به مدور	
۱٫۱۱۱	۰٫۸۵۸	۵۰
۱٫۳۳۰	۰٫۹۶۵	۵۵
۱٫۳۸۹	۰٫۹۵۵	۵۶
۱٫۴۵۵	۱٫۰۰۳	۵۷
۱٫۵۲۷	۱٫۰۰۶	۵۸
۱٫۶۰۵	۱٫۱۰۱	۵۹
۱٫۶۹۱	۱٫۱۴۳	۶۰
۱٫۷۸۴	۱٫۱۸۸	۶۱
۱٫۷۱۳	۱٫۰۶۸	۶۵
۱٫۴۴۲	۰٫۸۲۱	۷۰
۱٫۲۶۷	۰٫۶۵۰	۷۵



شکل ۱۵. تأثیر ضریب شکل بر روی بارکمانش بر واحد وزن.

کمانش و بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌یی به مدور را در ناحیه‌ی یادشده نشان می‌دهد و برای زاویه‌ی ۶۱ درجه استوانه‌ی کرکره‌یی تقریباً ۱٫۱۹ برابر استوانه‌ی هم‌وزنش بار تحمل می‌کند. به‌گفته‌ی دیگر استوانه‌ی کرکره‌یی ۱۹ درصد بیشتر از استوانه‌ی مدور هم‌وزنش بارکمانشی تحمل می‌کند.

دلیل این که با افزایش زاویه، استحکام کمانش سازه‌ی کرکره‌یی از مدور بیشتر است این است که سفتی خمشی در راستای طول استوانه با تابعی از زاویه، نسبت مستقیم دارد و سفتی کششی محیطی با این تابع نسبت عکس دارد و بدین ترتیب با افزایش و کاهش تابع مورد بحث، بارکمانش افزایش و کاهش می‌یابد.

#### ۶.۴. بررسی تأثیر ضریب شکل بر بارکمانش

در شکل ۱۵ تأثیر ضریب شکل روی بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌های کرکره‌یی و مدور نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود، حل تحلیلی در مقایسه با حل اجزاء محدود برای ضریب شکل‌های بیشتر از ۰٫۹۱ دقت بیشتری دارد و

به عبارت دیگر با کرکره‌ی کردن استوانه استحکام کمانشی آن ۲۰/۲ درصد افزایش می‌یابد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر یک روش تحلیلی برای کمانش خطی استوانه‌ی کرکره‌ی تحت بارگذاری محوری، براساس روش معادل‌سازی و نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه شد. نتایج به دست آمده با حل اجزاء محدود مقایسه شد. نتایج حاصل از بررسی تأثیر شش پارامتر مؤثر بر بارکمانش بر واحد وزن نشان می‌دهد که نتایج اجزاء محدود استوانه‌ی کرکره‌ی، با نتایج حاصل از حل تحلیلی تا جایی که کمانش کلی رخ می‌دهد، مطابقت خیلی خوبی دارد اما هنگامی که کمانش محلی روی دهد حل تحلیلی اعتبار خود را از دست می‌دهد.

نتایج عددی نشان می‌دهد که با کاهش تعداد کرکره، افزایش زاویه‌ی کرکره، کاهش ضخامت، افزایش شعاع، کاهش طول و کاهش ضریب شکل تا جایی که کمانش محلی رخ ندهد، بارکمانش استوانه‌ی کرکره‌ی نسبت به استوانه‌ی مدور افزایش می‌یابد و بیشینه‌ی این بار مربوط به جایی است که نوع کمانش تغییر پیدا می‌کند. بیشینه‌ی بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی کرکره‌ی بیش از ۲۰ درصد از بارکمانش بر واحد وزن استوانه‌ی مدور بیشتر است؛ این افزایش استحکام برای مقادیر مختلف از پارامترهای استوانه‌ی متغیر است. با توجه به دخالت شش پارامتر هندسی مستقل بر بارکمانش استوانه کرکره‌ی، دست طراح برای افزایش استحکام کمانشی باز است و می‌تواند در شرایط مختلف، بهترین حالت را برای سازه انتخاب کند.

## فهرست علائم

$a$ : ضریب شکل؛

$c$ : طول قاعده‌ی بزرگ دوزنقه (m)؛

$E$ : مدول کشسانی ( $\text{Nm}^{-2}$ )؛

$F$ : ارتفاع دوزنقه (m)؛

$h$ : ضخامت استوانه (m)؛

$k_{t2}$ : ضریب تصحیح برشی؛

$k_{t5}$ : ضریب تصحیح برشی؛

$L$ : طول استوانه (m)؛

$M_i$ : ممان‌های داخل صفحه‌ی؛

$N_i$ : نیروهای داخل صفحه‌ی؛

$n$ : تعداد کرکره؛

$r$ : شعاع انحنای هر کرکره (m)؛

$R$ : شعاع استوانه (m)؛

$s$ : طول گسترش یافته کرکره (m)؛

$T$ : انرژی جنبشی ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ )؛

$U$ : انرژی درونی ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ )؛

$u$ : جابه‌جایی طولی صفحه‌ی میانی استوانه (m)؛

$u_1$ : جابه‌جایی استوانه در راستای طولی (m)؛

$u_2$ : جابه‌جایی استوانه در راستای محیطی (m)؛

$u_3$ : جابه‌جایی استوانه در راستای شعاعی (m)؛

$V$ : انرژی پتانسیل ( $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}$ )؛

$v$ : جابه‌جایی محیطی صفحه‌ی میانی استوانه (m)؛

$w$ : جابه‌جایی شعاعی صفحه‌ی میانی استوانه (m)؛

$W$ : طول قاعده‌ی کوچک دوزنقه (m)؛

$y$ : یال دوزنقه (m).

## علائم یونانی

$\Omega$ : بارکمانش ( $\text{Nm}^{-1}$ )؛

$\theta$ : زاویه دوزنقه (درجه)؛

$\sigma_1$ : تنش نرمال در جهت طولی؛

$\sigma_2$ : تنش نرمال در جهت محیطی؛

$\sigma_6$ : تنش برشی در صفحه  $x_1x_2$ ؛

$\sigma_4$ : تنش برشی در صفحه  $x_2x_3$ ؛

$\sigma_5$ : تنش برشی در صفحه  $x_1x_3$ ؛

$\phi$ : زاویه‌ی هر کرکره با مرکز استوانه (rad)؛

$\psi_1$ : تابع چرخش حول محور  $x_2$ ؛

$\psi_2$ : تابع چرخش حول محور  $x_1$ ؛

$\gamma$ : زاویه‌ی هر کرکره با مرکز انحنای کرکره (rad)؛

$\nu$ : ضریب پواسون.

## پانوشتها

- corrugated plates
- girder
- first shear deformation theory (FSDT)
- box-girder
- Buckling load
- Shell 181

## منابع (References)

- Samanta, A. and Mukhopadhyay, M. "Finite element static and dynamic analyses of folded plates", *Engineering Structures*, **21**,(3), pp. 277-287 (1999).
- Machacek, J. and Tuma, M. "Fatigue life of girders with undulating webs", *Journal of Constructional Steel Research*, **62**(1-2), pp. 168-177 (2006).
- Ibrahim, S.A., El-Dakhkhni, W.W. and Elgaaly, M.

- “Behavior of bridge girders with corrugated webs under monotonic and cyclic loading”, *Engineering Structures*, **28**(14), pp. 1941-1955 (2006).
4. Liew, K.M., Peng, L.X. and Kitipornchai, S. “Nonlinear analysis of corrugated plates using a FSDT and a mesh-free method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **196**(21-24), pp. 2358-2376 (2007).
  5. Moon, J., Yi, J., Choi, B.H. and Lee, H.-E. “Shear strength and design of trapezoidally corrugated steel webs”, *Journal of Constructional Steel Research*, **65**(5), pp. 1198-1205 (2009).
  6. Moon, J., Yi, J.-W., Choi, B.H. and Lee, H.-E. “Lateral-torsional buckling of I-girder with corrugated webs under uniform bending”, *Thin-Walled Structures*, **47**(1), pp. 21-30 (2009).
  7. Yi, J., Gil, H., Youm, K. and Lee, H. “Interactive shear buckling behavior of trapezoidally corrugated steel webs”, *Engineering Structures*, **30**(6), pp. 1659-1666 (2008).
  8. Eldib, M.E.A.H. “Shear buckling strength and design of curved corrugated steel webs for bridges”, *Journal of Constructional Steel Research*, **65**(12), pp. 2129-2139 (2009).
  9. Kazeminia korrani, H.R. “Lateral bracing of I-girder with corrugated webs under uniform bending”, *Journal of Constructional Steel Research*, **66**(12), pp. 1502-1509 (2010).
  10. Ding, Y., Jiang, K. and Liu, Y. “Nonlinear analysis for PC box-girder with corrugated steel webs under pure torsion”, *Thin-Walled Structures*, **51**, pp. 167-173 (2012).
  11. Xia, Y., Friswell, M.I. and Flores, E.I.S. “Equivalent models of corrugated panels”, *International Journal of Solids and Structures*, **49**(13), pp. 1453-1462 (2012).
  12. Khdeir, A.A., Reddy, J.N. and Frederick, D. “A study of bending, vibration and buckling of cross-ply circular cylindrical shells with various shell theories”, *International Journal of Engineering Science*, **27**(11), pp. 1337-1351 (1989).
  13. McFarland, E.D. “An investigation of the static stability of corrugated rectangular loaded in pure shear”, Ph.D. thesis, University of Kansas, Lawrence, Kan, USA (1967).
  14. Easley, T.J. “Buckling formulas for corrugated metal shear diaphragms”, *Journal of the Structural Division*, **101**, pp. 1403-1417 (1975).
  15. TJ, E. and ED, M. “Buckling of light gage corrugated metal shear diaphragms”, *Journal of the Structural Division*, **95**, pp. 1497-516 (1969).
  16. Semenyuk, N.P. and Neskhdovskaya, N.A. “On design models in stability problems for corrugated cylindrical shells”, *International Applied Mechanics*, **38**(10), pp. 1245-1252 (2002).
  17. Semenyuk, N.P. “Stability of axially compressed noncircular cylindrical shells consisting of panels of constant curvature”, *International Applied Mechanics*, **39**(6), pp. 726-735 (2003).
  18. Reddy, J.N. and Liu, C.F. “A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells”, *International Journal of Engineering Science*, **23**(3), pp. 319-330 (1985).