

## محاسبه درهم‌تنیدگی حالت‌های پایه شبکه ستاره‌ای دو بعدی اسپینی

صغرا فنواتی<sup>1\*</sup>، مجتبی جعفرپور<sup>2</sup>

<sup>1</sup> گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد امیدیه، امیدیه، ایران

<sup>2</sup> گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

دریافت: 1396/06/13 ویرایش نهایی: 1396/10/09 پذیرش: 1396/12/13

### چکیده

در این پژوهش حالت‌های پایه شبکه ستاره‌ای 6 کیوبیتی، در حضور میدان مغناطیسی محاسبه و درهم‌تنیدگی دوتایی و چندتایی این حالت‌ها با استفاده از سنج‌های درهم‌تنیدگی کانکرنس به‌عنوان سنجشگر درهم‌تنیدگی دوتایی، میر-والاش و تعمیم‌های آن به‌عنوان سنجشگر درهم‌تنیدگی چندتایی، بررسی و تحلیل شده است و یک ساختار جامع درهم‌تنیدگی برای آن ارائه و توصیف شده است. همچنین نشان داده‌ایم که میدان مغناطیسی خارجی به‌عنوان عامل تنظیم‌کننده حالت‌های پایه عمل می‌کند؛ بدین معنی که حالت‌های پایه جداپذیر، درهم‌تنیده گلوبال و حالت‌های بین این دو را از هم متمایز می‌سازد. تشخیص این حالت‌ها انتخاب و کاربرد آن‌ها را در فرآیندهای گوناگون اطلاعات کوآنتومی آسان می‌سازد.

**کلیدواژگان:** حالت پایه، درهم‌تنیدگی، شبکه دو بعدی اسپینی

### مقدمه

اندرکنشی مورد توجه قرار گرفته است، یک ساختار جالب، ساختار اسپینی ستاره‌ای است. در این ساختار، یک اسپین ارجح وجود دارد که اسپین مرکزی نامیده می‌شود و با همه اسپین‌های دیگر اندرکنش دارد. اسپین‌های غیر مرکزی که اسپین‌های بیرونی نامیده می‌شوند، مستقیماً هیچ اندرکنشی با هم ندارند. این ساختار مشابه شبکه‌های ستاره‌ای به‌کار رفته در فناوری ارتباطات و اطلاعات (ICT) است با این وجود درباره درهم‌تنیدگی و همبستگی‌های کوآنتومی آن پژوهش‌های اندکی صورت گرفته است [21-22]. در این پژوهش ابتدا حالت‌های پایه یک شبکه ستاره‌ای اسپینی با مدل کوآنتومی XX را به‌دست می‌آوریم و با استفاده از سنج‌های درهم‌تنیدگی کانکرنس، میر-والاش و تعمیم‌های آن، مقادیر درهم‌تنیدگی دوتایی و چندتایی را برای این حالت‌ها محاسبه و ساختار جامع درهم‌تنیدگی را برای شبکه ستاره‌ای ارائه و توصیف می‌کنیم. این مقاله به‌صورت

مطالعه درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های یک بعدی اسپینی و شبکه‌های چند بعدی اسپینی، به‌دلیل کاربردهای گوناگون در زمینه محاسبات و اطلاعات کوآنتومی حائز اهمیت است [1-5]. بررسی درهم‌تنیدگی در سیستم‌های با بیش از دو زیربخش، بسیار وسیع‌تر از سیستم‌های دو بخشی است و هنوز به‌عنوان یک مسئله باز در نظریه اطلاعات کوآنتومی باقی مانده است [6-10]. سیستم‌های دو بعدی کوآنتومی یکی از حالت‌های درهم‌تنیده چند بخشی مهم هستند. در زمینه درهم‌تنیدگی در دو بعد در دهه اخیر مطالعاتی انجام شده است [11-18]. با ظهور اطلاعات و محاسبات کوآنتومی، تکنولوژی‌های مختلفی به‌وجود آمده‌اند که قادرند هر عضوی از یک آرایه از کیوبیت‌ها را به‌طور کنترل‌شده با هر عضو دیگر اندرکنش دهند [19-20]. بنابراین به‌غیر از شبکه‌های مرسوم، ساختارهای دیگری از اسپین‌های

\* نویسنده مسئول: m.ghanavati45@yahoo.com

باز نشر این مقاله با ذکر منبع آزاد است.

### کانکرنس

این سنجه در سال 1998/1377 توسط ووترز<sup>1</sup> [23] در حالت خالص و آمیخته برای سیستم‌های دو کیوبیتی، یا دو جزء از یک سیستم چند کیوبیتی، با ماتریس چگالی  $\rho$  به صورت زیر معرفی شد:

$$C(\rho) = \text{Max}(0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}) \quad 2$$

که در آن  $\lambda_i$ ها

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$$

ویژه مقادیر (ماتریس چگالی اسپین وارون) زیر

هستند:

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad 3$$

که در آن  $\sigma_y$  مؤلفه  $y$  ماتریس پائولی و  $\rho^*$  مزدوج مختلط ماتریس چگالی  $\rho$  در پایه‌های  $|00\rangle$ ،  $|01\rangle$ ،  $|10\rangle$  و  $|11\rangle$  است. مقدار  $C(\rho)$  بین صفر و یک تغییر می‌کند، برای حالتی با بیشترین مقدار درهم تنیدگی برابر یک و برای حالت جداپذیر برابر صفر است.

### درهم تنیدگی در حالت پایه

ترکیب ستاره‌ای با ضریب جفت‌شدگی برابر برای همه کیوبیت‌ها، به دلیل ناوردا بودن تحت تبادل هر دو اسپین بیرونی، خواص تقارنی زیادی دارد و به راحتی تحت هامیلتونی 1 مدل xx قابل حل می‌باشد. در این قسمت ترکیب ستاره‌ای شش کیوبیتی را در نظر می‌گیریم. حالت پایه آن را برحسب ضریب

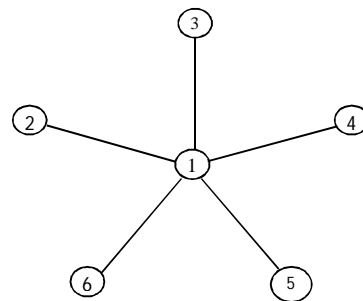
زیرتنظیم شده است. در بخش 2 هامیلتونی شبکه دو بعدی و در بخش 3 سنجشگر دوتایی کانکرنس را معرفی می‌کنیم. در بخش 4 درهم تنیدگی دوتایی در حالت پایه را بررسی خواهیم کرد. درهم تنیدگی چندتایی را در بخش 5 مطالعه و بررسی می‌کنیم. سرانجام در بخش 6 نتایج حاصل جمع‌بندی خواهند شد.

### هامیلتونی مدل ستاره‌ای دو بعدی اسپینی

در این مدل یک کیوبیت در مرکز و بقیه کیوبیت‌ها به فاصله معین از آن قرار گرفته‌اند، و تنها کیوبیت مرکزی با دیگر کیوبیت‌ها برهم‌کنش دارد [21-22]. هامیلتونی این مدل به صورت زیر است:

$$H = J \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_0^+ \sigma_i^- + \sigma_0^- \sigma_i^+) + B \sum_{i=1}^N \sigma_i^z \quad 1$$

که در آن  $J$  ضریب برهم‌کنش اسپین مرکزی با اسپین‌های کناری (بیرونی) است،  $\sigma^+$  عملگر پائولی بالا بر و  $\sigma^-$  عملگر پائولی پایین بر است.  $\sigma_0^+$  و  $\sigma_0^-$  مربوط به اسپین مرکزی هستند. مطابق شکل 1 تحت تعویض کیوبیت‌های بیرونی هامیلتونی ناورداست، از این رو سیستم تقارن زیادی دارا می‌باشد.



شکل 1. شبکه ستاره‌ای اسپینی

<sup>1</sup> W.K. Wootters

$$\begin{aligned}
 |\psi_4\rangle = & \frac{1}{2\sqrt{5}} (-|000111\rangle - |001011\rangle - |001101\rangle \\
 & - |001110\rangle - |010011\rangle - |010101\rangle - |010110\rangle \\
 & - |011001\rangle - |011010\rangle - |011100\rangle + |100011\rangle \\
 & + |100101\rangle + |100110\rangle + |101001\rangle + |101010\rangle \\
 & + |101100\rangle + |110001\rangle + |110010\rangle \\
 & + |110100\rangle + |111000\rangle) \quad 11
 \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود ویژه‌بردارهای سیستم در حالت پایه به ضریب برهم‌کنش و میدان مغناطیسی بستگی ندارند. البته در هر محدوده انرژی، حالت پایه سیستم متفاوت است.

چون حالت‌های پایه سیستم خالص هستند، ماتریس چگالی سیستم را به سهولت به دست می‌آوریم. سپس بارد گرفتن بر روی چهار کیوبیت از شش کیوبیت همه ماتریس‌های چگالی کاهش یافته بین دو کیوبیت را به دست می‌آوریم. سرانجام با توجه به رابطه‌های 2 و 3 کانکرنس را محاسبه می‌کنیم. در این حالت پانزده مقدار درهم‌تنیدگی به دست می‌آید که مطابق زیر آنها را گروه‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 C_{12} = C_{13} = C_{14} = C_{15} = C_{16} \\
 C_{23} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} \\
 = C_{36} = C_{45} = C_{46} = C_{56}
 \end{aligned}$$

گروه اول درهم‌تنیدگی بین کیوبیت مرکزی و دیگر کیوبیت‌ها را نشان می‌دهد و گروه دوم درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های بیرونی را نشان می‌دهد. مقادیر حاصل از محاسبات بالا در جدول 1 نشان داده شده است.

جفت‌شدگی  $J$  و میدان مغناطیسی  $B$  به صورت زیر به دست می‌آوریم. انرژی حالت پایه در چهار محدوده متفاوت به صورت زیر است:

$$\varepsilon_1 = -6B, \quad J \leq \frac{2B}{\sqrt{5}} \quad 4$$

$$\varepsilon_2 = -4B - \sqrt{5}J, \quad \frac{2B}{\sqrt{5}} \leq J < \frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}, \quad 5$$

$$\varepsilon_3 = -2(B + \sqrt{2}J), \quad \frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} \leq J < \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}, \quad 6$$

$$\varepsilon_4 = -3J, \quad J \geq \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}, \quad 7$$

برای هر محدوده بالا، ویژه‌توابع هامیلتونی نظیر را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$|\psi_1\rangle = |111111\rangle, \quad 8$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_2\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{2}}|011111\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}(|101111\rangle + |110111\rangle \\
 & + |111011\rangle + |111101\rangle + |111110\rangle), \quad 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\psi_3\rangle = & -\frac{1}{\sqrt{10}}(|001111\rangle + |010111\rangle + |011011\rangle \\
 & + |011101\rangle + |011110\rangle) + \frac{1}{2\sqrt{5}}(|100111\rangle \\
 & + |101011\rangle + |101101\rangle + |101110\rangle \\
 & + |110011\rangle + |110101\rangle + |110110\rangle \\
 & + |111001\rangle + |111010\rangle + |111100\rangle) \quad 10
 \end{aligned}$$

جدول 1. حالت پایه شبکه ستاره‌ای و درهم‌تنیدگی دوتایی آن حالت‌ها

Range	$J \leq \frac{2B}{\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{\sqrt{5}} \leq J < \frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} \leq J < \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}$	$J \geq \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}$
ground State	$ \psi_1\rangle$	$ \psi_2\rangle$	$ \psi_3\rangle$	$ \psi_4\rangle$
$C_{12}$	0	0,447	0,22	0,2
$C_{23}$	0	0,2	0,2	0,2

که در آن  $\rho_k$  ماتریس چگالی کاهش یافته  $k$  امین کیوبیت، با ردگیری روی بقیه کیوبیت‌ها است.  $Q(\psi)$  مقداری بین صفر و یک است، برای حالتی با بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی برابر یک و برای حالت جداپذیر برابر صفر است.

اسکات<sup>3</sup> در سال 2004/1383 سنجه درهم‌تنیدگی یک سیستم چند جزئی را به صورت زیر معرفی کرد [8].

$$Q_m = \left( \binom{N}{m} \right)^{-1} \sum_{|S_m|} \frac{2^m}{2^m - 1} \left( 1 - \text{Tr}[\rho_m^2] \right) \quad 13$$

که در آن  $\rho_m$  ماتریس چگالی کاهش یافته  $m$  کیوبیت از کیوبیت‌های زیر سیستم  $S$  بعد از رد گرفتن روی بقیه کیوبیت‌ها است. به ازاء  $m = 1$  رابطه اسکات به رابطه میر-والاش تبدیل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که سنجه اسکات برای حالت‌های چند جزئی خالص تعریف شده است.  $Q_m$  و  $Q_{N-m}$  مستقل نیستند، برای هر حالت خالص  $N$  کیوبیتی با  $N$  زوج، تعداد  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  و برای  $N$  فرد تعداد  $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor$ ، سنجه درهم‌تنیدگی  $Q_m$  مستقل وجود دارد.

اگر هر حالت خالص  $N$  کیوبیتی را به دو مجموعه  $s$  با  $m$  کیوبیت و  $\bar{s}$  با  $n$  کیوبیت تقسیم کنیم، به طوریکه  $N = n + m$  باشد، در نتیجه درهم‌تنیدگی بین بلوکه  $m$  با  $n$  با سنجه زیر اندازه‌گیری می‌شود [24].

$$\eta_{m,n} = \frac{2^m}{2^m - 1} \left( 1 - \text{Tr}[\rho_m^2] \right) \quad 14$$

که در آن  $\rho_m$  ماتریس چگالی کاهش یافته  $m$  کیوبیت از کیوبیت‌های زیر سیستم  $S$  بعد از رد گرفتن روی

با بررسی داده‌های جدول 1، ملاحظه می‌شود که سیستم در حالت  $|\psi_1\rangle$  کاملاً جداپذیر است، اما در حالت  $|\psi_2\rangle$  بیشینه درهم‌تنیدگی دو جزئی را دارد. درهم‌تنیدگی بین کیوبیت مرکزی و هر یک از کیوبیت‌های بیرونی در محدوده  $\frac{2B}{\sqrt{5}} \leq J < \frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$  بیشینه مقدار را دارد. در محدوده  $J \leq \frac{2B}{\sqrt{5}}$  هر دو نوع درهم‌تنیدگی  $C_{12}$  و  $C_{23}$  صفر هستند. در بازه  $J \geq \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}$  درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های بیرونی ثابت است و بستگی به مقدار  $B$  و  $J$  ندارد.

### درهم‌تنیدگی چند جزئی

در سال 2001/1380 میر-والاش<sup>1</sup> یک سنجه درهم‌تنیدگی برای سیستم‌های چند جزئی خالص معرفی کرد [6]. در سال 2003/1382 برن<sup>2</sup> این سنجه را بررسی کرد و نشان داد که درهم‌تنیدگی چندتایی براساس این سنجه تابعی یکنوا است. سنجه گلوبال میر-والاش با رابطه زیر بیان می‌شود [24]:

$$Q(\psi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2(1 - \text{Tr}[\rho_k^2]) \quad 12$$

<sup>1</sup> D.A Meyer and N.R Wallach

<sup>2</sup> G.K. Brennen

<sup>3</sup> A.J. Scott

کار سیستم مورد نظر را می‌توان به دو مجموعه S با m کیوبیت و  $\bar{S}$  با  $N - m$  کیوبیت تقسیم کرد، با توجه به اینکه سیستم ما شش کیوبیتی است، آنرا به دسته‌های یک و پنج تایی، دو و چهار تایی و سه و سه کیوبیتی دسته‌بندی کرده و درهم‌تندگی دسته‌ها را بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه 13 می‌دانیم که  $Q_1 = Q(\psi)$  است، در نتیجه فقط لازم است که  $Q_2$  و  $Q_3$  را محاسبه کنیم. به این منظور ابتدا همه ماتریس‌های چگالی دو تایی سیستم را به دست می‌آوریم:

$$\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{14}, \rho_{15}, \rho_{16}, \rho_{23},$$

$$\rho_{24}, \rho_{25}, \rho_{26}, \rho_{34}, \rho_{35}, \rho_{36},$$

$$\rho_{45}, \rho_{46}, \rho_{56}$$

18

به عنوان مثال داریم:

$$\rho_{12} = \text{Tr}_3(\text{Tr}_4(\text{Tr}_5(\text{Tr}_6(\rho)))) \quad 19$$

سپس  $Q_2$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$Q_2 = \frac{4}{45} [(1 - \text{Tr}(\rho_{12}^2)) + \dots + (1 - \text{Tr}(\rho_{56}^2))] \quad 20$$

برای حالت‌های پایه که در رابطه‌های 8 تا 11 داده شده‌اند،  $Q_2$  را محاسبه می‌کنیم، نتایج در جدول 2 آمده است.

برای محاسبه  $Q_3$  ابتدا ماتریس چگالی دسته‌های سه تایی را محاسبه می‌کنیم:

$$\rho_{123}, \rho_{124}, \rho_{125}, \rho_{126}, \rho_{134}, \rho_{135}, \rho_{136},$$

$$\rho_{145}, \rho_{146}, \rho_{156}, \rho_{234}, \rho_{235}, \rho_{236}, \rho_{245},$$

بقیه کیوبیت‌ها است. مقدار هر  $\eta_{m,n}$  بین صفر تا یک است. پس برای هر حالت خالص  $N$  کیوبیتی، مجموعه  $S$  شامل  $2^{N-1} - 1$  سنجه درهم‌تندگی مستقل است. همچنین سنجه درهم‌تندگی  $R$  که میانگین هندسی  $\eta_{m,n}$ ‌های مستقل است، به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \left( \prod_S \eta_{m,n} \right)^{\frac{1}{2^{N-1} - 1}} \quad 15$$

$R$  نیز یک سنجه درهم‌تندگی گلوبال است و اگر و فقط اگر حداقل یکی از  $\eta_{m,n}$  صفر باشد،  $R$  صفر می‌شود. یعنی در صورتی یک حالت چندجزئی بر اساس سنجه  $R$  درهم‌تندیده است که همه اجزای آن با هم درهم‌تندیده باشند.

از آنجا که حالت‌های ما خالص هستند می‌توان ماتریس چگالی را برای هر حالت به صورت زیر به دست آورد:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad 16$$

برای به دست آوردن درهم‌تندگی گلوبال از رابطه 12 استفاده می‌کنیم، ابتدا  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$  را با ردگیری روی بقیه کیوبیت‌ها به دست می‌آوریم. سپس درهم‌تندگی گلوبال سیستم را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$Q(\psi) = \frac{2}{6} (6 - \text{Tr}[\rho_1^2] - \text{Tr}[\rho_2^2] - \text{Tr}[\rho_3^2] - \text{Tr}[\rho_4^2] - \text{Tr}[\rho_5^2] - \text{Tr}[\rho_6^2]) \quad 17$$

برای چهار حالت پایه  $Q(\psi)$  را محاسبه می‌کنیم، که در جدول 2 نتایج درج شده‌اند.

چون  $Q(\psi)$  توانایی تشخیص درهم‌تندگی زیر سیستم‌ها را ندارد، برای بررسی درهم‌تندگی زیرسیستم‌ها از سنجه اسکات استفاده می‌کنیم. برای این

چنانکه دیده می‌شود باز هم به دلیل تقارن همه با هم برابرند.

$$\rho_{246} \cdot \rho_{256} \cdot \rho_{345} \cdot \rho_{346} \cdot \rho_{356} \cdot \rho_{456}$$

21

در نتیجه از رابطه 13 داریم:

$$Q_3 = \frac{2}{35} [(1 - \text{Tr}(\rho_{123}^2)) + \dots + (1 - \text{Tr}(\rho_{456}^2))] \quad 22$$

نتایج محاسبه  $Q_3$  برای حالت‌های پایه در جدول 2 آمده است. برای سنجش درهم تنیدگی بلوک‌های مستقل از سنجه رابطه 14 استفاده می‌کنیم. ابتدا ماتریس‌های چگالی سیستم را به دست می‌آوریم، سپس با توجه به ماتریس‌های چگالی به دست آمده، 31 پارامتر  $\eta$  مستقل را محاسبه می‌کنیم.

$$\eta_1 = 2(1 - \text{Tr}(\rho_1^2)) \quad 23$$

بنا به تقارن داریم:

$$\eta_6 = \eta_5 = \eta_4 = \eta_3 = \eta_2 = 2(1 - \text{Tr}(\rho_2^2)) \quad 24$$

همچنین:

$$\eta_6 = \eta_5 = \eta_4 = \eta_3 = \eta_2 = \frac{4}{3}(1 - \text{Tr}[\rho_{15}^2]) \quad 25$$

علاوه بر این:

$$\eta_{26} = \eta_{25} = \eta_{24} = \eta_{23} = \frac{4}{3}(1 - \text{Tr}[\rho_{23}^2])$$

$$= \eta_{56} = \eta_{46} = \eta_{45} = \eta_{36} = \eta_{35} = \eta_{34} \quad 26$$

اینک به محاسبه  $\eta$  های سه تایی می‌پردازیم، در نتیجه داریم:

$$\eta_{123} = \frac{8}{7}(1 - \text{Tr}(\rho_{123}^2))$$

$$\eta_{123} = \eta_{124} = \eta_{125} = \eta_{126} = \eta_{134} =$$

$$\eta_{135} = \eta_{136} = \eta_{145} = \eta_{146} = \eta_{156} \quad 27$$

جدول 2. حالت پایه شبکه ستاره‌ای و درهم تنیدگی گلوبال

آن حالت‌ها

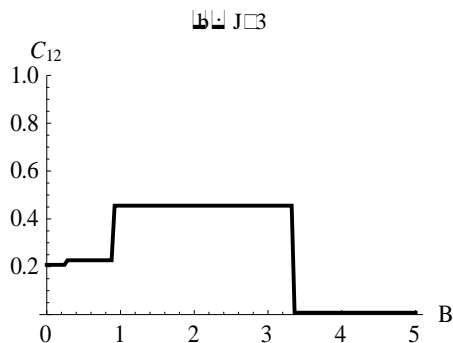
Range	$J \leq \frac{2B}{\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{\sqrt{5}} < J < \frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$	$\frac{2B}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} < J < \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}$	$J \geq \frac{2B}{3-2\sqrt{2}}$
ground State	$ \psi_1\rangle$	$ \psi_2\rangle$	$ \psi_3\rangle$	$ \psi_4\rangle$
$\eta_1$	0	1	1	1
$\eta_2$	0	0,360	0,840	1
$\eta_{12}$	0	0,640	0,720	0,747
$\eta_{23}$	0	0,427	0,720	0,747
$\eta_{123}$	0	0,480	0,634	0,674
$Q$	0	0,470	0,860	1
$Q_2$	0	0,497	0,724	0,747
$Q_3$	0	0,480	0,634	0,674
$R$	0	0,473	0,718	0,765

اینک سنجه  $R$  را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$R = (\eta_1 * \eta_2 * \dots * \eta_{156})^{\frac{1}{31}} \quad 28$$

مقادیر  $R$  در جدول 2 درج شده‌اند.

با بررسی داده‌های جدول 2، ملاحظه می‌شود که در میدان‌های بزرگ درهم تنیدگی گلوبال صفر می‌شود.  $|\psi_4\rangle$  یک حالت پایه با بیشینه درهم تنیدگی گلوبال است. همچنین درمی‌یابیم که با افزایش ضریب برهم‌کنش، میزان درهم تنیدگی بیشتر می‌شود. علاوه بر این درمی‌یابیم که تأثیر اسپین مرکزی بر درهم تنیدگی حالت سیستم بیشتر از دیگر اسپین‌ها



شکل 2. مدل ستاره‌ای برحسب  $B$  به‌ازاء  $J = 1, 3$ .

حالت پایه  $|\psi_2\rangle$  بیشینه درهم‌تنیدگی دو جزئی را دارد در حالی که  $|\psi_4\rangle$  یک حالت پایه با بیشینه درهم‌تنیدگی گلوبال است و درهم‌تنیدگی دو جزئی بین همه کیوبیت‌های آن برابر است، یعنی توزیع درهم‌تنیدگی در آن کاملاً یکنواخت است و به موقعیت کیوبیت‌ها بستگی ندارد.

### نتیجه‌گیری

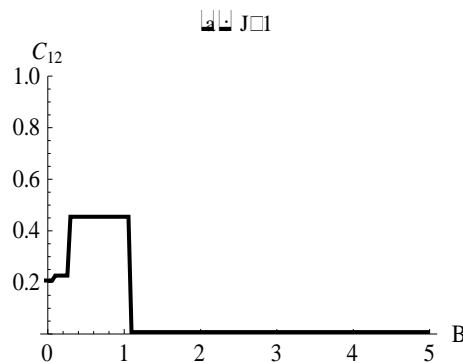
حالت‌های پایه شبکه ستاره‌ای 6 کیوبیتی در حضور میدان مغناطیسی محاسبه و درهم‌تنیدگی دوتایی و چندتایی آن‌ها در حالت پایه بررسی و تحلیل شده است. علاوه بر این، میدان مغناطیسی خارجی را به‌عنوان عامل تنظیم‌کننده حالت‌های پایه به‌کار برده‌ایم و حالت‌های پایه جداپذیر، درهم‌تنیده و حالت‌های با بیشینه درهم‌تنیدگی را برای این شبکه مشخص نموده‌ایم. با استفاده از سنج‌های درهم‌تنیدگی کانکرنس، میر-والش و تعمیم‌های آن، مقادیر درهم‌تنیدگی دوتایی و چندتایی برای حالت‌های پایه سیستم محاسبه و یک ساختار جامع درهم‌تنیدگی برای آن ارائه و توصیف شده است. نتایج حاصل از این تحقیق در بررسی گذار فاز کوآنتومی، در فیزیک ماده چگال و در اطلاعات و محاسبات کوآنتومی کاربرد دارد.

است. وقتی که سیستم را به بلوک‌های دوتایی و سه‌تایی دسته‌بندی می‌کنیم، درهم‌تنیدگی گلوبال اسپین مرکزی با دیگر اسپین‌ها بیشتر از درهم‌تنیدگی گلوبال هر اسپین با اسپین کناری است.

### بحث و بررسی

یافتن حالت پایه هامیلتونی یک سیستم چند کیوبیتی، یکی از مسائل مهم در فیزیک ماده چگال و نظریه اطلاعات کوآنتومی است [25-26]. در این پژوهش حالت پایه شبکه ستاره‌ای را به‌ازاء مقادیر متفاوت ضریب برهم‌کنش، میدان مغناطیسی و رابطه بین آنها به‌دست می‌آوریم. بررسی جدول‌های 1 و 2 نشان می‌دهد که با اعمال میدان خارجی به سیستم، محدوده‌ای که حالت پایه کاملاً جداپذیر است از محدوده‌ای که حالت پایه بیشینه درهم‌تنیدگی را دارد، کاملاً مشخص می‌شود. در شکل‌های 2 و 3 نمودار  $C_{12}$  و  $C_{23}$  برحسب میدان به‌ازاء مقادیر متفاوت ضریب برهم‌کنش شبکه رسم شده است.

با توجه به جدول‌های 1 و 2 و شکل‌های 2 و 3 در می‌یابیم که در میدان‌هایی با شدت بالا درهم‌تنیدگی دو جزئی و چند جزئی صفر است. همچنین نشان داده شده است که با افزایش ضریب برهم‌کنش شبکه، دامنه درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد.



ground states, *International Journal of Quantum Information* **13** (2015) 1-11.

[6] D.A. Meyer, N.R. Wallach, Global entanglement in multiparticle systems, *Journal of Mathematical Physics* **43** (2002) 4273-4278.

[7] G.K. Brennen, An Observable measure of entanglement for pure states of multi-qubit systems, *Quantum Information & Computation* **3** 6 (2003) 619-626.

[8] A.J. Scott, Multipartite entanglement quantum-error-correcting codes and entangling power of quantum evolutions, *Physical Review A* **69** (2004) 1-13.

[9] D.r Bruß, N. Datta, A. Ekert, L. Ch. Kwek, Ch. Macchiavello, Multipartite entanglement in quantum spin chain, *Physical Review A* **72** (2005) 1-4.

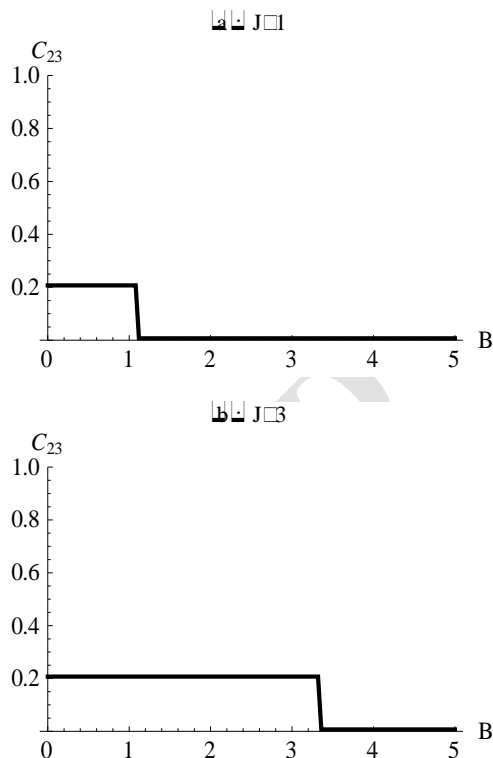
[10] R. Jie, ZHU. Shi-Qun, Multipartite Entanglement in Heisenberg Model, *Communications in Theoretical Physics* **49** (2008) 1449-1452.

[11] T. Roscilde, P. Verrucchi, A. Fubini, S. Haas, V. Tognetti, Entanglement and factorized ground states in two-dimensional quantum antiferromagnets, *Physical Review Letters* **94** (2005) 1-4.

[12] R.Eryigit, R.Eryigit, Y.Gunduc, Analytical study of thermal entanglement in a two-dimensional J1-J2 model, *Physical Letters A* **358** (2006)363-367.

[13] R. Zhang, Sh. Zhu, Thermal entanglement in a two-dimensional Heisenberg XY model, *Physical Letters A* **348** (2006) 110-118.

[14] Q. Xu, S. Kais, M. Naumov, A. Sameh, Exact calculation of entanglement in a 19-site 2D spin system, *Physical Review A* **81**(2010) 1-11.



شکل 3.  $C_{23}$  مدل ستاره‌ای برحسب  $B$  به‌ازاء  $J = 1, 3$ .

### مرجع‌ها

[1] K.M. O'Conner, W.K. Wootters, Entangled rings, *Physical Review A* **63** (2001) 052302-1-052302-9.

[2] X. Wang, Entanglement in the quantum Heisenberg XY model, *Physical Review A* **64** (2001) 1-7.

[3] D. Gunlycke, S. Bose, V.M. Kendon, V. Vedral, Thermal concurrence mixing in a one-dimensional Ising model, *Physical Review A* **64** (2001) 1-7.

[4] G.L. Kamta, A.F. Starace, Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit Heisenberg XY chain, *Physical Review Letters* **88** (2002) 1-4.

[5] M. Jafarpour, S. Ghanavati, D. Afshar, Entanglement distribution in a two-dimensional 5-site frustrated J1-J2 spin system: Separable and globally entangled



- [21] A. Hutton, S. Bose, Comparison of star and ring topologies for entanglement Distribution, *Physical Review A* **66**(2002) 1-14.
- [22] A. Hutton, S. Bose, Mediated entanglement and correlations in a star network of interacting spins, *Physical Review A* **69** (2004) 1-4.
- [23] W.K. Wootters, Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, *Physical Review Letters* **80** (1998) 2245-2248.
- [24] P.J. Love et al, A characterization of global entanglement, *Quantum Information Processing* **6** (2007) 187-195.
- [25] U. Scholl Wock, J. Richter, D.J.J. Farnell, R.F. Bishop (Eds.), *Quantum Magnetism*, Lect. Notes Phys. 645, Springer, Berlin Heidelberg (2004).
- [26] Gu. Shi-Jian, Lin. Hai-Qing, Scaling dimension of fidelity susceptibility in quantum phase transitions, *Euro physics Letters* **87**(2009) 10003-10005.
- [15] Q. Xu, G. Sadiek, S. Kais, Dynamics of entanglement in a two-dimensional spin system, *Physical Review A* **83**(2011) 062312-062338.
- [16] G. Sadiek, Impurity effect on entanglement in an XY two-dimensional spin lattice, *Journal of King Saud University – Science* **24** (2012) 331–338.
- [17] Q. Xu, G. Sadiek, S. Kais, Tuning entanglement and ergodicity in two-dimensional spin systems using impurities and anisotropy, *Physical Review A* **85**(2012) 1-21.
- [18] G. Sadiek, S. Kais, Persistence of entanglement in thermal states of spin systems, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **46**(2013) 1-25.
- [19] J.I. Cirac, P. Zoller, A scalable quantum computer with ions in an array of microtraps, *Nature* **404** (2000) 579-581.
- [20] S.B. Zheng, G.C. Guo, Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED, *Physical Review Letters* **85**(2000) 2392-2395.

## Calculating the ground state entanglement of a two-dimensional spin star lattice

Soghra Ghanavati<sup>1\*</sup>, Mojtaba Jafarpour<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Physics, Omidyeh Branch, Islamic Azad University, Omidyeh, Iran

<sup>1,2</sup>Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Received: 04.09.2017    Final revised: 30.12.2017    Accepted: 04.03.2018

### Abstract

In this study, the ground states of a 6-qubit star lattice are studied in the presence of a magnetic field. In addition, their bipartite and multipartite entanglements are obtained, using concurrence as a measure of bipartite entanglement and Meyer–Wallach measure and its generalizations as the measures of multipartite entanglement. Also, a comprehensive structure of their entanglement is presented and described. It is shown that the external magnetic field is a tuning agent that determines the separable ground states, the global entangled states and the states between them. Determination of these states helps to choose the required ones for different quantum information processes.

**Keywords:** Ground state, Entanglement, Two-dimensional spin lattice

---

\* Corresponding Author: m.ghanavati45@yahoo.com