© Statistical Research and Training Center
مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
J. Statist. Res. Iran **6** (2009): 37–55
دوره‌ی ۶، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۸، صص ۳۷–۵۵

ممیزی سری‌های زمانی ARMA مبتنی بر معیارهای واگرایی: روش حوزه‌ی فرکانس

رحیم چینی‌پرداز،[†,*] بهزاد منصوری[†] و سارا شفیعی[‡]

[†] دانشگاه شیهد چمران اهواز
[‡] دانشگاه آزاد اسلامی واحد یاسوج

چکیده. استفاده از معیارهای واگرایی یکی از روش‌های ممیزی در سری‌های زمانی طیفی است. در این مقاله سه معیار کلاسیک آماری کولبک – لیبلر، چرنوف و روش شاموی برای ممیزی بین مدل‌های AR و MA به دست آمده است. سپس با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی کارایی سه روش مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی. مدل‌های ARMA؛ واگرایی کولبک – لیبلر و چرنوف؛ سری‌های زمانی طیفی و فاصله‌ی چرنوف.

۱ مقدمه

آنالیز ممیزی سری‌های زمانی از مهم‌ترین مباحث آماری است که کاربردهای وسیعی در علومی مانند مهندسی، زمین‌شناسی، پزشکی، اقتصادی، علوم رفتاری و غیره دارد. بعضی از این کاربردها در شاموی و استوفر (۲۰۰۶) آمده است. همانند دیگر مباحث سری‌های زمانی، آنالیز ممیزی سری‌های زمانی نیز در دو بخش حوزه‌ی زمانی و حوزه‌ی فرکانس مطرح است که در هر دو حوزه مطالعات وسیعی انجام گرفته است. در حوزه‌ی زمانی نسبت لگاریتم درستنمایی توابع چگالی دو جامعه به‌عنوان معیاری برای ممیزی بین دو

[*]نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت هرگاه تفاوت دو جامعه فقط در میانگین‌های دو جامعه باشد ممیزی بین دو جامعه به‌صورت خطی به دست می‌آید. ممیزی خطی در کتاب‌های مختلف کلاسیک مورد بررسی قرار گرفته است (به‌عنوان مثال مراجعه شود به آندرسن، ۱۹۸۴). اما اگر تفاوت در واریانس‌های دو جامعه باشد ممیزی منجر به تابع درجه‌ی دومی می‌شود که دارای توزیع بسیار پیچیده‌ای است. می‌توان نشان داد که توزیع این تابع ترکیب خطی از متغیرهای تصادفی خی‌دو هر کدام با یک درجه آزادی است (چان و همکاران، ۱۹۹۶). اما به دست آوردن ضرایب ترکیب خطی نیاز به اعمالی مانند حاصل‌ضرب ماتریس‌ها و عکس ماتریس‌ها دارد. در این حالت تابع ممیزی به‌صورت تحلیلی به دست نمی‌آید و باید با روش عددی و تقریبی محاسبه گردد. چون ماتریس‌های کوواریانس سری‌های زمانی دارای ابعاد بزرگ هستند روش‌های عددی نیز جوابگوی خوبی برای مسئله نیستند. چان (۱۹۹۱) برای حالت خاص ممیزی بین دو سری زمانی اتورگرسیو (AR) تابع ممیزی تحلیلی تقریبی را به دست آورد. در ادامه چان و همکاران (۱۹۹۶) برای مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک (ARMA) نیز تابع ممیزی تحلیلی تقریبی را به دست آورده‌اند. آن‌ها در ضمن نشان داده‌اند که در ممیزی بین دو مدل میانگین متحرک (MA) با مرتبه‌ی یک می‌توان تابع ممیزی دقیقی را به دست آورد. توسعه‌ی این کار توسط چینی‌پرداز (۲۰۰۰) در اتورگرسیو مرتبه‌ی اول همراه با یک اغتشاش و به‌وسیله‌ی چینی‌پرداز و کاکس (۲۰۰۴) در حالت ناپارامتری انجام شده است.

در حوزه‌ی طیفی سری‌های زمانی، آنالیز ممیزی با استفاده از تقریب‌های طیفی دنبال می‌شود. لیگت (۱۹۷۱) برای به دست آوردن تابع ممیزی حالتی را در نظر گرفت که میانگین‌های دو جامعه برابر باشند. سپس با استفاده از تقریب‌های طیفی به ممیزی بین سری‌های زمانی پرداخت. شاموی و آنگر (۱۹۷۴) در ادامه‌ی کار آندرسن (۱۹۷۱)، کولبک (۱۹۷۸) و آندرسن و بهادر (۱۹۶۲) با استفاده از معیار اطلاع کولبک – لیبلر، بهترین توابع ممیزی خطی را برای ممیزی بین دو فرایند ایستای نرمال زمانی که میانگین‌های دو فرایند برابر هستند، فراهم نمودند. آن‌ها نتایج این روش‌ها را برای ممیزی بین داده‌های لرزه‌ای (داده‌های ثبت‌شده توسط لرزه‌نگار که بر اثر نوسانات ناشی از زمین‌لرزه یا انفجار حاصل شده‌اند) ارایه کردند. از دیگر افرادی که در زمینه‌ی آنالیز ممیزی در حوزه‌ی طیفی سری‌های زمانی مطالعه کردند می‌توان به آلاگان (۱۹۸۹)، درگاهی نوبری (۱۹۹۲)، درگاهی نوبری و لی‌کاک (۱۹۸۱)، کاکیزاوا و همکاران (۱۹۹۸) و شاموی (۲۰۰۳) اشاره کرد. در بیش‌تر این مقاله‌ها تابع ممیزی با استفاده از روش نسبت درستنمایی و یا ماکسیمم کردن فاصله‌هایی مانند کولبک – لیبلر، باتاچاریا و چرنوف به دست آمده است.

در مقاله‌ی حاضر آنالیز ممیزی طیفی بر اساس معیارهای جداسازی کولبک – لیبلر و چرنوف بین دو

جامعه مطرح می شود. بدین صورت که معیارهای کولبک - لیبلر و چرنوف برای مدل‌های سری زمانی انطباق داده شده و سپس نتایج به دست آمده با روش‌های عددی، مورد مقایسه قرار می‌گیرد. مقاله در پنج بخش تنظیم شده است. در بخش دوم مفاهیم اوّلیه‌ی آنالیز ممیزی در حوزه‌ی فرکانس مطرح می‌شود. در بخش سوم معیارهای شاموی، کولبک - لیبلر و چرنوف مورد بررسی قرار گرفته و در سری‌های زمانی انطباق داده شده است. در بخش چهارم مقاله، دو مدل MA و AR به‌عنوان مدل‌های مرسوم مورد استفاده قرار گرفته‌اند. معیارهای واگرایی مختلف در این مقاله برای این دو مدل به دست آورده شده و در بخش پنجم، بخش نهایی، با روش شبیه‌سازی برای دو مدل AR و MA، این معیارها مورد بررسی قرار گرفته و سپس مقایسه شده‌اند.

۲ آنالیز ممیزی در سری‌های زمانی

فرض کنید سری زمانی $\boldsymbol{x} = (x_۰, x_۱, \dots, x_{T-۱})$ بردار $T\times ۱$، بعدی با توزیع نرمال چندمتغیره با بردار میانگین: $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{j۰}, \mu_{j۱}, \dots, \mu_{jT-۱})$ و ماتریس کوواریانس $T \times T$ بعدی: $R_j = \{r_j(t-u); t,u = ۰, ۱, \dots, T-۱\}$ باشد. در این صورت تابع چگالی چندمتغیره‌ی $\boldsymbol{x}$ تحت jامین جامعه، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$p_j(\boldsymbol{x}) = (۲\pi)^{-\frac{T}{۲}}|R_j|^{-\frac{۱}{۲}} \exp\left\{-\frac{۱}{۲}(\boldsymbol{x}-\mu_j)'R_j^{-۱}(\boldsymbol{x}-\mu_j)\right\},\ -\infty < \boldsymbol{x} < \infty \tag{۱}$$

برای تخصیص مشاهده‌ی جدید $\boldsymbol{x}$ به یکی از جامعه‌های از قبل معلوم π_j برای $j = ۱, ۲$، قاعده‌ی کلاسیک رده‌بندی برای فرضیه‌های $H_۱ : \boldsymbol{x}_t \in \pi_۱$ در مقابل $H_۲ : \boldsymbol{x}_t \in \pi_۲$ بر اساس نسبت درستنمایی‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به جامعه‌ی $\pi_۱$ تخصیص داده می‌شود هرگاه:

$$\ln \frac{p_۱(x)}{p_۲(x)} \geqslant k \tag{۲}$$

و در غیر این صورت سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به جامعه‌ی $\pi_۲$ تخصیص داده می‌شود که در آن k مقدار ثابت و با توجه به میزان خطای نوع اول و یا روش‌های بیزی مقدار آن تعیین می‌شود. در حالتی که تنها واریانس‌های دو جامعه نامساوی باشند قاعده‌ی ممیزی در رابطه‌ی (۲) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$d_Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'(R_۲^{-۱} - R_۱^{-۱})\boldsymbol{x} \geqslant k_۱ \tag{۳}$$

۲٫۱ آنالیز ممیزی در حوزه‌ی فرکانس

فرض کنید تبدیل فوریه‌ی $\boldsymbol{X}(k)$ برای سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به‌صورت

$$\boldsymbol{X}(k) = \frac{۱}{\sqrt{T}} \sum_{t=۰}^{T-۱} x_t \exp\{-i\lambda_k t\}$$

با بردار میانگین

$$\boldsymbol{M}(k) = \frac{۱}{\sqrt{T}} \sum_{t=۰}^{T-۱} \mu_t \exp\{-i\lambda_k t\}$$

برای $j = ۱, ۲$ و $\lambda_k = ۲\pi k T^{-۱}$ باشد. اگر R_k تابع کوواریانس سری زمانی $\boldsymbol{x}$ باشد، آنگاه

$$R_k = (۲\pi)^{-۱} \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{-\frac{\pi}{۲}} f_x(\lambda_k) \exp\{i\lambda_k t\} d\lambda_k$$

و در نتیجه تابع چگالی طیفی یا توان طیف فرایند سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f_x(\lambda_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_k \exp\{-i\lambda_k t\}.$$

اگر $r(t)$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد آنگاه طبق تعریف داریم

$$r(t) = (۲\pi)^{-۱} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\{it\lambda\} f(\lambda) d\lambda.$$

لیگت (۱۹۷۱) نشان داد که می‌توان $r(t-u)$ را با $r^{\circ}(t-u)$ به‌صورت زیر تقریب زد:

$$r^{\circ}(t-u) = \frac{۱}{T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \exp\{i\lambda_k (t-u)\} f(\lambda_k).$$

همچنین اگر $R^{\circ} = \{r^{\circ}(t-u); t, u = ۰, ۱, \ldots, T-۱\}$ باشد، آنگاه $R^{\circ -۱}$ با عناصری به‌صورت زیر

$$r^{\circ -۱}(t-u) = \frac{۱}{T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \exp\{i\lambda_k (t-u)\} f^{-۱}(\lambda_k) \qquad (۴)$$

تقریب مناسبی برای $R^{-۱}$ خواهد بود. به شرط آن‌که

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |t|^{۱+\alpha} |r(t)| < \infty.$$

قرار دادن این شرط برای اطمینان به پایایی عبارت‌های شامل $f^{-۱}(\lambda)$ است. شاموی (۱۹۸۸) با استفاده از تقریب رابطه‌ی (۴) نشان داد که می‌توان لگاریتم رابطه‌ی (۱) را به‌صورت زیر تقریب زد:

$$\ln p_j(x) = -\frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{T-۱}\ln f_j(\lambda_k) - \frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{T-۱}\frac{|X(k)-M_j(k)|^۲}{f_j(\lambda_k)}.$$

بنا بر این طبق رابطه‌ی (۲) تقریب ممیزی خطی با فرض برابری ماتریس‌های کوواریانس دو جامعه و با جایگزینی $R^{-۱}$ با $R^{\circ-۱}$ به‌صورت زیر خلاصه خواهد شد:

$$\begin{aligned} d_l^{\circ}(x) &= \sum_{k=۰}^{T-۱}\frac{|\boldsymbol{M}_۱(k)^* - \boldsymbol{M}_۲(k)^*|\,|\boldsymbol{X}(k)|}{f(\lambda_k)} \\ &\quad - \frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{T-۱}\frac{\{\boldsymbol{M}_۱(k)^* - \boldsymbol{M}_۲(k)^*\}\{\boldsymbol{M}_۱(k)+\boldsymbol{M}_۲(k)\}}{f(\lambda_k)} \end{aligned}$$

که در آن $\boldsymbol{M}^*(k)$ مزدوج مختلط $\boldsymbol{M}(k)$ است. آنگاه سری زمانی به جامعه‌ی اول تخصیص داده می‌شود، هرگاه $d_l^{\circ}(x) \geqslant ۰$ و به جامعه‌ی دوم تخصیص داده می‌شود، هرگاه $d_l^{\circ}(x) < ۰$.

با فرض نابرابر بودن بردارهای میانگین و ماتریس‌های کوواریانس، تقریب تابع ممیزی درجه‌ی دو به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} d_Q^{\circ}(x) &= -\frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{T-۱}\ln\frac{f_۱(\lambda_k)}{f_۲(\lambda_k)} - \frac{۱}{۲}\sum_{k=۰}^{T-۱}|\boldsymbol{X}(k)|^۲\left\{\frac{۱}{f_۱(\lambda_k)} - \frac{۱}{f_۲(\lambda_k)}\right\} \\ &\quad + \sum_{k=۰}^{T-۱}\left\{\frac{\boldsymbol{M}_۱(k)^*}{f_۱(\lambda_k)} - \frac{\boldsymbol{M}_۲(k)^*}{f_۲(\lambda_k)}\right\}\boldsymbol{X}(k). \end{aligned}$$

با فرض صفر بودن میانگین‌ها، تقریب تابع ممیزی درجه‌ی دو به‌صورت زیر خواهد بود:

$$d_Q^{\circ}(x) = \boldsymbol{x}'(R_۲^{\circ-۱} - R_۱^{\circ-۱})\boldsymbol{x} = \sum_{k=۰}^{T-۱}|\boldsymbol{X}(k)|^۲\left\{f_۲^{-۱}(\lambda_k) - f_۱^{-۱}(\lambda_k)\right\}.$$

همانند قبل رده‌بندی $\boldsymbol{x}$ به دو جامعه بر حسب $d_Q^{\circ}(x)$ خواهد بود.

۳ معیارهای ممیزی در سری‌های زمانی

معیار اطلاع کولبک، در ممیزی بین دو سری زمانی ایستای نرمال در حالتی که دارای بردار میانگین و ماتریس کوواریانس نابرابر باشند، تحت فرضیه‌ی $H_۱$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$I_T(۱,۲;\boldsymbol{x}) = \frac{۱}{T}E_{p_۱}\left\{\ln\frac{p_۲(x)}{p_۱(x)}\right\} \qquad (۵)$$

که در آن $p_۱(x)$ و $p_۲(x)$ به‌ترتیب توابع چگالی مربوط به جامعه‌های نرمال تحت فرضیه‌های $H_۱$ و $H_۲$ و همچنین T طول بردار مشاهدات سری زمانی $\boldsymbol{x}$ است. به‌همین ترتیب می‌توان معیار اطلاع کولبک در ممیزی بین دو سری زمانی ایستای نرمال، تحت فرض $H_۲$ را نیز به دست آورد. به‌دلیل نامتقارن بودن معیار کولبک - لیبلر می‌توان معیار واگرایی J را به‌صورت زیر محاسبه کرد:

$$J(۱,۲;\boldsymbol{x}) = I(۱,۲;\boldsymbol{x}) + I(۲,۱;\boldsymbol{x}). \tag{۶}$$

اگر تابع‌های میانگین دو جامعه برابر باشند و تنها تفاوت در ماتریس‌های کوواریانس دو جامعه باشند، یعنی تحت این فرض که برای تمام $t = ۰,۱,\dots,T-۱$ها، $\delta_t = \mu_{۱t} - \mu_{۲t} = ۰$، معیار اطلاع کولبک و معیار واگرایی J به‌ترتیب توسط رابطه‌های زیر به دست خواهند آمد (آندرسن، ۱۹۷۱):

$$\begin{aligned} I_T^Q(۱,۲;\boldsymbol{x}) &= \frac{۱}{۲T}\left\{\mathrm{tr}(R_۱R_۲^{-۱}) - \ln\frac{|R_۱|}{|R_۲|} - T\right\} \\ J_T^Q(۱,۲;\boldsymbol{x}) &= \frac{۱}{۲T}\left\{\mathrm{tr}(R_۱R_۲^{-۱}) + \mathrm{tr}(R_۲R_۱^{-۱}) - ۲T\right\}, \end{aligned} \tag{۷}$$

و در حالتی که میانگین‌های دو جامعه متفاوت و ماتریس جامعه‌ها برابر در نظر گرفته شوند، معیار اطلاع کولبک و معیار واگرایی J به‌ترتیب تبدیل به رابطه‌های زیر می‌شوند (کولبک، ۱۹۷۸):

$$\begin{aligned} I_T^L(۱,۲;\boldsymbol{x}) &= \frac{۱}{۲}\mathrm{tr}\left(R^{-۱}\delta\delta\right) = \frac{۱}{۲}\delta R^{-۱}\delta \\ J_T^L(۱,۲;\boldsymbol{x}) &= \mathrm{tr}(R^{-۱}\delta\delta) = \delta R^{-۱}\delta. \end{aligned} \tag{۸}$$

۳٫۱ آنالیز ممیزی طیفی بر اساس معیار اطلاع ممیزی کولبک - لیبلر

فرض کنید سری زمانی $\boldsymbol{x}$ تحت فرضیه‌های H_j، $j = ۱,۲$؛ دارای ماتریس کوواریانس زیر باشد:

$$R_j = \{\sigma_j(s-t) \qquad s,t = ۰,۱,\dots T-۱\},$$

آنگاه رابطه‌ی معکوس تبدیل فوریه‌ی زیر برای تابع کوواریانس وجود دارد:

$$\sigma_j(s-t) = \int_{-\pi}^{\pi} f_j(\lambda)\exp\{i\lambda(s-t)\}\left(\frac{d\lambda}{۲\pi}\right)$$

که $f_j(\lambda)$ تابع طیف جامعه jام می‌باشد که فرض می‌شود بر روی فاصله‌ی $[-\pi,\pi]$ مثبت، پیوسته و به‌طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد، (فولر، ۱۹۹۶). در این صورت فرض می‌شود دنباله‌ی $\delta_t = \mu_{۱t} - \mu_{۲t}$، $t = ۰,۱,\dots,T-۱$ در شرایط زیر صدق کند:

(i) $\sup_t[\delta_t] = c < \infty,$

(ii) $\rho_T(\tau) = T^{-۱}\sum_{t=۰}^{T-۱-|\tau|}\delta_{t+|\tau|}\delta_t,$

که $\rho_T(\tau)$ تابع خودهمبستگی سری زمانی $\boldsymbol{x}$ و دارای حد زیر است:

$$\rho(\tau) = \lim_{T\longrightarrow\infty}\rho_T(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi}\exp(i\lambda t)\left\{\frac{dU(\lambda)}{۲\pi}\right\}.$$

می‌توان نشان داد که $U(\lambda)$ تابع یکنوای اکیداً غیر نزولی است، به‌گونه‌ای که $U(-\pi) = ۰$ و از راست پیوستگی دارد (شاموی و آنگر، ۱۹۷۴).

(iii) اگر تابع δ_t در شرایط (i) و (ii) صدق کند، در این صورت حد اطلاع ممیزی رابطه‌ی (۵) به‌صورت زیر به دست می‌آید (کاکیزاوا و همکاران، ۱۹۹۸).

$$\begin{aligned} I(۱,۲;\boldsymbol{x}) &= \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{f_۱(\lambda)}{f_۲(\lambda)} - \ln\frac{f_۱(\lambda)}{f_۲(\lambda)} - ۱\right\}\frac{d\lambda}{۲\pi} \\ &+ \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{۱}{f_۲(\lambda)}\right\}\frac{dU(\lambda)}{۲\pi}. \end{aligned} \quad (۹)$$

شرایطی که بر روی تابع δ_t و $f_j(\lambda)$ $j = ۱,۲;$ قرار داده شده است، برای همگرایی اطلاع و میزان واگرایی و همچنین تقریب‌های طیفی آن‌ها، به این معیارها می‌باشد و در نتیجه ضروری هستند. می‌توان نشان داد که (کاکیزاوا و همکاران، ۱۹۹۸):

$$I(۱,۲;\boldsymbol{x}) = \lim_{T\longrightarrow\infty} I_T(۱,۲;\boldsymbol{x})$$

و همچنین به‌طور مشابه رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

$$I(۲,۱;\boldsymbol{x}) = \lim_{T\longrightarrow\infty} I_T(۲,۱;\boldsymbol{x}),$$
$$J(۱,۲;\boldsymbol{x}) = \lim_{T\longrightarrow\infty} J_T(۱,۲;\boldsymbol{x}).$$

بنا بر این حد اطلاع ممیزی که به‌عنوان تقریب طیفی معیار ممیزی در نظر گرفته می‌شود به معیار اصلی اطلاع ممیزی همگرا است. محاسبه‌ی رابطه‌ی (۹) در بیش‌تر فرایندهای ایستای نرمال مشکل است، بنا بر این اگر بتوان تحت شرایطی، تقریبی از آن را با مقدار حدی یکسان به دست آورد، که از نظر محاسبه ساده و سریع‌تر باشد و علاوه بر آن عبارتی شامل ماتریس‌های بزرگ در آن وجود نداشته باشد آنگاه این

تقریب، تقریبی مناسب برای رابطه‌ی (۵) خواهد بود. برای این کار تبدیل فوریه‌ی δ_t را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$V(\lambda_k) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=0}^{T-1} \delta_t \exp(-i\lambda_k t), \qquad k = 0, 1, \ldots, T-1, \qquad \lambda_k = 2\pi k T^{-1}.$$

با به کار بردن این تبدیل فوریه‌ی متناهی داریم (شاموی و آنگر، ۱۹۷۴)

$$I_T(1,2;\boldsymbol{x}^\circ) = \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{T-1} \left\{ \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} - \ln \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} - 1 \right\} + \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{T-1} \frac{|V(\lambda_k)|^2}{f_2(\lambda_k)}. \tag{10}$$

آنگر (۱۹۷۳) با استفاده از نتایجی که در واهبا (۱۹۶۸) و لیگت (۱۹۷۱) اثبات شده است نشان داد که

$$|I(1,2;\boldsymbol{x}) - I_T(1,2;\boldsymbol{x}^\circ)| = O(T^{-1})$$

در صورتی که

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |t|^{1+\alpha} |\sigma_j(t)| \leqslant C_j^\alpha < \infty \qquad 0 < \alpha < 1,\ j = 1, 2$$

که در آن $C \geqslant 0$ یک عدد ثابت است. می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\boldsymbol{x}$ یک فرایند ایستای نرمال باشد و در شرط (iii) صدق کند آنگاه معیار اطلاع تقریبی رابطه‌ی (۱۰) تقریب مناسبی برای حد اطلاع ممیزی جامعه خواهد بود و می‌توان از آن در ممیزی بین دو جامعه استفاده کرد. با توجه به رابطه‌ی (۹) زمانی که میانگین دو جامعه برابر باشند، حد اطلاع ممیزی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{T \longrightarrow \infty} \frac{1}{T} I(1,2;\boldsymbol{x}) = I(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} - \ln \frac{f_1(\lambda)}{f_2(\lambda)} - 1 \right\} \frac{d\lambda}{2\pi}. \tag{11}$$

اکنون با استفاده از تبدیل انتگرال معین به مجموع ریمان، رابطه‌ی (۱۱) به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\begin{aligned} I(f_1, f_2) &= \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{T-1} \left\{ \frac{f_1(\lambda_k)}{f_2(\lambda_k)} - \ln \frac{f_1(\lambda_k)}{f_2(\lambda_k)} - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{T-1} \left[\mathrm{tr}\{f_1(\lambda_k) f_2^{-1}(\lambda_k)\} - \ln \frac{|f_1(\lambda_k)|}{|f_2(\lambda_k)|} - 1 \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

بنا بر این تقریب طیفی معیار واگرایی J نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$J(f_۱, f_۲) = \frac{۱}{۲T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \left[\mathrm{tr}\{f_۱(\lambda_k) f_۲^{-۱}(\lambda_k)\} + \mathrm{tr}\{f_۲(\lambda_k) f_۱^{-۱}(\lambda_k)\} - ۲\right].$$

همچنین اگر $f_T(\lambda)$ به‌عنوان براوردیاب نااریب ماتریس طیفی هر سری برداری نمونه‌ای باشد، که به‌صورت ناپارامتری به دست آمده است و $f_j(\lambda)$ به‌عنوان طیف جامعه‌ی jام در نظر گرفته شود، در آن صورت تقریب زیر برای معیار ممیزی کولبک مطابق با رابطه‌ی (۱۲) در ممیزی سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به یکی از دو جامعه به دست می‌آید.

$$I(f_T, f_j) = \frac{۱}{۲T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \left[\mathrm{tr}\{f_T(\lambda_k) f_j^{-۱}(\lambda_k)\} - \ln \frac{|f_T(\lambda_k)|}{|f_j(\lambda_k)|} - ۱\right] \qquad (۱۳)$$

و بر این اساس تخصیص $\boldsymbol{x}$ به جامعه‌ی اول و دوم با استفاده از $I(f_T, f_۲) - I(f_T, f_۱) \geqslant ۰$ خواهد بود. فرض کنید n_j تعداد نمونه از جامعه jام باشد، آنگاه f_j را می‌توان با $\overline{f}_j$ به‌صورت زیر براورد نمود:

$$\overline{f}_j(\lambda_k) = \frac{۱}{n_j} \sum_{l=۰}^{n_j} f_T^{(l)}(\lambda_k) \qquad (۱۴)$$

که در آن f_T^l به ازای $l = ۱, ۲, \ldots, n_j$ عبارت است از ماتریس طیف نمونه‌ی lام از جامعه‌ی jام. بر اساس معیار ممیزی کولبک - لیبلر $\boldsymbol{x}$ به جامعه‌ی اول تخصیص داده می‌شود، اگر:

$$I(f_T, \overline{f_۲}) - I(f_T, \overline{f_۱}) \geqslant ۰$$

و در غیر این صورت به جامعه‌ی دوم تخصیص داده می‌شود.

۳٫۲ آنالیز ممیزی طیفی بر اساس معیار اطلاع ممیزی چرنوف

برای دو بردار تصادفی نرمال با ماتریس‌های کوواریانس متفاوت و با توابع چگالی به‌ترتیب $p_۱(x)$ و $p_۲(x)$، پارزان (۱۹۹۰) استفاده از فاصله‌ی چرنوف (چرنوف، ۱۹۵۲) را برای ممیزی پیشنهاد کرده است.

$$Q_r(۱, ۲; \boldsymbol{x}) = -\frac{۱}{T} \ln E_۱ \left[\left\{\frac{p_۲(\boldsymbol{x})}{p_۱(\boldsymbol{x})}\right\}^r\right]. \qquad (۱۵)$$

معیار واگرایی J را می‌توان به‌دلیل نامتقارن بودن $Q_r(۱, ۲; \boldsymbol{x})$ برای Q_r به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$J_{Q_r}(۱, ۲; \boldsymbol{x}) = Q_r(۱, ۲; \boldsymbol{x}) + Q_r(۲, ۱; \boldsymbol{x}) \qquad (۱۶)$$

که در آن فاصله Q به‌وسیله‌ی $۰ < r < ۱$ اندیس می‌شود. در اینجا نیز معیارهای جداسازی روابط (۱۵) و (۱۶) مستلزم یافتن معکوس ماتریس‌های با ابعاد $T \times T$ است، به‌خصوص زمانی که ماتریس‌های $R_۱$ و $R_۲$ دارای ابعاد بزرگ باشند، پیدا کردن مقدار دقیق معکوس ماتریس بسیار مشکل و زمان‌گیر است. لذا لازم است از تقریب‌های طیفی بر اساس مقادیر حدی استفاده شود، که در نتیجه با کاهش ابعاد ماتریس‌های $R_۱$ و $R_۲$ و تبدیل آن‌ها به چگالی‌های طیفی $f_۱(\lambda)$ و $f_۲(\lambda)$، معیارهای جداسازی رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) ساده‌تر و سریع‌تر محاسبه می‌شوند. کاکیزاوا و همکاران (۱۹۹۸) نشان دادند که

$$\begin{aligned}\lim_{T\longrightarrow\infty}\frac{۱}{T}Q_r(۱,۲;\boldsymbol{x}) &= Q_r(f_۱,f_۲;\boldsymbol{x})\\ &= \frac{۱}{۲}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\ln\frac{|rf_۱(\lambda)+(۱-r)f_۲(\lambda)|}{|f_۲(\lambda)|}\right.\\ &\qquad\left.-r\ln\frac{|f_۱(\lambda)|}{|f_۲(\lambda)|}\right\}\frac{d\lambda}{۲\pi} \qquad (۱۷)\end{aligned}$$

و با استفاده از تبدیل انتگرال به مجموع ریمان می‌توان رابطه‌ی (۱۴) را به‌صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}Q_r(f_۱,f_۲;\boldsymbol{x}) &= \frac{۱}{۲T}\sum_{k=۰}^{T-۱}\left\{\ln\frac{|rf_۱(\lambda_k)+(۱-r)f_۲(\lambda_k)|}{|f_۲(\lambda_k)|}\right.\\ &\qquad\left.-r\ln\frac{|f_۱(\lambda_k)|}{|f_۲(\lambda_k)|}\right\}. \qquad (۱۸)\end{aligned}$$

تقریب طیفی $J_{Q_r}(۱,۲;x)$ نیز به‌صورت زیر دست می‌آید:

$$\begin{aligned}J_{Q_r}(f_۱,f_۲;\boldsymbol{x}) &= \frac{۱}{۲T}\sum_{k=۰}^{T-۱}\left\{\ln\frac{|rf_۱(\lambda_k)+(۱-r)f_۲(\lambda_k)|}{|f_۲(\lambda_k)|}\right.\\ &\qquad\left.+\ln\frac{|rf_۲(\lambda_k)+(۱-r)f_۱(\lambda_k)|}{|f_۱(\lambda_k)|}\right\}.\end{aligned}$$

اگر $f_T(\lambda)$ به‌عنوان برآوردیاب ماتریس طیفی سری برداری نمونه‌ای در نظر گرفته شود، در این صورت برای معیار اطلاع ممیزی چرنوف تقریب زیر مطابق با رابطه‌ی (۱۸) در ممیزی سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به یکی از دو جامعه‌ی نرمال به‌صورت زیر به کار می‌رود. در اینجا تخصیص بردار مشاهده‌شده‌ی $\boldsymbol{x}$ بر اساس فاصله‌ی

$Q_r(f_T, f_۲) - Q_r(f_T, f_۱) \geqslant ۰$ خواهد بود که در آن

$$Q_r(f_۱, f_۲; \boldsymbol{x}) = \frac{۱}{۲T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \left\{ \ln \frac{|r f_T(\lambda_k) + (۱ - r) f_j(\lambda_k)|}{|f_j(\lambda_k)|} - r \ln \frac{|f_T(\lambda_k)|}{|f_j(\lambda_k)|} \right\}. \quad (۱۹)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۴) و جایگذاری آن در رابطه‌ی (۱۹) می‌توان از معیار ممیزی چرنوف، به‌صورت زیر در ممیزی بین دو جامعه استفاده نمود. سری زمانی $\boldsymbol{x}$ به جامعه‌ی اول تخصیص داده می‌شود، هرگاه $Q_r(f_T, \overline{f_۲}) - Q_r(f_T, \overline{f_۱}) \geqslant ۰$ و در غیر این صورت به جامعه‌ی دوم تخصیص داده می‌شود.

۴ تقریب‌های طیفی معیارهای اطلاع ممیزی در مدل‌های سری‌های زمانی

۴.۱ مدل اتورگرسیو مرتبه‌ی اول AR(۱)

در حالتی که دو مدل $AR(۱)$ وجود دارد، می‌توان فرضیه‌های $H_j, j = ۱, ۲$ را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$H_j : x_t = \phi_j x_{t-۱} + \epsilon_t, \qquad \epsilon_t \sim N(۰, \sigma_\epsilon^۲), \qquad j = ۱, ۲$$

برای یک فرایند $AR(۱)$ طیف سری زمانی برابر با رابطه‌ی زیر می‌باشد:

$$f_j(\lambda) = \frac{\sigma^۲}{\pi\{۱ + \phi_j^۲ - ۲\phi_j \cos(\lambda)\}}$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی (۱۲) تقریب طیفی معیار اطلاع کولبک برای یک مدل $AR(۱)$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$I(f_۱, f_۲) = \frac{۱}{۲T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \left\{ \frac{۱ + \phi_۲^۲ - ۲\phi_۲ \cos(\lambda_k)}{۱ + \phi_۱^۲ - ۲\phi_۱ \cos(\lambda_k)} - \ln \frac{۱ + \phi_۲^۲ - ۲\phi_۲ \cos(\lambda_k)}{۱ + \phi_۱^۲ - ۲\phi_۱ \cos(\lambda_k)} - ۱ \right\}.$$

برای معیار واگرایی J نیز داریم

$$J(f_۱, f_۲) = \frac{۱}{۲T} \sum_{k=۰}^{T-۱} \left[\frac{\{\phi_۲^۲ - \phi_۱^۲ - ۲(\phi_۲ - \phi_۱)\cos(\lambda_k)\}^۲}{\{۱ + \phi_۱^۲ - ۲\phi_۱ \cos(\lambda_k)\}\{۱ + \phi_۲^۲ - ۲\phi_۲ \cos(\lambda_k)\}} - ۲ \right].$$

همچنین با محاسباتی اندک تقریب معیار چرنوف برای این مدل عبارت خواهد بود از:

$$Q_r(f_1,f_2)=\frac{r}{2T}\sum_{k=0}^{T-1}\left\{\frac{\phi_1^2-\phi_2^2-2(\phi_2-\phi_1)\cos(\lambda_k)}{1+\phi_1^2-2\phi_1\cos(\lambda_k)}\right.$$
$$\left.-\ln\frac{1+\phi_2^2-2\phi_2\cos(\lambda_k)}{1+\phi_1^2-2\phi_1\cos(\lambda_k)}+1\right\}$$

که در این رابطه $0 < r < 1$ می‌باشد، و

$$J_{Q_r}(f_1,f_2)=\frac{r}{2T}\sum_{k=0}^{T-1}\left\{\frac{(\phi_2^2-\phi_1^2)-2(\phi_2-\phi_1)\cos(\lambda_k)}{1+\phi_1^2-2\phi_1\cos(\lambda_k)}\right.$$
$$\left.+\frac{(\phi_1^2-\phi_2^2)-2(\phi_1-\phi_2)\cos(\lambda_k)}{1+\phi_2^2-2\phi_2\cos(\lambda_k)}+2\right\}$$

به‌طوری که $\lambda_k=2\pi kT^{-1}$.

۴٫۲ مدل میانگین متحرک مرتبه‌ی اول MA(۱)

فرضیه‌های $H_j, j=1,2$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید

$$H_j: x_t=\epsilon_t+\theta_j\epsilon_{t-1}$$

$$\epsilon_t\sim N(0,\sigma_\epsilon^2),\qquad j=1,2$$

برای یک فرایند $MA(1)$ از جامعه‌ی jام، طیف سری زمانی عبارت است از

$$f_j(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left\{1+\theta_j^2-2\theta_j\cos(\lambda)\right\}$$

و با جایگذاری در رابطه‌ی (۱۲) تقریب طیفی معیار اطلاع کولبک به‌صورت زیر خواهد بود:

$$I(f_1,f_2)=\frac{1}{2T}\sum_{k=0}^{T-1}\left\{\frac{1+\theta_1^2-2\theta_1\cos(\lambda_k)}{1+\theta_2^2-2\theta_2\cos(\lambda_k)}-\ln\frac{1+\theta_1^2-2\theta_1\cos(\lambda_k)}{1+\theta_2^2-2\theta_2\cos(\lambda_k)}-1\right\}.$$

با مقداری محاسبات تقریب طیفی معیار واگرایی J برای این مدل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$J(f_1,f_2)=\frac{\theta_1+\theta_2}{2T}\sum_{k=0}^{T-1}\left[\frac{\{\theta_1+\theta_2-2\cos(\lambda_k)\}^2}{\{1+\theta_1^2-2\theta_1\cos(\lambda_k)\}\{1+\theta_2^2-2\theta_2\cos(\lambda_k)\}}\right].$$

تقریب طیفی معیار چرنوف برای یک مدل $MA(1)$ را نیز می‌توان به‌صورت زیر به دست آورد:

$$Q_r(f_1, f_2) = \frac{r}{2T}\sum_{k=0}^{T-1}\left\{\frac{\theta_1^2-\theta_2^2-2(\theta_1-\theta_2)\cos(\lambda_k)}{1+\theta_2^2-2\theta_2\cos(\lambda_k)} - \ln\frac{1+\theta_2^2-2\theta_2\cos(\lambda_k)}{1+\theta_1^2-2\theta_1\cos(\lambda_k)}+1\right\}.$$

همچنین

$$J_{Q_r}(f_1, f_2) = \frac{r}{2T}\sum_{k=0}^{T-1}\left\{\frac{\theta_2^2-\theta_1^2-2(\theta_2-\theta_1)\cos(\lambda_k)}{1+\theta_1^2-2\theta_1\cos(\lambda_k)} + \frac{\theta_1^2-\theta_2^2-2(\theta_1-\theta_2)\cos(\lambda_k)}{1+\theta_2^2-2\theta_2\cos(\lambda_k)}+2\right\}.$$

در این رابطه‌ها $0 < r < 1$ و θ_1 و θ_2 ضرایب مدل میانگین متحرک مرتبه‌ی اول تحت دو فرضیه‌ی H_1 و H_2 می‌باشند.

۵ بررسی توابع ممیزی با استفاده از شبیه‌سازی فرایندهای ایستا

کارایی روش‌های ممیزی را می‌توان با روش‌های عددی بررسی با معیار نرخ‌های خطا یا رده‌بندی نادرست تشخیص داد. برای ممیزی بین فرایندهای ایستای نرمال از یک برنامه‌ی شبیه‌سازی استفاده شده است. برای این کار ۱۰۰ نمونه‌ی تصادفی هر کدام به‌طول ۲۰۰ مشاهده از مدل‌های سری‌های زمانی ایستای، $AR(1)$ و $MA(1)$ از جامعه‌ی H_1 تولید شده است. سپس با استفاده از معیار ممیزی شاموی در رابطه‌ی (I)، معیار ممیزی کولبک - لیبلر (II) و معیار ممیزی چرنوف (III) مشاهدات به یکی از دو جامعه‌ی H_1 و H_2 تخصیص داده شد. لازم به ذکر است که معیار ممیزی چرنوف وابسته به مقادیر r است. در مقاله‌ی حاضر مقادیر مختلف r در نظر گرفته شد و با توجه به بهترین مقدار به دست آمده‌ی آن $r = 0/3$ در نظر گرفته شد. توجه به این نکته لازم است که کاکیزاوا و دیگران (۱۹۹۸) در استفاده از معیار چرنوف برای داده‌های واقعی به همین نتیجه رسیده‌اند. در مرحله‌ی بعد تعداد مشاهداتی که به‌طور صحیح رده‌بندی نشده‌اند، محاسبه گردید. تعداد مشاهدات درست رده‌بندی نشده در جداول ۱ تا ۶ آمده است.

۵٫۱ مقایسه سه روش ممیزی

نتایج به دست آمده در جدول‌های ۱ تا ۶ نشان می‌دهند که در حالت‌هایی که داده‌های شبیه‌سازی از سری‌های زمانی ایستای $AR(۱)$، $MA(۱)$ به دست آمده‌اند، توابع ممیزی در تخصیص داده‌های سری‌های زمانی به جامعه‌ی واقعی خوب عمل نموده است. به‌طوری که برای حالت‌هایی که دو جامعه‌ی $H_۱$ و $H_۲$ نزدیک هستند، درصد خطا قابل توجه است. اما با دور شدن دو جامعه از یکدیگر این خطا کاهش می‌یابد. همچنین با مقایسه‌ی سه روش آنالیز ممیزی به دست آورده‌شده، در هر یک از حالت‌هایی که جوامع سری‌های زمانی ایستای $AR(۱)$، $MA(۱)$ در نظر گرفته شده‌اند، ملاحظه می‌شود که کارایی تابع ممیزی کولبک – لیبلر در مقایسه با کارایی تابع ممیزی چرنوف و نیز تابع ممیزی شاموی بهتر است. همچنین کارایی تابع ممیزی چرنوف نیز در مقایسه با تابع ممیزی شاموی به‌دلیل کم‌تر بودن مقادیر خطا، بیش‌تر می‌باشد.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله از داوران محترم که نقطه نظرات سودمندی در بهبود مقاله ارایه داده‌اند تشکر می‌نمایند.

جدول ۱. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند $AR(۱)$ برای پارامترهای مختلف $\phi_۱$ و $\phi_۲$ با استفاده از تابع ممیزی شاموی

$\phi_۲$	$\phi_۱$													
	−۰٫۷	−۰٫۶	−۰٫۵	−۰٫۴	−۰٫۳	−۰٫۲	−۰٫۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷
−۰٫۷	*	۱۸	۷	۳	۴	۳	۲	۳	۰	۲	۲	۱	۳	۰
−۰٫۶	۱۵	*	۱۵	۶	۳	۶	۴	۳	۱	۰	۱	۲	۰	۴
−۰٫۵	۱۰	۱۶	*	۲	۵	۵	۶	۱	۴	۰	۱	۳	۲	۳
−۰٫۴	۸	۸	۵	*	۷	۲	۲	۲	۳	۲	۱	۲	۱	۲
−۰٫۳	۶	۵	۷	۱۱	*	۶	۶	۳	۴	۰	۳	۰	۱	۱
−۰٫۲	۵	۶	۶	۶	۶	*	۴	۲	۲	۱	۰	۴	۱	۲
−۰٫۱	۵	۲	۶	۴	۴	۸	*	۵	۴	۲	۴	۲	۰	۱
۰٫۱	۲	۶	۳	۳	۲	۷	۱۰	*	۴	۳	۴	۰	۲	۲
۰٫۲	۴	۵	۶	۲	۱	۶	۲	۷	*	۲	۱	۴	۰	۱
۰٫۳	۲	۸	۵	۵	۱	۳	۴	۴	۴	*	۲	۱	۳	۱
۰٫۴	۶	۵	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۶	۵	*	۳	۴	۲
۰٫۵	۶	۴	۵	۸	۵	۶	۲	۴	۳	۲	۶	*	۳	۱
۰٫۶	۸	۷	۹	۱۰	۱۰	۷	۵	۷	۶	۶	۵	۵	*	۲
۰٫۷	۸	۷	۴	۱۱	۸	۷	۱۱	۴	۲	۵	۱	۳	۳	*

جدول ۲. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند $MA(1)$ برای پارامترهای مختلف θ_1 و θ_2 با استفاده از تابع ممیزی شاموی

θ_2	θ_1													
	−۰/۷	−۰/۶	−۰/۵	−۰/۴	−۰/۳	−۰/۲	−۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
−۰/۷	*	۳	۴	۱	۲	۰	۰	۶	۴	۳	۵	۵	۹	۶
−۰/۶	۶	*	۶	۴	۲	۲	۱	۳	۲	۳	۵	۶	۹	۸
−۰/۵	۲	۴	*	۸	۳	۳	۲	۴	۵	۴	۵	۵	۶	۱۳
−۰/۴	۴	۵	۹	*	۵	۸	۳	۳	۵	۴	۵	۸	۷	۷
−۰/۳	۲	۰	۲	۶	*	۴	۴	۵	۵	۴	۱۰	۱۰	۱۳	۹
−۰/۲	۲	۰	۴	۲	۷	*	۴	۶	۵	۳	۱۰	۱۰	۱۴	۹
−۰/۱	۳	۳	۲	۲	۶	۴	*	۳	۶	۳	۵	۷	۱۳	۱۱
۰/۱	۳	۵	۱	۲	۲	۵	۱	*	۱۰	۴	۶	۱۰	۷	۱۰
۰/۲	۱	۱	۳	۴	۵	۱	۷	۶	*	۵	۵	۹	۱۰	۱۰
۰/۳	۱	۱	۰	۱	۴	۱	۶	۳	۵	*	۱۲	۱۰	۱۳	۱۳
۰/۴	۰	۲	۲	۳	۲	۲	۲	۴	۸	۱۱	*	۱۱	۱۲	۱۴
۰/۵	۱	۷	۰	۲	۳	۵	۲	۰	۳	۹	۷	*	۱۶	۲۰
۰/۶	۱	۵	۲	۴	۱	۳	۶	۵	۶	۳	۱۶	۷	*	۱۶
۰/۷	۳	۱	۲	۲	۷	۴	۵	۷	۳	۶	۷	۱۵	۱۵	*

جدول ۳. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند $AR(1)$ برای پارامترهای مختلف ϕ_1 و ϕ_2 با استفاده از تابع ممیزی کولبک-لیبلر

ϕ_2	ϕ_1													
	−۰/۷	−۰/۶	−۰/۵	−۰/۴	−۰/۳	−۰/۲	−۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
−۰/۷	*	۱۹	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۶	۲۴	*	۱۴	۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۵	۳	۲۶	*	۲۱	۷	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۴	۱	۶	۲۴	*	۲۲	۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۳	۰	۱	۵	۱۸	*	۲۳	۸	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۲	۰	۰	۱	۷	۱۸	*	۳۰	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۱	۰	۰	۰	۴	۷	۲۱	*	۷	۳	۰	۰	۰	۰	۰
۰/۱	۰	۰	۰	۱	۰	۳	۹	*	۲۸	۹	۲	۰	۰	۰
۰/۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۵	۲۷	*	۲۷	۹	۲	۰	۰
۰/۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱۱	۱۸	*	۳۲	۸	۰	۰
۰/۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۳	۲۳	*	۲۷	۷	۰
۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۷	۱۳	*	۲۳	۵
۰/۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۳	۲۳	*	۲۴
۰/۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۲۰	*

جدول ۴. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند $MA(۱)$ برای پارامترهای مختلف $\theta_۱$ و $\theta_۲$ با استفاده از تابع ممیزی کولبک-لیبلر

$\theta_۲$	$\theta_۱$													
	−۰٫۷	−۰٫۶	−۰٫۵	−۰٫۴	−۰٫۳	−۰٫۲	−۰٫۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷
−۰٫۷	*	۱۴	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۶	۱۹	*	۲۰	۵	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۵	۴	۲۶	*	۲۲	۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۴	۱	۴	۲۸	*	۲۴	۷	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۳	۰	۲	۱۰	۲۳	*	۲۹	۸	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۲	۰	۰	۲	۱۰	۳۰	*	۲۴	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۱	۰	۰	۰	۳	۱۱	۲۳	*	۵	۳	۰	۰	۰	۰	۰
۰٫۱	۰	۰	۰	۰	۰	۴	۱۰	*	۲۲	۶	۰	۰	۰	۰
۰٫۲	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۲	۲۳	*	۲۴	۸	۱	۰	۰
۰٫۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۸	۲۳	*	۳۰	۷	۲	۰
۰٫۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۹	۲۷	*	۲۱	۸	۱
۰٫۵	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۷	۱۸	*	۲۷	۵
۰٫۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲۰	۶	۱۸	*	۲۶
۰٫۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۳	۱۱	*

جدول ۵. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند $AR(۱)$ برای پارامترهای مختلف $\phi_۱$ و $\phi_۲$ با استفاده از تابع ممیزی چرنوف

$\phi_۲$	$\phi_۱$													
	−۰٫۷	−۰٫۶	−۰٫۵	−۰٫۴	−۰٫۳	−۰٫۲	−۰٫۱	۰٫۱	۰٫۲	۰٫۳	۰٫۴	۰٫۵	۰٫۶	۰٫۷
−۰٫۷	*	۳۴	۱۵	۱۳	۸	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۶	۳۷	*	۴۱	۲۲	۱۹	۸	۳	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۵	۳۰	۳۲	*	۳۵	۲۵	۱۸	۱۴	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰
−۰٫۴	۱۶	۲۵	۳۶	*	۳۶	۳۶	۱۶	۴	۶	۳	۲	۰	۰	۰
−۰٫۳	۹	۱۷	۳۶	۳۵	*	۳۳	۲۸	۸	۱۰	۵	۳	۳	۰	۰
−۰٫۲	۵	۱۶	۲۷	۲۸	۳۹	*	۴۱	۲۳	۱۶	۷	۴	۲	۰	۰
−۰٫۱	۹	۷	۲۰	۲۳	۲۹	۴۵	*	۲۷	۱۶	۱۵	۱۲	۱۰	۲	۱
۰٫۱	۴	۲	۴	۱۳	۹	۲۳	۳۲	*	۳۸	۳۰	۱۸	۱۰	۱۲	۷
۰٫۲	۱	۰	۳	۷	۱۶	۱۸	۱۳	۴۴	*	۴۱	۲۸	۲۰	۱۵	۴
۰٫۳	۰	۳	۳	۳	۳	۵	۹	۲۵	۳۹	*	۳۹	۲۵	۲۷	۲۰
۰٫۴	۰	۱	۰	۰	۱	۵	۳	۱۵	۱۸	۳۷	*	۴۴	۳۳	۱۹
۰٫۵	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۴	۱۱	۱۲	۲۹	۴۱	*	۳۷	۲۰
۰٫۶	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۵	۶	۱۱	۲۹	۳۷	*	۴۱
۰٫۷	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۴	۵	۱۲	۳۰	*

جدول ۶. نرخ‌های رده‌بندی نادرست برای یک فرایند $MA(1)$ برای پارامترهای مختلف θ_1 و θ_2 با استفاده از تابع ممیزی چرنوف

θ_2	θ_1													
	−۰/۷	−۰/۶	−۰/۵	−۰/۴	−۰/۳	−۰/۲	−۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷
−۰/۷	*	۳۰	۲۵	۱۵	۱۳	۶	۳	۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰
−۰/۶	۴۴	*	۴۷	۱۶	۱۴	۱۵	۹	۰	۱	۲	۰	۰	۰	۰
−۰/۵	۲۵	۲۶	*	۳۲	۲۸	۱۶	۱۳	۶	۲	۲	۰	۰	۰	۰
−۰/۴	۱۴	۳۳	۳۳	*	۳۷	۲۵	۲۷	۹	۳	۳	۲	۰	۰	۰
−۰/۳	۸	۱۷	۱۹	۳۴	*	۴۷	۳۵	۱۰	۴	۵	۱	۰	۰	۰
−۰/۲	۶	۱۳	۱۷	۳۴	۳۹	*	۳۲	۱۸	۱۶	۶	۵	۱	۰	۰
−۰/۱	۳	۴	۱۱	۲۱	۲۱	۳۷	*	۳۰	۲۰	۱۷	۸	۴	۲	۰
۰/۱	۰	۲	۶	۵	۱۰	۱۷	۳۱	*	۴۵	۲۸	۲۶	۱۳	۶	۱
۰/۲	۰	۰	۴	۴	۹	۱۵	۲۱	۴۰	*	۴۶	۳۰	۱۵	۹	۴
۰/۳	۰	۰	۱	۲	۲	۵	۹	۲۰	۴۲	*	۴۳	۳۲	۱۷	۹
۰/۴	۰	۰	۰	۰	۱	۳	۱۲	۲۰	۳۰	۳۴	*	۴۸	۲۹	۲۰
۰/۵	۰	۰	۰	۰	۰	۶	۴	۹	۲۰	۲۶	۳۲	*	۴۱	۲۹
۰/۶	۰	۰	۰	۰	۰	۳	۵	۱۰	۱۴	۱۷	۲۳	۳۳	*	۴۲
۰/۷	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۳	۷	۱۲	۱۸	۲۰	۲۴	*

مرجع‌ها

Alagon, J. (1989). *Discrimination Analysis for Time Series.* Ph.D. Thesis, Oxford University, Oxford.

Anderson, T.W. and Bahadur, R.P. (1962). Classification into two Multivariate Normal Distributions whit Different Covariance Matrices. *Ann. Math. Statist.*, **33**. 20-431.

Anderson, T.W. (1984). *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* Wiley, New York.

Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Time Series.* Wiley, New York.

Chan, H.T. (1991). *Discriminant Analysis of Time Series.* Ph.D. thesis, Newcastle University, Newcastle.

Chan, H.T., Chinipardaz, R. and Cox, T.F. (1996). Discrimination of AR, MA and ARMA time series models, *Commun. Statist.- Theory Meth.*, **25**, 1247-1260.

Chernoff, H. (1952). A measure of asymptotic efficiency for tests of hypothesis based on sum of observations, *Ann. Math. Statist.*, **25**, 573-578.

Chinipardaz, R. (2000). Discrimination analysis in AR(1) plus noise processes, *Iran. J. Science & Tech. - Trans. A,* **24**, 165-172.

Chinipardaz, R. and Cox, T.F. (2004). Nonparametric discrimination of time series. *Metrika.*, **59**, 13-20.

Dargahi-Noubary, G.R. and Laycock, P.J. (1981). Spectral ratio discriminants and information theory, *Journal of Time Series Analysis.* **2**, 71-86.

Dargahi - Noubary, G.R. (1992). Discrimination between Gaussian time series based on their spectral differences. *Commun. Statist. - Theory and Meth.*, **21**, 2439-2458.

Fuller, W.A. (1996). *Introduction to Statistical Time Series.* Second Edition, Wiley, New York.

Kakizawa, Y., Shumway, R. and Taniguchi, M. (1998). Discrimination and clustering for multivariate time series. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **93**, 328-340.

Kullback, S. (1978). *Information Theory and Statistics.* Dover Publications, New York.

Ligget, W.S. (1971). On the asymptotic optimality of spectral analysis for testing hypotheses about time series, *Ann. Math. Statist.*, **42**, 1348-1358.

Parzen, E. (1990). *Time Series, Statistics and Information, IMA Preprint Series 663.* Insitute for Mathematics and Its Applications, University of Minnesota.

Shumway, R.H. and Unger, A.N. (1974). Linear discriminant function for stationary time series, *J. Amer. Stat. Assoc.*, **69**, 948-956.

Shumway, R.H. (1982). Discriminant analysis for time series. In: Krishnaiah, P.R., Kanals,L.N. (Eds.), *Hanbook of Stattistics, 1,* North-Holland, Amesterdam, ,1-46.

Shumway, R.H. (1988). *Applied Statistical Time Series Analysis.* Prentice Hall, London.

Shumway, R.H. (2003). Time-frequency clustering and discriminant analysis, *Statistics and Probability Letters.* **63**, 307-314.

Shumway, R.H. and Stoffer, D.S. (2006). *Time Series Analysis and Applications.* Second Edition, Springer, New York.

Unger, A.N. (1973). *Information Theoretic Properties of finite Fourier Transforms of Stationary Gaussian Time Series.* Ph.D. disseration, The George Washington University, Washington, D. C.

Wahba, G. (1968). On the distribution of some statistics useful in the analysis of jointly stationary time series, *Ann. Math. Statist.*, **38**, 1849-1862.

رحیم چینی‌پرداز
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
اهواز، ایران.
رایانشانی: *chinipardaz_r@scu.ac.ir*

بهزاد منصوری
گروه آمار، دانشکده‌ی علوم ریاضی و کامپیوتر،
دانشگاه شهید چمران اهواز،
اهواز، ایران.
رایانشانی: *bms598@yahoo.com*

سارا شفیعی
گروه علوم پایه،
دانشگاه آزاد اسلامی واحد یاسوج،
یاسوج، ایران.
رایانشانی: *shafieesara88@yahoo.com*