تغییرات انرژی حالت پایه چارمونیم در فضای ناجابه‌جاگر

غلامرضا برون*، خدیجه قاسمیان

گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

چکیده

تغییرات انرژی حالت پایه مزون چارمونیم براساس معادلهٔ شرودینگر غیرنسبیتی و با استفاده از پتانسیل‌های کرنل، مارتین، لگاریتمی و کُلی، با کمک نظریهٔ اختلال و روش وردش در فضای ناجابه‌جاگر به‌دست آمده است. نشان داده شده که در اولین مرتبه اختلال، تغییرات انرژی حالت پایه مزون چارمونیم در فضای ناجابه‌جاگر با توان دوم پارامتر این فضا متناسب است. حد بالای پارامتر فضای ناجابه‌جاگر مقادیری بین ۰٫۳۹۷GeV تا ۳٫۰۲۱GeV تخمین زده شده است. این مقادیر برای پارامتر با استفاده از دقیق‌ترین داده‌های آزمایشگاهی شکافتگی فوق ریز برای حالت‌های اورتو و پارای طیف مزون چارمونیم محاسبه شده است.

کلیدواژگان: پارامتر فضای ناجابه‌جاگر، معادله شرودینگر، پتانسیل، مدل غیرنسبیتی، تابع موج شعاعی، روش وردش، چارمونیوم.

مقدمه

فضای ناجابه‌جاگر یک ایده قدیمی است که اخیراً مورد توجه بسیاری قرار گرفته است [۱–۳]. دلیل اصلی این توجه، پیشرفت‌های نظریه ریسمان است. نشان داده شده که بسیاری از اثرات ریسمان را به‌وسیله کاهش مقیاس فضای ناجابه‌جاگر به‌حد TeV می‌توان دید در صورتی که قبلاً تصور می‌شد در حد انرژی‌های بزرگ دیده می‌شوند [٤]. به‌طور کلی اعتقاد بر این است که اثرات قابل مشاهده فضای ناجابه‌جاگر، فقط در مقیاس طولی ریسمان می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. بنابراین مدل ناجابه‌جاگر در فیزیک انرژی بالا، جایی که بهترین نظریه‌ها مانند نظریهٔ میدان نمی‌تواند پاسخگو باشد، موفق عمل می‌کند. با استفاده از مطالعات پدیدار شناختی و آزمایش‌های دقیق که در برخورد دهنده‌های ذرات انجام شده است، حد مقداری بین GeV [۳] تا TeV [۵] را به‌پارامتر فضای ناجابه‌جاگر نسبت می‌دهند. مدل نوسانگر هماهنگ در فضای ناجابه‌جاگر [٦]، حالت‌های همدوس [۷]، جنبه‌های پدیدار شناختی فضای ناجابه‌جاگر در طیف اتم هیدروژن [۲]، لمب شیفت [۱] و همچنین طیف چارمونیم با استفاده از پتانسیل کرنل [۸] تعداد بسیار کمی از مطالعاتی هستند که در این حوزه انجام شده است. در این مقاله برای پتانسیل‌های کُلی، لگاریتمی و مارتین که وابسته به‌فضای ناجابه‌جاگر هستند طیف چارمونیم بررسی شده است. در انجام محاسبات $\hbar = c = 1$ در نظرگرفته شده است.

مدل وروش شناسی

فضا–زمان ناجابه‌جاگر به‌وسیله رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$[\hat{x}_i,\hat{x}_j]=i\theta_{ij} \qquad i,j=1,2,3 \qquad (۱)$$

که θ_{ij} ماتریس ثابت پادمتقارن با بعد $[\text{طول}]^2$ می‌باشد. در صورتی مختصات زمانی با مختصات فضایی جابه‌جا می‌شود که مطمئن شویم مدل یکانی است [۱]. در فضای ناجابه‌جاگر ضرب معمولی به‌ضرب مویال–استار تغییر می‌کند [٤]، با این حال یک روش جایگزین وجود

*نویسنده مسئول: boroun@razi.ac.ir

دارد به‌این صورت که به‌ویژه در مدل غیرنسبیتی از باز تعریف مختصات مکانی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم.

$$\hat{x}_i \to x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \qquad ۲$$

که X و p در فضای کوانتومی جابه‌جاگر تعریف شده‌اند. با دقت در معادلهٔ۱، در می‌یابیم که اگر پارامتر فضای ناجابه‌جاگر را به‌سمت صفر میل دهیم رابطهٔ جابه‌جایی در فضای جابه‌جاگر به‌دست می‌آید در واقع شکل ریاضی تغییر یافته عملگر مکان (معادله۲) این نتیجه را حاصل می‌کند، بدین معنا که این فضا تعمیمی از فضای جابه‌جاگر است و فرمول‌بندی ارائه شده برای این فضا در قیاس کامل با فضای جابه‌جاپذیر است. با معرفی تابع موج شعاعی $\Psi(\hat{r}) = \hat{r}\psi(\hat{r})$، معادله شرودینگر استاندارد برای حالت مقید چارمونیم به‌این صورت است:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + 2\mu\left[E - V(\hat{r}) - \frac{L(L+1)}{2\mu\hat{r}^2}\right]\right)\psi(\hat{r}) = 0 \qquad ۳$$

که در این معادلهٔ μ و E به‌ترتیب جرم و ویژه مقدار انرژی هستند. L (L+1) ویژه مقدار عملگر تکانه زاویه‌ای مداری می‌باشد. پتانسیل $V(\hat{r})$ هنوز یک پتانسیل برهم‌کنش ناشناخته است. بردار $\hat{r} = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i^{\,2}$. با استفاده از جاگذاری معادلهٔ۲ در پتانسیل $V(\hat{r})$ به‌دست می‌آید:

$$V(\hat{r}) \to V(r) + \vec{\theta}.\vec{L}\frac{\partial V(r)}{\partial r} + \frac{(\vec{\theta}\times\vec{p})^2}{2}\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} + \ldots \qquad ٤$$

که $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$.برای حالت پایه جمله دوم حذف می‌شود، بنابراین اثر معادلهٔ۱ برروی پتانسیل به‌صورت توان دوم پارامتر فضای ناجابه‌جاگر ظاهر می‌شود.

حال پتانسیل V(r) را به‌صورت معادلZ زیر معرفی می‌کنیم:

$$V(r) = -\frac{k_1}{r} + k_2 r^n \quad n \in R \geq 0 \qquad ۵$$

که در آن k_1 و k_2 دو پارامتر ثابت هستند. قسمت اول این پتانسیل (پتانسیل کولنی)، رفتار کوارک و پاد کوارک را در فواصل کوتاه بین کوارکی (آزادی مجانبی) و قسمت دوم این معادله رفتار بین کوارکی را در فواصل دورتر (محبوسیت) توصیف می‌کند. این شکل تابعی که برای پتانسیل داده شده است، سه نوع پتانسیل مهم پدیدار شناختی کوارکونیم که در این کار استفاده شده را پوشش می‌دهد. مقادیر ثابت پارامترهای معادلهٔ۵ برای سه نوع پتانسیل در جدول۱ داده شده است.به‌دلیل اینکه پتانسیل‌های ذکر شده در حد غیرنسبیتی برای بررسی هادرون‌ها موفق عمل می‌کنند و همچنین حالت مقید مزونی مورد بررسی (چارمونیم) از کوارک سنگین چارم تشکیل شده که در این حالت سرعت کوارک‌ها غیر نسبیتی است، از مدل غیر نسبیتی استفاده شده است. شاید بتوان این دلیل را اضافه نمود که کار با مدل غیرنسبیتی راحت‌تر از مدل نسبیتی است.

جدول۱. پارامترها به‌ازای پتانسیل‌های مختلف.

نوع پتانسیل	$k_1 k_2 n$
کرنل	$-k\frac{4}{3}\alpha_s$ ۱
کُلی	$kk\alpha_s$ ۰/۵
مارتین	k0 ۰/۱

پتانسیل لگاریتمی که به‌صورت $V(r) \sim \ln(r)$ می‌باشد از دیگر پتانسیل‌ها جدا شده است. با جاگذاری معادلهٔ۵ در معادله٤ هامیلتونی اختلالی برحسب θ^2 به‌صورت معادلهٔ٦ به‌دست می‌آید:

$$H(\theta) = (\theta \times p)^2 \left(-\frac{k_1}{r} + n\,(n-1)\frac{k_2}{2r^{2-n}}\right) \qquad ٦$$

برای پتانسیل لگاریتمی نیز داریم:

$$H(\theta) \sim -\frac{(\theta \times p)^2}{r^2} \qquad ۷$$

حال برای به‌دست آوردن طیف انرژی حالت مقید چارمونیم، معادله‌های ٦و٧ را در معادلهٔ٣ جایگزین می‌کنیم و از جملات اختلالی بالاتر از مرتبهθ^2 صرف‌نظر می‌شود (به‌دلیل کوچک بودن مقدار این پارامتر). در این محاسبات از تابع موج شعاعی $\psi(r)\sim\exp(\alpha r^b)$ استفاده شده که b=١، ١٫٢،١٫٣،٥ و به‌نام پارامتر مدل می‌باشد. α نیز پارامتر وردش است و از مینیمم کردن انرژی حالت پایه به‌دست می‌آید [٩]. مقدارهای عددی این پارامتر برای پتانسیل‌های ذکر شده در جدول٢ آورده شده است. برای به‌دست آوردن تغییرات انرژی برحسب پارامترθ^2، از نظریه اختلال استفاده می‌کنیم. با فرض اینکه $\vec{\theta}=(0,0,\theta)$ می‌باشد، به‌دست خواهیم آورد:

$$E_{NC}=-\frac{k_1\theta^2}{32}\left\langle\frac{p_\perp{}^2}{r^3}\right\rangle+n\frac{k_2\theta^2}{32}\left\langle\frac{p_\perp{}^2}{r^{2-n}}\right\rangle \qquad ٨$$

در این معادله $p_\perp^2=p_x^2+p_y^2$ می‌باشد. فرض می‌شود $|\vec{\theta}|$ خیلی کوچک است و با یک تقریب خوب می‌توان نوشت $p_\perp^2\sim 2/3p^2$. برای پتانسیل لگاریتمی مقدار انرژی اختلالی در فضای ناجابه‌جاگر به‌صورت معادلهٔ٩ می‌باشد:

$$E_{NC}=\frac{k\theta^2}{32}\left\langle\frac{p_\perp^2}{r^2}\right\rangle \qquad ٩$$

نتایج و بحث

مقادیر ثابت مربوط به‌پتانسیل‌های مختلف در جدول٣ آورده شده است در این جدول منظور ازm_c، جرم کوارک افسون و α_s، ثابت جفت‌شدگی قوی می‌باشد. با استفاده از روابط ٨ و ٩ می‌توان مقدار انرژی اختلالی در فضای ناجابه‌جاگر را محاسبه نمود. این مقدار انرژی تابعی درجه دو از پارامتر فضای ناجابه‌جاگر است، برای به‌دست آوردن مقدار عددی این پارامتر، مقدار انرژی به‌دست آمده با مقدار عددی شکافتگی فوق ریز مقایسه می‌شود [٨]، به‌این صورت که مقدار انرژی به‌دست آمده باید کوچکتر یا مساوی با مقدار شکافتگی فوق ریز باشد. شکافتگی جرمی بین حالت‌های اورتو و پارا، به‌صورت رابطهٔ زیر فرمول‌بندی شود:

$$M({}^3_1S)-M({}^0_1S)=\frac{32\pi\alpha_s|\psi(0)|^2}{9m_im_j} \qquad ١٠$$

مقدار آزمایشگاهی رابطهٔ١٠ برای دو حالت اورتو و پارای مزون چارمونیم، ١١٦±١/٠MeV [١٠] می‌باشد. مقادیر عددی که برای پارامتر وردش و پارامتر فضای ناجابه‌جاگر $\theta\sim\Lambda_{NC}^{-2}$ برای چهار نوع پتانسیل مختلف محاسبه شده در جدول٢ آورده شده است.

جدول٢. پارامترها برای پتانسیل‌های مختلف.

b	α	$E_{NC}(GeV)/\theta^2$	$\Lambda_{NC}(GeV)$
پتانسیل کرنل			
١٫٠	٠٫٨٣٧	١٢١٫٥٥	٠٫٣٩٧
٢٫٠	٠٫٢١٤	٣٫١٠٧	٠٫٩٩٩
١٫٥	٠٫٤١٦	١٨٫٥٠	٠٫٦٣٩
١٫٣	٠٫٥٥٢	٣٤٫٢٨	٠٫٥٤٧[٨]
پتانسیل کُلی			
١٫٠	٠٫١٦٣	٠٫١٠٦	٢٫٣٢
٢٫٠	٠٫٢٠٠	١٫٥٢١	١٫١٩
١٫٥	٠٫١٧٣	٠٫١٩٥	١٫٩٩
١٫٣	٠٫١٦٩	٠٫٥٢٩	١٫٥٥
پتانسیل مارتین			
١٫٠	٠٫٨٠٦	٠٫٩٠٩	١٫٣٤
٢٫٠	٠٫٢١٦	٠٫٠٣٦	٣٫٠٢
١٫٥	٠٫٤٠٩	٠٫١٧١	٢٫٠٤
١٫٣	٠٫٥٠٩	٠٫٣١١	١٫٧٦
پتانسیل لگاریتمی			
١٫٠	٠٫٧٤١	١٫٢٤٣	١٫٢٤
٢٫٠	٠٫١٨٣	٠٫٠٤٤	٢٫٨٧
١٫٥	٠٫٣٦١	٠٫٢٢٠	١٫٩١
١٫٣	٠٫٤٥٦	٠٫٣٨٧	١٫٦٦

جدول۳. مقادیر ثابت برای پتانسیل‌های مختلف.

پتانسیل	K	α_s	m_c(GeV)
کُلی	۰٫۷۵	۰٫٤٦۱	۱٫۳۹
مارتین	٦٫۸۹۸	–	۱٫۸۰
لگاریتمی	۰٫۷۳۳	–	۱٫۵۰
کرنل	۰٫۱۸٤GeV^2	۰٫۳۹	۱٫۸٤

نتایج برای پارامتر فضای ناجابه‌جاگر بیشتر، مقادیری بین ۰٫۹۹ GeV تا ۲٫۳۲GeV دارد که این مقادیر برای مدل غیر نسبیتی ساده به‌دست آمده‌اند. مقادیری که تاکنون برای پارامتر فضای ناجابه‌جاگر در کارهای انجام شده به‌دست آمده نشان می‌دهد که نمی‌توان یک مقدار عددی از قبل تعریف شده و مشخص به‌این پارامتر نسبت داد که بتوان نتایج حاصله را با آن مقدار مقایسه کرد. به‌همین دلیل نمی‌توان با قطعیت راجع به‌نتایج حاصله برای این پارامتر بحث کرد اما از این نظر که مقادیر به‌دست آمده در این مقاله برای پتانسیل‌های مختلف نزدیک به‌مقدارهای محاسبه شده در کارهای دیگر است [۱۲و۸،۱۱]، می‌توان گفت نتایج منطقی هستند. به‌عنوان مثال مقداری که برای پتانسیل کرنل با پارامتر b=۱٫۳ به‌دست آورده‌ایم با سه نمونه از کارهایی که توسط دیگران انجام شده است در جدول٤ مقایسه شده است. نتایجی که برای دیگر پتانسیل‌ها به‌دست آمده است (جدول۲) نیز نمی‌تواند دور از واقعیت باشد زیرا همانگونه که با دقت درنتایج به‌دست آمده در [۸،۱۱] ملاحظه می‌شود و همچنین فقدان مرجع مقایسهٔ عددی دقیق، اختلاف مقداری کمی که در نتایج حاصل شده است معقول به‌نظر می‌رسد.

جدول٤. مقایسه بین نتایج به‌دست آمده برحسب GeV.

مقداری که ما به‌دست آورده‌ایم	۰٫۵٤۷
مقدار به‌دست آمده [۱۲]	۰٫٦۰۲
مقدار به‌دست آمده [۱۱]	۰٫۱٦
مقدار به‌دست آمده [۸]	۰٫٤٦۷

مرجع‌ها

[1] M. Chaichian, M.M. Sheikh-jabbari, A. tureanu, Hydrogen atom spectrum and the lamb shift in noncommutative qed, *Physical Review Letters* 86 (2001) 2716-2719.

[2] K. Gnatenko, V. Thachuk, Hydrogen atom in rotationally invariant noncommutative space, *Physics Letters A* 378 (2014) 3509-3515.

[3] A. Prakash, A. Mitra, P.k. Das, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$Scattering in the noncommutative standard Model, *Physical Review D* 82 (2010) 055020-055033.

[4] N. Seiberg, E. Witten, String theory and noncommutative geometry, *Journal of high Energy Physics* 9909 (1999) 1299–1305.

[5] B. Mira, M. Dehghani, noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential, *communications in Theoretical Physics* 42 (2004)183-184.

[6] A. Parmeggiani, noncommutative harmonic oscillators and related problems, *Milan Journal of Mathematics* 82 (2014) 343-387.

[7] J. BenGeloun, F.G. Schultz, Coherent states in noncommutative quantum mechanics, *Journal of Mathematical Physics* 50 (2009) 343-387.

[8] A.Al- Jamel, Heavy quarkonia with Cornell potential on noncommutative space, *Journal of Theoretical and Appliedphysics* 5 (2011) 21-24.

[9] G.R. Boroun, H. Abdolmalki, Variational and exact solutions of the wave function at origin (WFO) for heavy quark onium by using a global potential, *Physica Scripta* 80 (2009) 065003-065008.

[10] K. Olive, P. Data, Review of Particle Physics, *Chinese Physics C* 38 (2014) 090001-091677.

[11] M. Moumni et al, Lyman- alpha spectroscopy in non-commutative space- time, *International Journal of Modern Physics*: *Conference Series* 1 (2010) 1-5.

[12] A. Stern, Particle-like solutions to classical noncommutative gauge theory, *Physical Review D 78* (2008) 065006-065027.

Ground state energy shift of charmonium on noncommutative space

Gholam Reza Boroun*, Khadijeh Ghasemian

Department of Physics, Faculty of Science, Razi University, Kermanshah, Iran

Abstract

A nonrelativistic model was used to determine the energy shift of low lying states of meson charmonium with respect to the Cornell, Martin, logarithm and global potentials. It is shown that at the lowest order of perturbation, the ground state acquires an energy shift that is proportional to the inverse square of the noncommutative length scale. We estimated an upper bound on noncommutative scale of order 0.397_ 3.021GeV, by using the recent most accurate experimental data on ortho and paracharmonium meson spectra.

Keyword: Noncommutative space parameter, Schrödinger equation, Potential, Nonrelativistic model, Trial wave function, Variational method, Charmonium

* Corresponding Author: boroun@razi.ac.ir