

استنباط برای توزیع نرمال چوله بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده‌ی نوع دوم

اکبر اصغرزاده* و پویا مرادی‌نژاد

دانشگاه مازندران

چکیده. معادلات درستنمایی بر اساس نمونه‌های سانسور شده‌ی نوع دوم برای توزیع نرمال چوله جواب صریحی برای پارامترهای مکان و مقیاس ارائه نمی‌دهند. در این مقاله، روش ساده‌ای برای به دست آوردن برآوردهای صریح با تقریب معادلات درستنمایی ارائه می‌شود. به کمک نمونه‌های شبیه‌سازی شده، اریبی و واریانس این برآوردها محاسبه و نشان داده می‌شود که این برآوردها به خوبی برآوردهای درستنمایی ماکسیم (MLE) می‌باشند. احتمال‌های پوشش کمیتهای محوری (برای پارامترهای مکان و مقیاس) بر اساس توزیع مجانبی نرمال، مخصوصاً برای نمونه‌های کوچک رضایت‌بخش نیستند. بنا بر این، از صدک‌های شبیه‌سازی شده برای به دست آوردن بازه‌ی اطمینان استفاده می‌شود. انواع مختلف اندازه‌های نمونه‌ای و طرح‌های سانسور فزاینده در این مطالعه بررسی شده‌اند. در آخر دو مثال عددی برای تشریح روش‌های استنباطی ارائه شده بیان می‌شود. واژگان کلیدی. اریبی؛ بازه‌ی اطمینان؛ اطلاع فیشر؛ توزیع نرمال چوله؛ برآورد درستنمایی ماکسیم؛ شبیه‌سازی مونت کارلو؛ کمیته محوری؛ سانسور فزاینده‌ی نوع دوم؛ واریانس.

۱ مقدمه

تولیدکننده‌ها برای آن‌که بتوانند در رقابت با سایر رقبا سهم خود را از بازارهای جهانی افزایش دهند یا حد اقل آن را حفظ نمایند، مجبور به اتخاذ سیاست‌های متنوع برای جلب هرچه بیش‌تر رضایت مشتریان

*نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

خود هستند. علاوه بر فنون بهبود و کنترل کیفیت، یکی از سیاست‌هایی که کارخانه‌ی تولیدکننده‌ی محصولات برای جلب رضایت مشتریان خود به کار می‌بندد، فراهم کردن ضمانت برای طول عمر محصولات (گارانتی) است. بنا بر این، تعیین هرچه دقیق‌تر طول عمر محصولات بسیار ضروری است و لازم است محصولات قبل از این که وارد بازار شوند تحت آزمایش‌های مربوط به طول عمر قرار گیرند تا تولیدکننده بتواند هزینه‌ها را برآورد کند و توزیع زمان شکست محصولات خود را بداند.

در مطالعات طول عمر ممکن است به‌مواردی برخورد کنیم که به نوعی می‌توان توزیع طول عمر را نرمال چوله در نظر گرفت. در واقع در بیش‌تر مواردی که توزیع مورد مطالعه را نرمال فرض می‌کنیم از چولگی اندک آن چشم‌پوشی کرده‌ایم، ولی در این شرایط توزیع نرمال چوله برازش بهتری به مشاهدات خواهد داشت. واضح است که پارامتر چولگی که به این مدل احتمالی اضافه شده است، قابلیت انعطاف آن را بسیار زیاد می‌کند. این قابلیت در مسائل کاربردی کاملاً مشهود است.

سانسور کردن، یک امر متداول در آزمایشات طول عمر و مطالعات قابلیت اطمینان می‌باشد. سانسور فزاینده‌ی نوع دوم در سال‌های اخیر مورد توجه آماردانان زیادی قرار گرفته است. در این مقاله، مسئله‌ی برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای مکان و مقیاس توزیع نرمال چوله با داده‌های سانسور فزاینده‌ی نوع دوم مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۱/۸ توزیع نرمال چوله

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد با تابع چگالی

$$g(x) = 2\Phi(\lambda x)\varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R},$$

و تابع توزیع $G(x) = \int_{-\infty}^x g(t)dt$ باشد، که در آن $\Phi(\cdot)$ و $\varphi(\cdot)$ به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی نرمال استاندارد می‌باشند. در این جا پارامتر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک پارامتر چولگی است که برای $\lambda > 0$ ، توزیع، چوله به راست و برای $\lambda < 0$ ، توزیع، چوله به چپ خواهد بود. این توزیع در سال ۱۹۸۵ توسط آزالینی معرفی شد. در سال‌های اخیر بسیاری از محققان روی این توزیع مطالعه کردند و آن را گسترش دادند که از آن جمله می‌توان به آزالینی (۱۹۸۶)، هنز (۱۹۸۶)، آزالینی و دالوال (۱۹۹۶)، برانکو و دی (۲۰۰۱)، آرنولد و بیور (۲۰۰۲)، آرلاندو-وال و دیگران (۲۰۰۴) و شرفی و بهبودیان (۲۰۰۷) اشاره کرد. برای نمایش توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد با پارامتر چولگی λ از نماد $X \sim SN(\lambda)$ استفاده می‌کنیم.

اگر $X \sim SN(\lambda)$ و $Y = \sigma X + \mu$ که $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma > 0$ ، در آن صورت متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال چوله با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ با چگالی

$$f(y, \mu, \sigma) = \frac{\gamma}{\sigma} \Phi \left\{ \lambda \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right\} \varphi \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \quad y \in \mathbb{R}$$

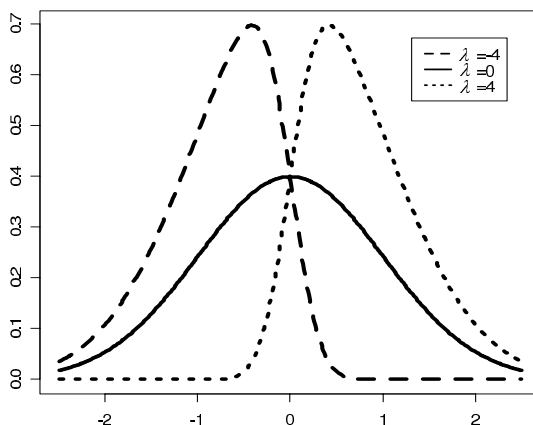
خواهد بود.

در شکل ۱ چگالی نرمال چوله برای چند مقدار مختلف رسم شده است.

۱/۲ سانسور فزاینده

در مطالعات طول عمر، اگر آزمایش‌گر بخواهد آخرین زمان شکست را هم مشاهده و ثبت کند باید مدت آزمایش را به اندازه‌ی ماکسیمم طول عمر واحدهای آزمایشی در نظر بگیرد که این امر عملاً در بیشتر موارد ممکن نیست و منطقی نمی‌باشد. به این داده‌ها که قبل از مشاهده‌ی زمان شکست آن‌ها، از آزمایش حذف می‌شوند، داده‌های سانسور شده از راست می‌گویند.

دو طرح عمده‌ی سانسور عبارت‌اند از طرح‌های سانسور نوع اول و نوع دوم. اگر آزمایش فقط تا زمان مشخص t ادامه یابد و واحدهای آزمایشی سالم از زمان t به بعد کنار گذاشته شود، در این صورت سانسور نوع اول رخ داده است. اگر آزمایش‌گر تصمیم بگیرد آزمایش را زمانی خاتمه دهد که m واحد از واحدهای آزمایشی از کار بیافتند، در این صورت سانسور نوع دوم رخ داده است. روش‌های استنباطی با داده‌های سانسور نوع اول و نوع دوم برای مدل‌های مختلف طول عمر، مورد توجه آماردانان زیادی قرار گرفته است. برای مطالعه‌ی بیشتر در این زمینه می‌توان به کوهن (۱۹۹۱) و بالاکریشن و کوهن



شکل ۶. نمودار تابع چگالی نرمال چوله برای λ های مختلف

(۱۹۹۱) مراجعه کرد.

سانسور فزاینده‌ی نوع دوم تعمیمی از سانسور نوع دوم است. اگر آزمایش‌گر تصمیم بگیرد با مشاهده‌ی اولین شکست، R_1 واحد از واحدهای آزمایشی سالم باقیمانده را به تصادف از آزمایش خارج کند و در زمان دومین شکست، R_2 واحد از واحدهای آزمایشی سالم باقیمانده را به تصادف از آزمایش خارج کند و این کار را ادامه دهد تا در زمان m امین شکست همه‌ی واحدهای باقیمانده یعنی

$$R_m = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m$$

را از آزمایش خارج کند، در این صورت طرح سانسور فزاینده‌ی از نوع دوم رخ می‌دهد. در این حالت زمان‌های شکست واحدها متغیر تصادفی‌اند و مقادیر R_i ها ثابت‌های از قبل تعیین شده‌اند.

از آنجا که طرح‌های سانسور نوع دوم در عمل بیش‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد، بنا بر این، بیش‌تر توجه بر روی طرح سانسور فزاینده‌ی نوع دوم می‌باشد. همان‌طور که اشاره شد، در این نوع سانسور با مشاهده‌ی i امین شکست، R_i تا از واحدهای باقیمانده به‌صورت تصادفی از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. همانند سانسور نوع دوم تعداد R_i ها از قبل تعیین شده است.

در نتیجه‌ی اجرای این طرح سانسور، m مقدار مرتب‌شده به دست می‌آید که آماره‌های ترتیبی سانسور فزاینده‌ی نوع دوم نامیده می‌شوند. در حالت خاص اگر

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{m-1} = 0, \quad R_m = n - m,$$

آن‌گاه این طرح به سانسور معمولی نوع دوم از راست تبدیل می‌شود که در آن‌جا فقط اولین m طول عمر مشاهده می‌شوند. همچنین اگر $R_1 = R_2 = \dots = R_m = 0$ باشد آن‌گاه طرح مذکور به یک طرح فاقد سانسور (طرح نمونه‌ی کامل) تبدیل می‌شود، که در آن طول عمر همه‌ی n واحد، مشاهده می‌شوند.

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی روی روش‌های استنباطی با داده‌های سانسور فزاینده‌ی نوع دوم انجام شده است که از آن جمله می‌توان به بالا‌کریشنان و آگاروالا (۲۰۰۰)، بالا‌کریشنان و سندهو (۲۰۰۰)، بالا‌کریشنان و دیگران (۲۰۰۴)، بالا‌کریشنان و کانان (۲۰۰۴)، بالا‌کریشنان و اصغر زاده (۲۰۰۵)، اصغر زاده (۲۰۰۶) اشاره داشت.

۲ برآوردهای درست‌نمایی ماکسیم

فرض کنید توزیع زمان شکست، نرمال چوله و $Y_{1:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$ یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم از توزیع بالا با طرح سانسور

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$$

باشد. تابع درست‌نمایی بر اساس نمونه‌ی سانسور شده‌ی بالا عبارت است از (بالاکریشن و آگاروالا، ۲۰۰۰)

$$L(\mu, \sigma) = C \prod_{i=1}^m f(y_i, \mu, \sigma) \{1 - F(y_i, \mu, \sigma)\}^{R_i}$$

که در آن $F(\cdot)$ تابع توزیع متناظر $f(\cdot)$ و ثابت C به صورت زیر می‌باشد:

$$C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$$

اگر قرار دهیم $X = \frac{Y - \mu}{\sigma}$ در این صورت X دارای توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد با چگالی $g(x)$ و تابع توزیع $G(x)$ خواهد بود. افزون بر این داریم

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} g(x),$$

همچنین

$$F(y) = G(x).$$

حال تابع درست‌نمایی و لگاریتم آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L(\mu, \sigma) = C \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sigma} g(x_i) \{1 - G(x_i)\}^{R_i}$$

$$l(\mu, \sigma) = \ln L(\mu, \sigma) = \ln C - m \ln \sigma + \sum_{i=1}^m \ln g(x_i) + \sum_{i=1}^m R_i \ln \{1 - G(x_i)\}$$

برای پیدا کردن معادلات درست‌نمایی، ابتدا توجه کنید که

$$x = \frac{y - \mu}{\sigma},$$

در نتیجه

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\partial x}{\partial \sigma} = -\frac{x}{\sigma}.$$

پس از اندکی محاسبات، معادلات درست‌نمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m \frac{g'(x_i)}{g(x_i)} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m R_i \frac{g(x_i)}{\bar{G}(x_i)} = 0, \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma} &= -\frac{m}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m x_i \frac{g'(x_i)}{g(x_i)} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m R_i x_i \frac{g(x_i)}{\bar{G}(x_i)} = 0, \end{aligned}$$

که در آن‌ها $\bar{G}(\cdot) = 1 - G(\cdot)$. ملاحظه می‌شود که معادلات بالا بر حسب μ و σ غیر خطی بوده و به راحتی قابل حل نیستند. به روش‌های عددی می‌توان معادلات بالا را حل، و برآوردهای MLE یعنی $\hat{\mu}$ و $\hat{\sigma}$ را پیدا کرد.

۳ برآوردهای درست‌نمایی ماکسیم تقریبی

در این بخش یک روش تقریبی برای حل معادلات درست‌نمایی ماکسیم ارائه می‌شود. به کمک این روش می‌توان برآوردهای صریحی برای μ و σ پیدا کرد.

با فرض

$$h_1(x_i) = \frac{g'(x_i)}{g(x_i)}, \quad h_2(x_i) = \frac{g(x_i)}{\bar{G}(x_i)},$$

معادلات درست‌نمایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^m h_1(x_i) - \sum_{i=1}^m R_i h_2(x_i) = 0,$$

$$(2) \quad m + \sum_{i=1}^m x_i h_1(x_i) - \sum_{i=1}^m R_i x_i h_2(x_i) = 0.$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\lambda\phi(\lambda x)\phi(x) + 2\phi'(x)\Phi(\lambda x) \\ &= 2\phi(x)\{\lambda\phi(\lambda x) - x\Phi(\lambda x)\}, \end{aligned}$$

بنا بر این،

$$h_1(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\lambda\phi(\lambda x) - x\Phi(\lambda x)}{\Phi(\lambda x)}.$$

در حالت خاص $\lambda = 0$ نتیجه می شود $h_1(x) = -x$ و $h_2(x) = \frac{\phi(x)}{\Phi(x)}$. در این حالت معادلات درست‌نمایی به همان شکل معادلات درست‌نمایی معمولی نرمال خواهند بود.

همان‌طور که اشاره شد، معادلات درست‌نمایی در (۱) و (۲) به خاطر حضور جملات $h_1(x_i)$ و $h_2(x_i)$ غیر خطی بوده و جواب‌های صریحی برای μ و σ ارائه نمی‌دهند. با این وجود با بسط تیلور این توابع حول نقطه‌ی $v_i = E(X_{i:m:n})$ می‌توان جواب‌های صریحی برای μ و σ پیدا کرد (از بالاکریشن و سندهو (۱۹۹۵)).

$$G(X_{i:m:n}) \stackrel{d}{=} U_{i:m:n}$$

که $U_{i:m:n}$ ، i امین آماره‌ی ترتیبی یک نمونه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دوم از توزیع یکنواخت $U(0, 1)$ می‌باشد. بنا بر این،

$$v_{i:m:n} = E(X_{i:m:n}) \approx G^{-1}(\alpha_{i:m:n}).$$

مقدار $\alpha_{i:m:n}$ را می‌توان از رابطه‌ی زیر پیدا کرد (بالاکریشن و آگاروالا، ۲۰۰۰).

$$\begin{aligned} \alpha_{i:m:n} &= E(U_{i:m:n}) \\ &= 1 - \prod_{j=m-i+1}^m \frac{j + R_{m-j+1} + \dots + R_m}{j + 1 + R_{m-j+1} + \dots + R_m}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

با بسط تیلور توابع $h_1(x_i)$ و $h_2(x_i)$ حول نقطه‌ی $v_i = v_{i:m:n}$ و نگه داشتن فقط دو جمله‌ی اول، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} h_1(x_i) &\approx h_1(v_i) + (x_i - v_i)h_1'(v_i) \\ &= a_i + b_i x_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_{\nu}(x_i) &\approx h_{\nu}(\nu_i) + (x_i - \nu_i)h'_{\nu}(\nu_i) \\ &= c_i + d_i x_i,\end{aligned}$$

که در آن‌ها

$$\begin{aligned}a_i &= h_{\nu}(\nu_i) - \nu_i h'_{\nu}(\nu_i), \\ b_i &= h'_{\nu}(\nu_i), \\ c_i &= h_{\nu}(\nu_i) - \nu_i h'_{\nu}(\nu_i), \\ d_i &= h'_{\nu}(\nu_i).\end{aligned}$$

اکنون معادلات درست‌نمایی در (۱) و (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(۳) \quad \frac{\partial l}{\partial \mu} \approx \sum_{i=1}^m (a_i + b_i x_i) - \sum_{i=1}^m R_i (c_i + d_i x_i) = 0,$$

$$(۴) \quad \frac{\partial l}{\partial \sigma} \approx m + \sum_{i=1}^m x_i (a_i + b_i x_i) - \sum_{i=1}^m x_i R_i (c_i + d_i x_i) = 0.$$

با عملیات ساده‌ی جبری نتیجه می‌شود

$$(۵) \quad \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i) + \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) x_i = 0,$$

$$(۶) \quad m + \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i) x_i + \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) x_i^2 = 0.$$

از قرار دادن $x = \frac{y - \mu}{\sigma}$ در معادله‌ی (۵) نتیجه می‌شود

$$\sigma \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i) + \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) y_i - \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) \mu = 0.$$

با حل معادله‌ی بالا برآورد درست‌نمایی ماکسیم تقریبی (AMLE) برای پارامتر مکان به صورت تابع خطی

از σ به صورت زیر به دست می آید:

$$(۷) \quad \tilde{\mu} = K + L\sigma,$$

که در آن

$$K = \frac{\sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) y_i}{\sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)}, \quad L = \frac{\sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i)}{\sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)}.$$

با جایگذاری $\tilde{\mu} = K + L\sigma$ در معادله (۶) نتیجه می شود

$$m + \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i) \left(\frac{y_i - K - L\sigma}{\sigma} \right) + \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i) \left(\frac{y_i - K - L\sigma}{\sigma} \right) = 0.$$

در نتیجه

$$(۸) \quad m\sigma^2 + \sigma \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i)(y_i - K) - \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)(y_i - K)^2 = 0.$$

با حل معادله‌ی درجه‌ی دوم (۸) بر حسب σ ، برآورد AMLE پارامتر σ برابر است با

$$(۹) \quad \tilde{\sigma} = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4mA_2}}{2m},$$

که در آن

$$A_1 = \sum_{i=1}^m (a_i - R_i c_i)(y_i - K), \quad A_2 = \sum_{i=1}^m (b_i - R_i d_i)(y_i - K)^2.$$

توجه کنید که معادله‌ی درجه‌ی دوم در (۸) دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها به خاطر این که A_2 مقداری منفی است، قابل قبول نمی باشد. برای اثبات $A_2 < 0$ ، ابتدا طرح بدون سانسور (نمونه‌ی کامل) را در نظر می گیریم. در این حالت $R_i = 0$ ، بنا بر این،

$$A_2 = \sum_{i=1}^m b_i (y_i - K)^2.$$

برای اثبات $A_2 < \circ$ ، کافی است نشان دهیم که

$$b_i = h'_i(\nu_i) < \circ, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

از طرفی

$$h'_1(x) = -\lambda^2 \frac{\phi(\lambda x)}{\Phi(\lambda x)} \left\{ \lambda x + \frac{\phi(\lambda x)}{\Phi(\lambda x)} \right\} - 1.$$

اکنون با توجه به اینکه به ازای هر $z \in \mathbb{R}$ ،

$$\begin{aligned} z\Phi(z) &= \int_{-\infty}^z z\phi(t) dt \\ &\geq \int_{-\infty}^z t\phi(t) dt \\ &= - \int_{-\infty}^z \phi'(t) dt \\ &= -\phi(z), \end{aligned}$$

داریم

$$\lambda x + \frac{\phi(\lambda x)}{\Phi(\lambda x)} \geq \circ$$

و بنا بر این، $h'_1(x) < \circ$ برای نمونه‌ی سانسور فزاینده (طرح با سانسور) در ۲۰۰۰ بار شبیه‌سازی، مقدار ماکسیمم A_2 برای انواع طرح‌های سانسور و تمام تکرارهای شبیه‌سازی محاسبه شده است. این مقادیر که منفی می‌باشند در ستون‌های آخر جداول ۱ و ۳ آمده است.

۴ اطلاع فیشر مشاهده شده

در این بخش اطلاع فیشر مشاهده شده را بر اساس معادلات کامل و تقریبی پیدا می‌کنیم. از این اطلاع می‌توان برای ارائه‌ی کمیتهای محوری و محاسبه‌ی احتمال‌های پوشش استفاده کرد.

از معادلات درست‌نمایی کامل در (۱) و (۳) اطلاع فیشر مشاهده شده به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m h'_1(x_i) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m R_i h'_1(x_i) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i h'_1(x_i) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i R_i h'_1(x_i) \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} &= \frac{m}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i h_1(x_i) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i^2 h'_1(x_i) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i R_i h_1(x_i) \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i^2 R_i h_1(x_i) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i^2 R_i h'_1(x_i) \end{aligned}$$

به طور مشابه از معادلات درست‌نمایی تقریبی (۳) و (۴) داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} &\approx \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^m b_i - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m R_i d_i \right\} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma} &\approx \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \sum_{i=1}^m x_i b_i - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^m x_i R_i d_i \right\} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} &\approx \frac{1}{\sigma^2} \left\{ m + \sum_{i=1}^m x_i (2a_i + b_i x_i) + \sum_{i=1}^m x_i^2 (2b_i - 2d_i - c_i) - \sum_{i=1}^m x_i^2 R_i d_i \right\} \end{aligned}$$

اکنون با تعریف

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \mu^2} \approx \frac{V_1}{\sigma^2}, \quad \frac{\partial^2 l}{\partial \mu \partial \sigma} \approx \frac{V_2}{\sigma^2}, \quad -\frac{\partial^2 l}{\partial \sigma^2} \approx \frac{V_3}{\sigma^2},$$

می‌توان ماتریس اطلاع فیشر را به صورت زیر نوشت:

$$\left\{ \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2 & V_3 \end{bmatrix} \right\}^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} V^{11} & V^{12} \\ V^{12} & V^{22} \end{bmatrix}$$

که در آن

$$V^{11} \equiv \frac{V_3}{V_1 V_3 - V_2^2}, \quad V^{12} \equiv \frac{-V_2}{V_1 V_3 - V_2^2}, \quad V^{22} \equiv \frac{V_1}{V_1 V_3 - V_2^2}.$$

می‌توان V_1^* ، V_2^* و V_m^* را به طور مشابه برای اطلاع فیشر مشاهده‌شده بر اساس معادلات درست‌نمایی تقریبی در نظر گرفت.

۵ نتایج شبیه‌سازی

در این بخش با استفاده از شبیه‌سازی، برآوردهای AMLE با برآوردهای MLE مقایسه می‌شود. برای این منظور، نمونه‌هایی از توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد به صورت سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم با استفاده از الگوریتم بالاکریشن و سندهو (۲۰۰۰) به صورت زیر تولید می‌شود:

۱. ابتدا m عدد تصادفی مستقل از یک توزیع یکنواخت استاندارد تولید کرده و آن‌ها را با W_1 ، W_2 ، W_3 ، W_4 ، W_5 ، W_6 ، W_7 ، W_8 ، W_9 ، W_{10} ، W_{11} ، W_{12} ، W_{13} ، W_{14} ، W_{15} ، W_{16} ، W_{17} ، W_{18} ، W_{19} ، W_{20} نشان می‌دهیم.

$$V_i = W_i^{\{1/(i+\sum_{j=m-i+1}^m R_j)\}} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{قرار دهید} \quad ۲.$$

$$U_{i:m:n} = 1 - V_m V_{m-1} \dots V_{m-i+1} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{قرار دهید} \quad ۳.$$

در این حالت $U_{1:m:n}, \dots, U_{m:m:n}$ یک نمونه‌ی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم از توزیع یکنواخت $U(0, 1)$ خواهد بود.

$$y_{i:m:n} = G^{-1}(U_{i:m:n}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{در نهایت قرار می‌دهیم} \quad ۴.$$

که در آن $G^{-1}(\cdot)$ معکوس تابع توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد باشد.

مقادیر $y_{1:m:n}, \dots, y_{m:m:n}$ که در این جا به دست می‌آیند آماره‌های ترتیبی سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم از توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد می‌باشد. با توجه به نمونه‌ی بالا از روابط (۸) و (۹) برآوردهای AMLE را محاسبه می‌کنیم. در مرحله‌ی بعد، برآوردهای MLE از حل معادلات درست‌نمایی در (۱) و (۲) به روش‌های عددی به دست می‌آیند که در آن‌ها، برآورد AMLE به عنوان مقدار اولیه در نظر گرفته شده است. جداول ۱ و ۳ معدل مقادیر این برآوردها، واریانس و کوواریانس آن‌ها را نشان می‌دهد. جداول ۲ و ۴ نیز معدل مقادیر، واریانس و کوواریانس‌های به دست آمده از ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده را نشان می‌دهد. همه‌ی این مقادیر از روی ۲۰۰۰ بار شبیه‌سازی محاسبه شده‌اند. از این جداول مشاهده می‌شود که برآوردهای AMLE از لحاظ اریبی و واریانس به خوبی برآوردهای MLE می‌باشند. هنگامی که نسبت $\frac{m}{n}$ افزایش یابد، اریبی و واریانس برآوردها کاهش می‌یابد.

جدول ۱. معدل مقادیر برآوردها، واریانسها و کوواریانسهای MLE برای $\lambda = -1$

n	m	Scheme	mean($\hat{\mu}$)	mean($\hat{\sigma}$)	var($\hat{\mu}$)	var($\hat{\sigma}$)	cov($\hat{\mu}, \hat{\sigma}$)
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	-۰,۳۷۲۰۱	۰,۵۶۴۸۴	۰,۰۴۲۳۳	۰,۰۳۱۴۱	۰,۰۲۲۶۵
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۲۲۹۸۵	۰,۸۳۴۲۹	۰,۰۵۴۰۷	۰,۰۴۶۳۰	۰,۰۲۵۱۴
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۳۰۵۷۳	۰,۷۴۸۱۷	۰,۰۵۲۵۹	۰,۰۴۴۶۵	۰,۰۲۵۵۹
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	-۰,۳۴۲۶۸	۰,۶۸۴۵۷	۰,۰۵۱۲۶	۰,۰۴۱۷۵	۰,۰۲۷۳۶
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	-۰,۳۶۱۱۷	۰,۶۲۰۵۴	۰,۰۵۰۷۱	۰,۰۴۱۱۴	۰,۰۲۷۸۷
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۳۴۴۸۱	۰,۶۸۹۶۲	۰,۰۵۰۱۱	۰,۰۳۴۷۶	۰,۰۲۲۹۸
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۳۲۴۷۲	۰,۷۲۸۳۶	۰,۰۴۴۵۵	۰,۰۳۹۹۸	۰,۰۲۳۷۴
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	-۰,۱۸۰۰۴	۰,۷۵۱۶۵	۰,۰۵۵۴۲	۰,۰۴۸۲۴	۰,۰۳۶۴۴
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۹۱۶۸	۰,۹۱۶۷۱	۰,۰۴۸۹۷	۰,۰۴۴۸۳	۰,۰۲۳۹۴
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	-۰,۲۳۰۷۴	۰,۷۰۶۹۱	۰,۰۲۲۸۸	۰,۰۲۰۳۷	۰,۰۱۶۳۷
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۷۴۵۷	۰,۹۵۴۰۴	۰,۰۲۶۶۳	۰,۰۲۰۶۸	۰,۰۱۱۲۵
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	-۰,۱۵۶۱۴	۰,۷۹۴۲۴	۰,۰۲۲۲۶	۰,۰۲۱۷۱	۰,۰۱۶۴۵
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۳۹۴۳	۰,۹۶۲۰۷	۰,۰۲۲۷۵	۰,۰۱۷۹۶	۰,۰۰۸۲۷

ادامه‌ی جدول ۱. معدل مقادیر برآوردها، واریانسها و کوواریانسهای AMLE برای $\lambda = -1$

Scheme	mean($\hat{\mu}$)	mean($\hat{\sigma}$)	var($\hat{\mu}$)	var($\hat{\sigma}$)	cov($\hat{\mu}, \hat{\sigma}$)	max(A_r)
(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	-۰,۳۷۳۰۱	۰,۵۶۳۸۴	۰,۰۴۲۳۳	۰,۰۳۱۴۱	۰,۰۲۲۶۵	-۰,۶۷۳۲۶
(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۲۳۰۸۵	۰,۸۳۳۲۹	۰,۰۵۴۰۷	۰,۰۴۶۳۰	۰,۰۲۵۱۴	-۳,۱۰۲۰۰
(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۳۰۶۷۳	۰,۷۴۷۱۷	۰,۰۵۲۵۹	۰,۰۴۴۶۵	۰,۰۲۵۵۹	-۲,۵۷۸۷۵
(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	-۰,۳۴۳۶۸	۰,۶۸۳۵۷	۰,۰۵۱۲۶	۰,۰۴۱۷۵	۰,۰۲۷۳۶	-۲,۳۰۳۸۵
(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	-۰,۳۶۲۳۱	۰,۶۱۹۲۸	۰,۰۵۰۷۱	۰,۰۴۱۱۴	۰,۰۲۷۸۵	-۱,۵۴۴۴۵
(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۳۴۴۸۱	۰,۶۸۸۶۲	۰,۰۵۰۱۱	۰,۰۳۴۷۶	۰,۰۲۲۹۸	-۲,۸۰۳۹۵
(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۳۲۵۷۲	۰,۷۲۷۳۶	۰,۰۴۴۵۵	۰,۰۳۹۹۸	۰,۰۲۳۷۴	-۲,۹۰۰۲۸
(۰, ..., ۰, ۱۰)	-۰,۱۸۳۵۷	۰,۷۴۷۰۷	۰,۰۵۵۵۷	۰,۰۴۶۶۸	۰,۰۳۵۹۵	-۱,۶۱۵۷۶
(۱۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۹۲۶۸	۰,۹۱۵۷۱	۰,۰۴۸۹۷	۰,۰۴۴۸۳	۰,۰۲۳۹۴	-۳,۸۷۸۹۱
(۰, ..., ۰, ۳۰)	-۰,۲۳۱۷۴	۰,۷۰۵۹۱	۰,۰۲۲۸۸	۰,۰۲۰۳۷	۰,۰۱۶۳۷	-۶,۰۶۰۱۱
(۳۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۷۵۵۷	۰,۹۵۳۰۴	۰,۰۲۶۶۳	۰,۰۲۰۶۸	۰,۰۱۱۲۵	-۱۵,۱۴۹۱
(۰, ..., ۰, ۲۵)	-۰,۱۵۸۹۴	۰,۷۹۰۳۶	۰,۰۲۲۰۱	۰,۰۲۰۸۰	۰,۰۱۵۹۸	-۵,۹۱۴۱۱
(۲۵, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۴۰۴۳	۰,۹۶۱۰۷	۰,۰۲۲۷۵	۰,۰۱۷۹۶	۰,۰۰۸۲۷	-۱۳,۸۵۶۵

جدول ۲. معدل مقادیر واریانس و کوواریانس‌های به دست آمده از اطلاع فیشتر وقتی $\lambda = -1$

n	m	Scheme	\hat{I}_{11}	\hat{I}_{22}	\hat{I}_{12}
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	۰/۰۲۸۲۵	۰/۰۱۳۴۱	۰/۰۱۳۴۳
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۵۳۱	۰/۰۲۰۸۶	۰/۰۲۳۱۰
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۸۴۷۵	۰/۰۲۱۸۵	۰/۰۲۰۷۸
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	۰/۰۶۲۸۲	۰/۰۱۸۹۴	۰/۰۱۷۱۰
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	۰/۰۳۲۵۵	۰/۰۱۹۳۱	۰/۰۳۳۱۶
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۷۰۳۶	۰/۰۱۷۸۸	۰/۰۱۵۹۲
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۷۹۶۹	۰/۰۲۰۴۸	۰/۰۱۸۱۱
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	۰/۰۳۰۸۰	۰/۰۱۶۸۳	۰/۰۲۵۱۵
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۶۸۳۲	۰/۰۱۴۷۷	۰/۰۲۲۴۱
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰/۰۱۱۳۹	۰/۰۰۶۱۶	۰/۰۰۷۰۱
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۳۵۸۰	۰/۰۰۷۸۹	۰/۰۱۱۹۶
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰/۰۱۲۵۴	۰/۰۰۶۷۸	۰/۰۰۹۱۷
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰/۰۲۸۷۸	۰/۰۰۶۴۱	۰/۰۱۰۸۵

ادامه‌ی جدول ۲. معدل مقادیر واریانس و کوواریانس‌های به دست آمده از اطلاع فیشتر وقتی $\lambda = -1$

n	m	Scheme	\hat{I}_{11}	\hat{I}_{22}	\hat{I}_{12}
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	۰/۰۲۸۱۷	۰/۰۱۳۴۲	۰/۰۱۳۵۱
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۵۱۷	۰/۰۲۰۸۰	۰/۰۲۳۰۶
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۸۴۵۴	۰/۰۲۱۷۸	۰/۰۲۰۷۳
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	۰/۰۶۲۶۹	۰/۰۱۸۸۷	۰/۰۱۷۰۶
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	۰/۰۴۳۴۶	۰/۰۵۵۳۱	۰/۱۵۱۸۳
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۷۰۳۰	۰/۰۱۷۸۱	۰/۰۱۵۹۰
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۷۹۴۸	۰/۰۲۰۴۳	۰/۰۱۸۰۷
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	۰/۰۳۰۶۴	۰/۰۱۷۵۳	۰/۰۲۶۲۵
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۶۸۲۱	۰/۰۱۴۷۳	۰/۰۲۲۳۷
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰/۰۱۱۳۳	۰/۰۰۶۱۳	۰/۰۰۶۹۹
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۳۵۷۵	۰/۰۰۷۸۹	۰/۰۱۱۹۳
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰/۰۱۲۳۳	۰/۰۰۶۸۸	۰/۰۰۹۶۰
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰/۰۲۸۶۶	۰/۰۰۶۳۸	۰/۰۱۰۸۳

جدول ۳. معدل مقادیر برآوردها، واریانسها و کوواریانسهای MLE برای $\lambda = +1$

n	m	Scheme	mean($\hat{\mu}$)	mean($\hat{\sigma}$)	var($\hat{\mu}$)	var($\hat{\sigma}$)	cov($\hat{\mu}, \hat{\sigma}$)
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	-۰,۰۳۷۴۹	۰,۸۶۴۵۱	۰,۰۷۴۸۷	۰,۰۹۹۰۱	۰,۰۱۶۱۶
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۰۶۹۵۰	۰,۹۷۶۳۱	۰,۰۷۶۱۲	۰,۰۶۳۷۱	۰,۰۰۰۰۹۰
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۱۱۰۷۱	۰,۹۷۴۱۷	۰,۰۹۷۱۴	۰,۰۸۳۲۹	۰,۰۰۰۴۹۷
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	-۰,۱۰۹۵۸	۰,۹۸۰۰۴	۰,۱۰۳۱۳	۰,۱۰۳۱۳	-۰,۰۰۰۰۳۲
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	-۰,۰۷۳۵۰	۰,۸۷۱۱۱	۰,۰۸۵۰۰	۰,۰۹۵۹۶	۰,۰۱۴۲۳
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۱۸۳۲۰	۱,۰۱۹۵۵	۰,۱۱۳۸۳	۰,۰۹۱۲۴	-۰,۰۰۱۰۰
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۱۴۰۸۳	۰,۹۸۳۸۰	۰,۱۱۴۸۹	۰,۰۸۷۷۶	۰,۰۰۰۳۳۲
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	-۰,۰۰۰۳۱۸	۰,۹۴۸۶۶	۰,۰۷۴۴۵	۰,۰۶۱۶۰	۰,۰۰۰۱۰۳
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰,۰۰۰۰۸۴	۰,۹۵۱۱۶	۰,۰۵۳۶۶	۰,۰۴۲۳۴	-۰,۰۰۰۰۷۱
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰,۰۰۰۲۰۹	۰,۹۶۱۵۳	۰,۰۲۸۴۱	۰,۰۲۹۶۹	۰,۰۰۰۰۶۱
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۰۰۱۶۰	۰,۹۷۸۰۶	۰,۰۲۵۰۰	۰,۰۲۰۰۰	-۰,۰۰۰۰۴۲
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰,۰۰۰۸۱۹	۰,۹۹۰۳۴	۰,۰۲۷۷۲	۰,۰۲۳۶۷	-۰,۰۰۰۰۰۵
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰,۰۰۰۶۴۷	۰,۹۸۴۸۳	۰,۰۲۱۲۳	۰,۰۱۶۷۲	-۰,۰۰۰۰۴۰

ادامه‌ی جدول ۳. معدل مقادیر برآوردها، واریانسها و کوواریانسهای AMLE برای $\lambda = +1$

Scheme	mean($\hat{\mu}$)	mean($\hat{\sigma}$)	var($\hat{\mu}$)	var($\hat{\sigma}$)	cov($\hat{\mu}, \hat{\sigma}$)	max(A_r)
(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	-۰,۰۳۸۶۳	۰,۸۶۴۶۶	۰,۰۷۴۹۸	۰,۰۹۸۳۹	۰,۰۱۵۷۰	-۰,۰۵۵۲۴
(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۰۷۰۵۰	۰,۹۷۵۳۱	۰,۰۷۶۱۲	۰,۰۶۳۷۱	۰,۰۰۰۰۹۰	-۰,۰۶۰۱۱۴
(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۱۱۱۷۱	۰,۹۷۳۱۷	۰,۰۹۷۱۳	۰,۰۸۳۲۸	۰,۰۰۰۴۹۷	-۰,۰۶۶۹۲۱
(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	-۰,۱۱۰۷۷	۰,۹۷۸۴۶	۰,۱۰۳۳۶	۰,۱۰۳۰۳	-۰,۰۰۰۰۲۷	-۰,۰۳۳۹۹۰
(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	-۰,۰۷۴۶۷	۰,۸۷۰۶۹	۰,۰۸۵۰۵	۰,۰۹۵۷۴	۰,۰۱۴۰۹	-۰,۱۳۹۲۲
(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	-۰,۱۸۴۲۳	۱,۰۱۷۰۶	۰,۱۱۳۸۷	۰,۰۹۰۳۵	-۰,۰۰۰۰۸۹	-۰,۰۶۲۰۷۰
(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	-۰,۱۴۱۸۲	۰,۹۸۲۹۲	۰,۱۱۴۸۹	۰,۰۸۷۶۵	۰,۰۰۰۳۲۷	-۰,۰۵۵۶۷۰
(۰, ..., ۰, ۱۰)	-۰,۰۰۰۴۲۱	۰,۹۴۷۷۳	۰,۰۷۴۴۶	۰,۰۶۱۵۶	۰,۰۰۰۱۰۲	-۰,۰۵۱۵۲۴
(۱۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۰۰۰۱۶	۰,۹۵۰۱۶	۰,۰۵۳۶۶	۰,۰۴۲۳۴	-۰,۰۰۰۰۷۱	-۰,۰۸۳۹۶۳
(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰,۰۰۰۱۰۹	۰,۹۶۰۵۳	۰,۰۲۸۴۱	۰,۰۲۹۶۹	۰,۰۰۰۰۶۱	-۰,۰۶۷۲۳۹
(۳۰, ۰, ..., ۰)	-۰,۰۰۰۰۲۶۰	۰,۹۷۷۰۶	۰,۰۲۵۰۰	۰,۰۲۰۰۰	-۰,۰۰۰۰۴۲	-۱۳,۴۹۵۸
(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰,۰۰۰۷۱۸	۰,۹۸۹۳۴	۰,۰۲۷۷۲	۰,۰۲۳۶۷	-۰,۰۰۰۰۰۵	-۴,۶۲۹۸۴
(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰,۰۰۰۵۴۷	۰,۹۸۳۸۳	۰,۰۲۱۲۳	۰,۰۱۶۷۲	-۰,۰۰۰۰۴۰	-۱۲,۲۸۹۳

جدول ۴. معدل مقادیر واریانس و کوواریانس‌های به دست آمده از اطلاع فیشر وقتی $\lambda = +1$

n	m	Scheme	\hat{I}_{11}	\hat{I}_{22}	\hat{I}_{12}
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	۰/۰۵۲۵۳	۰/۰۱۱۰۳	۰/۰۵۷۵۶
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۱۲۳	۰/۰۱۱۱۵	۰/۰۴۰۲۳
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۵۱۱	۰/۰۱۵۶۲	۰/۰۵۱۹۴
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	۰/۰۹۲۰۳	۰/۰۱۶۸۱	۰/۰۶۰۳۳
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	۰/۰۶۴۵۵	۰/۰۱۳۳۴	۰/۰۵۷۵۷
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۷۲۴	۰/۰۲۱۴۳	۰/۰۶۲۱۱
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۲۸۶	۰/۰۱۸۲۰	۰/۰۵۷۴۰
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	۰/۰۴۶۴۱	۰/۰۰۷۰۷	۰/۰۳۹۹۳
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۶۰۰۵	۰/۰۰۸۶۶	۰/۰۲۷۶۴
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰/۰۱۷۹۸	۰/۰۰۲۴۸	۰/۰۲۰۶۸
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۳۱۰۹	۰/۰۰۴۷۲	۰/۰۱۴۰۶
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰/۰۱۸۱۷	۰/۰۰۳۵۱	۰/۰۱۷۴۱
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰/۰۲۶۵۹	۰/۰۰۴۹۰	۰/۰۱۱۹۴

ادامه‌ی جدول ۴. معدل مقادیر واریانس و کوواریانس‌های به دست آمده از اطلاع فیشر وقتی $\lambda = +1$

n	m	Scheme	\hat{I}_{11}	\hat{I}_{22}	\hat{I}_{12}
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	۰/۰۵۲۵۵	۰/۰۱۱۲۴	۰/۰۵۷۶۰
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۱۰۱	۰/۰۱۱۱۱	۰/۰۴۰۱۲
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۴۸۷	۰/۰۱۵۵۸	۰/۰۵۱۸۲
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	۰/۰۹۱۵۷	۰/۰۱۶۶۹	۰/۰۶۰۰۸
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	۰/۰۶۴۳۷	۰/۰۱۲۹۰	۰/۰۵۴۹۳
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۶۱۴	۰/۰۲۱۰۱	۰/۰۶۱۵۱
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	۰/۰۹۲۴۵	۰/۰۱۸۲۰	۰/۰۵۷۸۲
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	۰/۰۴۶۲۴	۰/۰۰۷۰۲	۰/۰۳۹۵۰
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۵۹۸۱	۰/۰۰۸۶۲	۰/۰۲۷۵۵
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰/۰۱۷۹۰	۰/۰۰۲۴۸	۰/۰۲۰۶۱
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	۰/۰۳۱۱۰	۰/۰۰۴۷۲	۰/۰۱۴۰۵
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰/۰۱۸۱۰	۰/۰۰۳۵۲	۰/۰۱۷۳۵
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰/۰۲۶۴۷	۰/۰۰۴۸۷	۰/۰۱۱۹۱

۶ احتمال پوشش (Coverage Probability)

برای محاسبه‌ی فاصله‌ی اطمینان یا انجام آزمون فرض برای پارامترهای مکان و مقیاس باید یک کمیت محوری ساخته شود که توزیع آن از پارامتر مجهول مستقل باشد.

از آن‌جا که توزیع $(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}})$ مجاناً نرمال است، نتیجه می‌شود

$$p_1 = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\hat{\sigma}\sqrt{v^{11}}}, \quad p_2 = \frac{\hat{\mu} - \mu}{\sigma\sqrt{v^{11}}}, \quad p_3 = \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\hat{\sigma}\sqrt{v^{22}}},$$

به طور مجانبی دارای توزیع نرمال استاندارد هستند.

به کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو، نمونه‌هایی از توزیع نرمال چوله‌ی استاندارد به صورت سانسور شده‌ی فزاینده‌ی نوع دوم تولید و احتمال‌های پوشش

$$p(-1/96 \leq p_i \leq 1/96) \quad i = 1, 2, 3,$$

که انتظار می‌رود برابر ۹۵٪ باشند شبیه‌سازی شده‌اند. این مقادیر در جداول ۵ و ۶ فهرست شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود در حالتی که σ مجهول باشد احتمالات شبیه‌سازی شده رضایت‌بخش نیستند، مخصوصاً هنگامی که نسبت $\frac{m}{n}$ کوچک باشد. به همین دلیل تقریب نرمال و چندک‌های نرمال برای پیدا کردن فاصله‌ی اطمینان و انجام آزمون فرض توصیه نمی‌شود.

در جداول ۷ و ۸ چندک‌های توزیع بر اساس P_i ها شبیه‌سازی شده‌اند. بنا بر این، می‌توان این چندک‌ها را مبنای تشکیل فاصله‌ی اطمینان و آزمون فرض برای نمونه‌هایی با طرح‌های مشابه قرار داد.

در واقع اگر $(P_{\frac{\alpha}{4}}, P_{1-\frac{\alpha}{4}})$ چندک‌های تجربی برآورد شده توسط شبیه‌سازی برای یک طرح سانسور مشخص باشد، فاصله‌ی اطمینان برای پارامتر مکان به شکل زیر خواهد بود:

$$\left[\hat{\mu} - \hat{\sigma} \cdot p_{1, \frac{\alpha}{4}}, \hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot p_{1, 1-\frac{\alpha}{4}} \sqrt{v^{11}} \right]$$

که فاصله‌ی اطمینان $(1 - \alpha) \cdot 100$ درصد برای μ است، وقتی که σ نامعلوم باشد.

در جداول ۷ و ۸، کران پایین فاصله‌ی اطمینان، L.C.I. و کران بالای فاصله‌ی اطمینان، U.C.I. است که برای سه حالت $i = 1, 2, 3$ آورده شده است.

جدول ۵. احتمالات پوشش ۹۵٪ برای نمونه‌های سانسور شده برای $\lambda = -1$

n	m	Scheme	Coverage	Coverage	Coverage
			P_1	P_2	P_3
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	۰,۲۶۳۰۰	۰,۸۷۲۰۰	۰,۱۱۱۰۰
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۰,۸۴۴۵۰	۰,۹۷۶۰۰	۰,۵۷۹۵۰
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	۰,۷۰۶۵۰	۰,۹۸۱۰۰	۰,۴۲۷۰۰
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	۰,۵۲۶۰۰	۰,۹۶۱۰۰	۰,۲۹۱۰۰
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	۰,۲۶۰۰۰	۰,۹۳۴۲۹	۰,۲۰۴۲۹
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۰,۶۱۰۰۰	۰,۹۶۱۴۳	۰,۲۹۱۴۳
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	۰,۶۸۱۴۳	۰,۹۸۲۸۶	۰,۳۶۰۰۰
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	۰,۵۵۵۷۱	۰,۸۸۵۷۱	۰,۴۳۷۱۴
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰,۸۸۸۵۷	۰,۹۵۵۷۱	۰,۶۹۷۱۴
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰,۳۲۸۵۷	۰,۶۹۰۰۰	۰,۱۶۲۸۶
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	۰,۹۰۰۰۰	۰,۹۴۰۰۰	۰,۷۵۷۱۴
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰,۵۰۷۱۴	۰,۸۰۷۱۴	۰,۳۳۴۲۹
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰,۸۹۸۵۷	۰,۹۳۸۵۷	۰,۷۶۴۲۹

جدول ۶. احتمالات پوشش ۹۵٪ برای نمونه‌های سانسور شده برای $\lambda = +1$

n	m	Scheme	Coverage	Coverage	Coverage
			P_1	P_2	P_3
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	۰,۶۲۳۵۰	۰,۸۶۰۵۰	۰,۶۷۴۵۰
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۰,۸۶۰۵۰	۰,۹۱۴۰۰	۰,۸۰۳۰۰
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	۰,۷۷۸۰۰	۰,۸۶۷۵۰	۰,۷۸۰۰۰
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	۰,۷۱۲۸۶	۰,۸۰۸۵۷	۰,۷۷۰۰۰
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	۰,۶۲۷۱۴	۰,۸۶۵۷۱	۰,۶۷۵۷۱
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۰,۷۱۸۵۷	۰,۷۹۰۰۰	۰,۸۱۰۰۰
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	۰,۷۳۷۱۴	۰,۸۲۴۲۹	۰,۷۹۸۵۷
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	۰,۶۹۱۴۳	۰,۸۱۸۵۷	۰,۷۵۴۲۹
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	۰,۸۷۰۰۰	۰,۹۲۱۴۳	۰,۷۸۵۷۱
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	۰,۷۴۸۵۷	۰,۸۱۴۲۹	۰,۷۸۴۲۹
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	۰,۸۹۴۲۹	۰,۹۲۱۴۳	۰,۸۱۸۵۷
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	۰,۷۳۲۸۶	۰,۸۰۰۰۰	۰,۸۲۵۷۱
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	۰,۹۰۵۷۱	۰,۹۳۷۱۴	۰,۸۱۰۰۰

جدول ۷. صدک‌های شبیه‌سازی شده برای نمونه‌های سانسور شده وقتی $\lambda = -1$

n	m	Scheme	L.C.I. ۱	U.C.I. ۱	L.C.I. ۲	U.C.I. ۲	L.C.I. ۳	U.C.I. ۳
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	-۴,۶۷۹۲	۰,۳۶۷۴۱	-۱,۸۹۶۹	۰,۳۵۴۲۸	-۹,۰۵۹۲	۰,۰۳۸۷۸
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	-۲,۶۴۰۷	۰,۸۶۸۶۷	-۱,۶۴۱۴	۰,۸۰۷۴۱	-۴,۷۱۶۱	۱,۷۵۸۹۸
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	-۳,۰۷۱۵	۰,۵۶۲۴۳	-۱,۶۱۳۲	۰,۵۳۶۳۵	-۵,۹۴۳۳	۱,۱۸۸۹۵
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	-۳,۷۰۶۲	۰,۴۹۲۹۲	-۱,۷۱۷۹	۰,۴۶۹۶۳	-۷,۰۲۳۱	۰,۹۶۶۰۴
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	-۷,۶۳۱۶	۰,۶۶۵۴۵	-۱,۷۲۶۷	۰,۴۵۲۰۵	-۸,۳۴۱۵	۰,۵۸۹۴۰
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	-۳,۲۵۷۹	۰,۵۲۹۰۶	-۱,۷۱۹۹	۰,۴۶۶۷۲	-۶,۶۱۰۹	۰,۵۹۵۵۲
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	-۳,۰۷۹۸	۰,۳۶۶۰۷	-۱,۶۰۶۱	۰,۳۲۸۶۹	-۶,۱۲۵۵	۰,۹۴۳۳۹
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	-۸,۴۴۵۰	۱,۱۹۵۹۹	-۲,۰۶۸۰	۱,۱۷۳۳۵	-۱۰,۳۰۶	۱,۳۵۲۹۵
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	-۲,۲۲۷۴	۱,۴۸۳۲۳	-۱,۶۶۹۴	۱,۳۱۹۵۵	-۳,۹۷۲۶	۲,۳۸۲۱۷
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	-۷,۰۱۲۶	۰,۵۸۱۳۳	-۲,۴۹۶۵	۰,۶۳۴۶۴	-۸,۶۲۳۰	۰,۳۲۵۸۴
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	-۲,۲۷۰۶	۱,۴۳۰۲۰	-۱,۸۹۴۲	۱,۳۵۲۷۲	-۳,۳۱۹۵	۲,۳۰۰۳۲
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	-۶,۲۸۶۴	۰,۹۱۵۰۷	-۲,۳۵۳۲	۱,۰۶۰۹۱	-۶,۲۳۴۵	۰,۸۵۵۵۸
۵۰	۲۵	(۲۵, ۰, ..., ۰)	-۲,۱۸۲۵	۲,۰۰۷۲۲	-۱,۸۴۴۹	۱,۴۹۶۸۰	-۳,۰۷۶۱	۲,۶۹۴۱۸

جدول ۸. صدک‌های شبیه‌سازی شده برای نمونه‌های سانسور شده وقتی $\lambda = +1$

n	m	Scheme	L.C.I. ۱	U.C.I. ۱	L.C.I. ۲	U.C.I. ۲	L.C.I. ۳	U.C.I. ۳
۲۰	۵	(۰, ۰, ۰, ۰, ۱۵)	-۶,۳۶۳۹	۴,۵۲۱۳۳	-۲,۱۰۳۳	۲,۰۹۵۵۸	-۷,۵۰۱۳	۱,۵۱۰۵۱
۲۰	۵	(۱۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	-۲,۵۰۸۲	۲,۰۸۴۸۴	-۱,۹۶۲۰	۱,۸۰۲۷۶	-۲,۹۶۹۵	۲,۲۹۱۶۹
۲۰	۵	(۱۰, ۵, ۰, ۰, ۰)	-۳,۵۴۱۶	۲,۳۳۴۷۵	-۲,۱۸۰۶	۱,۹۲۰۵۹	-۳,۴۱۱۳	۲,۲۳۰۰۹
۲۰	۵	(۵, ۵, ۵, ۰, ۰)	-۴,۰۶۱۱	۳,۲۹۴۲۶	-۲,۳۵۶۳	۲,۱۰۴۲۰	-۲,۹۰۳۲	۲,۴۴۷۸۷
۲۰	۵	(۳, ۳, ۳, ۳, ۳)	-۱۲,۲۵۱	۳,۷۵۳۴۵	-۲,۱۲۶۶	۲,۰۳۱۷۹	-۸,۳۱۱۳	۱,۴۶۶۵۸
۲۰	۵	(۰, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	-۳,۰۰۷۲	۲,۷۳۰۶۴	-۲,۵۳۴۰	۱,۷۵۲۲۰	-۲,۱۵۰۳	۲,۵۵۹۷۰
۲۰	۵	(۵, ۱۰, ۰, ۰, ۰)	-۳,۵۵۱۹	۲,۲۶۴۶۳	-۲,۳۹۳۱	۲,۰۸۶۵۳	-۲,۸۷۲۳	۲,۴۷۹۹۳
۲۰	۱۰	(۰, ..., ۰, ۱۰)	-۶,۸۷۸۳	۳,۷۴۴۴۶	-۲,۵۳۵۸	۲,۳۷۹۹۷	-۵,۷۲۱۳	۱,۶۲۹۱۱
۲۰	۱۰	(۱۰, ۰, ..., ۰)	-۲,۱۷۱۱	۲,۵۵۲۳۱	-۱,۹۴۸۴	۱,۶۴۰۶۶	-۲,۸۶۶۴	۲,۱۶۷۰۲
۵۰	۲۰	(۰, ..., ۰, ۳۰)	-۳,۵۱۱۶	۳,۲۶۷۶۴	-۲,۴۵۶۵	۲,۵۱۱۲۳	-۳,۸۹۶۱	۱,۷۱۲۲۶
۵۰	۲۰	(۳۰, ۰, ..., ۰)	-۱,۸۰۴۸	۲,۱۳۲۷۳	-۱,۹۲۹۱	۱,۷۵۶۳۰	-۲,۸۲۲۲	۲,۲۳۵۷۱
۵۰	۲۵	(۰, ..., ۰, ۲۵)	-۲,۹۷۰۴	۳,۰۲۴۴۹	-۲,۳۴۶۹	۲,۳۶۱۷۴	-۳,۳۱۵۸	۱,۷۱۸۴۳

مثال‌های عددی

برای تشریح روش‌های استنباطی به کار رفته در این مقاله دو مثال عددی زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱. مشاهدات زیر ضرایب هوشی ۵۲ مرد غیر سفیدپوست را نشان می‌دهند.

۹۱	۱۰۲	۱۰۰	۱۱۷	۱۲۲	۱۱۵	۹۷	۱۰۹	۱۰۸	۱۰۴	۱۰۸	۱۱۸	۱۰۳
۱۲۳	۱۲۳	۱۰۳	۱۰۶	۱۰۲	۱۱۸	۱۰۰	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۷	۹۷	۹۵
۱۱۹	۱۰۲	۱۰۸	۱۰۳	۱۰۲	۱۱۲	۹۹	۱۱۶	۱۱۴	۱۰۲	۱۱۱	۱۰۴	۱۲۲
۱۰۳	۱۱۱	۱۰۱	۹۱	۹۹	۱۲۱	۹۷	۱۰۹	۱۰۶	۱۰۲	۱۰۴	۱۰۷	۹۵

این داده‌ها در شرفی و بهبودیان (۲۰۰۷) آورده شده که برآوردهای MLE پارامترهای آن به روش‌های عددی به صورت زیر محاسبه شده‌اند (برانکو و دی، ۲۰۰۱، جدول ۲):

$$\hat{\sigma} = ۱۱٫۳۸, \quad \hat{\mu} = ۹۸٫۷۹, \quad \hat{\lambda} = ۱٫۷۱.$$

در این مثال با فرض $\hat{\lambda} = ۱٫۷۱$ داریم

$$n = m = ۵۲, \quad A_2 = -۵۹۲٫۱۱, \quad A_1 = -۵۴٫۸۸.$$

بنا بر این، برآورد AMLE پارامتر σ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{\sigma} = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4mA_2}}{2m} = ۱۱٫۲۱.$$

همچنین داریم

$$L = -۰٫۴۴۳, \quad K = ۱۰۳٫۸۶,$$

بنا بر این، برآورد AMLE پارامتر σ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= K + L\tilde{\sigma} \\ &= ۱۰۳٫۸۶ - ۰٫۴۴۳ \times ۱۱٫۲۱ \\ &= ۹۸٫۸۹. \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود برآوردهای AMLE محاسبه‌شده، خیلی نزدیک به برآوردهای MLE می‌باشند. همچنین پس از ۲۰۰۰ بار شبیه‌سازی بر اساس نمونه‌ی کامل با حجم $n = ۵۲$ ، چندک‌های

۲/۵٪ و ۹۷/۵٪ برای P_1 و P_3 به ترتیب به صورت $(۲/۹, -۱/۶۲)$ و $(۲/۱۹, -۲/۴۴)$ محاسبه شده‌اند. یک فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای σ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left(\tilde{\sigma} + P_{3,0.025} \sqrt{\text{var}(\tilde{\sigma})}, \tilde{\sigma} + P_{3,0.975} \sqrt{\text{var}(\tilde{\sigma})} \right) = (۱۰/۴۳, ۱۱/۹۰۵)$$

به همین صورت فاصله‌ی اطمینان ۹۵٪ برای μ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\left(\tilde{\mu} + P_{1,0.025} \sqrt{\text{var}(\tilde{\mu})}, \tilde{\mu} + P_{1,0.975} \sqrt{\text{var}(\tilde{\mu})} \right) = (۹۸/۳۴, ۹۹/۸۶)$$

مثال ۲. در این مثال یک نمونه‌ی سانسور فزاینده‌ی نوع دوم با $m = ۲$ و $n = ۳$ طرح سانسور زیر از توزیع نرمال چوله با پارامترهای $\lambda = ۳, \mu = ۴, \sigma = ۲$ تولید شده است.

$$R_1 = (۱, ۰, \dots, ۰)$$

نمونه‌ی تولید شده عبارت است از

۱/۶۳۶	۳/۹۳۲	۴/۱۱۰	۴/۳۶۲	۴/۴۳۸	۴/۶۵۴	۴/۹۱۲	۴/۹۳۲	۵/۵۸۴	۵/۸۴۸
۵/۸۹۰	۵/۹۱۲	۶/۱۴۰	۶/۳۷۰	۶/۳۷۶	۶/۷۷۴	۶/۸۰۸	۷/۰۴۰	۷/۰۵۸	۷/۲۸۶

برای نمونه‌ی بالا برآوردهای AMLE پارامترهای μ و σ به ترتیب عبارتند از $۳/۹۶۲$ و $۲/۲۳۰$. با استفاده از روش عددی نیوتن-رافسون نیز برآوردهای MLE پارامترهای μ و σ به ترتیب عبارتند از $۳/۹۸۳$ و $۲/۱۹۶$.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از پیشنهادهای داوران محترم مجله که موجب بهبود مقاله گردید کمال تشکر و قدردانی دارند.

مرجع‌ها

Arellano-Valle, R.B., Gomez, H.W. and Quintana, F.A. (2004). A new class of skew-normal distribution. *Commun. Stat Theory Methods* **33**, 1465-1480.

- Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). *A First Course in Order Statistics*. Wiley, New York.
- Arnold, B.C. and Beaver, R.J. (2002). Skewed multivariate models related to hidden truncation and/or selective reporting (with discussion). *Test* **11**, 7-54.
- Asgharzadeh, A. (2006). Point and interval estimation for a generalized logistic distribution under progressive Type II censoring. *Commun. Statist. Theory Meth.* **35**, 1675-1702.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones. *Scand. J. Statist.* **12**, 171-178.
- Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distribution which includes the normal ones. *Statistica* **46**, 199-208.
- Azzalini, A. and Dalla-Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution. *Biometrika* **83**, 715-726.
- Balakrishnan, N. and Asgharzadeh, A. (2005). Inference for the scaled halflogistic distribution based on progressively Type II censored samples. *Commun. Statist. Theory Meth.* **34**, 73-87.
- Balakrishnan, N. and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Birkhäuser, Boston.
- Balakrishnan, N. and Kannan, N. (2000). *Point and Interval Estimation for the Parameters of the Logistic Distribution Based on Progressively Type-II Censored Samples*. In Handbook of Statistics (Eds., N. Balakrishnan and C. R. Rao), **20**, 431-456 .
- Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C.T. and Ng, H.K.T. (2003). Point and interval estimation for the Gaussian distribution based on progressively Type-II censored samples. *IEEE Trans. Reliab.* **52**, 90-95.
- Balakrishnan, N., Kannan, N., Lin, C.T. and Wu, S.J.S. (2004). Inference for the extreme value distribution under progressive Type-II censoring. *J. Statist. Comput. Simul.* **74**, 25-45.
- Balakrishnan, N. and Cohen, A.C. (1991). *Order Statistics and Inference: Estimation Methods*. Academic Press, San Diego.
- Balakrishnan, N. and Sandhu, R.A.A (1995). Simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. *The Amer. Statist.* **49**, 229-230.
- Branco, M. and Dey, D. (2001). A general class of multivariate elliptical distribution. *J. Multivariate Anal.* **79**, 99-113.
- Cohen, A.C. (1991). *Truncated and Censored Samples: Theory and Applications*. Marcel Dekker, New York.
- Henze, N. (1986). A probabilistic representation of the skew-normal distribution. *Scand. J. Statist.* **13**, 271-275.

Lawless. (1982). *Statistical Models and Methods for Life Time Data*. Wiley, New York.

Sharafi, M. and Behboodian, J. (2007). The Balakrishnan skew-normal density. To appear in *Statistical Papers*.

پویا مرادی نژاد

گروه آمار، دانشکده‌ی علوم پایه،

دانشگاه مازندران،

بابلسر، ایران.

رایانشانی: moradi_pooya@yahoo.com

اکبر اصغرزاده

گروه آمار، دانشکده‌ی علوم پایه،

دانشگاه مازندران،

بابلسر، ایران.

رایانشانی: a.asgharzadeh@umz.ac.ir