

# قدرت تفکیک و آنالیز خطا در مسایل وارون غیر خطی میدان پتانسیل

علی نجاتی کلاته<sup>(\*)</sup>، محمود میرزایی<sup>۲</sup>، سعید میرزایی<sup>۳</sup> و سید محمد زمان زاده<sup>۴</sup>

۱. استادیار، دانشکده نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

۲. دانشیار، دانشکده فیزیک، دانشگاه اراک

۳. دانشیار، پژوهشکده علوم پایه کاربردی جهاد دانشگاهی

۴. استادیار، پژوهشکده علوم پایه کاربردی جهاد دانشگاهی

تاریخ دریافت: ۸۷/۸/۳۰

تاریخ پذیرش: ۸۹/۲/۸

## چکیده

در مسایل وارون ژئوفیزیکی، اغلب با افزایش تعداد داده‌ها و پارامترهای مدل یا افزایش سطح نوفه در داده‌های برداشت شده، مشکلات عدیده‌ای در رابطه با وارون سازی ماتریس‌ها و پایداری مدل منتج به وجود خواهد آمد. بنابراین تکنیک‌های محاسباتی پیشرفت‌های برای دستیابی به دقت و هم‌گرایی مطلوب در این‌گونه سیستم‌ها مورد نیاز است. استفاده از تکنیک‌های محاسباتی پیشرفته (در مقابل استفاده از روابط کلاسیک و متداول) در حل مسایلی که در آنها سطح نویز ذاتی در داده‌های مشاهده‌ای بالاست، می‌تواند مفسر را در دستیابی به یک مدل پایدار و منطبق بر واقعیات فیزیکی راهنمایی کند.

بسیاری از مسایل وارون را می‌توان با اعمال شرایط خاص تنظیم‌کننده<sup>۱</sup> و کمینه سازی تابع عدم تطابق، میان داده‌های مشاهده‌ای و تخمین‌های تئوری حل کرد. آنالیز خطا در مسایل وارون و محاسبه ماتریس‌های قدرت تفکیک برای پارامترهای مدل، دو ابزار ارزشمند برای مطالعه پایداری و استقلال پارامترهای بدست آمده در روش‌های وارون سازی است. همچنین مطالعه روند هم‌گرایی در مسایل وارون و نرخ کاهش خطا در هر تکرار به همراه تعداد تکرارهای مورد نیاز برای وارون سازی و زمان اجرای برنامه‌های رایانه‌ای، فاکتورهای تاثیر گذار در بررسی و مطالعه روش‌های وارون سازی در ژئوفیزیک و علوم کاربردی دیگر است.

در این مقاله به بررسی فاکتورهای ذکر شده در مورد روش مارکوارد-لونبرگ (Marquardt-Levenberg) یا Ridge regression در تئوری وارون به عنوان یکی از عمومی‌ترین و پرکاربردترین روش‌های وارون در حل مسایل ژئوفیزیکی، پرداخته می‌شود. همچنین وارون سازی روش زیرفضا، به عنوان یک روش پایدار، موثر و قابل انعطاف برای حل مسایل معکوس غیر خطی در مدل‌سازی معکوس داده‌های مغناطیسی معرفی می‌شود. روش زیرفضا با دو رویکرد در افراز زیر فضا، پارامترهای مدل را با توجه به معادلات ابعادی متغیر در زیر فضاهای مجزا کلاس بندی می‌نماید. به کارگیری این روش جهت روان‌سازی داده‌های دارای درصد بالای نویز، به نتایج خوب و پایداری مطلوب منجر خواهد شد. همچنین وارون سازی زیر فضا، از لحاظ قدرت تفکیک، آنالیز خطا و سایر پارامترهای مرتبط در مدل‌سازی، با وارون سازی به روش مارکوارد-لونبرگ مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که روش زیر فضا علاوه بر هم‌گرایی زمانی با سرعت بیشتر، از پایداری قابل ملاحظه‌ای نسبت به روش مارکوارد-لونبرگ برخوردار است.

**واژه‌های کلیدی:** آنالیز خطا، داده‌های میدان کلی مغناطیسی، روش وارون سازی زیر فضا، مارکوارد-لونبرگ، هم‌گرایی.

مقدمه

راه حل عمومی برای حل مسایل وارون غیر خطی در ژئوفیزیک، استفاده از یک بسط خطی در همسایگی یک مدل مرجع است. با این روش یک سیستم از معادلات خطی برای ایجاد تغییر در پارامترهای مدل حاصل می شود که بر خلاف مسائل وارون خطی (که در آن ها سیستم معادلات برای برآورد پارامترهای مدل حل می شود)، با تکنیک های خاص عددی قابل حل است. در هر تکرار، از مدل به روز شده بعد از اعمال تغییراتی که از تکرار قبل بدست آمده است، به عنوان مدل مرجع استفاده می شود. این روند تا زمان رسیدن به هم گرایی مطلوب ادامه می یابد به عنوان مثال تا زمانی که تغییرات پارامترهای مدل در دو تکرار متوالی کمتر از یک مقدار آستانه باشد یا به عبارت دیگر، در روند کمینه سازی در دو تکرار متوالی، تغییرات فاحشی در پارامترهای مدل بوجود نیاید.

روش کلی ذکر شده در وارون سازی غیر خطی داده های گرانی و مغناطیس به منظور بدست آوردن پارامترهای هندسی توسط محققین بسیاری به کار گرفته شده است ( از این بین می توان به افراد زیر اشاره کرد (Kunaratnam, 1972; Corbato, 1965; Pedersen, 1977; Menichetti, 1983; Mickus, 1992). هم زمان سیستم های معادلات خطی با افزایش داده ها و پارامترها در مدل سازی، از پیچیدگی محاسباتی زیادی برخوردار می باشد. در اکثر الگوریتم هایی که از این روش هندسی بهره می برند، فرض می شود که چگالی حوزه بالای سنگ بستر ثابت است و به طور کلی یک چگالی ثابت به مدل نسبت داده می شود.

برای حل مسئله وارون جهت پیدا کردن مقدار عمق بستر حوزه رسوبی، از آنومالی میدان پتانسیل مشاهده ای استفاده شده است (Marquardt, 1963). تکنیک زیر فضا، از کمینه سازی محلی تابع هدف در زیر فضای افزا<sup>۱</sup> شده توسط تعداد محدودی از بردارها در فضای پارامترهای مدل استفاده می کند. بردارهایی که برای افزاز زیر فضای مزبور مورد استفاده قرار می گیرند، بردارهای پایه نامیده می شوند. میزان تاثیر و موفقیت روش زیر فضا به تعداد ونحوه انتخاب این بردارهای پایه بستگی دارد. روش زیر فضا و کاربردهای آن در حل مسایل بزرگ مقیاس به خوبی توسط محققین مختلف مورد بحث قرار گرفته است (Kennett and Williamson, 1988; Sambridge, 1990; Oldenburg et al., 1993). در منابع اشاره شده دو روش کلی برای انتخاب بردارهای پایه ذکر شده است. روش اول، انتخاب بردارهای پایه بر اساس تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس Hessian تابع هدف و روش دوم، انتخاب بردارهای پایه بر مبنای گرادیان های تابع هدف می باشد. روش های ذکر شده از لحاظ ماتریس های قدرت تفکیک و آنالیز خطا مقایسه می شوند. در این روش ها فاکتورهایی از قبیل روند هم گرایی در مسایل وارون و نرخ کاهش خطا در هر تکرار به همراه تعداد تکرارهای مورد نیاز برای وارون سازی و زمان اجرای برنامه های رایانه ای مورد مطالعه قرار می گیرند.

تئوری روش های وارون سازی

فرمول بندی و وارون سازی با روش Marquardt-Levenberg یک روش بسیار متداول در وارون سازی های غیر خطی در ژئوفیزیک، روش Marquardt-Levenberg است. در این روش، علاوه بر کمینه کردن طول بردار خطا  $e = \|y - Ax\|$ ، طول بردار تغییرات پارامترهای مدل نیز به صورت هم زمان کمینه می شود. در این مساله، تابع هدف را می توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\Phi = Q_1 + b Q_2 = e^T e + b(x^T x - L_0^2) \quad (1)$$

$L_0^2$  محدوده تغییرات پارامترهای مدل است. B ضریب لاگرانژ<sup>۳</sup> می باشد، که در روند کمینه سازی تابع هدف تعیین می شود. از پارامتر B به عنوان فاکتور میرایی<sup>۴</sup> نیز در وارون سازی یاد می شود. در صورتی که مقدار B به سمت صفر میل کند، پاسخ به روش گوس- نیوتن میل خواهد کرد.

به منظور کمینه سازی رابطه ۱، از مشتقات جزئی تابع هدف نسبت به تغییرات پارامترهای مدل برابر صفر در نظر گرفته می شود. در این صورت نتیجه می شود:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \{ (y - Ax)^T (y - Ax) + \beta(x^T x - L_0^2) \}}{\partial x} = 0,0 \quad (2)$$

با مشتق گیری و انجام عملیات ریاضی همانند آنچه پیشتر ارائه شد، می توان نوشت:

$$2A^T Ax - 2A^T y - 2\beta x = 0,0 \quad (3)$$

$$(A^T A + \beta I) x = A^T y$$

معادله ۳، معادله نرمال روش مارکوارد-لونیبرگ نامیده می شود. برای تغییرات پارامترهای مدل معادله ۴ را می توان ارائه کرد:

$$x_r = (A^T A + bI)^{-1} A^T y \quad (4)$$

$x_r$  برای نشان دادن تغییرات پارامترها در یک تکرار خاص به کار برده شده است. فرمول بندی تعمیم یافته این روش با در نظر گرفتن تکرارهای متوالی به صورت زیر است:

$$m^{k+1} = m^k + (A^T A + bI)^{-1} A^T y \quad (5-الف)$$

$$m^k = [m^0 + x_r^k + x_r^{k-1} + x_r^{k-2} + x_r^{k-3} + \dots + x_r^1] \quad (5-ب)$$

1- Local Minimization  
2- Spanned

3-Lagrange multiplier  
4- Damping factor

با رابطه (۵-الف) از مقدار کمتری برخوردار می‌باشد. لذا در محاسبه ماتریس Hessian می‌توان از آن صرف نظر نمود (Wang and Houseman, 1994).

با در نظر گرفتن ماتریس  $C_M$  به عنوان ماتریس کواریانس پارامترهای مدل، بردار شیب بالا رونده  $\Gamma$  در فضای پارامترهای مدل بر مبنای تعریف بردار گرادیان، به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\Gamma = C_M \gamma \quad (11)$$

و ماتریس تصویر  $A$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (Sambridge, 1991):

$$A_j = a_i^{(j)} \quad i = 1, \dots, N \quad j = 1, \dots, K \quad (12)$$

در رابطه بالا،  $K$  تعداد بردارهای پایه  $\{a^{(j)}\}$  و  $N$  طول بردارهای پایه می‌باشد. تغییرات پارامترهای مدل در زیر فضای افراز شده بر حسب بردارهای پایه برابر است با:

$$\delta m = - \sum_{j=1}^K \alpha_j a^{(j)} \quad (13)$$

ضرایب  $\alpha_j$  از کمینه کردن تابع هدف به دست می‌آیند. بدین منظور  $\frac{\partial F^0}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1, \dots, K$  است. بنابراین یک سیستم معادلات با  $K$  مجهول به دست می‌آید که در این صورت برای ضرایب بسط به صورت فرم ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\alpha = (A^T H A)^{-1} A^T \gamma \quad (14)$$

ماتریس Hessian تصویر شده  $A^T H A$  دارای ابعاد  $K \times K$  است که نسبت به وارون‌سازی ماتریس Hessian با ابعاد  $M \times M$  دارای شرایط بهتری<sup>۵</sup> است. بردارهای پایه‌ای که برای تعریف ماتریس تصویر از آن‌ها استفاده می‌شود، وابسته به بردار  $\Gamma$  هستند. حال بردارهای پایه توسط بردار  $\Gamma$  به صورت زیر تعریف می‌شوند (Kennett and Sambridge, 1998):

$$a^{(1)} = \|\Gamma_A\|^{-1} \Gamma_A, \quad a^{(2)} = \|\Gamma_B\|^{-1} \Gamma_B \quad (15)$$

با داشتن ضرایب بسط و بردارهای پایه و با استفاده از رابطه ۱۳، تغییرات پارامترهای مدل در هر تکرار بدست می‌آید و مدل اولیه در نظر گرفته شده در هر تکرار به روز خواهد شد.

### تئوری روش گرادیان زیر فضا

مسائل وارون را می‌توان عمدتاً به صورت مسایل کمینه‌سازی<sup>۱</sup> مطرح نمود (Tarantola, 2005)، که در آن‌ها یک تابع هدف وابسته به داده‌های مشاهده‌ای و پیش‌بینی‌های تئوری، می‌بایست کمینه شود. شکل عمومی این توابع در ژئوفیزیک به صورت زیر است:

$$F(m) = \langle C_D^{-1} (d - d_{obs}), (d - d_{obs}) \rangle \quad (6)$$

در رابطه ۶ علامت  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  نشان‌گر حاصل ضرب داخلی و  $d, d_{obs}$  به ترتیب داده‌های مشاهده‌ای و داده‌های تخمین زده شده می‌باشند،  $C_D$  ماتریس کواریانس داده‌ها و  $m$  بردار پارامترهای مدل است که خصوصیات فیزیکی خاصی از مدل تعریف شده را بیان می‌کند. هدف مسایل وارون در ژئوفیزیک، به دست آوردن یک بردار بهینه است جهت کمینه کردن تابع هدف می‌باشد. در صورتی که تابع  $F(m)$  یک تابع هموار<sup>۲</sup> برای پارامترهای مدل باشد، می‌توان با استفاده از بسط تیلور محدود شده<sup>۳</sup> برای این تابع، رابطه زیر را نوشت (Sambridge, 1991):

$$F^0(m + \delta m) = F(m) + \langle \gamma, \delta m \rangle + \frac{1}{2} \langle H \delta m, \delta m \rangle \quad (7)$$

در رابطه ۷،  $\gamma$  بردار گرادیان و  $H$  ماتریس Hessian یا ماتریس مشتق دوم تابع هدف است. گرادیان تابع هدف به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\gamma = \nabla_m F(m) = G^T C_D^{-1} [f(m) - d_{obs}] \quad (8)$$

که در آن

$$G = \nabla_m F(m) \quad (9)$$

و  $G$  ماتریس مشتقات Frechet برای تابع هدف نسبت به پارامترهای مدل است، که در مسایل وارون تحت عنوان Jacobian شناخته می‌شود. همچنین  $G_j = \frac{\partial f_i(m)}{\partial m_j}$  مشتق اول  $i$  امین داده را نسبت به تغییرات  $j$  امین پارامتر مدل نشان می‌دهد. ماتریس Hessian تابع هدف را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود:

$$H = \nabla_m \nabla_m F(m) = G^T C_D^{-1} G + \nabla_m G^T C_D^{-1} [f(m) - d_{obs}] \quad (10)$$

عبارت  $\nabla_m G = \nabla_m \nabla_m f(m)$  در معادله ۱۰، وابستگی غیر خطی داده‌ها و پارامترهای مدل را بیان می‌کند و در مقایسه

1-Optimization  
2- Smooth

3-Truncated Taylor series  
4- Steepest ascent  
5-Well Condition

بنابراین، اگر داده‌ها غیر همبسته و مستقل باشند و واریانس خطای اندازه‌گیری برای همه آن‌ها یکسان و برابر  $\sigma_d^2$  در نظر گرفته شود، در آن صورتی ماتریس کواریانس داده‌ها  $[Covd]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[Covd] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1N}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & & & & \\ \cdot & & \sigma_{33}^2 & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \sigma_{N1}^2 & & & & & \sigma_{NN}^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

این ماتریس با ماتریس کواریانس پارامترهای مدل  $[Covm]$  به صورت رابطه ۱۷ مرتبط است که در آن مقادیر  $\sigma_d^2$  شامل مقادیر واریانس داده‌های اندازه‌گیری هستند، بنابراین:

$$[Covm] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \sigma_{1M}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & & & & \\ \cdot & & \sigma_{33}^2 & & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \sigma_{M1}^2 & & & & & \sigma_{MM}^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

برای مطالعه عملی ماتریس کواریانس پارامترهای مدل (در صورتی که هیچ‌گونه تخمینی از میزان و سطح نوفه در داده‌ها در دست نباشد)، از ماتریس کواریانس یکه استفاده می‌شود. این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شود (Meju, 1994):

$$[Cov_{mm}] = s^{-2} G^{-g} [Covd] G^{-gT} = G^{-g} G^{-gT} \quad (20)$$

ماتریس کواریانس پارامترهای مدل، ابزارهای مناسبی برای طراحی عملیات و آنالیز خطا در برآورد پارامترهای مدل هستند. این ماتریس را می‌توان قبل از برداشت داده‌های ژئوفیزیکی تشکیل داد و نحوه توزیع خطا روی پارامترها را بررسی کرد. بنابراین می‌توان از آن به عنوان ابزاری برای طراحی بهینه عملیات برداشت داده‌ها استفاده نمود.

### ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل<sup>۲</sup>

برای مطالعه خصوصیات بیشتر در مسایل معکوس می‌بایست بر روی اپراتورهای ماتریسی که برای بدست آوردن  $m^{est}$  با استفاده از داده‌ها اعمال می‌شوند، تاکید کرد. ماتریس معکوس تعمیم یافته را با نماد  $G^{-g}$  به صورت زیر نشان می‌دهند. شکل دقیق ماتریس تعمیم یافته، به مسأله مورد مطالعه بستگی دارد.

### تئوری روش زیر فضا بر مبنای تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس Hessian

روش گرادیان زیر فضا، بردارهای پایه را بر اساس تغییرات بردارهای گرادیان پارامترهای مدل و تغییرات آن‌ها انتخاب می‌کند. اما در روش زیر فضا، بردارهای پایه بر مبنای تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس Hessian از آنالیز به مقادیر منفرد برای ماتریس مشتقات دوم پارامترهای مدل جهت تعریف بردارهای پایه و در نهایت تشکیل زیر فضا در فضای اصلی پارامترهای مدل استفاده می‌شود.

با توجه به این که انحنای یک منحنی معیاری از تیز بودن کمینه آن می‌باشد، انتظار می‌رود تا واریانس پاسخ، در ارتباط مستقیم با انحنای تابع هدف باشد. از طرفی انحنای استفاده از مشتق دوم یک تابع محاسبه می‌شود (Menke, 1989). بنابراین در صورتی که مشتق دوم تابع هدف مورد محاسبه قرار گیرد و به بردارهای ویژه و مقادیر ویژه منفرد (SVD) تجزیه گردد، بردارهای ویژه‌ای که معادل مقادیر ویژه بزرگ هستند می‌توانند بهترین جهت را در بدست آوردن پاسخی با کمترین واریانس در روند وارون‌سازی تعیین نمایند. با استدلال مطرح شده، از بردارهای به‌هم‌چا شده ماتریس Hessian، به عنوان بردارهای پایه در وارون‌سازی استفاده شده است. با یک رویکرد تکراری به منظور حل مسأله وارون، بعد از بدست آوردن  $\alpha$ ، با استفاده از یک تبدیل، به فضای پارامترهای مدل و از آن به مقادیر پارامترهای مدل خواهیم رسید.

### ماتریس کواریانس واحد<sup>۱</sup>

در وارون‌سازی‌های ژئوفیزیکی همواره داده‌ها حاوی نوفه هستند. نوفه موجود در داده‌ها موجب می‌شود که تخمین پارامترهای مدل با خطا همراه باشد. در واقع در روند وارون‌سازی، خطای موجود در برداشت داده‌ها در فضای پارامترهای مدل برگردان می‌شود. با این فرض که بتوان  $m^{est}$  (پارامترهای تخمین زده شده در وارون‌سازی) را به صورت زیر نوشت (Menke, 1989):

$$m^{est} = Md + v \quad (16)$$

در رابطه ۱۶  $M$  و  $v$  به ترتیب نمادی از یک ماتریس و یک بردار هستند، که هر دو مستقل از داده‌ها می‌باشند. در صورتی که فرض شود، ماتریس مشخصه

توزیع داده‌ها با کواریانس  $[Covd]$  نشان داده می‌شود. در این صورت با توجه به  $m^{est} = Md + v$  ماتریس مشخصه‌ی توزیع پارامترهای مدل یا  $[Covm]$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

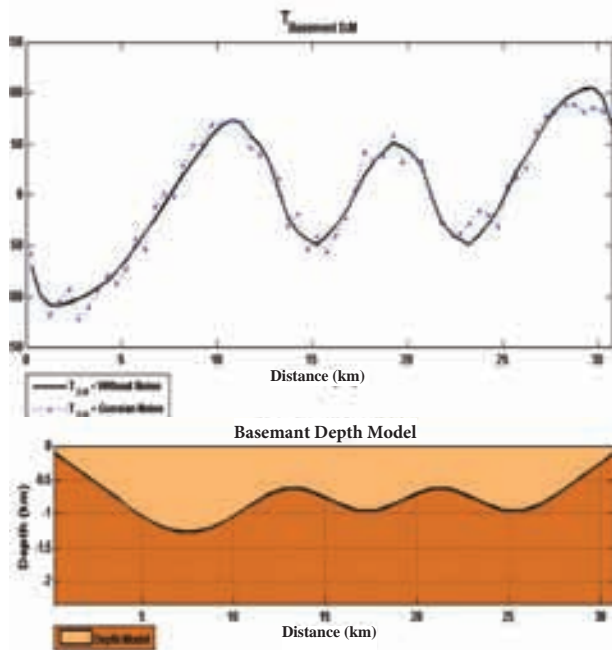
$$[Covm] = M[Covd]M^T \quad (17)$$

معمولاً در مسایل وارون، اطلاعات کافی از ماتریس کواریانس داده‌ها و چگونگی توزیع خطا روی داده‌ها در دست نیست.

1- Unite covariance matrix

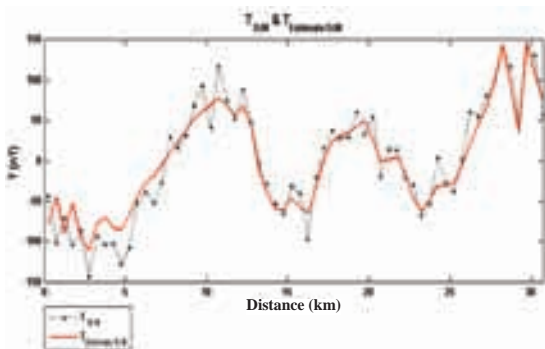
2-Resuloun matrix of model parameters

قابلیت روش‌های ذکر شده و معادل ۱۰٪، ۲۰٪ و ۴۰٪ نوفه وارون سازی شده‌اند. این امر به منظور بررسی پایداری روش‌های ارائه شده در برابر نوفه و مطالعه میزان پخش نوفه موجود در داده‌ها روی تخمین پارامترهای مدل صورت گرفته است. به عنوان نمونه وارون سازی داده‌های مصنوعی با منظور نمودن ۴۰٪ نوفه و با استفاده از هر سه روش، مورد بررسی قرار گرفته است:



شکل ۱- قسمت بالا: داده‌های میدان کلی مغناطیسی بدون نوفه (منحنی توپر) و داده‌های میدان کلی مغناطیسی همراه با ۲۰٪ نوفه گوسی (منحنی خط چین). قسمت پایین: مدل مصنوعی ناپیوستگی به منظور محاسبه تئوری داده‌های میدان کلی مغناطیسی. رسوبات با رنگ کم در بالا و سنگ کف با رنگ تیره در زیر مشخص شده است.

**الف- روش زیر فضا بر مبنای تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس Hessian**



شکل ۲- داده‌های میدان کلی مغناطیسی ناشی از مدل مصنوعی به همراه ۴۰٪ نوفه با منحنی توپر و داده‌های تخمین زده شده با استفاده از وارون سازی منحنی خط چین.

در مورد مسایل معکوس می‌توان نوشت:

$$Gm = d \Rightarrow m = G^{-1}d \quad (21)$$

که در آن، مقدار  $m$  می‌تواند با چندین بردار دیگر جمع شود. در مسایل وارون، به منظور مطالعه انطباق پارامترهای تخمینی با پارامترهای واقعی مدل و بررسی استقلال پارامترهای بدست آمده از یکدیگر، از ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل در روند وارون سازی استفاده می‌شود. برای بررسی این مطلب فرض می‌شود که  $m^{true}$  مجموعه‌ای از پارامترهای واقعی مدل می‌باشد که در سیستم معادلات  $Gm^{true} = d^{obs}$  صدق می‌کند. با حل سیستم معادلات  $Gm = d$  می‌توان پارامترهای تخمینی مدل را مطابق آنچه تا کنون گفته شد توسط ماتریس معکوس تعمیم یافته  $G^{-1}$  به صورت زیر نوشت:

$$m^{est} = G^{-1}d^{obs} \quad (22)$$

با استفاده از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$m^{est} = G^{-1}d^{obs} = G^{-1}[Gm^{true}] = [G^{-1}G]m^{true} = Rm^{true} \quad (23)$$

ماتریس  $R$  یک ماتریس  $M \times M$  است و ماتریس تحلیل یا ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل نامیده می‌شود. اگر  $R = I$  باشد، در این صورت پارامترهای مدل یکتا هستند. اگر  $R$  یک ماتریس همانی نباشد، در این صورت پارامترهای مدل به صورت میانگین وزنی پارامترهای واقعی مدل هستند. به عبارت دیگر در این حالت پارامترهای مدل به صورت ترکیب خطی از پارامترهای دیگر تعیین می‌شوند.

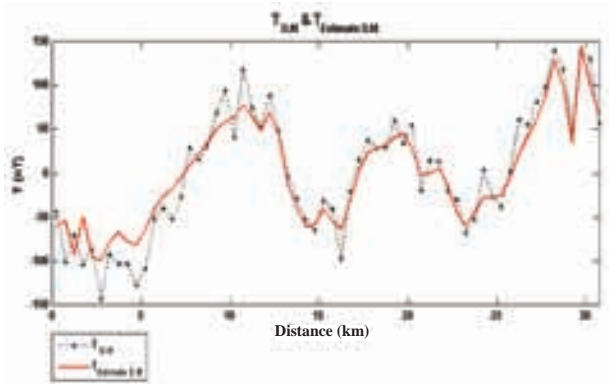
به عنوان نمونه یک سنگ کف با تباین مغناطیدگی (تباین مغناطیدگی سنگ کف با رسوبات بالایی)  $0.002$  در سیستم SI با یک آرایه منظم شامل ۶۲ بلوک با عرض  $0.5$  کیلومتر تقریب سازی شده است. طول پروفیل برای محاسبه داده‌های میدان کلی مغناطیسی  $30.5$  کیلومتر و فاصله نقاط مشاهده میدان  $0.5$  کیلومتر است. پروفیل در راستای شمال مغناطیسی فرض شده است، زاویه میل میدان مغناطیسی زمین  $45$  درجه و میدان کلی مغناطیسی زمین با شدت  $48000$  نانو تسلا در نظر گرفته شده است. مدل عمقی این ناپیوستگی و داده‌های میدان کلی مغناطیسی منتج از این ساختار در شکل ۱ نشان داده شده است. بیشینه عمق سنگ کف در این مثال  $1/3$  کیلومتر فرض شده است.

همان‌طور که انتظار می‌رود، داده‌های میدان کلی مغناطیسی زمین همانند داده‌های میدان گرانی، از روند توپوگرافی سنگ کف تبعیت نمی‌کنند. این امر به دلیل وجود زاویه میل مغناطیسی  $45$  درجه برای مغناطیدگی در هر بلوک است، که به منظور کلی‌تر شدن مساله منظور شده است. داده‌ها با سه سطح نوفه متفاوت جهت نشان دادن

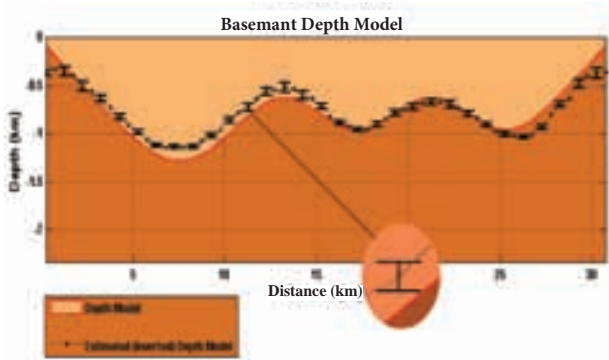


در شکل ۴ و ۵ به ترتیب وارون سازی داده های مصنوعی با منظور نمودن ۴۰٪ نویز برای روش گرادیان زیر فضا رسم شده است. در شکل ۴ داده های تخمین زده شده به همراه داده های ناشی از مدل با نویز ۴۰٪ رسم شده است. و در شکل ۵ مدل بازیافت شده و مدل مصنوعی به همراه خطای وارون سازی رسم شده است.

### ج- روش Levenberg-Marquardt

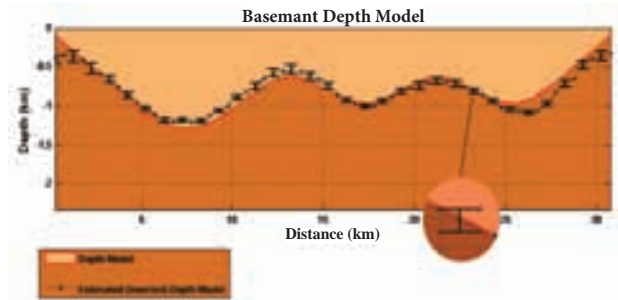


شکل ۶- داده های میدان کلی مغناطیسی ناشی از مدل مصنوعی به همراه ۴۰٪ نویز با منحنی توپر و داده های تخمین زده شده با استفاده از وارون سازی با منحنی خط چین.



شکل ۷- مدل مصنوعی با منحنی توپر و مدل تخمین زده شده با استفاده از وارون سازی با منحنی خط چین، عدم قطعیت در وارون سازی روی مدل تخمینی نمایش داده شده است. رسوبات با رنگ کم در بالا و سنگ کف با رنگ تیره در زیر مشخص شده است.

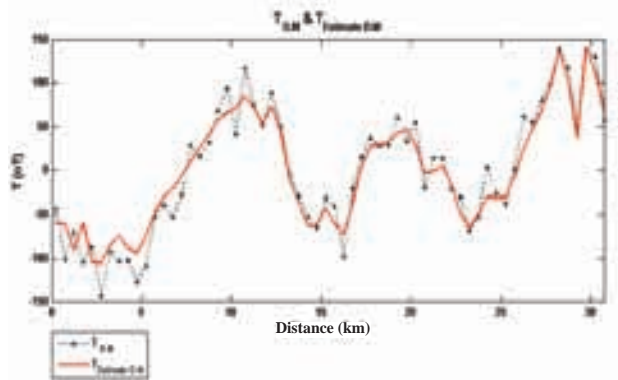
در شکل ۶ و ۷ به ترتیب وارون سازی داده های مصنوعی با منظور نمودن ۴۰٪ نویز برای روش Levenberg-Marquardt رسم شده است. در شکل ۶ داده های تخمین زده شده به همراه داده های ناشی از مدل با نویز ۴۰٪ رسم شده است. و در شکل ۷ مدل بازیافت شده و مدل مصنوعی به همراه خطای وارون سازی رسم شده است.



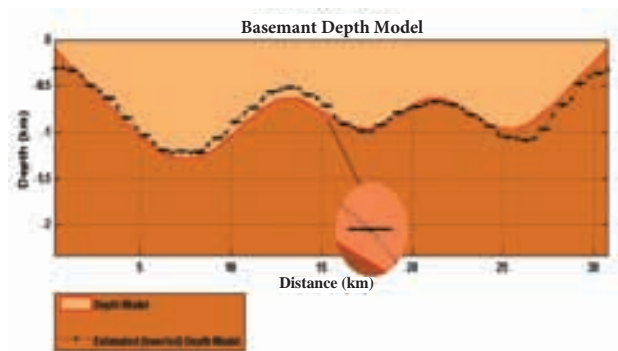
شکل ۳- مدل مصنوعی با منحنی توپر و مدل تخمین زده شده با استفاده از وارون سازی با منحنی خط چین، عدم قطعیت در وارون سازی روی مدل تخمینی نمایش داده شده است. رسوبات با رنگ کم در بالا و سنگ کف با رنگ تیره در زیر مشخص شده است.

در شکل ۲ و ۳ به ترتیب وارون سازی داده های مصنوعی با منظور نمودن ۴۰٪ نویز برای روش زیر فضا بر مبنای تجزیه به مقادیر منفرد ماتریس Hessian رسم شده است. در شکل ۲ داده های تخمین زده شده به همراه داده های ناشی از مدل با نویز ۴۰٪ رسم شده است. و در شکل ۳ مدل بازیافت شده و مدل مصنوعی به همراه خطای وارون سازی رسم شده است.

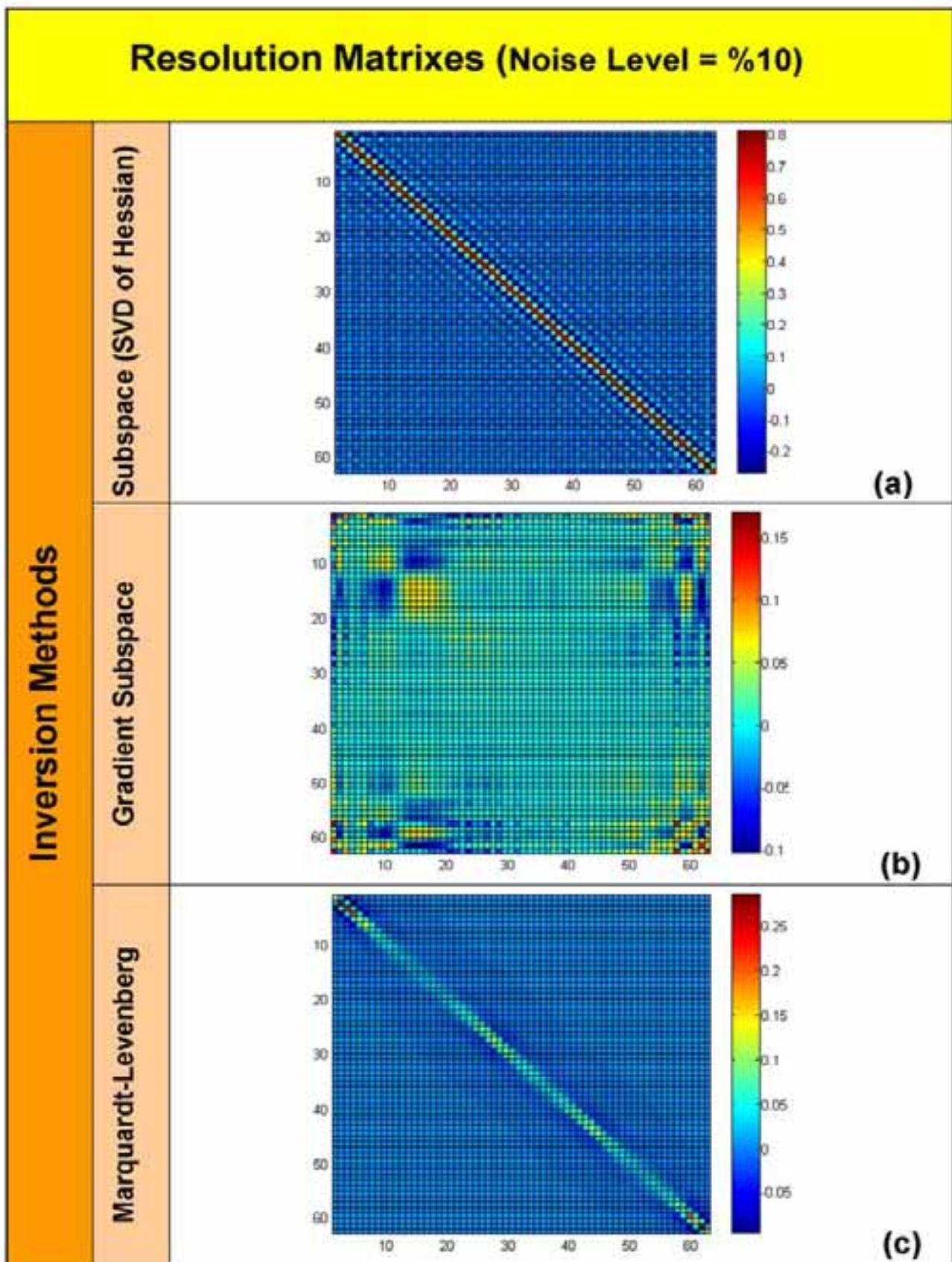
### ب- روش گرادیان زیر فضا



شکل ۴- داده های میدان کلی مغناطیسی ناشی از مدل مصنوعی به همراه ۴۰٪ نویز با منحنی توپر و داده های تخمین زده شده با استفاده از وارون سازی با منحنی خط چین.

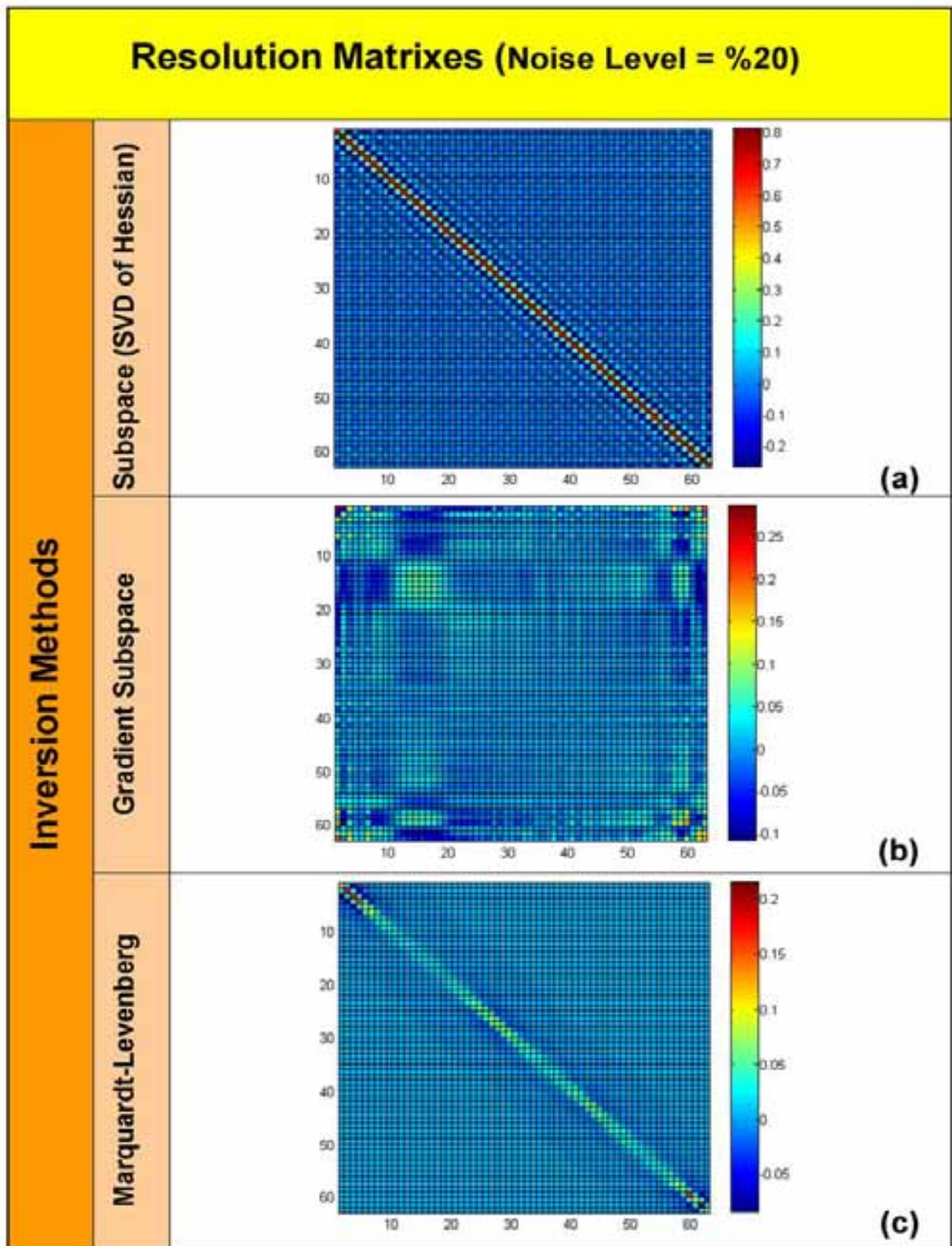


شکل ۵- مدل مصنوعی با منحنی توپر و مدل تخمین زده شده با استفاده از وارون سازی با منحنی خط چین، عدم قطعیت در وارون سازی روی مدل تخمینی نمایش داده شده است. رسوبات با رنگ کم در بالا و سنگ کف با رنگ تیره در زیر مشخص شده است.



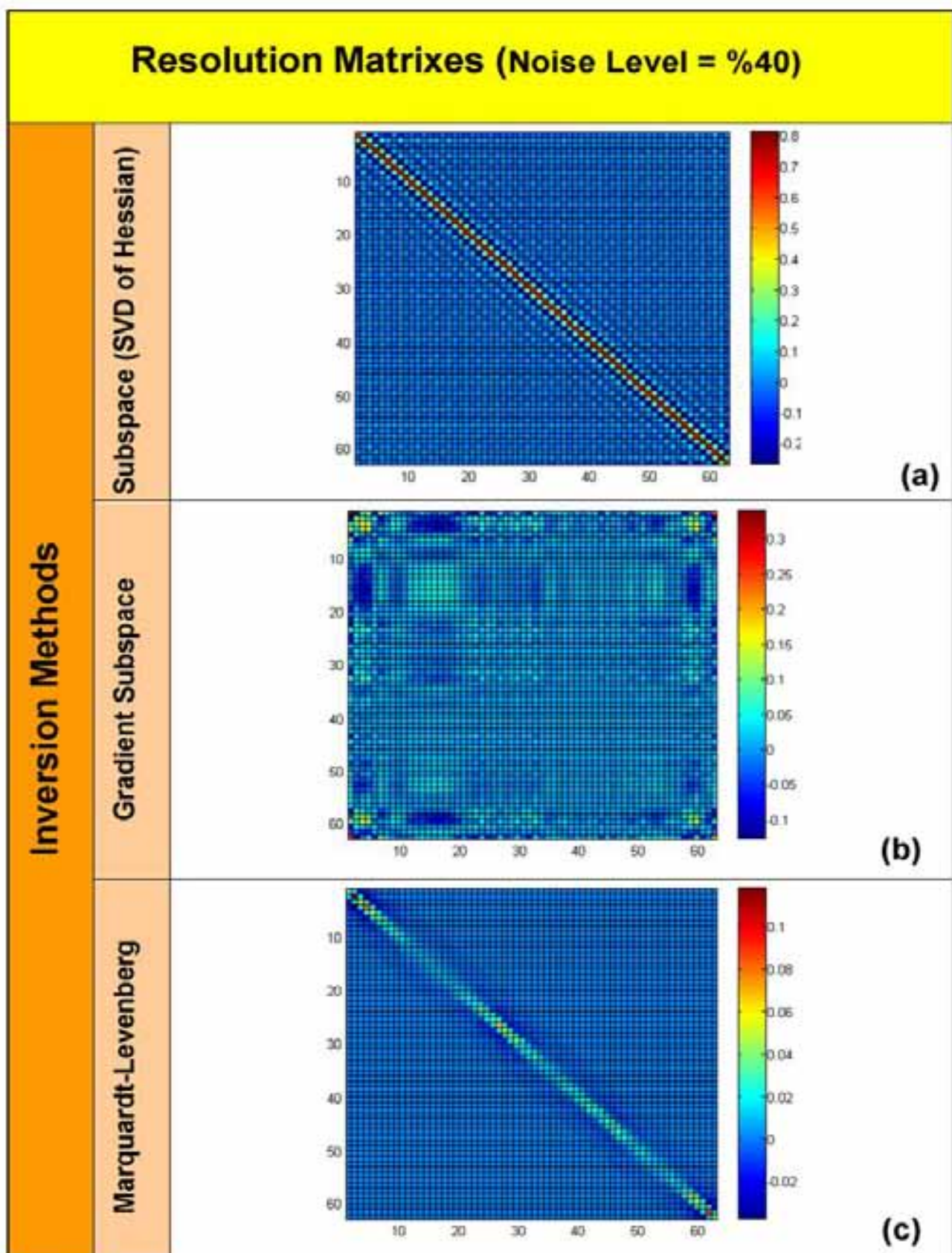
شکل ۸- ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل برای سطح نوفه ۱۰٪ (a) روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian (b) روش گرادیان زیر فضا، روش Marquardt-Levenberg (c)



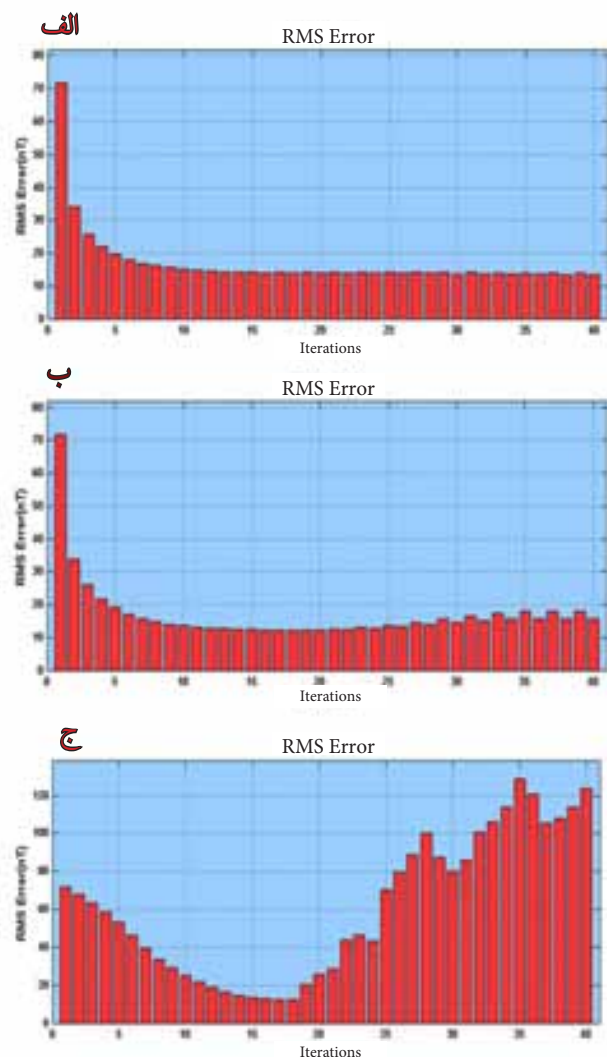


شکل ۹- ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل برای سطح نوفه ۲۰٪، (a) روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian (b) روش گرادیان زیر فضا، (c) روش Marquardt-Levenberg





شکل ۱۰: ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل برای سطح نوفه ۴۰٪، (a) روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian، (b) روش گرادیان زیر فضا، (c) روش Marquardt-Levenberg



شکل ۱۱- ریشه میانگین مربعی خطا، مربوط به داده‌های مصنوعی و داده‌های تخمین زده شده از وارون سازی، بعد از ۴۰ تکرار متوالی بدون شرط قطع برنامه رایانه‌ای. قسمت الف: روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian، قسمت ب: روش گرادیان زیر فضا، قسمت ج: روش Marquardt-Levenberg

روان سازی برای ۴۰ تکرار متوالی بدون لحاظ کردن شرط قطع برنامه رایانه‌ای انجام شده است.

در این سطح نوفه، روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian (شکل ۱۱-الف) بعد از ۳ تکرار متوالی، روش گرادیان زیر فضا (شکل ۱۱-ب) بعد از ۴ تکرار متوالی و روش Marquardt-Levenberg (شکل ۱۱-ج) بعد از ۱۰ تکرار متوالی هم گرا می‌شود. مطابق شکل ۱۱ روش‌های مبتنی بر استفاده از زیر فضا در وارون سازی، دارای منحنی کاهش خطای مجذور میانگین با افت بسیار شدید و رسیدن به همگرایی مطلوب در چند تکرار ابتدایی می‌باشند. در مقابل، منحنی مشابه در روش Marquardt-Levenberg دارای آهنگ ملایم در کاهش خطای مجذور میانگین است. این مطلب یکی از نقاط قوت روش‌های

### مقایسه ماتریس‌های قدرت تفکیک پارامترهای مدل

سطرها و ستون‌های ماتریس قدرت تفکیک در شکل‌های ۸ تا ۱۰ برای هر سطح نوفه به صورت مجزا رسم شده‌اند.

در شکل ۸-a قسمت (a)، ماتریس قدرت تفکیک برای سطح نوفه ۱۰٪ مربوط به روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian دارای ساختار بسیار نزدیک به ساختار ماتریس همانی است. مولفه‌ها بر روی قطر ماتریس متمرکز بوده و دامنه عناصر قطری نیز بالاتر از ۰/۸ می‌باشد. این ساختار نزدیک به ایده‌آل، نشان می‌دهد که پارامترهای مدل در این روش با دقت بالا و به صورت یکتا در روند وارون سازی محاسبه شده‌اند. همچنین قدرت تفکیک برای تمامی پارامترهای مدل یکسان می‌باشد.

در شکل ۸-b ماتریس قدرت تفکیک برای روش گرادیان زیر فضا رسم شده است. مولفه‌ها در این ماتریس به صورت کاملاً پراکنده در تمام عناصر ماتریسی پخش شده‌اند. در شکل ۸-c نیز ماتریس قدرت تفکیک پارامترهای مدل برای روش Marquardt-Levenberg رسم شده است. این ماتریس دارای ساختار قطری ضعیف بوده و در برخی از پارامترهای مدل قدرت تفکیک کمی را نشان می‌دهد. این پارامترها مربوط به پارامترهایی از سنگ کف با عمق بیشتر هستند. به عبارت دیگر با افزایش عمق پارامترهای مدل، قدرت تفکیک کاهش می‌یابد. ساختار توزیع دامنه‌ها نیز از یک ماتریس همانی فاصله زیادی دارد، به طوری که بیشینه دامنه در پارامترهای سطحی نزدیک به ۰/۳ است.

با افزایش سطح نوفه، ساختار کلی ماتریس‌ها در هر سه روش تقریباً یکسان باقی می‌ماند (شکل‌های ۹ و ۱۰)، با این تفاوت که در روش Marquardt-Levenberg با افزایش سطح نوفه، دامنه عناصر قطری کاهش می‌یابد. با توجه به مطالبی که بیان شد روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian دارای ماتریس‌های قدرت تفکیک بسیار نزدیک به ساختار ایده‌آل (ماتریس همانی) است که این امر در وارون سازی و تئوری وارون از اهمیت به سزایی برخوردار است و از مزایای این روش محسوب می‌شود.

### مقایسه روند هم گرایی

روند کاهش ریشه میانگین مربعی خطای مربوط به داده‌های مصنوعی و داده‌های تخمین زده شده در وارون سازی، یکی از نکات قابل تامل در وارون سازی‌های ژئوفیزیکی است. مطالعه این روند کاهش، بیان گر آن است که یک روش روان سازی تا چه حد قادر است بین دو تکرار متوالی، ریشه میانگین مربعی خطا را کاهش دهد. در هر سطح نوفه مشخص، رفتار نزولی کاهش خطا در روش‌های بیان شده، منحنی کم و بیش یکسانی را نشان می‌دهد.

به دلیل جلوگیری از تکرار منحنی‌های مشابه، رفتار نزولی کاهش خطا در سطح نوفه ۴۰٪ مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین به منظور مطالعه بهتر این منحنی‌ها در هر روش،

با استناد به شکل ۱۲، روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian در هر سه سطح نوفه دارای زمان اجرای کمتری نسبت به دو روش دیگر است. روش Marquardt-Levenberg به دلیل آهنگ هم‌گرایی کمتر نسبت به دو روش دیگر دارای زمان اجرای بیشتر است. روش گرادیان زیر فضا از لحاظ زمان اجرای برنامه رایانه‌ای بین این دو حد قرار می‌گیرد. زمان اجرای برنامه‌های رایانه‌ای در وارون سازی، از اهمیت بالایی برخوردارند. این مطلب به خصوص در مورد مسایل بزرگ مقیاس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا با افزایش ابعاد مساله، زمان اجرای برنامه رایانه‌ای به صورت یک الگوی نمایی افزایش می‌یابد. بنابراین، الگوریتم‌هایی که قابلیت رسیدن به هم‌گرایی را با تعداد تکرار کمتر و زمان اجرای کم‌تری دارا باشند، در وارون‌سازی‌های مسایل ژئوفیزیکی از اولویت بالایی برخوردارند.

### مقایسه تعداد تکرارهای متوالی

در شکل ۱۳ تعداد تکرارهای متوالی در رسیدن به هم‌گرایی مطلوب برای سه روش یاد شده نشان داده شده است. با مقایسه تعداد تکرارها می‌توان نتیجه گرفت که روش Marquardt-Levenberg به دلیل آهنگ هم‌گرایی کندتر نسبت به روش‌های زیر فضا، به تکرارهای متوالی بیشتری برای رسیدن به هم‌گرایی نیاز دارد.

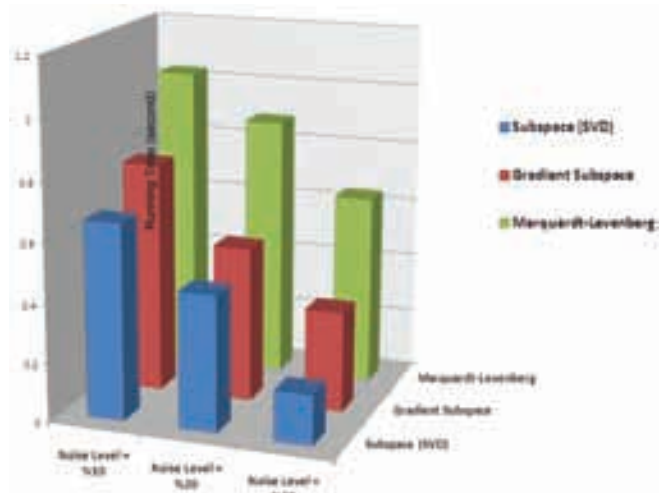
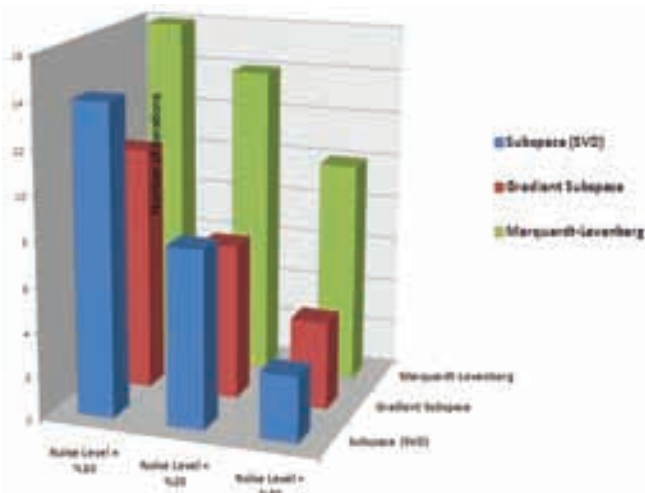
تعداد تکرارها در دو روش زیر فضا نزدیک به هم بوده که این امر بیان‌گر آهنگ هم‌گرایی بالا در استفاده از روش‌هایی بر مبنای تشکیل زیر فضا برای حل مساله وارون است. با مقایسه شکل ۱۲ و ۱۳ در مورد روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian و روش گرادیان زیر فضا، می‌توان گفت که گام اجرای برنامه در

وارون سازی با استفاده از زیر فضا است.

نکته قابل تامل دیگر در شکل ۱۱ پایداری روش‌های زیر فضا نسبت به روش Marquardt-Levenberg است. به صورتی که در این روش‌ها بعد از رسیدن به هم‌گرایی، وارون سازی یک رفتار پایدار در تکرارهای متوالی از خود نشان می‌دهد. در صورتی که در روش Marquardt-Levenberg بعد از رسیدن به هم‌گرایی، نوفه کمینه شده و از تکرار ۱۸ به بالا، روند واگرایی برای وارون‌سازی شروع می‌شود و این روند در تکرارهای بالاتر نیز ادامه می‌یابد. این موضوع، یکی دیگر از مزایای روش زیر فضا بر روش کلاسیک Marquardt-Levenberg می‌باشد. با مقایسه منحنی‌های کاهش خطای مجذور میانگین در مورد روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian و روش گرادیان زیر فضا، مشاهده می‌شود که روش اول دارای مزیت بیشتری نسبت به روش گرادیان زیر فضا است. زیرا حتی ناپایداری‌ها و نوسانات کمی که در تکرارهای بالاتر برای روش گرادیان زیر فضا دیده می‌شود، در مورد منحنی مربوط به روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian مشاهده نمی‌گردد.

### مقایسه زمان اجرای برنامه رایانه‌ای

زمان اجرای برنامه‌های رایانه‌ای در مورد روش‌های یاد شده با سطوح نویز متفاوت در شکل ۱۲ ارائه شده است. این زمان، زمان اجرای روند اصلی الگوریتم وارون‌سازی است و زمان اجرای مراحل فراخوانی داده‌ها، تشکیل ماتریس‌های قدرت تفکیک و محاسبات مربوط به عدم قطعیت در تخمین پارامترهای مدل و رسم نتایج و نمودارهای تکمیلی در این زمان دخالت داده نشده است.



شکل ۱۳- مقایسه تعداد تکرارهای متوالی اجرای برنامه رایانه‌ای با سطوح نوفه متفاوت. ردیف پشت: روش Marquardt-Levenberg، ردیف وسط: روش گرادیان زیر فضا، ردیف جلو: روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian

شکل ۱۲- مقایسه زمان اجرای برنامه رایانه‌ای با سطوح نوفه متفاوت. ردیف پشت: روش Marquardt-Levenberg، ردیف وسط: روش گرادیان زیر فضا، ردیف جلو: روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian



مشاهده می‌شود که عدم قطعیت بدست آمده با استفاده از روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian در مقابل این پارامتر در روش Marquardt-Levenberg، به جواب مساله نزدیک‌تر است.

### نتیجه‌گیری

ماتریس قدرت تفکیک برای روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian، دارای ساختار بسیار نزدیک به ساختار ماتریس همانی است. مولفات روی قطر ماتریس، متمرکز بوده و دامنه عناصر قطری نیز بالاتر از دو روش دیگر است. استقلال و یکنایی پارامترهای مدل در این روش از مزایای برجسته روش مزبور است. روند کاهش ریشه میانگین مربعی خطا مربوط به داده‌های مصنوعی و داده‌های تخمین زده شده در وارون‌سازی مبتنی بر روش‌های زیر فضا دارای منحنی کاهش خطای مجذور میانگین با افت بسیار شدید و رسیدن به هم‌گرایی مطلوب در چند تکرار ابتدایی می‌باشند. در مقابل، منحنی مشابه در روش Marquardt-Levenberg دارای آهنگ ملایم در کاهش خطای مجذور میانگین است. هم‌گرایی سریع، یکی دیگر از نقاط قوت برجسته روش‌های وارون‌سازی با استفاده از زیر فضا است. همچنین پایداری وارون‌سازی بر مبنای استفاده از روش‌های زیر فضا نسبت به روش Marquardt-Levenberg، مزیت دیگر این روش‌ها نسبت به روش‌های متداول است. روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian، حتی دارای پایداری بیشتری نسبت به روش گرادیان زیر فضا است. این مطلب در تکرارهای بالاتر، قابل ملاحظه است.

با استناد به برنامه‌های رایانه‌ای ارائه شده، روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian، در هر سه سطح نوفه دارای زمان اجرا و تکرارهای کمتر به منظور هم‌گرایی، نسبت به دو روش دیگر است. این مطلب در مورد مسایل بزرگ مقیاس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است زیرا با افزایش ابعاد مساله، زمان اجرای برنامه رایانه‌ای به صورت یک الگوی نمایی افزایش می‌یابد. بنابراین، الگوریتم‌هایی که قابلیت رسیدن به هم‌گرایی را با تعداد تکرار کمتر و زمان اجرای کمتری دارا باشند، در وارون‌سازی‌های مسایل ژئوفیزیکی از اولویت بالایی برخوردارند. عدم قطعیت در پارامترهای مدل با استفاده از روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian در مقابل دو روش دیگر، دارای بازه کوچک‌تر و تقریب منطقی‌تری از پخش خطا روی پارامترهای مدل است.

### منابع

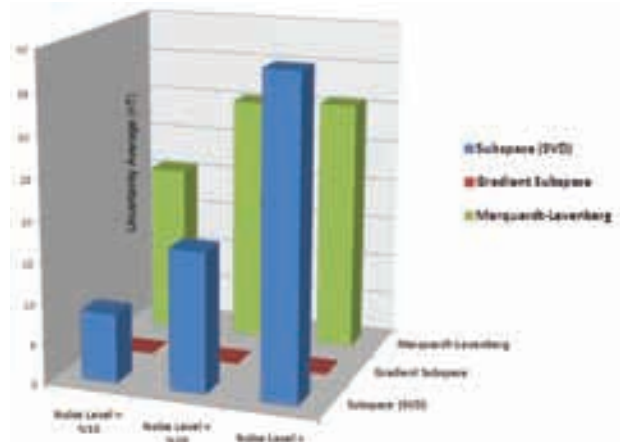
- Corbato, C.E. 1965. A least-square procedure for gravity interpretation. *Geophysics* 30, 228-233.
- Jackson, D.D. 1972. Interpretation of inaccurate and inconsistent data, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 28, 97-109.
- Kennett, B.L.N. and Sambridge, M.S. 1998.

یک تکرار در روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian کمتر از روش گرادیان زیر فضا است و یکی دیگر از مزایای این روش محسوب می‌شود.

### مقایسه عدم قطعیت در تخمین پارامترهای مدل

در شکل ۸ عدم قطعیت در پارامترها با استفاده از تخمین ماتریس کواریانس پارامترهای مدل برای هر سه روش ذکر شده نشان داده شده است.

در شکل ۱۴، روش گرادیان زیر فضا دارای کمترین میزان عدم قطعیت در تعیین پارامترهای مدل است. در صورتی که به مدل‌های تخمین زده شده با استفاده از روش گرادیان زیر فضا در شکل ۵ توجه شود، به روشی می‌توان دید که میزان عدم قطعیت واقعی در تخمین پارامترهای مدل و بازیافت سنگ کف مدل‌سازی شده، بسیار بیشتر از مقادیری است که در شکل ۱۴ نمایش داده شده است (میانگین مقادیر عدم قطعیت در این روش کمتر از ۰/۵ متر است). به بیان دیگر، عدم قطعیت در این روش، مبتنی بر واقعیات فیزیکی و ساختار مورد مطالعه نیست و صرفاً به دلیل الگوریتم ریاضی مورد استفاده قرار گرفته در این روش (تعداد بردارهای



شکل ۱۴- مقایسه میانگین عدم قطعیت در تعیین پارامترهای مدل با سطوح نوفه متفاوت. ردیف پشت: روش Marquardt-Levenberg، ردیف وسط: روش گرادیان زیر فضا، ردیف جلو: روش زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian

پایه کم در تصویرسازی و تشکیل زیر فضا) می‌باشد.

در مورد روش‌های زیر فضا بر مبنای SVD ماتریس Hessian و روش Marquardt-Levenberg روش اول دارای عدم قطعیت کمتری در سطح نوفه ۱۰٪ و ۲۰٪ است. این مطلب نشان می‌دهد خطای موجود در داده‌ها به واسطه الگوریتم پیشرفته، کمتر در تخمین پارامترهای مدل پخش شده است. در مورد سطح نوفه ۴۰٪ عدم قطعیت میان دو روش، نزدیک به هم بوده و اختلاف آن‌ها در مقایسه با عمق سنگ کف قابل اغماض است. با مقایسه دو شکل ۳ و ۷ مربوط به مدل عمقی بازیافت شده توسط وارون‌سازی در دو روش یاد شده،



Inversion for multiple parameter classes. *Geophys. Journal.Int.* 135, 304-306.

- Kennett, B.L.N. and Williamson, P.R. 1988. Subspace methods for large-scale nonlinear inversion, *Mathematical Geophysics: a survey of recent development in seismology and geodynamics*, Dordrecht. 139-154.

- Kunaratnam, K. 1972 An interactive method for solution of a non linear inverse problem in magnetic interpretation. *Geophysical Prospecting*, 20, 439-447.

- Menke, W., 1989, *Geophysical Data Analysis Discrete Inverse Theory* : Academic Press Inc.

- Meju, M.A. 1994. *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice*, Society of Exploration Geophysics.

- Mickus, K.L. 1992. Inversion of gravity and magnetic data for lower surface of a 2.5 dimensional sedimentary basin. *Geophysical Prospecting*, 40, 171-191.

- Minichetti, V. 1983. Simultaneous interactive magnetic and gravity inversion. *Geophysical Prospecting*, 31, 929-944.

- Mirzaei, M. and Bredewout, J.W. 1996. 3-D Microgravity data inversion for detecting cavities, *European journal of environmental and engineering geophysics*, 1, 249-270.

- Marquardt, D.W. 1963. An algorithm for Least-square estimation of Non-Linear param-

eters, *J. Soc. Indust. Applied. Mathematics. II*, 276-291.

- Oldenburg, D.w., McGillivray, P.R. and Ellis, R.G. 1993. Generalized subspace method for large-scale inverse problems. *Geophys.Journal.Int.* 114, 12-20.

- Oldenburg, D.w., Unsworth, M. 1995. Subspace inversion of electromagnetic data: application to mid-ocean-ridge exploration. *Geophys.J.int.* 123, 161-168.

- Pedersen, L. B., 1977. Interpretation of potential field data - A generalized inverse approach: *Geophys. Prosp.*, Europa Association Geoscience Engineering, 25, 199-230.

- Sambridge, M.S. 1991. Non-linear arrival time inversion: constraining velocity anomalies by seeking smooth models in 3-D. *Geophys Journal Int.* 102, 635-677.

- Tarantola, A., 2005. *Inverse Problem Theory: Methods for data fitting and model parameter estimation* :Elsivier, Amsterdam, The Netherlands.

- Thurston, J.B., Smith, R.S., Guillon, J. 2002. A multimodel method for depth estimation from magnetic data *Geophysics*, 67, 555-561.

- Wang, Y, and Houseman, G. A. 1994. Inversion of reflection seismic amplitude data for interface geometry, *Geophys. Journal. Int.* 117, 92-110.