© Statistical Research and Training Center

مجله‌ی پژوهش‌های آماری ایران
پژوهشکده‌ی آمار
دوره‌ی ۶، شماره‌ی ۱، بهار و تابستان ۱۳۸۸، صص ۷۳–۹۱

J. Statist. Res. Iran **6** (2009): 73–91

ارایه‌ی روش‌هایی جدید برای پیش‌بینی سری‌های زمانی با استفاده از موجک‌ها

سمیه میره و مینا امین‌غفاری *

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)

چکیده. سری‌های زمانی مشاهداتی هستند که در طول زمان جمع‌آوری می‌شوند. فراوانی چنین مشاهداتی، تحلیل سری‌های زمانی را به یکی از کاربردی‌ترین شاخه‌های علم آمار تبدیل کرده است. هر چند توصیف رفتار یک سری زمانی از لحاظ تغییرات موضعی و درازمدت در آن، یا مطالعه‌ی وابستگی‌های موجود بین عناصر سری از بررسی‌های متداول است که روی سری‌های زمانی انجام می‌شود، اما می‌توان گفت که مهم‌ترین هدف از تحلیل یک سری زمانی، پیش‌بینی مقادیر آینده‌ی آن است. در علوم کاربردی، با سری‌های زمانی بسیار سر و کار داریم که پیش‌بینی آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. در سال‌های اخیر، کاربرد موجک در پیش‌بینی این‌گونه سری‌ها افزایش یافته است که علت آن مزایای قابل توجه موجک می‌باشد. هدف ما در این مقاله، ارایه‌ی روش‌هایی جدید برای پیش‌بینی سری‌های زمانی بر اساس موجک‌ها و مقایسه‌ی این روش‌ها با هم می‌باشد. چندین روش مبنی بر استفاده از موجک‌ها وجود دارد که در اینجا فقط روش‌های هموارسازی تابعی با استفاده از کرنل–موجک ($\mathrm{K-W}$) و برازش مدل خطی فرایند ایستای موضعی (LSW)، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت نیز دو روش که تعمیمی از روش $\mathrm{K-W}$ می‌باشند را ارایه می‌دهیم و عملکرد آن‌ها را با روش‌های $\mathrm{K-W}$ و LSW و برازش مدل‌های کلاسیک، بررسی می‌نماییم. این مقایسه بر روی داده‌های شبیه‌سازی‌شده و واقعی صورت می‌گیرد.

واژگان کلیدی. پیش‌بینی؛ سری‌های ناایستا؛ موجک؛ موجک درون‌یاب؛ هموارسازی تابعی با استفاده از کرنل–موجک.

*نویسنده‌ی عهده‌دار مکاتبات

Archive of SID
www.SID.ir

۱ مقدمه

روش‌های کلاسیک سال‌ها در پیش‌بینی سری‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفت ولی همان‌طور که می‌دانیم، این روش‌ها در پیش‌بینی سری‌های ناایستا خوب عمل نمی‌کنند. زیرا شرط ایستایی و خطی بودن از فرضیات مهمی است که روی داده‌ها گذاشته می‌شوند و این شرایط محدودیت‌هایی ایجاد می‌کنند.

موجک‌ها به خاطر موضعی بودنشان در زمینه‌های مختلف آمار از جمله پیش‌بینی سری‌های ناایستا، مورد استفاده قرار می‌گیرند. پریستلی (۱۹۶۵)، دال‌هاوس (۱۹۹۷) و امباو و همکاران (۲۰۰۲)، با تغییراتی روی سری ایستا، آن را به زمان وابسته کرده و به یک سری ناایستا تبدیل کرده‌اند. نیسون و همکاران (۲۰۰۰) در بیان سری‌های به‌صورت موضعی ایستا، به‌جای تبدیل فوریه از تبدیل موجک گسسته بدون زیرنمونه‌گیری (NDWT)[۱] استفاده کردند و سپس کلاس فرایندهای موضعی ایستا (LSW)[۲] را معرفی نمودند. فریزلویکس و همکاران (۲۰۰۳) یک الگوریتم برای پیش‌بینی سری‌های ناایستا پیشنهاد کردند که وَن‌بلگم و همکاران (۲۰۰۲) از آن برای مدل‌سازی سری‌های برگشت لگاریتمی در داده‌های مالی استفاده کردند.

علاوه بر روش‌های نام‌برده، پیش‌بینی در یک بازه به‌جای یک نقطه می‌تواند مورد توجه قرار گیرد؛ زیرا ممکن است یک سری پیوسته بوده و بخواهیم یک بازه را پیش‌بینی کنیم. برای این کار پس از تقسیم کردن سری مشاهده‌شده به بازه‌های مساوی، فرض می‌شود مدل روی بازه‌ها یک فرایند اتورگرسیو در فضای هیلبرت ((ARH(۱)) است. در آن صورت بهترین پیش‌بینی‌کننده، یک ترکیب خطی از آخرین بازه‌ی مشاهده‌شده خواهد بود که بُسک (۱۹۹۱) و آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۳)، روش‌های مختلفی برای براورد پارامترهای آن به کار برده‌اند. اما در بسیاری از موارد نمی‌توان مدل ARH(۱) را به بازه‌ها برازش داد. به‌همین دلیل، آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۶) از تکنیک ناپارامتری هموارسازی تابعی کرنل-موجک که در آن تبدیل موجک درون‌یاب[۳] به کار رفته، استفاده کردند. این روش در واقع نوعی میانگین وزنی است که به بازه‌های شبیه‌تر به بازه‌ی آخر، وزن بیش‌تری می‌دهد.

همان‌طور که بیان شد، در روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک، از تبدیل موجک درون‌یاب استفاده شده است. در این مقاله بر اساس این روش پیش‌بینی، دو روش را پیشنهاد داده‌ایم (تعمیمی از روش آنتونیادیس و همکاران، ۲۰۰۶)، که در آن از دو تبدیل موجک دیگر به نام‌های تبدیل موجک گسسته[۴] (DWT) و تبدیل موجک بدون زیرنمونه‌گیری (NDWT) استفاده می‌شود. زیرا تبدیل‌های DWT و NDWT خیلی ساده‌تر از تبدیل موجک درون‌یاب می‌باشند و در بیش‌تر نرم‌افزارها برنامه‌نویسی شده‌اند. همچنین الگوریتم محاسبه‌ی تبدیل موجک درون‌یاب به موجک انتخابی بستگی دارد در حالی که الگوریتم

www.SID.ir

محاسبه‌ی DWT و NDWT را می‌توان با تمام موجک‌های ممکن به کار برد. واضح است که این دو تبدیل با هم متفاوت‌اند. با مثال‌هایی نشان داده می‌شود که دو روش پیشنهادی، بهتر از روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک آنتونیادیس و همکارانش عمل می‌کنند. این روش‌ها در پیش‌بینی مدل‌های ایستا نتیجه‌ای نزدیک به روش‌های کلاسیک دارد ولی در مدل‌های ناایستا برتری دارند.

این مقاله دارای بخش‌های زیر می‌باشد.

در بخش ۲، مروری بر چند روش پیش‌بینی داریم. این روش‌ها عبارت‌اند از: پیش‌بینی خطی فرایندهای ایستای موضعی، روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک ارایه‌شده توسط آنتونیادیس و همکاران. در بخش ۳، پس از ارایه‌ی روش‌های پیشنهادی و بررسی خطای پیش‌بینی آن‌ها، با پیش‌بینی داده‌های واقعی و شبیه‌سازی‌شده برتری روش‌های ارایه‌شده را نشان می‌دهیم. در بخش آخر نیز نتیجه‌گیری بیان می‌شود.

۲ مختصری از چند روش پیش‌بینی

در این بخش به‌طور مختصر، چند روش پیش‌بینی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲٫۱ پیش‌بینی خطی فرایندهای LSW

هر فرایند ایستای ضعیف[۵]، دارای نمایشی به شکل زیر است:

$$X_t = \int_{(-\pi,\pi)} A(\omega)\exp(i\omega t)dZ(\omega), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

که در آن $Z(\omega)$ یک فرایند تصادفی با نموهای متعامد است. در این فرایند اگر به‌جای عبارت $A(\omega)$، یک کمیّت وابسته به زمان و به‌جای $\exp(i\omega t)$، موجک‌های گسسته بدون زیرنمونه‌گیری (ND)[۶] قرار دهیم، به یک فرایند ناایستا تبدیل می‌شود. موجک‌های ND، برخلاف موجک‌های متعامد نسبت به جا به جایی پایا هستند؛ یعنی اگر سری زمانی به اندازه‌ی ثابت m شیفت یابد، تبدیل موجک آن نیز به‌همان اندازه شیفت پیدا می‌کند. استفاده از موجک‌ها در پیش‌بینی سری‌های زمانی مفید می‌باشد زیرا این تبدیل به‌صورت خودکار می‌تواند مؤلفه‌های ناایستا را از سری حذف کند و برخلاف تبدیل فوریه که سراسری[۷] است، تبدیل موجک تبدیل موضعی می‌باشد و برای سری‌های به‌صورت موضعی ایستا مناسب است. همچنین بسیاری از سری‌های زمانی در کاربرد ساختاری چندسطحی[۸] دارند و استفاده از موجک در فرایند LSW یک نمایش چندسطحی برای کوواریانس پیشنهاد می‌کند و کوواریانس به‌علت دارا بودن خاصیت تنک بودن[۹] به‌سادگی براورد می‌شود.

www.SID.ir

ساده‌ترین موجک گسسته‌ی ND، موجک هار است که از این به بعد از آن استفاده می‌کنیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_{j\circ}(t) = ۲^{\frac{j}{۲}}\mathbb{I}_{\{\circ,۱,\ldots,۲^{-j-۱}-۱\}}(t) - ۲^{\frac{j}{۲}}\mathbb{I}_{\{۲^{-j-۱},\ldots,۲^{-j}-۱\}}(t), \quad \forall j = -۱,-۲,\ldots, t \in \mathbb{Z},$$

تعریف ۱ یک دنباله از فرایندهای تصادفی $X_{t,T}$ با میانگین صفر، در کلاسی از فرایندهای LSW قرار دارند اگر بتوان آن‌ها را به‌شکل زیر نمایش داد:

$$X_{t,T} = \sum_{j=-J}^{-۱}\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_{j,k:T}\psi_{jk}(t)\xi_{jk}, \quad t = \circ,\ldots,T-۱, \tag{۱}$$

که $\{\psi_{jk}(t)\}_{jk}$ یک خانواده از موجک‌های ND به ازای

$$J = -\min\{j : \ell_j \leqslant T\}, \qquad j = -۱,\ldots,-J$$

هستند که در آن ℓ_j طول تکیه‌گاه $\psi_{j\circ}(t)$ می‌باشد. همچنین ξ_{jk}ها، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با میانگین صفر و کوواریانس

$$\operatorname{cov}(\xi_{jk},\xi_{lm}) = \delta_{jl}\delta_{km}, \qquad \delta_{jl} = \begin{cases} ۱ & j = l \\ \circ & \text{o.w} \end{cases}$$

می‌باشند.

فرایندهای LSW به‌وسیله‌ی دنباله‌ی $\{w_{jk;T}\}$ به‌طور یکتا مشخص نمی‌شوند؛ زیرا موجک‌های ND خاصیت یکامتعامد بودن را ندارند. در نتیجه از توابع پیوسته‌ی لیپ‌شیتز[۱۰] $W_j(z)$ استفاده کرده و یک تقریب یکتا برای آن‌ها به‌صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\sup_{k=\circ,\ldots,T-۱}\left|w_{j,k;T} - W_j\left(\frac{k}{T}\right)\right| \leqslant \frac{C_j}{T};$$

که C_jها مقادیر ثابتی هستند. در این تقریب، شرط هموار روی $W_j(z)$ اعمال شده که این شرط هموار مانع از ناهمواری بیش از اندازه‌ی آن می‌شود و همچنین سرعت تکامل $w_{j,k;T}$ را هم کنترل می‌کند (نیسون، ۲۰۰۸).

طیف موجکی نیز از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_j(z) = |W_j(z)|^۲ = \lim_{T\to\infty}|w_{j,[zT];T}|^۲, \qquad \forall z \in (\circ,۱).$$

Archive of SID

www.SID.ir

۲٫۱٫۱ تابع اتوکوواریانس موضعی فرایندهای LSW

در سری‌های ایستا، توابع طیفی و اتوکوواریانس، تبدیل فوریه‌ی همدیگر هستند. برای بیان رابطه‌ی این دو در سری‌های ناایستا، ابتدا تابع اتوکوواریانس یک فرایند LSW را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$c_T(z,\tau) = \mathrm{cov}(X_{[zT],T}, X_{[zT]+\tau,T}), \qquad z \in (0,1), \ \ \tau \in \mathbb{Z}$$

که در آن $[\cdot]$ نشان‌دهنده‌ی جز صحیح یک عدد حقیقی است. تابع اتوکوواریانس موضعی این فرایند نیز به‌صورت

$$c(z,\tau) = \sum_{j=-\infty}^{-1} S_j(z)\Psi_j(\tau), \qquad \forall \tau \in \mathbb{Z}, \ \ z \in (0,1), \tag{۲}$$

می‌باشد که در آن، $\{\Psi_j\}_{j<0}$ها موجک‌های خودهمبستگی هستند و به‌شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\Psi_j(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_{jk}(0)\psi_{jk}(\tau), \qquad j < 0, \ \tau \in \mathbb{Z}.$$

نیسون و همکاران (۲۰۰۰) نشان داده‌اند که تحت فرض‌های تعریف ۱، اگر $T \to \infty$ آن‌گاه

$$|c_T(z,\tau) - c(z,\tau)| = O(T^{-1}).$$

فریزلویکس (۲۰۰۲) نیز نشان داد که تعداد کمی از طیف‌های $S_j(z)$ غیر صفر هستند بنا بر این با استفاده از رابطه‌ی (۲)، $c(z,\tau)$ نیز دارای خاصیت تنک بودن می‌باشد.

پریودگرام موجکی نیز به‌عنوان دنباله‌ای از ضرایب موجک مربع ($d^2_{jk;T}$) به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$I_j\left(\frac{k}{T}\right) = d^2_{jk;T} = \left(\sum_{s=0}^{t-1} X_{s,T}\psi_{jk}(s)\right)^2, \qquad -J(t) \leqslant j \leqslant -1.$$

۲٫۱٫۲ رابطه‌ی بین فرایندهای ایستا و فرایندهای LSW

فرایندهای LSW و ایستا به‌صورت زیر با هم ارتباط دارند:

- هر فرایند ایستا که تابع اتوکوواریانس آن به‌طور مطلق جمع‌پذیر باشد، یک فرایند LSW است.
- هر فرایند LSW که طیف موجکی آن مستقل از زمان بوده و شرط $\sum_j 2^j S_j < \infty$ را داشته باشد، یک فرایند ایستا با تابع اتوکوواریانس مطلقاً جمع‌پذیر است.

Archive of SID

www.SID.ir

۲٫۱٫۳ پیش‌بینی کننده‌ی خطی فرایندهای LSW

اگر مشاهدات $X_{\circ,T}$ و ... و $X_{t-۱,T}$ از یک فرایند LSW باشند، آن‌گاه پیش‌بینی h مرحله‌ی بعد آن‌ها، یعنی $\hat{X}_{t-۱+h,T}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{X}_{t-۱+h,T} = \sum_{s=\circ}^{t-۱} b^{(h)}_{t-۱-s;T} X_{s,T}, \qquad (۳)$$

که ضرایب $b^{(h)}_{t-۱-s;T}$ طوری تعیین می‌شوند که میانگین مربعات خطای پیش‌بینی[۱۱] (MSPE) سری مربوط می‌نیمم شود. در این‌جا فرض می‌شود که T به‌صورت $t+h$ و $h = o(T)$ باشند.

۲٫۱٫۴ معادلات پیش‌بینی یک‌مرحله‌ای

طبق قسمت قبل، هدف مینیمم کردن

$$\mathrm{MSPE}(\hat{X}_{t;T}, X_{t;T}) = b_t' \Sigma_{t;T} b_t,$$

می‌باشد که در آن b_t بردار $(b^{(۱)}_{t-۱;T}, \ldots, b^{(۱)}_{\circ;T}, -۱)$ و $\Sigma_{t;T}$ ماتریس کوواریانس نامعلوم $X_{\circ;T}$ و ... و $X_{t;T}$ است. MSPE به‌صورت $b_t' B_{t;T} b_t$ تقریب زده می‌شود که در آن $B_{t;T}$ یک ماتریس $(t+۱) \times (t+۱)$ با عنصر (m,n) به شکل

$$\sum_{j=-J}^{-۱} S_j \left(\frac{n+m}{۲T}\right) \Psi_j(n-m),$$

می‌باشد (فریزلویکس، ۲۰۰۳). اگر $\{b^{(۱)}_{s;T}\}$ ضرایبی باشند که MSPE را می‌نیمم می‌کنند، آن‌گاه داریم:

$$\sum_{m=\circ}^{t-۱} b^{(۱)}_{t-۱-m;T} \left\{ \sum_{j=-J}^{-۱} S_j \left(\frac{n+m}{۲T}\right) \Psi_j(m-n) \right\} = \sum_{j=-J}^{-۱} S_j \left(\frac{t+n}{۲T}\right) \Psi_j(t-n),$$
$$\forall n = \circ, \ldots, t-۱.$$

به این معادلات، معادلات پیش‌بینی می‌گویند و با استفاده از فرمول (۲)، به‌صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\sum_{m=\circ}^{t-۱} b^{(۱)}_{t-۱-m;T} c\left(\frac{n+m}{۲T}, m-n\right) = c\left(\frac{n+t}{۲T}, t-n\right). \qquad (۴)$$

Archive of SID

www.SID.ir

همان‌طور که می‌دانیم خواص مرتبه‌ی دوم سری‌های ایستا به زمان وابسته نیست؛ در نتیجه در سری‌های ایستا $c(\tau)$ به $c(z,\tau)$ تبدیل می‌گردد زیرا مؤلفه‌ی اول بیانگر زمان می‌باشد. با اعمال این تغییر در فرمول (۴)، به فرمول زیر می‌رسیم:

$$\sum_{m=0}^{t-1} b^{(1)}_{t-1-m;T} c(m-n) = c(t-n), \qquad \forall n = 0, \ldots, t-1,$$

این معادلات، همان معادلات یول-واکر در سری‌های ایستا می‌باشند که در آن منظور از $c(m-n)$، عبارت $\gamma(m-n)$ می‌باشد.

۲٫۱٫۵ پیش‌بینی h-مرحله‌ای

با تعمیم معادلات پیش‌بینی یک‌مرحله‌ای در فرایندهای LSW، به معادلات پیش‌بینی h-مرحله‌ای می‌رسیم. در این حالت MSPE به‌صورت

$$\begin{aligned}\mathrm{MSPE}(\hat{X}_{t-1+h;T}, X_{t-1+h}) &= b'_{t-1+h} \Sigma_{t-1+h;T} b_{t-1+h}, \\ &\approx b'_{t-1+h} B_{t-1+h;T} b_{t-1+h}\end{aligned}$$

نوشته می‌شود.

۲٫۱٫۶ انتخاب پارامترها بر اساس داده‌ها

برای پیش‌بینی در سری‌های ناایستا به براورد تابع اتوکوواریانس نیاز داریم در نتیجه در این حالت دو نوع خطا وجود دارد، که یکی مربوط به براورد و دیگری مربوط به پیش‌بینی است. اگر تعداد مشاهدات سری‌زمانی (T) زیاد باشد، خطای پیش‌بینی کم ولی خطای براورد زیاد می‌شود. عکس آن زمانی رخ می‌دهد که تعداد مشاهدات کم باشد. با توجه به مباحث بالا بهتر است در عبارت

$$\hat{X}^{(p)}_{t,T} = \sum_{s=t-p}^{t-1} b^{(1)}_{t-1-s;T} X_{s,T}, \qquad (۵)$$

عدد p را طوری انتخاب کنیم که بین دو خطا تعادل برقرار شود (فریزلویکس و همکاران، ۲۰۰۳). فرمول (۵) مانند ایده‌ی استفاده از تقریب $\mathrm{AR}(p)$ برای فرایندهای ایستا می‌باشد. به‌طورکلی دو پارامتر (p,g) وجود دارند که باید با استفاده از یک الگوریتم مناسب آن‌ها را به‌درستی انتخاب کرده و سپس برای پیش‌بینی

www.SID.ir

مراحل بعد سری در فرمول (۵) قرار دهیم. پارامتر p در فرمول (۵) و پارامتر g در هموارسازی براورد تابع اتوکوواریانس فرایند LSW استفاده می‌شوند. لازم به ذکر است که عدد p با توجه به بررسی تابع خودهمبستگی سری زمانی و عدد g با استفاده از روش اعتبارسنجی متقابل[۱۲] انتخاب می‌شوند. برای جزئیات بیش‌تر، می‌توانید به فریزلویکس (۲۰۰۳)، فریزلویکس و همکاران (۲۰۰۳) و وَن‌بلگم (۲۰۰۳) مراجعه کنید.

۲٫۲ روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک

این روش توسط آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۶) ارایه شده است که روشی ناپارامتری بوده و از آن برای پیش‌بینی یک بازه استفاده می‌شود. به این صورت که ابتدا کل سری مشاهده‌شده در بازه‌ی $[۰, T]$ را به n بازه با فاصله مساوی، با استفاده از فرمول زیر تقسیم کرده و نام آن‌ها را $Z_۱, Z_۲, \ldots, Z_n$ قرار می‌دهیم:

$$Z_i(t) = X\{t + (i-۱)\delta\}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [۰, \delta),$$

سپس برای پیش‌بینی سری در بازه‌ی $[T, T+\delta]$ یعنی $Z_{n+۱}$، تبدیل موجک درون‌یاب را روی هر Z_i محاسبه می‌کنیم و ضرایب مقیاس در سطح Jام، Z_i را به دست آورده و با

$$\Xi_i = \left\{ \xi_i^{(J,k)} : k = ۰, \ldots, ۲^J - ۱ \right\}$$

نشان می‌دهیم؛ زیرا کار کردن با ضرایب تقریب موجک به‌جای خود سری ساده‌تر است.

در تعریف زیر شرح مختصری از موجک‌های درون‌یاب ارایه شده است.

تعریف ۲. یک موجک درون‌یاب (R, D)، دارای تابع مقیاس φ [۱۳] با شرایط زیر است:

- درون‌یابی: تابع φ باید دنباله‌ی کرونکر را در نقاط صحیح درون‌یابی کند.
- رابطه‌ی بین دو سطح: هر φ می‌تواند بر حسب ترکیب خطی از تغییر مقیاس و مکان یافته‌ی آن نوشته شود:

$$\varphi(x) = \sum_k \varphi\left(\frac{k}{۲}\right) \varphi(۲x - k).$$

- تولید چندجمله‌ای‌ها: برای عدد صحیح $D \geqslant ۰$، تمام چندجمله‌ای‌های درجه‌ی D را می‌توان به‌صورت مجموع $\sum_k \beta_k \varphi(t-k)$ نوشت.
- هموار: عدد حقیقی $R > ۰$ وجود دارد که φ پیوسته‌ی هولدر از مرتبه‌ی R باشد.

www.SID.ir

- موضعی کردن: φ و تمام مشتقات آن تا مرتبه‌ی $\lfloor R \rfloor$ به‌سرعت نزول می‌کنند:

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqslant A_l.(۱ + |x|)^{-l}, \qquad x \in R, \quad l > ۰, \quad ۰ \leqslant m \leqslant \lfloor R \rfloor.$$

برای توضیحات بیش‌تر در مورد این موجک‌ها به مقاله‌ی داناهو (۱۹۹۲) مراجعه کنید.

همان‌طور که گفته شد، روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک نوعی میانگین وزنی روی زیربازه‌های مشاهده‌شده می‌باشد. به این صورت که به هر زیربازه که با زیربازه‌ی آخر فاصله‌ی کم‌تری داشته باشد، وزن بیش‌تری تعلق می‌گیرد. به‌طور خلاصه می‌توان نحوه‌ی عملکرد این روش را در مراحل زیر بیان کرد:

- ابتدا باید بازه‌هایی که به بازه‌ی آخر شباهت بیش‌تری دارند را مشخص کنیم. در این مرحله وزن‌ها مشخص می‌شوند.
- از وزن‌ها استفاده کرده و با استفاده از یک میانگین وزنی موضعی پیش‌بینی می‌کنیم.

با توجه به دو مرحله‌ی قبل، باید معیار شباهتی برای این روش تعریف شود. این معیار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

اگر فرض کنیم که $\theta_{jk}^{(i)}, i = ۱, ۲$، ضرایب تبدیل موجک گسسته سری، در سطح jام و مکان kام باشد، معیار اندازه‌گیری فاصله‌ی بین دو زیربازه، بر اساس فاصله‌ی بین ضرایب موجک آن‌ها به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$D\left(\theta^{(۱)}, \theta^{(۲)}\right) = \sum_{j=j_۰}^{J-۱} ۲^{\frac{-j}{۲}} d_j\left(\theta^{(۱)}, \theta^{(۲)}\right),$$

که در آن فاصله در سطح jام به‌صورت زیر است:

$$d_j\left(\theta^{(۱)}, \theta^{(۲)}\right) = \left\{\sum_{k=۰}^{۲^j-۱}\left(\theta_{jk}^{(۱)} - \theta_{jk}^{(۲)}\right)^۲\right\}^{\frac{۱}{۲}}.$$

بعد از اندازه‌گیری فاصله، از روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک استفاده می‌شود و ضرایب تقریب بازه‌ای را که می‌خواهیم پیش‌بینی کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\Xi_{n+۱|n} = \frac{\sum_{m=۱}^{n-۱} K\left[\frac{D\{\mathcal{C}(\Xi_n), \mathcal{C}(\Xi_m)\}}{h_n}\right] \Xi_{m+۱}}{\frac{۱}{n} + \sum_{m=۱}^{n-۱} K\left[\frac{D\{\mathcal{C}(\Xi_n), \mathcal{C}(\Xi_m)\}}{h_n}\right]},$$

Archive of SID

www.SID.ir

که در آن K، کرنل، h_n پهنای باند، D، معیار فاصله و $\mathcal{C}(\Xi_k)$، ضرایب موجک حاصل از اجرای تبدیل موجک گسسته روی ضرایب Ξ_i می‌باشند. در نهایت با استفاده از عکس تبدیل موجک درون‌یاب روی ضرایب، پیش‌بینی سری در بازه‌ی مطلوب حاصل می‌شود:

$$Z^J_{n+1|n}(t) = \sum_{k=0}^{2^J-1} \xi^{(J,k)}_{n+1|n}\phi_{J,k}(t), \qquad \forall t \in [0, \delta), \tag{۶}$$

$\xi^{(J,k)}_{n+1|n}$، مؤلفه‌های بردار پیش‌بینی $\Xi_{n+1|n}$ و $\phi_{J,k}(t)$، تابع مقیاس می‌باشد. با استفاده از فرمول زیر نیز میانگین مربعات خطای پیش‌بینی تجربی (MSPE) محاسبه می‌گردد:

$$\hat{\text{MSPE}} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\{\hat{Z}_{n+1}(t_i) - Z_{n+1}(t_i)\}^2,$$

که m، تعداد مؤلفه‌های بردار Z_{n+1}ام است.

برای جزئیات بیش‌تر می‌توانید به آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۶) مراجعه نمایید.

۳ تعمیمی بر روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک

در این بخش، دو روش برای پیش‌بینی پیشنهاد می‌شود و خطای پیش‌بینی آن‌ها از نظر تئوری بررسی می‌شود. در پایان نیز به مقایسه‌ی این روش‌ها با روش‌های بخش قبل پرداخته می‌شود.

تبدیل موجک درون‌یاب استفاده‌شده در روش پیش‌بینی هموارسازی تابعی کرنل-موجک، تبدیلی است که ضرایب موجک آن با استفاده از نمونه‌گیری حاصل می‌شوند. تبدیلات DWT و NDWT علاوه بر خواصی که در مقدمه بیان شد، دارای خواص قابل توجه دیگری می‌باشند که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به متعامد بودن پایه‌های DWT و خاصیت تحت انتقال پایا بودن[۱۴] NDWT اشاره کرد. به‌دلیل داشتن چنین خواص و خواص مفید دیگر استفاده‌ی این تبدیلات، در این مقاله پیشنهاد می‌کنیم، در روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک به جای تبدیل موجک درون‌یاب از آن‌ها استفاده کنیم که منجر به ارایه‌ی دو روش پیشنهادی زیر گردیده است:

روش اول (K − W۱): این روش تعمیمی از روش K − W بوده که در آن روی هر کدام از Z_iها به جای تبدیل موجک درون‌یاب از NDWT استفاده کرده و ضرایب تقریب حاصل از آن را، Ξ_i می‌نامیم. مرحله‌ی آخر نیز عکس تبدیل یعنی INDWT استفاده می‌شود.

www.SID.ir

روش دوم (K − W۲): این روش نیز تعمیمی از K − W بوده و در آن روی هر کدام از Z_iها از تبدیل DWT استفاده می‌کنیم و ضرایب حاصل از آن را، Ξ_i می‌نامیم. در مرحله‌ی آخر نیز عکس تبدیل یعنی IDWT استفاده می‌شود.

۳٫۱ بررسی خطای پیش‌بینی

در این قسمت به‌صورت تئوری نشان داده می‌شود که با افزایش تعداد نمونه (n)، میانگین مربعات خطای پیش‌بینی به سمت صفر میل می‌کند.

نکته: روش‌های مذکور در این مقاله با تغییر تبدیل موجک روش ارایه‌شده در آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۶) به وجود آمده‌اند و در نتیجه تمام قضایا و اثبات آن‌ها در این مقاله نیز برقرار می‌باشند. به‌همین دلیل ما فقط به همگرایی مرتبه‌ی دوم خطای پیش‌بینی اکتفا می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱ *با فرض برقراری فرضیات موجود در پیوست مقاله‌ی آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۶)، با افزایش تعداد نمونه، میانگین مربعات خطای پیش‌بینی به سمت صفر میل می‌کند.*

برهان اثبات در پیوست آمده است.

۳٫۲ مقایسه‌ی روش‌ها

در این بخش سعی نموده‌ایم با استفاده از نرم‌افزارهای S-plus و Matlab، روش‌های زیر را روی داده‌های شبیه‌سازی‌شده از سری‌های ایستا و ناایستا و داده‌های واقعی با هم مقایسه کنیم. روش‌ها عبارت‌اند از:

- پیش‌بینی خطی فرایندهای LSW (برنامه‌های مربوط به این روش از سایت زیر دانلود شده است.)

`http://stats.lse.ac.uk/fryzlewicz/flsw/flsw.html`

- برازش مدل کلاسیک ARMA،
- روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک (K − W)،
- تعمیم‌هایی از K − W (K − W۱ و K − W۲).

Archive of SID

www.SID.ir

جدول ۱. میانگین خطای پیش‌بینی چند روش، برای پیش‌بینی داده‌های شبیه‌سازی‌شده از مدل AR(۷)

روش پیش‌بینی	خطای پیش‌بینی (MSE)
AR(۷)	۱٫۰۸۳۲
LSW	۱٫۵۹۷۸
K − W	۱٫۹۷۰۱
K − W۱	۱٫۵۵۶۱
K − W۲	۱٫۳۱۸۴

۳٫۲٫۱ شبیه‌سازی از مدل AR

با استفاده از روش‌های مذکور روی یک‌سری داده‌ی شبیه‌سازی‌شده از مدل AR(۷) پیش‌بینی انجام می‌دهیم و با خطای پیش‌بینی حاصل از برازش همین مدل به سری، مقایسه می‌کنیم؛ زیرا همان‌طور که می‌دانیم، پیش‌بینی با مدل AR(۷) برای این داده‌ها، بهترین پیش‌بینی می‌باشد.

مدل زیر را در نظر گرفته و از آن ۱۹۲۰ داده تولید می‌کنیم.

$$X_t = -۰٫۲X_{t-۱} + ۰٫۴X_{t-۲} + ۰٫۰۹X_{t-۳} + ۰٫۳X_{t-۴} + ۰٫۰۷۹X_{t-۵} - ۰٫۱۴X_{t-۶} + ۰٫۰۹X_{t-۷}.$$

داده‌ها را دو قسمت می‌کنیم و ۱۸۵۶ داده‌ی مشاهده‌شده‌ی اول را به‌عنوان مشاهدات در نظر می‌گیریم. سپس قسمت دوم یعنی ۶۴ داده‌ی مشاهده‌شده‌ی آخر سری را پیش‌بینی می‌کنیم و در نهایت، خطای پیش‌بینی را محاسبه می‌کنیم. در روش برازش مدل LSW، به‌جای اعداد h و p، ۱ و ۷ قرار می‌دهیم؛ زیرا ACF مدل، وابستگی داده‌ها را تا تأخیر (Lag) هفتم مشخص می‌کند. پس از براورد تابع اتوکوواریانس و به دست آوردن ضرایب $b^{(h)}_{t-۱-m}$ در فرمول (۴)، به پیش‌بینی با استفاده از فرمول (۱) می‌پردازیم.

در روش‌های K − W و K − W۱ و K − W۲، ابتدا کل سری را به ۳۰ بازه با طول مساوی (هر بازه دارای ۶۴ داده است) تقسیم کرده و پس از محاسبه‌ی ضرایب موجک حاصل از تبدیل موجک مربوط به آن روش که در بخش قبل توضیح داده شد، فواصل بین ضرایب بازه‌های ۱ تا ۲۸ را با بازه‌ی ۲۹ام به دست می‌آوریم و به پیش‌بینی بازه‌ی ۳۰ام می‌پردازیم. پس از اجرای عکس تبدیل موجک اولیه روی ضرایب به دست آمده، به پیش‌بینی سری در بازه‌ی آخر می‌رسیم. نتایج تمامی مراحل بالا در جدول ۱ ارایه شده است.

همان‌طور که در جدول ۱ مشخص است، خطای پیش‌بینی برازش مدل AR(۷) از همه کم‌تر است؛

Archive of SID
www.SID.ir

جدول ۲. میانگین خطای پیش‌بینی چند روش، برای داده‌های شبیه‌سازی‌شده از یک مدل سینوسی

روش پیش‌بینی	خطای پیش‌بینی (MSE)
AR(۳۲)	۰٫۰۰۵۷
LSW	۶٫۱۶۷۰
K − W	۰٫۰۴۵۰
K − W۱	۰٫۰۳۰۲
K − W۲	۰٫۰۰۹۴

زیرا داده‌های شبیه‌سازی‌شده، از مدل AR(۷) هستند. پس می‌توان روش‌های موجود در جدول ۱ را با برازش مدل AR(۷) مقایسه کرد. همان‌طور که می‌بینیم، روش‌های K − W۱ و K − W۲ در مقایسه با K − W بهتر عمل نموده‌اند و در نتیجه به‌ترتیب استفاده از تبدیلات DWT و NDWT در روش هموارسازی تابعی کرنل-موجک مناسب‌تر از تبدیل موجک درون‌یاب می‌باشد. خطای پیش‌بینی روش برازش مدل LSW نیز، تا حدودی نزدیک به برازش مدل AR(۷) می‌باشد؛ زیرا این روش پیش‌بینی، تعمیمی از روش پیش‌بینی با استفاده از معادلات یول-واکر است و در حالتی که سری ایستا باشد، نتایجی شبیه به برازش مدل AR دارد.

۳٫۲٫۲ شبیه‌سازی از یک مدل سینوسی

از مدل زیر ۱۹۲۰ داده تولید می‌کنیم.

$$X(t) = \beta_1 m_1(t) + \beta_2 m_2(t) + \varepsilon(t),$$
$$m_1(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{64}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{64}\right), \quad m_2(t) = \cos\left(\frac{2\pi t}{6}\right) + \sin\left(\frac{2\pi t}{6}\right),$$
$$\varepsilon(t) = u(t) + \theta u(t-1), \quad u(t) \sim N(0, \sigma^2).$$

مانند بخش قبل، داده‌ها را دو قسمت می‌کنیم و ۱۸۵۶ داده‌ی مشاهده‌شده‌ی اول را به‌عنوان مشاهدات در نظر می‌گیریم. سپس قسمت دوم یعنی ۶۴ داده‌ی مشاهده‌شده‌ی آخر سری را پیش‌بینی می‌کنیم و در نهایت، خطای پیش‌بینی را محاسبه می‌کنیم. در روش برازش مدل LSW، به‌جای اعداد h و p، ۱ و ۱۱ را قرار داده و مانند قبل عمل می‌کنیم. روش‌های K − W و K − W۱ و K − W۲ نیز مانند حالت قبل صورت می‌گیرند. در برازش مدل AR نیز بهترین برازش، AR(۳۲) بوده است. نتایج مراحل بالا در جدول ۲ ارایه شده است.

www.SID.ir

جدول ۳. میانگین خطای پیش‌بینی چند روش، برای داده‌های واقعی EPC

روش پیش‌بینی	خطای پیش‌بینی (MSE)
AR(۳۲)	۱۱/۴۱۴ × ۱۰^{۳}
K − W	۳۷/۵۶ × ۱۰^{۳}
K − W۱	۳۰/۷۷ × ۱۰^{۳}
K − W۲	۲۴/۱۳۸ × ۱۰^{۳}

طبق جدول ۲، مدل AR(۳۲) و روش K − W۲ بهترین مقادیر پیش‌بینی را دارند. اما با توجه به تعداد زیاد پارامترها در AR(۳۲)، این روش مناسب نیست. در این جدول نیز مانند جدول قبل، روش‌های K − W۱ و K − W۲ بهتر از روش K − W بوده‌اند و می‌توان گفت با تعویض تبدیلات موجک به کار رفته توانستیم پیش‌بینی بهتری انجام دهیم. روش LSW نیز دارای MSE بیش‌تری نسبت به بقیه و حتی K − W بوده است. از آنجا که مشاهدات تقریباً متناوب بوده و روش LSW برای داده‌هایی مناسب است که به‌طور موضعی ایستا هستند، نتیجه‌ی به دست آمده مورد انتظار می‌باشد.

۳٫۲٫۳ داده‌ی واقعی مصرف برق در پاریس (EPC)

تعداد این داده‌ها ۱۶۸۰ داده است که مربوط به مصرف برق در پاریس می‌باشد. مانند قبل، داده‌ها را دو قسمت کرده و ۱۶۳۲ داده‌ی اول را به‌عنوان مشاهدات در نظر می‌گیریم. سپس قسمت دوم یعنی ۴۸ داده‌ی مشاهده‌شده‌ی آخر سری را پیش‌بینی می‌کنیم و در نهایت، خطای پیش‌بینی را محاسبه می‌کنیم. در این مثال خطای پیش‌بینی برازش مدل LSW تفاوت فاحشی با بقیه‌ی روش‌ها دارد و زمان اجرای برنامه‌های مربوط به آن طولانی می‌باشد، به‌همین علت آن را در جدول ذکر نکرده‌ایم. در برازش مدل AR نیز بهترین برازش، AR(۳۲) بوده است. نتایج مراحل بالا در جدول ۳ ارایه شده است.

جدول ۳ نیز نتایجی مشابه با جداول قبل دارد.

۳٫۲٫۴ داده‌ی واقعی سرعت باد (EL-NINO)

تعداد این داده‌ها ۷۰۸ داده است که مربوط به میانگین سرعت باد در پدیده‌ی EL-NINO از سال ۱۹۵۰ تا سال ۲۰۰۸ می‌باشد. داده‌ها را دو قسمت کرده و ۶۹۶ داده‌ی اول را به‌عنوان مشاهدات در نظر می‌گیریم. سپس قسمت دوم یعنی ۱۲ داده‌ی مشاهده‌شده‌ی آخر سری (سال ۲۰۰۸) را پیش‌بینی می‌کنیم و در نهایت،

Archive of SID

www.SID.ir

جدول ۴. میانگین خطای پیش‌بینی چند روش، برای داده‌های واقعی EL-NINO

روش پیش‌بینی	خطای پیش‌بینی(MSE)
AR(۲۵)	۱۰/۳۹
K − W	۰/۱۵۰۳
K − W۱	۰/۱۳۸۷
K − W۲	۰/۱۲۶۶

خطای پیش‌بینی را محاسبه می‌کنیم. در اینجا نیز روش برازش مدل LSW به خاطر دلیلی که در حالت قبل بیان کردیم، در جدول ذکر نمی‌شود. در برازش مدل AR نیز بهترین برازش، AR(۲۵) بوده است. نتایج مراحل بالا در جدول ۴ ارایه شده است.

جدول ۴ نیز نتایجی مشابه با جداول قبل دارد با این تفاوت که در این سری داده، مدل AR حتی با درجه‌ی بالا نتوانسته کارایی مناسبی داشته باشد که مورد انتظار نیز می‌باشد زیرا با رسم این داده‌ها به نظر می‌رسد این سری مربوط به یک سری ناایستا باشد.

۴ نتیجه‌گیری

با توجه به نتایج بالا، می‌توان این نتیجه را گرفت که دو روش پیشنهادی ارایه‌شده در این مقاله (K − W۱ و K − W۲)، بهتر از روش K − W که توسط آنتونیادیس و همکارانش ارایه شده است، به پیش‌بینی سری‌های زمانی می‌پردازد. با دقت بیش‌تر به اعداد جداول می‌توان گفت که از میان دو روش مذکور نیز روش K − W۲ از K − W۱ بهتر بوده و در مواردی هم نتایج مشابهی دارند. در بیش‌تر مواقع و مخصوصاً در سری‌های ناایستا نیز روش‌های ارایه‌شده نتیجه بهتری نسبت به برازش مدل AR دارند.

با توجه به این نتایج می‌توانیم به‌عنوان ادامه‌ی کار، تبدیلات دیگری از موجک مانند تبدیل Wavelet Packet را نیز بررسی کرده و عملکرد آن‌ها را با بقیه مقایسه کنیم.

توضیحات

۱. Non-Decimated Wavelet Transform

۲. Locally Stationary Wavelet

Archive of SID
www.SID.ir

۳. Interpolating Wavelet

۴. Discrele Wavelet Transform

۵. Covariance-Stationary

۶. Non-Decimated

۷. Global

۸. Multiscale

۹. Sparsity

۱۰. Lipschitz-Continuous Function

۱۱. Mean Square Prediction Error

۱۲. Cross Validation

۱۳. Scaling Function

۱۴. Shift Invariant

مرجع‌ها

Antoniadis, A., Paparoditis, E. and Sapatinas, T. (2006). A functional wavelet-kernel approach for continuous-time prediction. *J. R. Statist. Soc. B,* **68**, 837-857.

Antoniadis, A. and Sapatinas, T. (2003). Wavelet methods for continuous-time prediction using Hilbert-valued autoregressive processes. *J. Multiv. Anal.,* **87**, 133-158.

Bosq, D. (1991). Modelization, nonparametric estimation and prediction for continuous time processes. In *Non-parametric Functional Estimation and Related Topics,* Ed. G. Roussas, pp. 509-529, Nato ASI Series C, **335**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dahlhaus, R. (1997). Fitting time series models to nonstationary processes. *Ann. Statist.,* **25**, 1-37.

Donoho, D.L. (1992). *Interoilating Wavelet Transform.* Tech. Rep. 408, Department of Statistics, Stanford University.

Fryzlewicz, P. (2002). *Modelling and Forecasting Financial Log-return as Locally Stationary Wavelet Processes.* Research Rep. Department of Mathematics, University of Bristol.

Archive of SID

www.SID.ir

Fryzlewicz, P. (2003). *Wavelet Techniques for Time Series and Poisson Data.* Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of Bristol, UK.

Fryzlewicz, P., Van Bellegem, S. and von Sachs, R. (2003). Forecasting nonstationary time series by wavelet process modelling. *Annals of the Institude of statistical Mathematics,* **55**, 737-764.

Mallat, S. (1999). *A Wavelet Tour of Signal Processing,* 2nd edition. New York Academic, New York.

Nason, G.P. (2008). *Wavelet Methods in Statistics with R.* Springer-Verlag.

Nason, G.P., von Sachs, R. and Kroisandt, G. (2000). Wavelet processes and adaptive estimation of evolutionary wavelet spectra. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B,* **62**, 271-292.

Ombao, H., Raz, J., von Sachs, R. and Guo, W. (2002). The SLEX model of a nonstationary random process. *Ann. Inst. Statist. Math.,* **54**, 171-200.

Priestley, M. (1965). Evolutionary spectra and nonstationary processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B,* **27**, 204-237.

Van Bellegem, S. (2003). *Adaptive Methods for Modelling, Estimating and Forecasting Locally Stationary Processes.* Ph.D. thesis, Institut de Statistique, Université Catholique de louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.

Van Bellegem, S. and Von Sachs, R. (2002). *Forecasting Economic Time Series using Models of Nonstationary* (Discussion paper NO. 0227). Institut de statistique, UCL.

Archive of SID

www.SID.ir

پیوست

برهان قضیه‌ی ۱ میانگین مربعات خطای پیش‌بینی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathrm{MSPE}\left\{Z^J_{n+1|n}(t), Z_{n+1}(t)\right\} = E\left\{Z^J_{n+1|n}(t) - Z_{n+1}(t)\right\}^2$$

با اضافه و کم کردن عبارت $E\{Z^J_{n+1|n}(t)\}$ داریم:

$$\begin{aligned}\mathrm{MSPE}\left\{Z^J_{n+1|n}(t), Z_{n+1}(t)\right\} &= E\Big[Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\} \\ &\quad + E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\} - Z_{n+1}(t)\Big]^2 \\ &= E\left[Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\}\right]^2 \\ &\quad + E\left[E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\} - Z_{n+1}(t)\right]^2 \\ &\quad + 2E\Big(\left[Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\}\right] \\ &\quad \times \left[E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\} - Z_{n+1}(t)\right]\Big).\end{aligned}$$

به‌سادگی نتیجه می‌شود که عبارت آخر صفر است:

$$E\left(\left[Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\}\right]\left[E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\} - Z_{n+1}(t)\right]\right) = 0$$

حال نشان می‌دهیم که عبارات باقی‌مانده در سمت راست نیز با افزایش n به سمت صفر میل می‌کنند. با استفاده از قضیه‌ی ۱ در مقاله‌ی آنتونیادیس و همکاران (۲۰۰۶) داریم:

$$\begin{aligned}E\left[Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\}\right]^2 &\leqslant E\left[\sup_{\underline{x}\in S}\left|Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\}\right|\right]^2 \\ &= E\left(O\left[\left\{\frac{\log(n)}{n}\right\}^{\frac{1}{2+2J}}\right]\right)^2\end{aligned}$$

که در آن S هر مجموعه‌ی فشرده‌ای است که چگالی ضرایب مقیاس در سطح J، f، طوری باشد که $\min_S f > 0$ و $\underline{Z}_n = (Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_P))'$. چون وقتی $n \to \infty$، عبارت داخل پرانتز به سمت صفر میل می‌کند:

$$E\left[Z^J_{n+1|n}(t) - E\left\{Z^J_{n+1|n}(t)\right\}\right]^2 \longrightarrow 0 \qquad (۷)$$

www.SID.ir

حال عبارت $E\left[E\left\{Z^J_{n+۱|n}(t)\right\}-Z_{n+۱}(t)\right]^۲$ را بررسی می‌کنیم. با استفاده از فرمول (۶) داریم:

$$\begin{aligned}E\left\{Z^J_{n+۱|n}(t)\right\}&=E\left\{\sum_{k=۰}^{۲^J-۱}\xi^{(J,k)}_{n+۱|n}\phi_{J,k}(t)\right\}\\&=\sum_{k=۰}^{۲^J-۱}E\left\{\xi^{(J,k)}_{n+۱|n}\right\}\phi_{J,k}(t)\\&\xrightarrow{a.s}\sum_{k=۰}^{۲^J-۱}E\left[E\left\{\xi^{(J,k)}_{n+۱}|\Xi_n\right\}\right]\phi_{J,k}(t)\\&=\sum_{k=۰}^{۲^J-۱}\xi^{(J,k)}_{n+۱}\phi_{J,k}(t)\\&=Z_{n+۱}(t)\end{aligned}\qquad(۸)$$

درستی تساوی آخر از اینجا نتیجه گرفته می‌شود که چون $\xi^{(J,k)}_{n+۱}$ها در واقع تصویر $Z_{n+۱}$ها روی فضای V_J که در مالات (۱۹۹۹) به‌صورت

$$V_J=\overline{Span}\{\phi_{J,k}\},$$

تعریف می‌شود، می‌باشد و عبارت (۸) نیز عمل بازیابی را نشان می‌دهد، در نتیجه پس از بازیابی به خود $Z_{n+۱}$ می‌رسیم و داریم:

$$E\left\{Z^J_{n+۱|n}(t)\right\}\xrightarrow{a.s}Z_{n+۱}\Rightarrow E\left\{Z^J_{n+۱|n}(t)\right\}-Z_{n+۱}\xrightarrow{a.s}۰,$$

$$E\left[E\left\{Z^J_{n+۱|n}(t)\right\}-Z_{n+۱}\right]^۲\longrightarrow ۰.\qquad(۹)$$

از (۷) و (۹) نتیجه می‌گیریم که با افزایش n میانگین مربعات خطای پیش‌بینی به سمت صفر میل می‌کند.

سمیه میره
گروه آمار، دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر،
دانشگاه صنعتی امیرکبیر،
تهران، ایران.
رایانشانی: *s_mireh@aut.ac.ir*

مینا امین‌غفاری
گروه آمار، دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر،
دانشگاه صنعتی امیرکبیر،
تهران، ایران.
رایانشانی: *aminghafari@aut.ac.ir*

Archive of SID
www.SID.ir