مهندسی مکانیک شریف، (بهار ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۳ - ۳۳، شماره‌ی ۱، ص. ۲۹-۳۶

Original Article

ارتعاش آزاد صفحات گرافن تک‌لایه با استفاده از نظریه‌های مختلف گرادیان الاستیسیته

سیما ضیایی (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یاسوج

خواص منحصر به فرد الکتریکی و مکانیکی نانوسازه‌های کربنی آنها را در زمره موادی قرار داده که کاربردهای متنوعی دارند، و این مهم مطالعه‌ی رفتار مکانیکی آنها را حائز اهمیت گردانده است. در این پژوهش با استفاده از نظریه‌ی آیفانتیس و تنش کوپل بهبود یافته بهبودیافته به پیش‌بینی رفتار ارتعاشی نانوصفحات گرافن با شرایط مرزی ساده پرداخته شده است. نتایج نشان می‌دهد که نظریه‌ی آیفانتیس را می‌توان به‌عنوان نظریه‌یی با یک مقیاس طول برای این مهم استفاده کرد در حالی که نظریه‌ی تنش کوپل شاید چندان مناسب نباشد. همچنین دیده می‌شود که پارامتر مقیاس طول نه‌تنها تابعی از کایرالیتی و سایز نانوصفحات مربعی است بلکه با تغییر نظریه‌ی غیرکلاسیک نیز تغییر می‌کند. شایان ذکر است که نظریه‌های گرادیان الاستیسیته مقیاس شده ضرورتاً در تقریب بسامدهای مرتبه بالاتر باهم تطابق ندارند هرچند که اختلاف آنها با افزایش طول ورق مربعی کاهش می‌یابد.

واژگان کلیدی: ارتعاش آزاد صفحات گرافن، کایرالیتی، نظریه‌ی آیفانتیس، نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته.

ziaee@yu.ac.ir

۱. مقدمه

خواص منحصر به فرد الکتریکی و مکانیکی نانوسازه‌های کربنی آنها را در زمره موادی قرار داده که کاربردهای متنوع دارند.[۱] نانوسازه‌های کربنی را می‌توان به گروه‌های نانوسازه‌های کربنی صفربعدی و یک‌بعدی، فیولرنس‌ها و نانولوله‌های کربنی و صفحات گرافن تقسیم کرد.[۱] گرافن یک شبکه‌ی لانه‌زنبوری در مقیاس اتمی است که از اتم‌های کربن ساخته شده است.[۲] این صفحه با ضخامت یک اتم نه‌تنها نازک‌ترین ماده موجود تاکنون است[۲] بلکه خواص الکتریکی، مکانیکی، حرارتی و نورشناختی برجسته‌یی نیز دارد. در واقع گرافن دارای مدول الاستیک حدود ۱ TPa، استحکام شکست حدود ۱۲۵ GPa، رسانایی حرارتی معادل $۵ \times ۱۰^{۳}\ \mathrm{Wm^{-۱}K^{-۱}}$ و مساحت سطح مخصوص معادل $۲۶۳۰\ \mathrm{m^{۲}g^{-۱}}$ است.[۳] از سوی دیگر به‌دلیل نسبت بالای سختی به جرم، گرافن در مقیاس میکرو دارای بسامدهای تشدید پایه در محدوده‌ی ۱ تا ۱۷۰ مگاهرتز است.[۳] این خواص، گرافن را به یک نامزد مناسب برای استفاده در پوشش سطح، حس‌گرهای شیمیایی، نانوکامپوزیت‌ها با پایه‌ی گرافن،[۴] مافوق خازن‌ها، الکترودهای ترانما، سلول‌های نیروزای نوری و دستگاه‌های زیستی[۵] تبدیل کرده است.

در ضمن، براساس شباهت‌سنجی با دستگاه‌های مینیاتوری که مبتنی بر نانولوله‌ی کربنی هستند، امکان طراحی نوسان‌گر گیگاهرتز مبتنی بر نوسان تلسکوپی صفحات گرافن، نانولوله‌ی مبتنی بر حرکت تلسکوپی لایه‌های گرافن و نانوتشدیدگر مبتنی بر ارتعاشات نسبی کوچک صفحات گرافن نیز پیشنهاد شده است.[۱]

این کاربردهای وسیع صفحات گرافن نیازمند بررسی همه‌جانبه‌ی رفتار مکانیکی صفحات گرافن تحت بارگذاری‌های مختلف است. اگرچه با انجام کارهای آزمایشگاهی پیشرفت‌های شایان توجهی در تحقیقات نانومواد‌ها به دست آمده، بسیاری از محققین به استفاده از روش‌های محاسباتی نانومکانیک برای تحلیل رفتار مکانیکی نانومواد متوسل می‌شوند، زیرا شبیه‌سازی کامپیوتری براساس مدل‌های فیزیکی معقول نه فقط ویژگی‌های مولکولی نانومواد را برای نظریه‌پردازان برجسته می‌کند بلکه می‌تواند راهنمایی و تفسیری را برای تجربه‌گرها ارائه کند.[۶] با این وجود نسبت به نانومواد مشخص، تعیین روش مؤثر و کارآمدی که پاسخ‌گوی محققین باشد همچنان چالش‌برانگیز است. مسلماً نظریه‌های کلاسیک به دلیل در نظر نگرفتن اثر اندازه در این مقوله ناکارآمدند.[۷]

میدلین[۸] یک نظریه‌ی الاستیسته با ریزساختار را توسعه داد که در آن انرژی کرنشی به‌صورت تابعی از کرنش‌های ماکروسکوپی، اختلاف بین تغییر شکل ماکروسکوپی و میکروسکوپی، و گرادیان تغییر شکل میکروسکوپی بیان شده است. در این نظریه انرژی کرنشی علاوه بر ثابت‌های لامه، ۱۶ ثابت دیگر را نیز در بر می‌گیرد. میدلین این نظریه‌اش را ساده کرد و ۳ نسخه‌ی جدید که در فرض مربوط به ارتباط بین گرادیان تغییرشکل میکروسکوپ و جابه‌جایی ماکروسکوپی با هم متفاوت بودند ارائه کرد.[۹] در نظریه‌ی ساده شده‌ی میدلین، که در آن انرژی کرنشی فقط تابعی از گرادیان مرتبه اول تانسور کرنش است، ۵ ثابت جدید به‌همراه ثوابت لامه در انرژی کرنشی وجود دارد.[۹] می‌توان نشان داد که مجموع این تعداد ثابت در دو ثابت جدید قابل گروه‌بندی است.[۷] بدین ترتیب تعداد ثابت‌های جدید ماده از ۵ به دو کاهش

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۶/۲۸، اصلاحیه ۱۳۹۴/۹/۲۴، پذیرش ۱۳۹۵/۱/۲۴.

می‌یابد.[۷] شایان ذکر است که در نظریه‌های میدلین نه‌تنها انرژی پتانسیل، بلکه انرژی جنبشی نیز برحسب کمیت‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی نوشته می‌شود. براساس مطالعات آیفانتیس که در حوزه‌ی پلاستیسیته و الاستیسیته‌ی غیرخطی انجام شده بود، آیفانتیس و همکارانش نظریه‌ی گرادیان الاستیسیته‌ی دیگری با یک طول داخلی پیشنهاد دادند.[۷] معادله‌ی حاکم این نظریه تابعی از کرنش و لاپلاسین کرنش است. می‌توان نشان داد اگر در نظریه‌ی ساده شده‌ی میدلین دو ثابت جدید با هم مساوی فرض شوند، نظریه‌ی ساده شده میدلین به نظریه‌ی گرادیان الاستیسیته آیفانتیس تبدیل می‌شود.[۱۰]

براساس نظریه‌ی گرادیان کرنش میدلین، نظریه‌ی گرادیان کرنش بهبود یافته که دربرگیرنده‌ی ۳ پارامتر مقیاس طول جدید است پیشنهاد شده است.[۱۱] در این نظریه کل چگالی انرژی تغییر شکل مستقل از تانسور گرادیان چرخش نامتقارن است و فقط تابعی از تانسور کرنش متقارن، بردار گرادیان اتساع، تانسور گرادیان کشش انحرافی و تانسور گرادیان چرخش متقارن است.[۱۱]

نظریه‌ی تنش کوپل کلاسیک و نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته از دیگر نظریه‌های شناخته شده‌ی محیط پیوسته‌ی مرتبه بالا هستند که به‌ترتیب دو[۱۲] و یک[۱۳] پارامتر مقیاس طول جدید را در بر می‌گیرند. نشان داده شده است که اگر در نظریه‌ی گرادیان کرنش بهبودیافته دو تا از پارامترهای مقیاس طول صفر شوند، نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته ایجاد می‌شود. بنابراین نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته حالت خاصی از نظریه‌ی گرادیان کرنش بهبودیافته است.[۱۴]

در میان نظریه‌های غیرمحلی به شکل انتگرالی که در آنها میانگین حجم متغیرهای حالت محاسبه می‌شود می‌توان به نظریه‌ی ایرینگن اشاره کرد.[۷] نظریه‌ی الاستیسیته‌ی غیرمحلی دیگری نیز توسط ایرینگن تدوین شده که در آن انتگرال با گرادیان جایگزین شده است. در این نظریه فقط یک پارامتر مقیاس طول به کار گرفته شده و معادله‌ی حاکم براساس تانسور تنش غیرمحلی و لاپلاس تانسور تنش بیان می‌شود.[۷]

اسکاس و همکاران[۱۵] نشان دادند که نظریه‌ی آیفانتیس را می‌توان براساس گرادیان تنش یعنی آنچه که در نظریه‌ی غیرمحلی ایرینگن دیده می‌شود بازنویسی کرد. تفاوت نظریه‌ی آیفانتیس و ایرینگن در شکل معادلات تعادل گشتاور[۱۶] است. این معادلات در نظریه‌ی ایرینگن براساس انشعاب تانسور تنش غیرمحلی بیان می‌شود که منجر به ممزوج شدن معادلات تعادل می‌شود در حالی که طبق نظریه‌ی آیفانتیس، معادلات تعادل گشتاور تابعی از انشعاب تانسور تنش محلی و معادلات تعادل غیرممزوج است که این مهم مدل آیفانتیس را برای تحلیل اجزاء محدود مناسب‌تر می‌سازد.[۱۶] در میان نظریه‌های غیرکلاسیک شناخته شده، استفاده از نظریه‌ی غیرمحلی ایرینگن برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی نانوساختارهای کربنی بسیار متداول است.

پرادهام[۱۷] با استفاده از نظریه‌ی الاستیک غیرمحلی و تغییرشکل برشی مرتبه بالا، نیروی کمانش الاستیک صفحات بی‌عیب تک‌لایه گرافن را به دست آورده و تأثیر شرایط مرزی و نسبت ابعادی برظرفیت تحمل بار صفحه گرافن را بررسی کرده است. فرجی پور و همکاران[۱۸] کمانش نانوصفحات دایره‌یی گرافن تحت بار فشاری ـ شعاعی را با استفاده از مدل ورق پیوسته‌ی غیرمحلی مطالعه کرده‌اند. انصاری و همکاران[۱۹] کمانش دومحوری و رفتار ارتعاشی گرافن را با استفاده از نظریه‌ی ورق بر پایه اتم‌گرایی غیرمحلی بررسی کرده‌اند. بررسی تأثیر عیوب تهی جای[۱] بر بار بحرانی کمانش صفحات تک‌لایه گرافن توسط ترپس و واتیستاس[۲] نشان می‌دهد که تنش بحرانی کمانش با افزایش چگالی عیوب کاهش می‌یابد. ترپس و واتیستاس[۲] از مدل اجزاء محدود برای مطالعه‌ی خود استفاده کردند. محققین دیگری نیز[۲۰] با استفاده از نظریه‌ی غیرمحلی ورق نازک ارتوتروپ کمانش صفحات چندلایه گرافن را تحلیل کرده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که بارکمانشی نظیر حالت غیر هم‌فاز برخلاف بارکمانشی نظیر حالت هم‌فاز به واکنش واندروالسی وابسته است.[۲۰] یافته‌های آنها به‌وضوح نشان می‌دهد که از اثر کاهشی پارامتر غیرمحلی روی بارکمانشی نظیر حالت غیر هم‌فاز با قوی‌تر شدن واکنش واندروالس کاسته می‌شود.[۲۰] مطالعه‌ی سرامی ـ فروشانی و اظهری[۲۱] نیز وابستگی شدید بار بحرانی و بسامد طبیعی صفحه‌ی تک‌لایه‌ی گرافن را به پارامتر غیرمحلی مقیاس کوچک نشان می‌دهد. آنها همچنین تأثیر شرایط مرزی، نسبت ابعادی و پارامتر غیرمحلی را بر بسامد طبیعی صفحات گرافن چندلایه مورد بررسی قرار داده‌اند.[۲۲] انصاری و سهمنی[۲۳] با ترکیب نظریه‌ی غیرمحلی ایرینگن و نظریه‌های مختلف ورق همچون نظریه‌ی ورق کلاسیک، نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه اول و تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر، معادله‌ی حاکم بر بارکمانش دومحوری صفحه‌ی تک‌لایه‌ی گرافنی را یافتند که در چهارسوی خود پین شده است. آنها با تطابق معادله‌ی به دست آمده با نتایج حاصل از شبیه‌سازی به‌روش دینامیک مولکولی مقدار مؤثر پارامتر غیرمحلی نظیر هر نظریه‌ی ورق را برای صفحات آرمچیر و زیگزاگ تعیین کردند. پیرو نتایج آنها مقدار پارامتر غیر محلی تابع مدل ورق مورد استفاده تغییر می‌کند اما مستقل از کایرالیتی است.[۲۳]

مورمو و پرادهان[۲۴] با استفاده از نظریه‌ی الاستیک غیرمحلی پاسخ ارتعاشی نانوصفحه‌ی گرافن تک‌لایه را مطالعه کرده‌اند. نتایج عددی آنها نشان می‌دهد که بسامدهای پایه شدیداً به ضریب مقیاس کوچک وابسته است. شن و همکاران[۲۵] با استفاده از مدل ورق غیرمحلی تأثیر دما بر نسبت بسامد پایه‌ی خطی به غیرخطی صفحات گرافن تک‌لایه با شرایط مرزی ساده را بررسی کرده‌اند. آنها از تطابق نتایج حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با نتایج مدل ورق غیرمحلی، مقدار پارامتر غیرمحلی را تقریب زده‌اند. به روشی مشابه، شن و همکاران[۲۶] ارتعاشات غیرخطی صفحات گرافن دولایه با شرایط مرزی ساده را در محیط حرارتی بررسی کرده‌اند. نتایج آنها نشان می‌دهد که تغییرات دما و نسبت ابعادی بر ارتعاش غیرخطی صفحات دولایه‌ی گرافن تأثیر دارد هرچندکه تأثیر تغییرات دما چشمگیرتر است.[۲۶] آنها همچنین نشان دادند که ضرایب غیرخطی واکنش واندروالس تقریباً بر پاسخ ارتعاش غیرخطی صفحات دولایه گرافن بی‌تأثیرند و می‌توان در مدل‌سازی به روش ورق غیرمحلی از آنها صرف‌نظر کرد.[۲۶] تأثیر شرایط مرزی بر ارتعاش آزاد صفحات تک‌لایه‌ی گرافن و پارامتر مقیاس کوچک مورد استفاده در نظریه‌ی ورق نازک غیرمحلی توسط انصاری و همکاران[۲۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج آنها وابستگی پارامتر غیرمحلی را به کایرالیتی و شرط مرزی نشان می‌دهد.[۲۷] آنها نیز از تطابق نتایج حاصل از مدل‌سازی به دو روش محیط پیوسته و دینامیک مولکولی برای تعیین پارامتر مقیاس کوچک استفاده کرده‌اند. تأثیر محیط الاستیک محصورکننده‌ی صفحات گرافن بر پاسخ غیرخطی ارتعاش آزاد[۲۸] و ارتعاش واداشته[۲۹] آنها نیز بررسی شده است. با این وجود در میان مطالعات انجام شده برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی صفحات گرافن، برخی از محققین از نظریه‌های محیط پیوسته‌ی غیرکلاسیک دیگر نیز استفاده کرده‌اند.[۳۰و۳۱]

نظر به این که تعیین روش مؤثر و کارآمدی که پاسخ‌گوی محققین باشد همچنان چالش برانگیز است، در مطالعه‌ی حاضر سعی شده ضمن بررسی تأثیر نظریه‌های مختلف غیرکلاسیک بر میزان مقیاس طول، امکان بهره‌گیری از آنها برای پیش‌بینی بسامد طبیعی ورق گرافن تک‌لایه فراهم شود. با توجه به استفاده‌ی وسیع از نظریه‌ی غیرمحلی ایرینگن و موجود بودن نتایج آن از دو نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته و نظریه‌ی آیفانتیس به‌عنوان دو نظریه با یک مقیاس طول در تعریف انرژی کرنشی

بهره گرفته شده است. در ضمن تأثیر اضافه کردن گرادیان شتاب به نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته در پیش‌بینی بسامد طبیعی گرافن مورد بحث قرارگرفته است. بدین منظور از نتایج دینامیک مولکولی موجود[۲۷] بهره گرفته شده است. شایان ذکر است که با توجه به مطالعات نویسنده تاکنون از نظریه‌ی آیفانتیس برای شبیه‌سازی رفتار ارتعاشی نانوصفحات گرافن استفاده نشده است.

۲. معادلات حاکم بر ارتعاش جانبی ورق گرافن

در این بخش با استفاده از اصل همیلتون و استفاده از روش ریلی-ریتز دسته معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش جانبی صفحه گرافن استخراج می‌شود. برای تلفیق اثر اندازه با فرضیات حاکم بر نظریه‌ی ورق کیرشهف از نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته و نظریه‌ی آیفانتیس استفاده شده است. پیرو اصل همیلتون داریم:

$$\int_{0}^{t_1} (\delta T - \delta U)\, dt = 0 \qquad (۱)$$

که در آن T معرف انرژی جنبشی کل صفحه‌ی گرافن، و U معرف انرژی پتانسیل کل آن است.

طبق نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته، وردش[۲] انرژی پتانسیل به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta U = \int_V \left(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + m_{ij}\delta\chi_{ij}\right) dV \qquad (۲)$$

که در آن σ_{ij}، ε_{ij} و $m_{ij} = 2l^2 G\chi_{ij}$ و χ_{ij} به‌ترتیب مؤلفه‌های تانسور تنش، تانسورکرنش، بخش انحرافی تانسور تنش کوپل و تانسور متقارن انحناء هستند.[۳۰] همچنین V حجم ورق را مشخص می‌کند و G مدول صلبیت است.

طبق فرضیات حاکم بر نظریه‌ی ورق کیرشهف، می‌توان معادله‌ی ۲ را براساس مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی هر نقطه (یعنی u_0, v_0, w_0) با مختصات $(x, y, 0)$در صفحه‌ی میانی ورق نوشت. جزئیات بیشتر در منابع انتهایی این نوشتار[۳۰] ذکر شده است.

پیرو نظریه‌ی ساده شده میدلین وردش انرژی جنبشی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\delta T = \int_V \left(\rho\dot{u}\delta\dot{u} + \rho\dot{v}\delta\dot{v} + \rho\dot{w}\delta\dot{w}\right) dV + \int_V \left(\rho l_1^2 \left(\dot{u}_{,i}\delta\dot{u}_{,i} + \dot{v}_{,i}\delta\dot{v}_{,i} + \dot{w}_{,i}\delta\dot{w}_{,i}\right)\right) dV \qquad (۳)$$

که در آن u، v و w مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی هر نقطه از ورق به مختصات (x, y, z) است که طبق فرضیات ورق کیرشهف قابل بیان برحسب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی نقطه در صفحه‌ی میانی است. $\dot{()}$ مشتق جزئی نسبت به زمان و $()_{,i}$ معرف مشتق جزئی نسبت به هریک از مؤلفه‌های مختصات (x, y, z) است و نهایتاً l_1 مقیاس طولی جدا از مقیاس طول تعریف شده در وردش انرژی پتانسیل است.[۷]

بعد از جایگزین کردن معادلات ۲ و ۳ در معادله‌ی ۱ و تقریب مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی صفحه‌ی میانی با توابعی که شرایط مرزی هندسی را ارضاء می‌کنند (طبق روش ریلی ـ ریتز) می‌توان دسته معادله‌ی دیفرانسیل معمولی حاکم بر ارتعاش جانبی ورق را یافت که کاملاً مستقل از جابه‌جایی در صفحه‌ی ورق است:

$$M_{mnpq}\ddot{W}_{pq} + K_{mnpq}W_{pq} = 0 \qquad (۴)$$

در معادله‌ی ۴ مقادیر M_{mnpq} و K_{mnpq} به‌ترتیب در معادلات (۱الف) و (۲الف) در ضمیمه تعریف شده‌اند. شایان ذکر است که در تمامی پژوهش‌های انجام شده براساس نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته[۳۳،۳۲،۳۰] مقیاس طول l_1 در معادله‌ی ۳ در نظرگرفته نمی‌شود. بدین ترتیب معادلات حاکم بر این نظریه، شامل یک مقیاس طول است در حالی که اگر از l_1 صرف نظر نشود یک دسته معادلات دیفرانسیل معمولی با دو مقیاس طول حاصل می‌شود.

در صورت بهره‌گیری از نظریه‌ی آیفانتیس، معادله‌ی ۲ چنین تغییر می‌کند:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} dV \qquad (۵)$$

که مؤلفه‌های تانسور تنش در آن عبارت‌اند از:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - l^2\varepsilon_{kl,mm}\right) \qquad (۶)$$

$\varepsilon_{kl,mm}$ لاپلاسین تانسورکرنش است. بدین‌ترتیب ماتریس سختی به‌شکل معادله‌ی ۳الف موجود در ضمیمه‌ی الف تغییر می‌کند.

با تعریف $W_{pq} = e^{-\omega t}\bar{W}_{pq}$ در معادلات ۴، و با صفرگذاشتن دترمینان $\left|\left[-\omega^2 M_{mnpq} + K_{mnpq}\right]\right|$ می‌توان بسامدهای طبیعی صفحه‌ی گرافن را تعیین کرد.

۳. نتایج عددی

در این بخش با استفاده از بسامد طبیعی پایه صفحات گرافن آرمچیر و زیگزاگ با شرایط مرزی ساده حاصل از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی،[۲۷] مقیاس‌های کوچک نظیر دو نظریه‌ی غیرکلاسیک استفاده شده برای استخراج معادله‌ی ۴، تعیین می‌شود. بدین منظور از توابع مثلثاتی زیر برای استفاده در معادلات ۱الف، ۲الف یا ۳الف بهره گرفته شده است.

$$\phi_i = \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right), \qquad \varphi_i = \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \qquad i = m, p, \quad j = n, q \qquad (۷)$$

اگرچه مطالعات انجام شده پیرامون خواص الاستیک صفحات گرافن نشان‌گر آن است که گرافن خواص یک ماده‌ی ارتوتروپ را دارد[۲۵] اختلاف میان خواص الاستیسیته‌ی آن هم‌جهت با آرمچیر و زیگزاگ چندان قابل توجه نیست تا جایی که در برخی از پژوهش‌ها برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی صفحات گرافن از مدل مواد ایزوتروپ[۲۷] استفاده شده است. در این مطالعه نیز گرافن به‌صورت ایزوتروپ شبیه‌سازی شده، و از خواص مواد مورد استفاده[۲۷] بهره گرفته شده است.

در جدول ۱ تأثیر افزایش مقیاس طول در نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته ($l_1 = 0$) بر سه بسامد اول یک صفحه‌ی نازک با شرط مرزی ساده فهرست شده است. معادله‌ی استخراج شده[۳۰] برای اعتبارسنجی مورد استفاده قرارگرفته است. ملاحظه می‌شود که با افزایش مقیاس طول (l) بسامد طبیعی رشد می‌کند. با توجه به فرمول ۶، و به دلیل افزوده شدن B به D، هیچ دلیلی جزافزایش سختی خمشی ورق برای آن وجود ندارد. بدیهی است بسامد طبیعی پیش‌بینی شده با این نظریه، بزرگ‌تر از چیزی است که با نظریه‌ی کلاسیک ($l = 0$) حاصل می‌شود.

در جدول ۲ نشان داده شده است که اضافه شدن گرادیان شتاب به نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته بر پیش‌بینی بسامد طبیعی میکرو/نانو ورق نازک چه تأثیری می‌گذارد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت l_1/l مقدار پیش‌بینی شده‌ی بسامد

جدول ۱. مقایسه‌ی سه بسامد اول (MHz) برای یک میکرورزونانس نازک با شرط مرزی ساده ($a/b = ۱,\ a/h = ۳۰$).

شماره حالت	مقیاس طول (l) (میکرومتر)	مدل موجود	[۳۰]
ω_{11}	۰	۰٫۵۹۱۲	۰٫۵۹۱۲
	۵	۲٫۹۱۱۵	۲٫۹۱۱۵
	۱۰	۵٫۷۳۲۲	۵٫۷۳۲۲
ω_{12}	۰	۱٫۴۷۶۱	۱٫۴۷۶۱
	۵	۷٫۲۶۸۷	۷٫۲۶۸۷
	۱۰	۱۴٫۳۱۰۹	۱۴٫۳۱۰۹
ω_{22}	۰	۲٫۳۵۸۵	۲٫۳۵۸۵
	۵	۱۱٫۶۱۴۱	۱۱٫۶۱۴۱
	۱۰	۲۲٫۸۶۶۲	۲۲٫۸۶۶۲

جدول ۲. تأثیر حضور گرادیان تنش در نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته بر سه بسامد اول میکرورزونانس ($a/b = ۱,\ a/h = ۳۰,\ l = ۱۷٫۶\ \mu m$).

شماره حالت	نسبت مقیاس طول ($l_۱/l$)	مدل موجود (MHz)
ω_{11}	۰	۱۰٫۰۵۳۴
	۰٫۵	۷٫۳۹۴۱
	۱	۴٫۷۹۵۷
ω_{12}	۰	۲۵٫۰۲۰۶
	۰٫۵	۱۴٫۲۱۶۵
	۱	۸٫۱۶۵۲
ω_{22}	۰	۳۹٫۸۵۳۳
	۰٫۵	۱۹٫۱۲۳۵
	۱	۱۰٫۵۱۲۴

طبیعی کاهش می‌یابد و بدین ترتیب ممکن است بتوان با تنظیم مناسب نسبت $l_۱/l$ میزان بسامد پیش‌بینی شده را از مقدار حاصل از نظریه‌ی کلاسیک کم‌تر کرد. اهمیت این موضوع به مقادیر واقعی بسامدهای طبیعی میکرو/نانورزونانس نازک بازمی‌گردد که از مقدار پیش‌بینی شده توسط نظریه‌های کلاسیک بیشتر یا کم‌تر است.

در جدول ۳ نیز مقادیر بسامد طبیعی پایه‌ی نانورزونانس گرافن آرمچیر و زیگزاگ با شرایط مرزی ساده به‌همراه مقادیر پیش‌بینی شده توسط نظریه‌ی کلاسیک ورق فهرست شده است. دیده می‌شود که بسامد طبیعی نانورزونانس گرافن قدری از مقدار کلاسیک آن کوچک‌تر است. لذا پیرو نتیجه‌ی حاصل از جدول ۱ به نظر می‌رسد که برای بهره‌گیری از نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته برای تحلیل ارتعاش آزاد نانورزونانس گرافن با شرایط مرزی ساده باید مقیاس طول $l^۲$ در معادلات حاکم مقداری منفی را بپذیرد (جدول ۴).

از طریق تطابق میان مقادیر بسامد طبیعی پایه نانوصفحات گرافن حاصل از

جدول ۳. بسامد طبیعی نانوصفحه‌ی گرافن آرمچیر و زیگزاگ با شرط مرزی ساده حاصل از نظریه‌ی کلاسیک و دینامیک مولکولی.

طول نانوورق مربعی (nm)	بسامد طبیعی پایه (THz) براساس دینامیک مولکولی		بسامد طبیعی پایه (THz) براساس نظریه‌ی کلاسیک
	زیگزاگ [۲۷]	آرمچیر [۲۷]	
۱۰	۰٫۰۵۸۷۷۲۵	۰٫۰۵۹۵۰۱۴	۰٫۰۶۵۷۹۰۸
۱۵	۰٫۰۲۷۳۸۸۱	۰٫۰۲۷۷۹۲۸	۰٫۰۲۹۲۵۵۸
۲۰	۰٫۰۱۵۷۵۲۴	۰٫۰۱۵۸۱۴۱	۰٫۰۱۶۴۵۹۴
۲۵	۰٫۰۰۹۹۸۴۰	۰٫۰۰۹۹۹۷۵	۰٫۰۱۰۵۳۴۹
۳۰	۰٫۰۰۷۰۶۵۵	۰٫۰۰۷۰۷۱۲	۰٫۰۰۷۳۱۶۲
۳۵	۰٫۰۰۵۲۹۸۲	۰٫۰۰۵۲۹۹۳	۰٫۰۰۵۳۷۵۳
۴۰	۰٫۰۰۴۰۹۸۵	۰٫۰۰۴۱۰۱۷	۰٫۰۰۴۱۱۵۵

شبیه‌سازی دینامیک مولکولی[۲۷] (جدول ۳) با مقادیر حاصل از مدل‌سازی حاضر، مقادیر طول مقیاس نظیر هر نظریه تقریب‌زده شده است (جداول ۴ و ۵).

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که در نظریه‌ی آیفانتیس، برای پیش‌بینی بسامد پایه‌ی نانوصفحات گرافن می‌توان با برابر دانستن مقیاس طول در انرژی کرنشی با مقیاس طول در انرژی جنبشی، با خطایی ناچیز به نتایج مقبولی رسید؛ همانند آنچه که با استفاده از نظریه‌ی ایرینگن حاصل شده است.[۲۷] این مهم در نظریه‌ی ترکیبی تنش کوپل بهبودیافته امکان‌پذیر نیست. شایان ذکر است که برخلاف نظریه‌ی آیفانتیس، امکان به‌کارگیری نظریه‌ی ایرینگن در ساخت یک انرژی کاربردی وجود ندارد.[۳۴] پیرو هر دو نظریه‌ی به‌کار گرفته شده در این مطالعه، مقیاس طول تابعی از کایرالیتی و اندازه‌ی نانوصفحه‌ی گرافن تغییر می‌کند.

در شکل ۱ با فرض عدم تأثیر حالت ارتعاش بر مقدار مقیاس طول، با استفاده از مقیاس طول محاسبه شده براساس تطابق بسامد طبیعی پایه حاصل از نظریه‌ی غیرکلاسیک و دینامیک مولکولی، تأثیر نظریه‌های غیرکلاسیک بر میزان پیش‌بینی شده‌ی بسامدهای مرتبه بالاتر نانوصفحات گرافن دیده شده است. در این شکل MCS و C.MCS به‌ترتیب اختصارهایی هستند برای نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته، که در آن مجذور مقیاس طول با یک مقدار منفی جایگزین شده، و تنش کوپل بهبودیافته که با گرادیان شتاب ترکیب شده است. چنان که مشاهده می‌شود با وجود تطابق خوبی که در پیش‌بینی بسامد پایه توسط این سه نظریه ایجاد شده، در میزان بسامدهای طبیعی مرتبه بالاتر با هم اختلاف دارند. هرچند این اختلاف با افزایش طول نانوورق مربعی گرافن کم می‌شود.

۴. نتیجه‌گیری

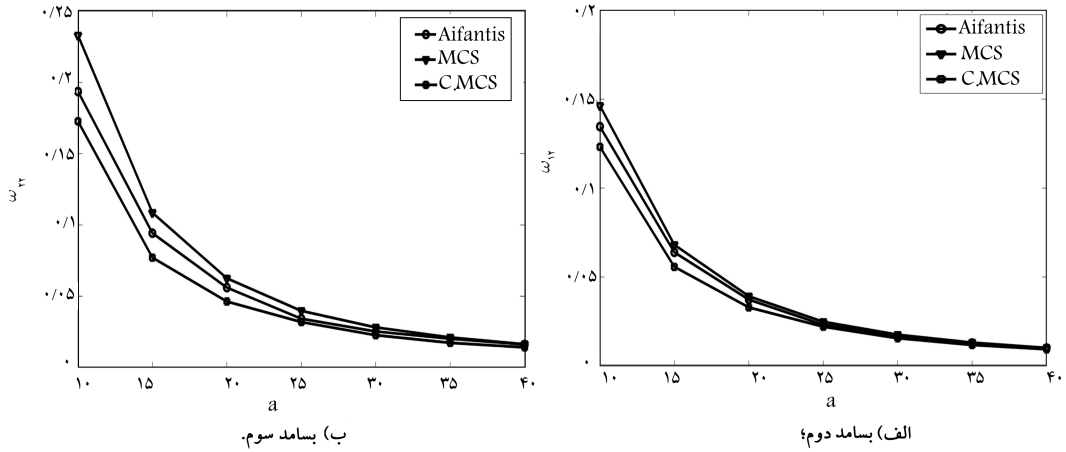
نظر به این که تعیین روشی مؤثر و کارآمد که پاسخ‌گوی محققین در زمینه‌ی شبیه‌سازی رفتار مکانیکی نانوسازه‌ها باشد چالش برانگیز است، در این مطالعه سعی شده ضمن بررسی تأثیر نظریه‌های مختلف غیرکلاسیک بر میزان مقیاس طول، امکان بهره‌گیری از آنها برای پیش‌بینی بسامد طبیعی ورق گرافن تک‌لایه مطالعه شود. بدین‌منظور از دو نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته و نظریه‌ی آیفانتیس بهره گرفته شده است. در ضمن تأثیر اضافه‌کردن گرادیان شتاب به نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته در پیش‌بینی بسامد طبیعی گرافن مورد بحث قرار گرفته است. بدین منظور از نتایج دینامیک مولکولی موجود در منابع در دسترس بهره گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که:

جدول ۴. بسامد پایه‌ی نانوصفحات گرافن با شرایط مرزی ساده براساس نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته با فرض آن که $l^2 > 0$.

طول نانوورق مربعی (nm)	نسبت مجذور مقیاس طول به ضخامت (l^2/h)	زیگزاگ (THz)	نسبت مجذور مقیاس طول به ضخامت (l^2/h)	آرمچیر (THz)
۱۰	$-(۰/۲)^2$	۰/۰۵۸۷۸۶۲	$-(۰/۱۹)^2$	۰/۰۵۹۵۰۵۵
۱۵	$-(۰/۱۵۸)^2$	۰/۰۲۷۳۵۳۵	$-(۰/۱۴)^2$	۰/۰۲۷۷۷۳۲
۲۰	$-(۰/۱۳)^2$	۰/۰۱۵۷۴۲۸	$-(۰/۱۲۴)^2$	۰/۰۱۵۸۰۸۸
۲۵	$-(۰/۱۴۲)^2$	۰/۰۰۹۹۸۵۲	$-(۰/۱۴)^2$	۰/۰۱۰۰۰۱۰
۳۰	$-(۰/۱۱۵)^2$	۰/۰۰۷۰۶۸۲	$-(۰/۱۱۳)^2$	۰/۰۰۷۰۷۶۹
۳۵	$-(۰/۰۷۵)^2$	۰/۰۰۵۲۹۸۶	$-(۰/۰۷۴۹)^2$	۰/۰۰۵۲۹۸۸
۴۰	$-(۰/۰۴۲)^2$	۰/۰۰۴۰۹۷۲	$-(۰/۰۳۶۵)^2$	۰/۰۰۴۱۰۱۷

جدول ۵. بسامد پایه‌ی نانوصفحات گرافن با شرایط مرزی ساده براساس نظریه‌های غیرکلاسیک.

اندازه ورق	نظریه‌ی آیفانتیس $(l/l_1 = 1)$				تنش کوپل بهبودیافته				
مربعی (nm)	مقیاس طول	زیگزاگ	مقیاس طول	آرمچیر	l_1	l/l_1	زیگزاگ	l_1	l/l_1	آرمچیر
۱۰	۱/۰۴۵	۰/۰۵۸۷۷۸۶	۰/۹۶۵	۰/۰۵۹۵۳۲	۰/۹۹	۰/۰۵	۰/۰۵۸۷۸۵	۰/۹۲	۰/۰۵	۰/۰۵۹۵۴۱
۱۵	۱/۱۵	۰/۰۲۷۳۹۱۹	۰/۹۹	۰/۰۲۷۷۸۸	۱/۶۹	۰/۰۵	۰/۰۲۷۳۴۷	۱/۴۵	۰/۰۵	۰/۰۲۷۷۲۶
۲۰	۱/۲۳	۰/۰۱۵۷۵۶۸	۱/۱۶۵	۰/۰۱۵۸۱۶	۲	۰/۰۴	۰/۰۱۵۷۶۳	۱/۹	۰/۰۴	۰/۰۱۵۸۱۴
۲۵	۱/۸۴	۰/۰۰۹۹۹۰	۱/۸۲۳	۰/۰۰۹۹۹۷۳	۲	۰/۰۳	۰/۰۱۰۱۲۵	۲	۰/۰۳	۰/۰۱۰۱۲۵
۳۰	۱/۷۲	۰/۰۰۷۰۶۸	۱/۷۰۵	۰/۰۰۷۹۷۱۶	۲/۲۵	۰/۰۲۵	۰/۰۰۷۰۶۰۷	۲/۲	۰/۰۲۵	۰/۰۰۷۰۷۰۱
۳۵	۱/۲	۰/۰۰۵۲۹۸	۱/۱۹۵	۰/۰۰۵۲۹۹۳	۲/۵	۰/۰۲۵	۰/۰۰۵۳۰۵۸	۲/۵	۰/۰۲۵	۰/۰۰۵۳۰۵۸
۴۰	۰/۷	۰/۰۰۴۰۹۹	۰/۶۴۲	۰/۰۰۴۱۰۱۷	۲/۳	۰/۰۲۳	۰/۰۰۴۱۰۰۵	۲/۲	۰/۰۲۳	۰/۰۰۴۱۰۱۶۸



الف) بسامد دوم؛ ب) بسامد سوم.

شکل ۱. تأثیر نوع نظریه‌ی گرادیان الاستیسیته بر تقریب‌زنی بسامد دوم و سوم نانوصفحات گرافن با افزایش ابعاد ورق.

۱. وجود مقیاس طول در نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته منجر به افزایش سختی خمشی سازه می‌شود که به‌نوبه‌ی خود منجر به افزایش بسامد طبیعی پیش‌بینی شده نسبت به نظریه‌های کلاسیک می‌شود. لذا چنانچه مقدار بسامد طبیعی نانوسازه نسبت به آنچه که توسط نظریه‌ی کلاسیک تعیین می‌شود پایین‌تر باشد استفاده از این نظریه برای شبیه‌سازی ناکارآمد است.

۲. چنانچه مجذور مقیاس طول در نظریه‌ی تنش کوپل بهبود یافته با یک مقدار منفی جایگزین شود به‌سبب کاهش سختی خمشی نانوسازه بسامد طبیعی پیش‌بینی شده کم‌تر از مقدار حاصل از نظریه‌ی کلاسیک می‌شود. بر اثر این عمل، انرژی کرنشی دیگر مثبت معین نخواهد بود.

۳. با پیروی از نظریه‌ی ساده شده میدلین و اضافه کردن گرادیان سرعت به هنگام محاسبه‌ی انرژی جنبشی نانوسازه، اگرچه نظریه‌ی تنش کوپل بهبودیافته از نظریه‌یی با یک مقیاس طول، به نظریه‌یی با دو مقیاس طول تبدیل می‌شود، بازه مقادیر پیش‌بینی شده‌ی بسامد طبیعی نسبت به نظریه‌ی کلاسیک افزایش می‌یابد و فقط مقادیر بزرگ‌تر از نظریه‌ی کلاسیک را دربر نمی‌گیرد.

۴. با توجه به تطابق نقطه به نقطه بین نتایج حاصل از نظریه‌های گرادیان الاستیسیته و دینامیک مولکولی، مقدار مقیاس طول تابعی از نظریه‌ی غیرکلاسیک، کایرالیتی نانوصفحه‌ی گرافن و سایز آن است.

۵. نظریه‌های مقیاس شده برای پیش‌بینی بسامد پایه با بالاترین دقت، در پیش‌بینی بسامدهای حالات بالاتر باهم تطابق ندارند و اختلاف آنها با افزایش طول نانوورق مربعی کاهش می‌یابد.

پانوشت‌ها

1. vacancy
2. variational

منابع (References)

1. Lebedeva, I.V., Knizhnik, A.A., Popov, A.M., Lozovik, Y.E. and Potapkin, B.V. "Modeling of grapheme-based NEMS", *Physica E*, **44**, pp. 949-954 (2012).
2. Tserpes, K.I. and Vatistas, I. "Buckling analysis of pristine and defected graphene", *Mechanics Research Communications*, **64**, pp. 50-56 (2015).
3. Jomehzadeh, E., Saidi, A.R., Jomehzadeh, Z., Bonaccorso, F., Palermo, V. and Galiotis, C. "Nonlinear subharmonic oscillation of orthotropic grapheme-matrix composite", *Computational Materials Science,* **99,** pp. 164-172 (2015).
4. Sun, X.Y., Fu, Z., Xia, M. and Xu, Y. "Effect of vacancy defect on the tensile behavior of grapheme", *Theoretical and Applied Mechanics Letters,* **4**(5), pp. 1-5 (2014),
5. Zandiatashbar, A., Lee, G.-H., An, S.J., Lee, S., Mathew, N., Terrones, M., Hayashi, T., Picu, C.R., Hone, J. and Koratkar, N. "Effect of defects on the intrinsic strength and stiffness of graphene", Nature Communications, DOI: 10.1038/ncomms4186 (2014).
6. Li, C. and Chou, T.-W. "A structural mechanics approach for the analysis of carbon nanotubes", *International Journal of Solids and Structures*, **40**, pp. 2487-2499 (2003).
7. Askes, H. and Aifantis, E.C. "Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results", *International Journal of Solids and Structures,* **48**, pp. 1962-1990 (2011),
8. Mindlin, R. "Micro-structure in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **16**, pp. 52-78 (1964).
9. Mindlin, R.D. and Eshel, N.N. "On first strain-gradient theories in linear elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **4**, pp. 109-124 (1968).
10. Altan, B. and Aifantis, E.C. "On some aspects in the special theory of gradient elasticity", *Journal of Mechanical Behavior of Materials*, **8**, pp. 231-82 (1997).
11. Lam, D.C.C., Yang, F., Chong, A.C.M., Wang, J. and Tong, P. "Experiments and theory in strain gradient elasticity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **51**, pp. 1477-508 (2003).

12. Mindlin, R.D. and Tiersten, H.F. "Effects of couple-stresses in linear elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **11**, pp. 415-448 (1962).

13. Yang, F., Chong, A.C., Lam, D.C.C. and Tong, P. "Couple stress based strain gradient theory for elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **39**, pp. 2731-43 (2002).

14. Ashoori Movassagh, A. and Mahmoodi, A.M.J. "A micro-scale modeling of Kirchhoff plate based on modified strain-gradient elasticity theory", *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **40**, pp. 50-59 (2013).

15. Askes, H., Morata, I. and Aifantis, E. "Finite element analysis with staggered gradient elasticity", *Computers and Structures*, **86**, pp. 1266-79 (2008).

16. Askes, H. and Gitman, I. "Review and critique of the stress gradient elasticity theories of Eringen and Aifantis", In: Maugin, G., Metrikine, A. (Eds.), Mechanics of Generalized Continua. Springer, pp. 203-210 (2010).

17. Pradhan, S.C. "Buckling of single layer grapheme sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory", *Physics Letters A*, **373**, pp. 4182-4188 (2009).

18. Farajpour, A., Mohammadi, M., Shahidi, A.R. and Mahzoon, M. "Axisymmetric buckling of the circular grapheme sheets with the nonlocal continuum plate model", *Physica E,* **43**, pp. 1820-1825 (2011).

19. Ansari, R., Shahabodini, A. and Rouhi, H. "Prediction of the biaxial buckling and vibration behavior of grapheme via nonlocal atomistic-based plate theory", *Composite Structure*, **95**, pp. 88-94 (2013).

20. Anjomshoa, A., Shahidi, A.R., Hassani, B. and Jomehzadeh, E. "Finite element buckling analysis of multi-layered graphene sheets on elastic substrate based on nonlocal elasticity theory", *Applied Mathematical Modelling*, **38**, pp. 5934-595 (2014).

21. Sarrami-Foroushani, S. and Azhari, M. "On the use of bubble complex finite strip method in the nonlocal buckling and vibration analysis of single-layered graphene sheets", *International Journal of Mechanical Sciences*, **85**, pp. 168-178 (2014).

22. Sarrami-Foroushani, S. and Azhari, M. "Nonlocal vibration and buckling analysis of single and multi-layered graphene sheets using finite strip method including van der Waals effects", *Physica E,* **57**, pp. 83-95 (2014).

23. Ansari, R. and Sahmani, S. "Prediction of biaxial buckling behavior of single-layered graphene sheets based on nonlocal plate models and molecular dynamics simulations", *Applied Mathematical Modelling,* **37**, pp. 7338-7351 (2013).

24. Murmu, T. and Pradhana, S.C. "Vibration analysis of nano-single-layered grapheme sheets embedded in elastic medium based on nonlocal elasticity theory", *Journal of Applied Physics,* **105**, pp. 064319-8 (2009).

25. Shen, L., Shen, H.-S. and Zhang, C.-L. "Nonlocal plate model for nonlinear vibration of single layer grapheme sheets in thermal environments", *Computational Materials Science*, **48**, pp. 680-685 (2010).

26. Shen, H.-S., Xu, Y.-M. and Zhang, C.-L. "Prediction of nonlinear vibration of bilayer grapheme sheets in thermal environments via molecular dynamics simulations and nonlocal elasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **267**, pp. 458-470 (2013).

27. Ansari, R., Sahmani, S. and Arash, B. "Nonlocal plate model for free vibrations of single-layered grapheme sheets", *Physics Letters A*, **375**, pp. 53-62 (2010).

28. Jomehzadeh, E., Saidi, A.R. and Pugno, N.M. "Large amplitude vibration of a bilayer grapheme embedded in a nonlinear polymer matrix", *Physica E,* **44**, pp. 1973-1982 (2012).

29. Jomehzadeh, E., Saidi, A.R., Jomehzadeh, Z., Bonaccorso, F., Palermo, V. and Galiots, C. "Nonlinear subharmonic oscillation of orthotropic grapheme-matrix composite", *Computational Materials Science*, **99**, pp. 167-172 (2015).

30. Akgöz, B. and Civalek, Ö. "Free vibration analysis for single-layered grapheme sheets in an elastic matrix via modified couple stress theory", *Materials and Design*, **42**, pp. 164-171 (2012).

31. Farajpour, A., Dehghany, M. and Shahidi, A.R. "Surface and nonlocal effects on the axisymmetric buckling of circular graphene sheets in thermal environment", *Composites Part B: Engineering,* **50**, pp. 333-343 (2013).

32. Ansari, R., Faghih Shojaei, M., Mohammadi, V., Gholami, R. and Darabi, M.A. "Nonlinear vibration of functionally graded Midlin microplates based on the modified couple stress theory", *Composite Structures*, **114**, pp. 124-134 (2014).

33. Ma, H.M., Gao, X.-L. and Reddy, J.N. "A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory", *Acta Mechanica.*, **220**, pp. 217-235 (2011).

34. Reddy, J.N. "Microstructure-dependent couple stress theories of functionally graded beams", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **59**, pp. 2382-2399 (2011).

ضمیمه الف

$$M_{mnpq}=\frac{-1}{12}\rho h^3\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial\phi_p}{\partial x}\frac{\partial\phi_m}{\partial x}\varphi_q\varphi_n\right)dxdy$$
$$-\frac{1}{12}\rho h^3\int_0^a\int_0^b\left(\frac{\partial\varphi_q}{\partial y}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\phi_p\phi_m\right)dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b\rho h\phi_q\varphi_n\phi_m\varphi_n dxdy$$
$$-l_1^2\int_0^a\int_0^b 2\rho h\left(\frac{\partial\phi_p}{\partial x}\frac{\partial\phi_m}{\partial x}\varphi_q\varphi_n+\frac{\partial\varphi_q}{\partial y}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\phi_p\phi_m\right)dxdy$$
$$-l_1^2\int_0^a\int_0^b\frac{1}{12}\rho h^3\left(\frac{\partial^2\phi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_m}{\partial x^2}\varphi_q\varphi_n\right)dxdy$$
$$-l_1^2\int_0^a\int_0^b\frac{1}{12}\rho h^3\left(\frac{\partial^2\varphi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\phi_p\phi_m\right)dxdy$$
$$-l_1^2\int_0^a\int_0^b\frac{1}{12}\rho h^3\left(2\frac{\partial\phi_p}{\partial x}\frac{\partial\phi_m}{\partial x}\frac{\partial\varphi_q}{\partial y}\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}\right)dxdy$$

(۱الف)

$$K_{mnpq}=\int_0^a\int_0^b -D\frac{\partial^2\phi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_m}{\partial x^2}\varphi_q\varphi_n dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -D\nu\frac{\partial^2\varphi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi_m}{\partial x^2}\phi_p\varphi_n dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -D\frac{\partial^2\varphi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\phi_p\phi_m dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -D\nu\frac{\partial^2\phi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\varphi_q\phi_m dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -(2D(1-\nu)+2B)\frac{\partial^2(\phi_p\varphi_q)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2(\phi_m\varphi_n)}{\partial x\partial y}dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -\frac{B}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_p}{\partial x^2}\varphi_q-\frac{\partial^2\varphi_q}{\partial y^2}\phi_p\right)\frac{\partial^2\phi_m}{\partial x^2}\varphi_n dxdy$$
$$-\int_0^a\int_0^b -\frac{B}{2}\left(\frac{\partial^2\phi_p}{\partial x^2}\varphi_q-\frac{\partial^2\varphi_q}{\partial y^2}\phi_p\right)\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\phi_m dxdy$$

(۲الف)

$$K_{mnpq}=\int_0^a\int_0^b -D\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\phi_n\phi_q dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -D\nu\frac{\partial^2\phi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\varphi_p\phi_n dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -D\frac{\partial^2\phi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}\varphi_p\varphi_m dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -D\nu\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}\phi_q\varphi_m dxdy$$
$$+\int_0^a\int_0^b -(2D(1-\nu))\frac{\partial^2(\varphi_p\phi_q)}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2(\varphi_m\phi_n)}{\partial x\partial y}dxdy$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -D\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\phi_n\phi_q dxdy$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -D(1+\nu)\frac{\partial^2\phi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\phi_n$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -D\nu\frac{\partial^2\phi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}\varphi_p\phi_n dxdy$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -D\frac{\partial^2\phi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}\varphi_p\varphi_m dxdy$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -D(1+\nu)\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_q}{\partial y^2}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}\varphi_m$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -D\nu\frac{\partial^2\varphi_p}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_n}{\partial y^2}\phi_q\varphi_m dxdy$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -2D(1-\nu)\frac{\partial^2(\varphi_p\phi_q)}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^2(\varphi_m\phi_n)}{\partial x\partial y}dxdy$$
$$-l^2\int_0^a\int_0^b -2D(1-\nu)\frac{\partial^2(\varphi_p\phi_q)}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^2(\varphi_m\phi_n)}{\partial x\partial y}dxdy$$

(۳الف)

در معادلات ۱الف تا ۳الف a و b معرف طول و عرض ورق گرافن مستطیلی است. $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ معرف سختی خمشی ورق v نسبت پواسون، h ضخامت ورق، $B=2l^2Gh$، G مدول صلبیت و l مقیاس طول در نظریه‌ی تنش کوپل شده بهبودیافته است.