© Statistical Research and Training Center
مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
J. Statist. Res. Iran **4** (2007): 29-46
دوره‌ی ۴، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۶، صص ۲۹-۴۶
پژوهشکده‌ی آمار

ساختار ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی و نقش آن در تقریب واریانس یک آماره

محمد خراشادیزاده و غلامرضا محتشمی برزادران *

دانشگاه فردوسی مشهد و پژوهشکده‌ی آمار

چکیده. در بسیاری از مواقع، بهترین برآوردگر تابعی از پارامتر مجهول وجود دارد ولی به‌دلیل پیچیدگی آن نمی‌توان واریانس آن را در قالب یک رابطه‌ی صریح بیان کرد. در این تحقیق با معرفی کران پایین باتاچاریا که مرتبط با ماتریس باتاچاریا است، تقریبی از واریانس آن برآوردگر را بیان می‌کنیم که با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا این تقریب، دقیق‌تر خواهد بود. برای خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با واریانس درجه‌ی ۲ از θ و همچنین برخی از توزیع‌های خانواده‌ی نمایی طبیعی با واریانس درجه‌ی ۳ از θ با تکیه بر توزیع‌های گاوسی وارون، آبل و تاکاس با شبیه‌سازی و محاسبات عددی نشان داده شده است که کران باتاچاریا به‌عنوان تقریب واریانس آماره، بهتر از کران پایین کرامر-رائو می‌باشد.

واژگان کلیدی. خانواده‌ی توزیع‌های طبیعی؛ ماتریس باتاچاریا؛ کران پایین باتاچاریا؛ کران پایین کرامر-رائو؛ اطلاع فیشر.

۱ مقدمه

یکی از مسائل مهم در نظریه‌ی برآورد، کران پایین برای واریانس برآوردگر می‌باشد؛ زیرا این موضوع، اطلاعاتی در مورد دقت و صحت برآوردگر به ما می‌دهد. از استنباط آماری می‌دانیم که نابرابری کرامر-رائو یک کران پایین برای واریانس برآوردگرهای نااریب ارائه می‌دهد؛ اما این نابرابری فقط بیان می‌کند که تحت شرایط

* نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

خاصی، واریانس هر برآوردگر نمی‌تواند از یک کمّیت مشخص کم‌تر باشد و این‌که این واریانس چه‌قدر بیش‌تر از این کمّیت است، مورد توجه قرار نمی‌گیرد.

باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) یک صورت تعمیم‌یافته از نابرابری کرامر-رائو به دست آورد که مرتبط با ماتریس باتاچاریا است. ماتریس باتاچاریا همان ماتریس کوواریانس بردار تصادفی

$$\left(\frac{f^{(1)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(2)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \ldots, \frac{f^{(k)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right)$$

است که در آن $f^{(k)}(X|\theta)$ مشتق kام تابع چگالی احتمال $f(X|\theta)$ نسبت به θ (پارامتر توزیع)، و k مرتبه‌ی ماتریس می‌باشد و برای مقدار $k=1$ این ماتریس تبدیل به اطلاع فیشر می‌شود. بر اساس این ماتریس، نابرابری باتاچاریا بیان می‌شود.

علاوه بر این، در این زمینه، نویسندگان زیادی از جمله شان‌باگ (۱۹۷۲، ۱۹۷۹)، بلایت و رائو (۱۹۷۴) و محتشمی برزادران (۲۰۰۱، ۲۰۰۶) مقاله‌های قابل توجهی ارائه کرده‌اند.

۱٫۱ نابرابری باتاچاریا

تعریف ۱ اگر $T(X)$ برآوردگر نااریب از تابع $\tau(\theta)$ باشد داریم:

$$\mathrm{var}_\theta(T(X)) \geqslant \xi'_\theta J^{-1} \xi_\theta,$$

که در آن:

آ) « $'$ » نشان‌دهنده‌ی ترانهاده می‌باشد و $\xi_\theta = (\tau^{(1)}(\theta), \tau^{(2)}(\theta), \ldots, \tau^{(k)}(\theta))'$؛

ب) $\tau^{(j)}(\theta) = \frac{\partial^j E_\theta(T(X))}{\partial \theta^j}$ که در آن $j=1,2,\ldots,k$؛

پ) J^{-1} وارون ماتریس باتاچاریا می‌باشد که در آن:

$$J_{rs} = \mathrm{cov}\left(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}, \frac{f^{(s)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right), \qquad r,s = 1,2,\ldots,k$$

و $E_\theta\left(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}\right) = 0$.

لذا بر اساس نابرابری باتاچاریا برای مقادیر مختلف k (مرتبه‌ی ماتریس) می‌توان کران‌های مختلفی را برای واریانس آماره پیدا کرد. به‌ازای مقدار $k=1$ این نابرابری به کران کرامر-رائو تبدیل می‌شود و هرچه مرتبه‌ی ماتریس (k) افزایش یابد و تابع $\tau(\theta)$ نیز مشتق‌پذیر از آن مرتبه باشد، کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک‌تر می‌شود. این مطلب را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

فرض کنیم $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)'$ برداری تصادفی با ماتریس کوواریانس معین مثبت Σ باشد. X و Σ را به‌صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y \end{pmatrix}$$

که در آن $Y = (X_2, X_3, \ldots, X_m)'$. در این صورت $\operatorname{var}(X_1) = \sigma_{11}$ و $\operatorname{cov}(Y) = \Sigma_{22}$، و σ_{12} بردار $(m-1) \times 1$ می‌باشد که همان کوواریانس بین X_1 و Y است. بیش‌ترین همبستگی بین X_1 و ترکیب خطی $b'Y$ زمانی حاصل می‌شود که $b = \sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ است (اندرسون، ۱۹۵۸) که اگر آن را با $\rho_{1.2\cdots m}$ نشان دهیم داریم:

$$\rho_{1.2\cdots m} = \left(\frac{\sigma'_{12}\Sigma_{22}^{-1}\sigma_{12}}{\sigma_{11}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

و چون $\rho^2_{1.2\cdots m} \leqslant 1$ لذا:

$$\sigma_{11} \geqslant \sigma'_{12} \sum_{22}^{-1} \sigma_{12}.$$

حال اگر m را به $m+1$ تبدیل کنیم و بردار X را به‌صورت $X = \binom{X_1}{Y^*}$ افراز کنیم که در آن $Y^* = (X_2, \ldots, X_{m+1})'$، می‌بینیم که کران پایین σ_{11} بزرگ‌تر می‌شود، که مؤید آن است که با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود.

۲ خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس مربع (NEF-QVF) و قطری بودن ماتریس باتاچاریا

با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا اگرچه به‌عنوان تقریب بهتری از واریانس آماره عمل می‌کند، محاسبه‌ی وارون آن پیچیده‌تر می‌شود. شاید بتوان گفت که در دنیای امروز با رایانه این مشکل حل شده است، ولی در حالت‌های خاص، کران باتاچاریا که به وارون ماتریس باتاچاریا بستگی دارد قابل توجه است و نتایج جالبی را نشان می‌دهد که حتی بدون رایانه هم قابل انجام است.

شان‌باگ (۱۹۷۲، ۱۹۷۹) نشان داد که ماتریس باتاچاریا از هر مرتبه‌ای در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی دو، قطری است، که این موضوع مسئله‌ی محاسبه‌ی وارون ماتریس باتاچاریا را در

این خانواده‌ی توزیع‌ها حل می‌کند. او همچنین نشان داد که فقط و فقط در ۶ توزیع احتمال نرمال، پواسون، دوجمله‌ای، دوجمله‌ای منفی، گاما و فوق هندسی آمیخته که دارای تابع واریانس درجه‌ی دو می‌باشند، ماتریس باتاچاریا قطری است. به عبارت دیگر اگر تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی ناتباهیده‌ی X به‌صورت زیر باشد

$$f(x|\theta) = \frac{\exp(xg(\theta))}{\beta(g(\theta))}\psi(x), \qquad (۱)$$

که در آن $\theta \in \Theta$، و Θ یک بازه در اعداد حقیقی و تابع g بسته به مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا مشتق‌پذیر نسبت به آن مرتبه است، آن‌گاه ماتریس باتاچاریا از هر مرتبه‌ای قطری است اگر و فقط اگر

$$E_\theta(X) = c_{۱۱} + c_{۲۱}\theta,$$
$$E_\theta(X^۲) = c_{۱۲} + c_{۲۲}\theta + c_{۳۲}\theta^۲,$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\mathrm{var}_\theta(X) = c_{۱۳} + c_{۲۳}\theta + c_{۳۳}\theta^۲$$

و

$$g'(\theta) = \frac{c_{۲۱}}{c_{۱۳} + c_{۲۳}\theta + c_{۳۳}\theta^۲},$$

که در آن‌ها c_{ij}ها اعداد ثابتی (مستقل از θ) هستند. شان‌باگ با قرار دادن مقادیر مختلف برای این ثابت‌ها مشخصه‌هایی برای شش توزیع مذکور پیدا کرد. با در نظر گرفتن ماتریس باتاچاریای ۳ × ۳ می‌توان (r, s)امین درایه‌ی این ماتریس را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$J_{rs} = \mathrm{cov}\left(\frac{f^{(r)}}{f}, \frac{f^{(s)}}{f}\right) = E\left(\frac{f^{(r)}}{f}, \frac{f^{(s)}}{f}\right),$$

زیرا $E\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right) = ۰$ برای $k = ۱, ۲, ۳$.

با توجه به قضیه‌ی زیر (بلایت و رائو، ۱۹۷۴) می‌توانیم برای این خانواده‌ی توزیع‌ها واریانس هر برآوردگر نااریب را به‌راحتی تقریب بزنیم.

قضیه‌ی ۱ فرض کنید $T = T(X)$ یک MVUE برای پارامتر برآوردپذیر $\tau(\theta)$ با واریانس متناهی باشد. آن‌گاه تحت شرایط (آ) تا (ت) برای هر $\theta \in \Theta$ داریم:

$$\mathrm{var}(T) = \sum_{i=۱}^{\infty}\left\{\frac{\tau^i(\theta)}{J_i}\right\}^۲$$

که در آن $J_i^۲$ درایه‌ی iام روی قطر ماتریس باتاچاریا می‌باشد.

شرایط:

آ) فضای پارامتر Θ یک بازه در اعداد حقیقی باشد،

ب) X متعلق به خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی دو باشد،

پ) مشتق تابع چگالی نسبت به θ تا هر مرتبه‌ای وجود داشته باشد،

ت) بسط تیلور تابع چگالی و تابع $\tau(\theta)$ در هر $\theta \in \Theta$ به‌ازای هر t وجود داشته باشد.

با توجه به قضیه‌ی ۱ می‌توان واریانس هر برآوردگری را در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی دو به‌راحتی تقریب زد. در جدول ۱ شکل بسته‌ای از مقادیر روی قطر ماتریس باتاچاریا از هر مرتبه‌ای برای شش توزیع مذکور ارائه شده است.

در ادامه با ارائه‌ی دو مثال و شبیه‌سازی و محاسبات عددی برای دو توزیع دوجمله‌ای و نمایی نشان می‌دهیم که کران باتاچاریا با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار واقعی واریانس برآوردگر مورد نظر میل می‌کند.

مثال ۱ (توزیع دوجمله‌ای منفی). فرض کنید می‌خواهیم پارامتر p در توزیع دوجمله‌ای منفی با تابع چگالی احتمال زیر را برآورد کنیم:

$$P(X=n)=\binom{n-1}{r-1}p^r q^{n-r}(n=r,r+1,\ldots),\qquad r\geqslant 1$$

که در آن r معلوم می‌باشد. به‌راحتی می‌توان نشان داد که بهترین برآوردگر نااریب برای p به‌صورت

$$\hat{p}=\begin{cases}\frac{r-1}{n-1}, & n>1\\ 1, & n=1\end{cases}$$

می‌باشد، اما هیچ عبارت ساده‌ای برای واریانس این برآوردگر وجود ندارد. در این حالت اگر قرار دهیم $\theta=p^{-1}$، آن‌گاه $\tau(\theta)=\theta^{-1}$. پس با استفاده از جدول ۱ و قضیه‌ی ۱ داریم:

$$\operatorname{var}(\hat{p})=p^2\sum_{i=1}^{\infty}\binom{r+i-1}{i}^{-1}q^i.$$

جدول ۱. درایه‌های روی قطر ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با واریانس درجه‌ی ۲

نام توزیع	تابع چگالی احتمال $f(x\|\theta)$	درایه‌ی rام روی قطر ماتریس باتاچاریا
نرمال $N(\theta,\sigma^{۲})$؛ $\sigma^{۲}$ معلوم	$\frac{۱}{\sqrt{۲\pi\sigma^{۲}}}e^{-\frac{(x-\theta)^{۲}}{۲\sigma^{۲}}}$	$\frac{r!}{(\sigma^{۲})^r}$
پواسون $P(\theta)$	$\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$	$\frac{r!}{\theta^r}$
گاما $\mathrm{Gamma}(\alpha,\theta)$؛ α معلوم	$\frac{x^{\alpha-۱}\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}e^{-\theta x}$	$\frac{(\alpha+r-۱)!r!}{(\alpha-۱)!\theta^{۲r}}$
دوجمله‌ای $\mathrm{Bin}(n,\theta)$؛ n معلوم	$\binom{n}{x}\theta^x(۱-\theta)^{n-x}$	$\frac{\binom{n}{r}(r!)^{۲}}{(\theta(۱-\theta))^r}$, $r\leq n$
دوجمله‌ای منفی $\mathrm{NB}(n,\theta)$؛ n معلوم	$\binom{n-۱}{x-۱}(\frac{۱}{\theta})^x(۱-\frac{۱}{\theta})^{n-x}$	$\frac{(n+r-۱)!r!}{(n-۱)!}\cdot\frac{۱}{(\theta(\theta-۱))^r}$
فوق هندسی آمیخته	$(\cos\alpha)^\rho\frac{۲^{\rho-۲}}{\pi\Gamma(\rho)}e^{\alpha x}$ $\Gamma(\frac{\rho}{۲}+\frac{ix}{۲})\Gamma(\frac{\rho}{۲}-\frac{ix}{۲})$; $x\in R$, $\alpha=\tan^{-۱}(\theta)$	$\frac{\Gamma(\rho+r)r!}{\Gamma(\rho)}\cdot\frac{۱}{\rho^{۲}(۱+\theta^{۲})^r}$

هالدان (۱۹۴۵) از رهیافتی دیگر، همین عبارت را به‌عنوان بهترین روش برای برآورد واریانس $\hat{p}$ هنگامی که r بزرگ باشد معرفی کرده است. سری فوق برای مقادیر مختلف r و p خیلی سریع به مقدار مشخصی می‌گراید؛ مثلاً برای $r=۱۰$ و $p=۰/۵$ داریم:

$$\mathrm{var}(\hat{p})=\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۲۲۰}+\frac{۱}{۱۷۶۰}+\cdots\right)\approx ۰/۰۱۳۸.$$

مثال ۲ (تابع قابلیت اعتماد). یکی از مسائل مهم که در قابلیت اعتماد وجود دارد مسئله‌ی برآورد کردن تابع قابلیت اعتماد از یک مجموعه‌داده‌ی مستقل می‌باشد. در توزیع نمایی با میانگین θ، نویسندگان زیادی نشان داده‌اند که بهترین برآوردگر نااریب برای $\tau(\theta)=e^{\frac{-a}{\theta}}$ (تابع قابلیت اعتماد) به‌صورت زیر است:

$$\hat{\tau}=\left(۱-\frac{a}{n\bar{x}}\right)^{+}$$

که در آن $a^{+}=\min(۰,a)$.

جدول ۲. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع قابلیت اعتماد در توزیع نمایی (مقادیر در ۱۰۰۰ ضرب شده‌اند)

	$n = ۴$				$n = ۸$			
λ	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$	$B_۴$	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$	$B_۴$
۰٫۵	۲۲٫۹۹	۲۸٫۱۷	۲۹٫۵۱	۲۹٫۸۷	۱۱٫۵۰	۱۲٫۹۳	۱۳٫۱۶	۱۳٫۱۸
۱	۳۳٫۸۳	۳۷٫۲۲	۳۷٫۴۱	۳۷٫۴۱	۱۶٫۹۲	۱۷٫۸۶	۱۷٫۸۹	۱۷٫۸۹
۲	۱۸٫۳۲	۱۸٫۳۲	۱۸٫۷۲	۱۸٫۹۶	۹٫۱۶	۹٫۱۶	۹٫۲۳	۹٫۲۵
۴	۱٫۳۴	۱٫۸۸	۱٫۹۱	۱٫۹۳	۰٫۶۷	۰٫۸۲	۰٫۸۳	۰٫۸۳
	$n = ۱۶$				$n = ۳۲$			
λ	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$	$B_۴$	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$	$B_۴$
۰٫۵	۵٫۷۵	۶٫۱۳	۶٫۱۶	۶٫۱۷	۲٫۸۷۴	۲٫۹۷۲	۲٫۹۷۶	۲٫۹۷۶
۱	۸٫۴۶	۸٫۷۱	۸٫۷۱	۸٫۷۱	۴٫۲۲۹	۴٫۲۹۳	۴٫۲۹۴	۴٫۲۹۴
۲	۴٫۵۸	۴٫۵۸	۴٫۵۹	۴٫۵۹	۲٫۲۸۹	۲٫۲۸۹	۲٫۲۹۰	۲٫۲۹۰
۴	۰٫۳۴	۰٫۳۸	۰٫۳۸	۰٫۳۸	۰٫۱۶۷	۰٫۱۷۷	۰٫۱۷۸	۰٫۱۷۸

زاکس و ایون (۱۹۶۶) توانسته‌اند واریانس برآوردگر فوق را محاسبه کنند؛ اما فرمول آن بسیار پیچیده است که محاسبه‌ی آن حتی برای مقادیر کوچک n بسیار مشکل است؛ در حالی که با استفاده از کران‌های باتاچاریا به‌راحتی می‌توان واریانس برآوردگر فوق را تقریب زد. لذا با توجه به قضیه‌ی ۱ و جدول ۱ داریم:

$$\mathrm{var}(\hat{\tau}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^{2i}(n-1)!}{i!(n+i-1)!}\tau^{(i)}(\theta)^2.$$

در جدول ۲ چهار کران اول باتاچاریا را برای مقادیر مختلف n و $\lambda = \frac{a}{\theta}$ محاسبه کرده‌ایم. دو نکته‌ی مهمی که از این مثال و جدول آن می‌توان دید این است که

- برای اکثر مقادیر مختلف پارامتر، کران‌های باتاچاریا حتی برای اندازه‌های کمِ نمونه به‌سرعت به مقدار واقعی واریانس آماره میل می‌کنند.
- کران کرامر-رائو، B_1، حتی برای اندازه‌های بزرگ نمونه، یک مقدار ناکافی برای مقدار واقعی واریانس آماره می‌باشد. بنا بر این نیاز مبرم به کران بهتری از کران کرامر-رائو داریم.

۳ ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع واریانس درجه‌ی سه (NEF-CVF)

ماتریس باتاچاریا در خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی سه به‌صورت قطری نیست. لذا برای بررسی دقیق‌تر این موضوع، این خانواده‌ی توزیع‌ها را در دو حالت

آ) توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی سه از θ است و $E(X)$ هم تابعی خطی از θ است،

ب) توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی سه از $E(X)$ است ولی $E(X)$ تابع خطی از θ نیست،

مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این‌جا قبل از بررسی این خانواده‌ی توزیع‌ها به بیان دو لم می‌پردازیم:

لم ۱ (فِند، ۱۹۵۹). در خانواده‌ی توزیع نمایی طبیعی به‌صورت (۱) می‌توان حاصل $\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}$ را به‌صورت یک چندجمله‌ای از درجه‌ی r برحسب x به‌شکل زیر نوشت:

$$\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}=\sum_{l=0}^{r} d_{rl}(\theta)x^l$$

که در آن $d_{rl}(\theta)$ ضریب x^l می‌باشد و فقط به θ بستگی دارد.

لم ۲ (محتشمی برزادران، ۲۰۰۱). برای خانواده‌ی توزیع‌های نمایی طبیعی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی k از میانگین‌اش است، هرگاه $E(X)$ تابعی خطی از θ باشد، $E(X^r)$ چندجمله‌ای از θ با درجه‌ی $(r-1)(k-1)+1$ است.

۳٫۱ توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی سه از θ است و $E(X)$ هم تابعی خطی از θ است

با فرض $E_\theta(X)=c_{11}+c_{21}\theta$ می‌توان نشان داد که ماتریس باتاچاریای 3×3 در رده‌ی توزیع‌های لوتاک-مورا (لوتاک و مورا، ۱۹۹۰) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_{22} & l(g'(\theta))^2 \\ 0 & l(g'(\theta))^2 & J_{33} \end{pmatrix}.$$

از جمله‌ی توزیع‌هایی که دارای این ویژگی‌اند توزیع گاوسی وارون می‌باشد که در آن $E(X)$ تابعی خطی از θ، و $E(X^{2})$ چندجمله‌ای درجه‌ی سه از θ، و در نتیجه واریانس آن از درجه‌ی سه می‌باشد. با توجه به لم‌های ۱ و ۲ می‌توانیم درایه‌های ماتریس را با استفاده از این موضوع و محاسبه‌ی $E(X^{r})$ برای rهای مختلف محاسبه کنیم.

در این‌جا با فرض این‌که $E(X)$ تابعی خطی از θ و $E(X^{2})$ تابعی درجه‌ی سه از θ است و این‌که برای هر r داریم $E(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}) = 0$، درایه‌های ماتریس باتاچاریای 5×5 را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} J_{12} = J_{21} &= E\left(\frac{f^{(2)}}{f}\sum_{l=0}^{1} d_{1l}(\theta)X^{l}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{1} d_{1l}(\theta)E\left(\frac{f^{(2)}}{f}\cdot X^{l}\right) = d_{11}(\theta)\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}E(X) = 0, \end{aligned}$$

و به‌طریق مشابه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$J_{13} = J_{14} = J_{15} = J_{24} = J_{25} = 0.$$

ولی برای درایه‌های دیگر که غیر صفر می‌باشند داریم:

$$\begin{aligned} J_{32} &= E\left(\frac{f^{(3)}}{f}\sum_{l=0}^{2} d_{2l}(\theta)X^{l}\right) = \sum_{l=0}^{2} d_{2l}(\theta)E\left(\frac{f^{(3)}}{f}\cdot X^{l}\right) = d_{22}(\theta)\frac{\partial^{3}}{\partial\theta^{3}}E(X^{2}) \neq 0 \\ J_{43} &= E\left(\frac{f^{(4)}}{f}\sum_{l=0}^{3} d_{3l}(\theta)X^{l}\right) = \sum_{l=0}^{3} d_{3l}(\theta)E\left(\frac{f^{(4)}}{f}\cdot X^{l}\right) = d_{33}(\theta)\frac{\partial^{4}}{\partial\theta^{4}}E(X^{3}) \neq 0 \\ J_{53} &= E\left(\frac{f^{(5)}}{f}\sum_{l=0}^{3} d_{3l}(\theta)X^{l}\right) = \sum_{l=0}^{3} d_{3l}(\theta)E\left(\frac{f^{(5)}}{f}\cdot X^{l}\right) = d_{33}(\theta)\frac{\partial^{5}}{\partial\theta^{5}}E(X^{3}) \neq 0 \\ J_{54} &= \sum_{l=0}^{4} d_{4l}(\theta)E\left(\frac{f^{(5)}}{f}\cdot X^{l}\right) = d_{43}(\theta)\frac{\partial^{5}}{\partial\theta^{5}}E(X^{3}) + d_{44}(\theta)\frac{\partial^{5}}{\partial\theta^{5}}E(X^{4}) \neq 0 \end{aligned}$$

و برای درایه‌های قطر اصلی:

$$\begin{aligned} J_{rr} &= E\left(\frac{f^{(r)}}{f}\sum_{l=\circ}^{r} d_{rl}(\theta)X^{l}\right) \\ &= \sum_{l=\circ}^{r} d_{rl}(\theta)E\left(\frac{f^{(r)}}{f}\cdot X^{l}\right) \\ &= \sum_{l=۱}^{r} d_{rl}(\theta)\frac{\partial^{r}}{\partial\theta^{r}}E(X^{l}) \neq \circ, \end{aligned}$$

که در آن $r = ۱,۲,۳,۴,۵$. پس ماتریس باتاچاریای ۵×۵ برای این‌گونه خانواده‌های توزیع‌ها به‌صورت کلّی زیر می‌باشد:

$$\begin{pmatrix} J_{۱۱} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ & J_{۲۲} & J_{۲۳} & \circ & \circ \\ & & J_{۳۳} & J_{۳۴} & J_{۳۵} \\ & & & J_{۴۴} & J_{۴۵} \\ & & & & J_{۵۵} \end{pmatrix}. \qquad (۲)$$

همان‌طور که دیدیم برای به دست آوردن کران‌های باتاچاریا کافی است گشتاورهای غیر مرکزی آن توزیع را داشته باشیم. در ادامه‌ی مطلب به‌کمک نرم‌افزارهای ریاضی و آماری، پنج کران اول باتاچاریا را در توزیع گاوسی وارون برای برآوردگرهای نرخ شکست و ضریب تغییرات محاسبه می‌کنیم.

۳٫۱٫۱ ماتریس باتاچاریا در توزیع گاوسی وارون

توزیع گاوسی وارون یک توزیع دو پارامتری با تکیه‌گاه مثبت است که کاربردهای بسیار متعددی در زمینه‌های مختلف دارد که از جمله‌ی آن می‌توان به کاربرد آن در مدل‌های بقا، آزمون بقا و مسائل قابلیت اعتماد اشاره نمود. نام توزیع گاوسی وارون برگرفته از این حقیقت است که تابع تجمعی انباشتک (cumulant) این توزیع، وارون تابع انباشتک توزیع گاوسی است.

اگر X دارای توزیع گاوسی وارون باشد، یعنی $X \sim \mathrm{IG}(\theta,\lambda)$، آنگاه تابع چگالی آن به‌صورت زیر است:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{۲\pi x^{۳}}}\exp\left\{\frac{-\lambda(x-\theta)^{۲}}{۲\theta^{۲}x}\right\},$$

که در آن $x,\theta,\lambda > \circ$ و $E(X) = \theta$ و $\mathrm{var}(X) = \frac{\theta^{۳}}{\lambda}$ و تابع مولد گشتاور آن برای $t < \frac{\lambda}{۲\theta^{۲}}$ به‌صورت

زیر است:

$$M_X(t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\theta}\left(۱ - \sqrt{۱ - \frac{۲\theta^۲ t}{\lambda}}\right)\right\}.$$

سِشادری (۱۹۸۸) در این خانواده‌ی توزیع‌ها نشان داد که گشتاورهای غیر مرکزی دارای شکل بسته‌ای به‌صورت زیراند:

$$E(X^r) = \mu^r \sum_{s=۰}^{r-۱} \frac{(s+r-۱)!}{s!(r-s-۱)!}\left(\frac{۲\lambda}{\theta}\right)^{-s}.$$

لذا با در نظر گرفتن پارامتر λ به‌عنوان یک عدد معلوم و ثابت، درایه‌های ماتریس باتاچاریای ۵×۵ را که به‌صورت (۲) است محاسبه کرده‌ایم، که نتیجه‌ی کار به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
J_{۱۱} &= \frac{\lambda}{\theta^۳},\\
J_{۲۲} &= \frac{۶\lambda}{\theta^۵} + \frac{۲\lambda^۲}{\theta^۶},\\
J_{۳۳} &= \frac{۱۲۶\lambda}{\theta^۷} + \frac{۵۴\lambda^۲}{\theta^۸} + \frac{۶\lambda^۳}{\theta^۹},\\
J_{۴۴} &= \frac{۶۲۱۰\lambda}{\theta^۹} + \frac{۲۶۶۴\lambda^۲}{\theta^{۱۰}} + \frac{۴۳۲\lambda^۳}{\theta^{۱۱}} + \frac{۲۴\lambda^۴}{\theta^{۱۲}},\\
J_{۵۵} &= \frac{۵۴۵۴۰۰\lambda}{\theta^{۱۱}} + \frac{۲۳۲۲۰۰\lambda^۲}{\theta^{۱۲}} + \frac{۴۱۴۰۰\lambda^۳}{\theta^{۱۳}} + \frac{۳۶۰۰\lambda^۴}{\theta^{۱۴}} + \frac{۱۲۰\lambda^۵}{\theta^{۱۵}},\\
J_{۲۳} &= \frac{۶\lambda}{\theta^۶},\\
J_{۳۴} &= \frac{۳۶۰\lambda}{\theta^۸} + \frac{۷۲\lambda^۲}{\theta^۹},\\
J_{۳۵} &= \frac{۳۶۰\lambda}{\theta^۹},\\
J_{۴۵} &= \frac{۳۱۳۲۰\lambda}{\theta^{۱۰}} + \frac{۹۳۶۰\lambda^۲}{\theta^{۱۱}} + \frac{۷۲۰\lambda^۳}{\theta^{۱۲}}.
\end{aligned}
$$

مثال ۳ (تابع نسبت شکست در توزیع گاوسی وارون). یکی از کاربردهای مهم توزیع گاوسی وارون در مسائل قابلیت اعتماد می‌باشد. لذا در این مثال، کران باتاچاریا را برای واریانس برآوردگر نسبت شکست در این توزیع محاسبه کرده‌ایم. نسبت شکست در توزیع $\mathrm{IG}(\theta, \lambda)$ به‌صورت زیر است:

جدول ۳. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع نسبت شکست $\tau(\theta)=\frac{\lambda}{2\theta^2}$ در توزیع گاوسی وارون

		$n=5$					$n=20$				
θ	λ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
۲	۱	۰٫۰۲۵	۰٫۱۰۶۸	۰٫۲۳۷۴	۰٫۳۹۹۹	۰٫۵۸۱۶	۰٫۰۰۶۲۵	۰٫۰۱۴۹	۰٫۰۲۱۸	۰٫۰۲۶۴	۰٫۰۲۹۴
۱	۲	۰٫۱	۰٫۲۳۸	۰٫۳۴۸	۰٫۴۲۳	۰٫۴۷۱	۰٫۰۲۵	۰٫۰۳۵	۰٫۰۳۸	۰٫۰۳۸	۰٫۰۳۹
۰٫۶	۴	۰٫۲۳۱	۰٫۳۴۶	۰٫۳۸۲	۰٫۳۹۲	۰٫۳۹۴	۰٫۰۵۷۸	۰٫۰۶۵۵	۰٫۰۶۶۱	۰٫۰۶۶۲	۰٫۰۶۶۲
		$n=50$					$n=100$				
θ	λ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
۲	۱	۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۰۴۱	۰٫۰۰۴۷	۰٫۰۰۴۹	۰٫۰۰۵۰	۰٫۰۰۱۲۵	۰٫۰۰۱۶	۰٫۰۰۱۷۶	۰٫۰۰۱۷۸	۰٫۰۰۱۷۸
۱	۲	۰٫۱	۰٫۰۱۱۷	۰٫۰۱۱۹۴	۰٫۰۱۱۹۶	۰٫۰۱۱۹۷	۰٫۰۰۵	۰٫۰۰۵۴۴	۰٫۰۰۵۴۶	۰٫۰۰۵۴۷	۰٫۰۰۵۴۷
۰٫۶	۴	۰٫۰۲۳۱	۰٫۰۲۴۳	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۲۴۴	۰٫۰۱۱۵	۰٫۰۱۱۸۸	۰٫۰۱۱۸۹	۰٫۰۱۱۸۹	۰٫۰۱۱۸۹

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= Z(t;\theta,\lambda)=\frac{f_T(t;\theta,\lambda)}{1-F_T(t;\theta,\lambda)}\\
&= \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi t^3}}\exp\left\{-\frac{\lambda(t-\theta)^2}{2\theta^2 t}\right\}}{\Phi\left(\sqrt{\frac{\lambda}{t}}-\frac{\sqrt{\lambda t}}{\theta}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{t}}-\frac{\sqrt{\lambda t}}{\theta}\right)\exp\{\frac{2\lambda}{\theta}\}},
\end{aligned}
$$

که در آن $t,\theta,\lambda>0$. چهیکارا و فُلکس (۱۹۷۷) نشان دادند که هنگامی که $t\longrightarrow\infty$، عبارت فوق به $\frac{\lambda}{2\theta^2}$ میل می‌کند.

در این مثال می‌خواهیم واریانس برآوردگر تابع $\tau(\theta)=\frac{\lambda}{2\theta^2}$ را به‌کمک کران‌های باتاچاریا تقریب بزنیم. B_1، ...، B_5 پنج کران اول باتاچاریا می‌باشند که برای مقادیر مختلف n و λ و θ در جدول ۳ ارائه شده‌اند. همان‌طور که در این جدول دیده می‌شود، با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار مشخصی میل می‌کند.

مثال ۴ (ضریب تغییرات در توزیع گاوسی وارون). سِشادری (۱۹۸۸) برای توزیع گاوسی وارون، یک برآوردگر نااریب برای توان دوم ضریب تغییرات پیدا کرد و نشان داد که این برآوردگر در حقیقت یک U-آماره می‌باشد. همچنین او توزیع دقیق این برآوردگر را نیز به دست آورد.

ضریب تغییرات در توزیع گاوسی وارون به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathrm{CV}=\frac{\sqrt{\mathrm{var}(X)}}{E(X)}=\sqrt{\frac{\theta}{\lambda}}.$$

B_1، ...، B_5 پنج کران اول باتاچاریا برای $\sqrt{\frac{\theta}{\lambda}}$ می‌باشند که برای مقادیر مختلف λ و θ در جدول ۴ ارائه

جدول ۴. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر ضریب تغییرات $\tau(\theta)=\sqrt{\frac{\theta}{\lambda}}$ در توزیع گاوسی وارون

θ	λ	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
۱	۱	۰/۲۵۰۰	۰/۲۵۳۹	۰/۲۵۴۵	۰/۲۵۴۷	۰/۲۵۴۸
۱	۲	۰/۱۲۵۰۰	۰/۱۲۶۵۶	۰/۱۲۶۷۶	۰/۱۲۶۸۱	۰/۱۲۶۸۳
۲	۱	۱/۰۰۰	۱/۰۱۷۸	۱/۰۲۱۴	۱/۰۲۲۷	۱/۰۲۳۳
۴	۸	۰/۵۰۰۰	۰/۵۰۶۲۵	۰/۵۰۷۰۶	۰/۵۰۸۷۲۶	۰/۵۰۷۳۲
۰/۶	۰/۵	۰/۱۸۰۰	۰/۱۸۲۹	۰/۱۸۳۴	۰/۱۸۳۶	۰/۱۸۳۷

شده‌اند. همان‌طور که در این جدول نیز مشخص است، با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار مشخصی میل می‌کند.

۳٫۲ توزیع‌هایی که واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ از $E(X)$ است، ولی $E(X)$ تابعی خطی از θ نیست

ماتریس باتاچاریا در توزیع‌هایی که $E(X)$ تابعی خطی از θ نمی‌باشد ولی واریانس آن‌ها چندجمله‌ای درجه‌ی ۳ از $E(X)$ است به‌صورت (۲) نمی‌باشد. از جمله‌ی توزیع‌هایی که دارای این ویژگی هستند می‌توان توزیع‌های آبل، تاکاس، کندال رسل، استریک آرکسین و لارج آرکسین را نام برد که دارای تابع واریانس درجه‌ی سوم از امید ریاضی X می‌باشند. در این مقاله فقط به بررسی دو توزیع آبل و تاکاس می‌پردازیم.

۳٫۲٫۱ توزیع آبل

این توزیع جزو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی سه از میانگین می‌باشد که در آن، میانگین، تابعی خطی از θ نیست و از آن به‌عنوان توزیع پواسون تعمیم‌یافته یاد می‌کنند. این توزیع را به‌صورت $\mathrm{GP}(\alpha,\theta)$ نمایش می‌دهند که در آن، α مقداری معلوم می‌باشد، و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{(1+\alpha x)^{x-1}}{x!}\theta^x e^{-\theta(1+\alpha x)},\qquad x=0,1,2,\ldots,\qquad 0\leqslant\alpha<\frac{1}{\theta},\ \ 0<\theta$$

و $\mu_1=E(X)=\frac{\theta}{1-\alpha\theta}$ و $\mathrm{var}(X)=\mu_1(1+\alpha\mu_1)^2$. به‌ازای $\alpha=0$ این توزیع تبدیل به توزیع پواسون می‌شود.

تابع مولد گشتاور این توزیع نیز به‌شکل زیر است:

$$M_X(t) = \exp\left\{-\frac{۱}{\alpha}\left[W(-\alpha\theta\exp(-\alpha\theta+t))+\alpha\theta\right]\right\}$$

که در آن W تابع لامبرت می‌باشد که برای جزئیات بیش‌تر می‌توانید به آمباگاس‌پیتیا و بالاکریشنان (۱۹۹۴) مراجعه کنید. این دو توانستند گشتاورهای مرکزی این توزیع را با مشتق‌گیری از تابع مولد گشتاور محاسبه کنند که چهار گشتاور مرکزی اول این توزیع به‌صورت زیر است:

$$\mu_۱ = \theta M,$$
$$\mu_۲ = \theta M^۳,$$
$$\mu_۳ = \theta(۳M-۲)M^۴,$$
$$\mu_۴ = ۳\theta^۲M^۶+\theta(۱۵M^۲-۲۰M+۶)M^۵,$$

که در آن $M = (۱-\alpha\theta)^{-۱}$. در این خانواده‌ی توزیع‌ها ماتریس باتاچاریا نه به‌صورت قطری است و نه به‌صورت (۲). با استفاده از لم ۱ می‌توانیم درایه‌های این ماتریس را محاسبه کنیم. در زیر، درایه‌های ماتریس باتاچاریای ۴ × ۴ برای توزیع آبل را در حالت $\alpha = ۱$ محاسبه کرده‌ایم:

$$J_{۱۱} = \frac{۱}{\theta(۱-\theta)},$$
$$J_{۱۲} = \frac{۲}{\theta(۱-\theta)^۲},$$
$$J_{۱۳} = \frac{۶}{\theta(۱-\theta)^۳},$$
$$J_{۱۴} = \frac{۲۴}{\theta(۱-\theta)^۴},$$
$$J_{۲۲} = \frac{۲}{\theta^۲(۱-\theta)^۳}(۲\theta+۳),$$
$$J_{۲۳} = \frac{۶}{\theta^۲(۱-\theta)^۴}(۲\theta+۷),$$
$$J_{۲۴} = \frac{۴۸}{\theta^۲(۱-\theta)^۵}(\theta+۶),$$
$$J_{۳۳} = \frac{۶}{\theta^۳(۱-\theta)^۵}(۶\theta^۲+۵۳\theta+۱۶),$$

جدول ۵. کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگر تابع $\tau(\theta) = \exp\{-\theta\}$ در توزیع آبل

θ	B_1	B_2	B_3	B_4
۰٫۰۱	۰٫۰۰۹۷۰	۰٫۰۰۹۸۴	۰٫۰۰۹۸۵	۰٫۰۰۹۸۵
۰٫۱	۰٫۰۷۳۶	۰٫۰۸۴۰	۰٫۰۸۵۷	۰٫۰۸۷۳
۰٫۲	۰٫۱۰۷۲	۰٫۱۳۵۲	۰٫۱۴۳۹	۰٫۱۴۶۰
۰٫۴	۰٫۱۰۷۸	۰٫۱۵۶۴	۰٫۱۸۲۲	۰٫۱۹۳۰
۰٫۸	۰٫۰۳۲	۰٫۰۵۳	۰٫۰۶۹	۰٫۰۷۸
۰٫۹	۰٫۰۱۴۸	۰٫۰۲۴۷	۰٫۰۳۲	۰٫۰۳۶

$$J_{34} = \frac{240}{\theta^3(1-\theta)^6}(11\theta + 10),$$
$$J_{44} = \frac{24}{\theta^4(1-\theta)^7}(24\theta^3 + 782\theta^2 + 1004\theta + 125),$$

که شکل کلّی ماتریس به‌صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ & & J_{33} & J_{34} \\ & & & J_{44} \end{pmatrix}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، هیچ درایه‌ای از ماتریس، صفر نیست.

مثال ۵. برای مشاهده‌ی این که کران‌های باتاچاریا با افزایش مرتبه‌ی آن به واریانس آماره نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند، می‌خواهیم واریانس برآوردگر تابع $\tau(\theta) = e^{-\theta}$ را با استفاده از کران‌های باتاچاریا تقریب بزنیم. بدین منظور، در جدول ۵ برای θهای مختلف، چهار کران اول باتاچاریا را محاسبه کرده‌ایم. همان‌طور که در این جدول نیز مشخص است، با افزایش مرتبه‌ی ماتریس باتاچاریا، کران باتاچاریا بزرگ‌تر می‌شود و به مقدار مشخصی میل می‌کند.

۳٫۲٫۲ توزیع تاکاس

این توزیع نیز همانند توزیع آبل جزو خانواده‌ی توزیع‌های نمایی با تابع واریانس درجه‌ی سه از میانگین می‌باشد که در آن، میانگین، تابعی خطی از θ نیست و از آن به‌عنوان توزیع دوجمله‌ای منفی تعمیم‌یافته یاد

جدول ۶. کران‌های باتاچاریا برای واریانس
برآوردگر تابع $\tau(\theta)=\frac{۱}{\theta}$ در توزیع تاکاس

θ	m	$B_۱$	$B_۲$
۲	۱	۰/۱۲۵	۰/۱۸۷۵
۴	۲	۰/۰۹۷۳۷۵	۰/۱۳۲۹۲
۸	۴	۰/۰۵۴۶۸	۰/۰۷۷۲۰
۱۶	۸	۰/۰۲۹۲	۰/۰۴۱۱۷

می‌کنند. این توزیع را به‌صورت $\mathrm{GNB}(۱,m,\theta)$ نمایش می‌دهند، که در آن m مقدار معلومی می‌باشد، و تابع چگالی احتمال آن به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\frac{۱}{۱+mx}\binom{۱+mx}{x}\left(\frac{۱}{\theta}\right)^{x}\left(۱-\frac{۱}{\theta}\right)^{۱+(m-۱)x}, \qquad x=۰,۱,۲,\ldots$$

که در آن $۰\leqslant m<\theta$ و $۱<\theta$.

با فرض $p=\frac{۱}{\theta}$ داریم $\mu=E(x)=\frac{p}{(۱-mp)}$ و $\mathrm{var}(X)=\mu(۱+m\mu)(۱+(m-۱)\mu)$. به‌ازای $m=۰,۱$ این توزیع به‌ترتیب به توزیع‌های برنولی و دوجمله‌ای منفی تبدیل می‌شود. در این توزیع، درایه‌های ماتریس باتاچاریای ۲×۲ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$J_{۱۱}=\frac{۱}{\theta(۱-\theta)(m-\theta)},$$
$$J_{۱۲}=\frac{۲}{\theta(۱-\theta)(m-\theta)^{۲}},$$
$$J_{۲۲}=\frac{۴\theta^{۲}-۴\theta+۴\theta m+۲m^{۲}-۶m}{\theta^{۲}(۱-\theta)^{۲}(\theta-m)^{۳}}.$$

مثال ۶. فرض کنید می‌خواهیم واریانس برآوردگر تابع $\tau(\theta)=\frac{۱}{\theta}$ را در توزیع $\mathrm{GNB}(۱,m,\theta)$ تقریب بزنیم. در جدول ۶ دو کران اول باتاچاریا را برای مقادیر مختلف m و θ محاسبه کرده‌ایم.

۴ نتیجه‌گیری

در بسیاری از مواقع که واریانس یک آماره را به‌راحتی نمی‌توان برآورد کرد، از کران کرامر-رائو برای تقریب واریانس آماره استفاده می‌شود و در صورتی که بتوان به‌سادگی کران باتاچاریا را به دست آورد، قطعاً تقریب

واریانس آماره به‌کمک کران باتاچاریا دقیق‌تر از تقریب کران کرامر-رائو خواهد بود.

سپاس‌گزاری

این تحقیق با حمایت پژوهشکده‌ی آمار انجام شده است (کد اختصاصی ۸۷۱۲).

مرجع‌ها

Ambagaspitiya, R.S.; Balakrishnan, N. (1994). On the compound generalized Poisson distributions. *Astin Bulletin* **24**,

Anderson, T.W. (1958). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* Wiley, New York.

Bhattacharrya, A. (1946). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhya* **8**, 1-14.

Bhattacharrya, A. (1947). On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation II. *Sankhya* **8**, 201-218.

Blight, B.J.N; Rao, R.V. (1974). The convergence of Bhattacharyya bounds. *Biometrika* **61**, 137-142.

Chhikara, R.S.; Folks, J.L. (1997). The inverse Gaussian distribution as a life time model. *Technometrics* **19**, 461-468.

Fend, A.V. (1959). On the attainment of Cramer-Rao and Bhattacharyya bounds for the variance of an estimate. *Ann. Math. Statist.* **30**, 381-388.

Haldan, J.B.S. (1945). On the method of estimating frequencies. *Ann. Eugen.* **11**, 182-187.

Letac, G.; Mora, M. (1990). Natural real exponential families with cubic variance functions.

Mohtashami Borzadaran, G.R. (2001). Results related to the Bhattacharyya matrices. *Sankhya* **63**, 113-117.

Mohtashami Borzadaran, G.R. (2006). A note via diagonality of the 2×2 Bhattacharyya matrices. *Journal of Mathematical Sciences and Informatics* **1** 73-78.

Seshadri, V. (1988). A U-statistic and estimation for the inverse Gaussian distribution. *Statistics and Probability Letters* **7**, 47-49.

Shanbhag, D.N. (1972). Some characterizations based on the Bhattacharyya matrix. *Journal of Applied Probability* **9**, 580-587.

Shanbhag, D. N. (1979). Diagonality of the Bhattacharyya matrix as a characterization. *Theory of Probability and its Applications* **24**, 430-433.

Zacks, S.; Even, M. (1966). The efficiencies in small samples of the maximum likelihood and best unbiased estimators of reliability functions. *J. Am. Statist. Assoc.* **61**, 1033-51.

محمد خراشادیزاده
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
دانشگاه فردوسی مشهد،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: khorashadi_s80@yahoo.com

غلامرضا محتشمی برزادران
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی،
عضو قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی،
دانشگاه فردوسی مشهد،
مشهد، ایران.
پیام‌نگار: gmb1334@yahoo.com