

## ‘Cosmological wormholes in an inhomogeneous spherically symmetric space time

Mohammad Reza Mehdizadeh \*, Jaber Poorsolimani

Department of Physics, Shahid bahonar University of Kerman, Kerman. Iran

Received: 06.01.2020 Final revised: 01.08.2020 Accepted: 21.09.2020

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15928](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15928)

### Abstract

In this paper, we study a family of dynamical wormhole solutions in an inhomogeneous spherically symmetric space time by considering a specific radial dependent redshift function. Using a generalized Friedmann-Robertson-Walker spacetime, we derive analytical evolving wormhole geometries by assuming a particular equation of state for energy density and pressure profiles. We calculate these classes of solutions for zero separation constant and their scale factor. The rate of expansion of these evolving wormholes is determined only by the standard Friedmann equation in cosmology. We introduce exact asymptotically flat solutions that respect energy conditions at throat. Finally, we investigate the weak energy condition for these solutions with detail.

**Keywords:** wormhole, weak energy condition, Cosmology

---

\* Corresponding Author: mehdizadeh.mr@uk.ac.ir



## کرمچاله‌های کیهانی در یک فضا زمان متقارن کروی ناهمگن

محمد رضا مهدی‌زاده\*، جابر پورسلیمانی

دانشکده فیزیک دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

دریافت: 1398/10/16 ویرایش نهائی: 1399/05/11 پذیرش: 1399/06/31

Doi link: [10.22055/JRMBS.2020.15928](https://doi.org/10.22055/JRMBS.2020.15928)

### چکیده

در این مقاله ما دسته‌ای از جواب‌های کرمچاله‌ای دینامیکی در یک فضا زمان غیر همگن متقارن کروی را با در نظر گرفتن تابع سرخ‌گرایی وابسته به شعاع مطالعه نموده‌ایم. با تعمیم متریک فریدمان-روبرتسون-واکر جواب‌های دینامیکی کرمچاله‌ای با استفاده از یک معادله حالت خاص بین چگالی انرژی و مؤلفه‌های فشار محاسبه شده‌اند. ما این دسته از جواب‌ها را با انتخاب ثابت جداسازی صفر تعیین و عامل مقیاس آنها را محاسبه نموده‌ایم. آهنگ انبساط دینامیکی کرمچاله‌ها با استفاده از معادله استاندارد فریدمان در کیهان‌شناسی تعیین می‌شوند. ما به معرفی کرمچاله‌هایی گذر پذیر با ارضاء شرایط انرژی در گلوگاه پرداخته‌ایم. در پایان شرایط انرژی ضعیف برای این دسته از جواب‌های کرمچاله‌ای بررسی شده‌اند.

**کلیدواژگان:** کرمچاله، شرایط انرژی ضعیف، کیهان‌شناسی

### مقدمه

از معادله حالت‌های مختلف ما بین مؤلفه‌های تانسور انرژی تکانه حمایت‌کننده این ساختارها می‌باشد. برای نمونه با انتخاب معادله حالت خطی ما بین چگالی انرژی و فشار شعاعی جواب‌های کرمچاله‌ای در مرجع 4 مطالعه شده‌اند. در این مقالات انرژی حمایت‌کننده جواب‌ها انرژی فانتوم معرفی می‌شوند. در مرجع 5 نویسندگان جواب‌های کرمچاله‌ای استاتیک با شماره‌ای با فشار همسانگرد را معرفی نموده‌اند و نشان داده‌اند که جواب‌های کرمچاله‌ای با تابع سرخ‌گرایی گرانشی صفر وجود ندارند در نتیجه با انتخاب تابع سرخ‌گرایی توانی مجاناً غیر تخت جواب‌های کرمچاله‌ای را مطالعه نموده‌اند. جواب‌های استاتیک معرفی شده شرایط انرژی را در محل گلوگاه نقض

یکی از نتایج نظریه اینشتین وجود راه‌های میانبر در فضا-زمان است که کرمچاله نامگذاری شده‌اند. در واقع دو نقطه از یک فضا-زمان یا دو فضای متفاوت از طریق یک گلوگاه به هم وصل می‌شوند [1]. کرمچاله‌های معرفی شده در چارچوب گرانش اینشتین شرایط استاندارد انرژی را نقض می‌کنند. در حقیقت نقض شرط انرژی نتیجه‌ای از شرط باز شدگی برای کرمچاله‌ها است [2]. ماده سازنده این نوع کرمچاله‌ها بنام ماده مجازی مشهور است [3]. در سال‌های اخیر تلاش‌های بسیاری برای برطرف نمودن این موضوع و ساخت کرمچاله‌هایی با ماده معمولی انجام شده است. یکی از راه‌های معرفی جواب‌های کرمچاله‌ای استفاده

\* نویسنده مسئول: mehdizadeh.mr @uk.ac.ir

کننده کرمچاله‌ها را انرژی فانتوم در نظر گرفت که در کیهان شناسی به عنوان کاندیدایی احتمالی برای شتاب عالم معرفی شده است [21]. انرژی فانتوم ایجاد فشار منفی می‌کند و شرایط انرژی نول را نقض می‌نماید. بنابراین در سال‌های اخیر کرمچاله‌های دینامیکی در پس زمینه کیهانی به طور گسترده‌ای بررسی شده‌اند [22]. همچنین کرمچاله‌های دینامیکی حمایت شده توسط دو شماره در [23] و یک شماره غیر همسانگرد با معادله حالت کلی و معادله حالت خاص بین مؤلفه‌های تانسور انرژی تکانه به ترتیب در مقاله‌های [24] و [25] مطالعه شده است. در مقاله [24] با استفاده از معادله حالت کلی بین همه مؤلفه‌های تانسور انرژی تکانه و انتخاب ثابت جداسازی مناسب و تابع سرخ‌گرایی صفر جواب‌های کرمچاله‌ای را محاسبه نموده‌اند. انبساط و دینامیک جواب‌های حمایت شده با انرژی فانتوم به واسطه حضور ثابت کیهان شناسی شرح داده می‌شود. همچنین جواب‌های معرفی شده در محل گلوگاه شرایط انرژی نول را نقض می‌کنند.

از دیدگاه نظری می‌توان با انتخاب توابع شکل و سرخ‌گرایی گرانشی خاص و یک ضریب مقیاس برای جهان جواب‌های کرمچاله‌ای دینامیکی را در زمینه کیهانی مطالعه نمود. در این کار ما با اعمال یک معادله حالت فیزیکی بین مؤلفه‌های تانسور انرژی تکانه به بررسی جواب‌های کرمچاله‌ای در یک زمینه کیهانی پرداخته‌ایم. بنابراین ابتدا به تعمیم کلی متریک فریدمان-رابرتسون-واکر می‌پردازیم. سپس با اعمال یک معادله حالت تعمیم یافته بین مؤلفه‌های تانسور انرژی تکانه و با اعمال تابع سرخ‌گرایی غیر صفر جواب‌های کرمچاله‌ای را محاسبه نموده‌ایم. انبساط و

می‌کنند. عدم وجود جواب‌های کرمچاله‌ای با فشار همسانگرد در حالت کلی در مرجع 6 اثبات شده است. کرمچاله‌های استاتیک در گرانش‌های اصلاح شده از جمله گرانش گاوس بونت و لاولاک می‌توانند به علت حضور جملات مرتبه بالاتر انحنای در محل گلوگاه شرایط انرژی را ارضا کنند [7]. اخیراً نشان داده شد جواب‌های استاتیک در گرانش لاولاک می‌توانند شرایط انرژی را در تمام فضا زمان ارضاء نمایند [8]. در سال‌های اخیر جواب‌های کرمچاله‌ای در گرانش‌های اصلاح شده مورد توجه قرار گرفته‌اند که می‌توان به جواب‌های کرمچاله‌ای در نظریه برانز دیکی [9]، گرانش بون اینفلد [10]، کالوزا کلاین [11]، گرانش  $f(R)$  [12]، گرانش اینشتین کارتن [13] و گرانش‌های اسکالر-تانسور [14] اشاره نمود. مطالعه بر روی ژئودزیک‌های کرمچاله‌های استاتیک و کشف آثار مشاهداتی با استفاده از پراکندگی ذرات از کرمچاله‌ها در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [15]. تحقیق درباره آثار مشاهداتی کرمچاله‌ها از جمله لنزهای گرانشی [16] و میکرو لنزها [17] و سایه‌های کرمچاله‌ها در [18] بررسی شده است.

همچنین کرمچاله‌های پوسته نازک با ابعاد بالاتر و در گرانش‌های اصلاح شده به علت وجود جملات با انحنای بالاتر در گلوگاه کرمچاله‌ها می‌توانند منجر به ارضای شرایط انرژی در گلوگاه شوند [19]. میزان ماده حمایت کننده این ساختارها وابسته به هندسه و شکل کرمچاله‌ها می‌باشد بنابراین امکان ارضاء شرایط انرژی در کرمچاله‌های دینامیکی وجود دارد. این نوع کرمچاله‌ها می‌توانند در زمان‌های معینی شرایط انرژی را ارضاء کنند [20]. از یک نظر می‌توان ماده حمایت

$b'(r_0) < 1$  و در تمام فضا زمان ( $r > r_0$ ) می‌بایستی  $r \leq b(r)$  باشد. به علاوه تابع  $R(t)$  ضریب مقیاس کیهان می‌باشد که دینامیک کرمچاله‌ها در یک پس‌زمینه کیهانی را توصیف می‌نماید. واضح است که با انتخاب مقادیر  $\phi(r) \rightarrow 0, b(r) \rightarrow 0$  متریک تخت رابرتسون-واکر و برای  $R(t) \rightarrow const$  متریک استاتیک موریس و تورن به دست می‌آید. در ادامه می‌توان با فرض زمان و زاویه  $\theta = \frac{\pi}{2}$  ثابت و غوطه‌ور سازی متریک 3 در فضای اقلیدسی استوانه‌ای نشان داد که اندازه کرمچاله با گذشت زمان تغییر می‌کند در حالی که شکل آن حفظ می‌شود. در این صورت متریک 3 به شکل

$$ds^2 = \frac{R(t_0)^2 dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + R(t_0)^2 r^2 d\varphi^2 \quad 4$$

نوشته می‌شود. با تعریف فاصله شعاعی جدید به صورت  $\bar{r} = R(t_0)r$  متریک 4 به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$ds^2 = \frac{d\bar{r}^2}{(1 - \frac{\bar{r}}{R(t_0)})} + \bar{r}^2 d\varphi^2 \quad 5$$

که در آن  $\bar{b}(\bar{r}) = R(t_0)b(r)$  تعریف شده است و نشان می‌دهد شعاع گلوگاه با عامل مقیاس  $R(t_0)$  انبساط می‌یابد. برای غوطه ور سازی آن در فضای سه بعدی اقلیدسی متریک

$$ds^2 = dz^2 + d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\varphi^2 \quad 6$$

را در نظر بگیرید. با مقایسه آن با متریک 5 نتیجه می‌شود که

$$\frac{dz}{d\bar{r}} = \pm \left( \frac{\bar{r}}{b(\bar{r})} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad 7$$

دینامیک این دسته از جواب‌ها با معادله دیفرانسیل مشابه با معادلات مدل استاندارد فریدمان در کیهان‌شناسی شرح داده می‌شود. در پایان در مراحل مختلف تکامل کیهان به مطالعه ارضاء شرایط انرژی ضعیف برای جواب‌های کرمچاله‌ای پرداخته شده است.

### کنش و معادلات میدان

کنش هیلبرت در چهار بعد به صورت زیر معرفی می‌شود

$$I = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [R] + S_{matter} \quad 1$$

که  $R$  اسکالر ریچی معرفی شده است. با وردش کنش 1 نسبت به تانسور متریک می‌توان معادلات میدان در گرانش اینشتین را به شکل زیر به دست آورد

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = T_{\mu\nu} \quad 2$$

که در این معادله،  $R_{\mu\nu}$ ،  $g_{\mu\nu}$  و  $T_{\mu\nu}$  به ترتیب تانسور ریچی، تانسور متریک و تانسور انرژی تکانه تعریف می‌شوند. در اینجا ما از دستگاه واحد با  $8\pi G = 1$  استفاده نموده‌ایم. در ادامه ما متریک تعمیم یافته موریس و تورن را به شکل زیر

3

$$ds^2 = -e^{2\theta(r)} dt^2 + R(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - \frac{b(r)}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right)$$

در نظر می‌گیریم. که در آن  $\phi(r)$  همان تابع سرخ‌گرایی گرانشی و  $b(r)$  تابع شکل کرمچاله است. تابع شکل می‌بایستی شرط بازشدگی را در گلوگاه ارضا کند یعنی

$$\rho(r,t) = \frac{3\left(\frac{d}{dt}R(t)\right)^2 r^2 + e^{2\phi(r)}\left(\frac{d}{dr}b(r)\right)}{e^{2\phi(r)}r^2 R(t)^2} \quad 12$$

13

$$p_r(r,t) = \frac{2\frac{d^2R(t)}{dt^2}r^3R(t) + 2e^{2\phi(r)}(r-b(r))\frac{d\phi(r)}{dr} - \left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 r^3 - e^{2\phi(r)}b(r)}{r^3R(t)^2 e^{2\phi(r)}}$$

$$P_t(r,t) = \frac{\xi(r,t)}{r^3R(t)^2 e^{2\phi(r)}} \quad 14$$

$$q(r,t) = -\frac{2\left(\frac{d}{dt}R(t)\right)\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)}{e^{2\phi(r)}R(t)} \quad 15$$

که در اینجا  $\rho(r,t)$  چگالی انرژی  $p_r(r,t)$  فشار شعاعی  $P_t(r,t)$  فشار عرضی و  $q(r,t)$  شار انرژی در امتداد شعاع به سمت بیرون معرفی شده است. واضح است که در کرمچاله های استاتیک  $R(t) = const$  و کرمچاله های با تابع سرخ گرایی ثابت  $\phi(r) = const$  مقدار  $q$  برابر با صفر به دست می آید. در معادله 14، مقدار  $\xi(r,t)$  به صورت

$$\begin{aligned} \xi(r,t) = & r^2 e^{2\phi(r)}(r-b(r))\frac{d^2}{dr^2}\phi(r) \\ & 2R(t)r^3\left(\frac{d^2}{dt^2}R(t)\right) + \frac{1}{2}r^2 e^{2\phi(r)}(r-b(r))\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right)^2 - \\ & \frac{1}{2}r e^{2\phi(r)}\left(r\frac{d}{dr}b(r) - 2r + b(r)\right)\left(\frac{d}{dr}\phi(r)\right) - \\ & r^3\left(\frac{d}{dt}R(t)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(-e^{2\phi(r)}r\frac{d}{dr}b(r) + e^{2\phi(r)}b(r)\right) \end{aligned}$$

تعریف می شود.

در ادامه می توان از استراتژی های مختلفی برای یافتن جواب های کرمچاله ای استفاده نمود. همچنین در بسیاری از مقالات با اعمال یک معادله حالت مناسب و منطقی بین مؤلفه های تانسور انرژی تکانه تابع شکل و تابع ردشیف گرانشی محاسبه شده اند. در واقع ما

بنابراین شکل کرمچاله های دینامیکی در دستگاه جدید حفظ می شود. شرط بازشدگی برای یک کرمچاله در حال گسترش در نزدیکی گلوگاه به صورت

$$\frac{d^2\bar{r}(\bar{z})}{d\bar{z}^2} = \left(\frac{\bar{b}-\bar{b}'\bar{r}}{2\bar{b}^2}\right) > 0 \quad 8$$

نوشته می شود و در تمام زمان ها در محل گلوگاه برای عبور پذیری کرمچاله همواره حفظ خواهد شد. همچنین گلوگاه به صورت یک سطح کمینه بر روی ابر رویه نول تعریف شده است. در واقع می توان سطح سه بعدی که نماینده گلوگاه کرمچاله ( $\Sigma$ ) است را با شرط

$$\{\forall r \in \Sigma : r - r_0 = 0, b(r)|_{r=r_0} = r_0\}$$

9

تعریف نمود که بردار عمود بر این سطح به شکل زیر

$$n_\mu = \partial_\mu(r - r_0) = \partial_\mu r = [0, 1, 0, 0]. \quad 10$$

است. با استفاده از متریک 3 می توان نوشت

$$n_\mu n^\mu = g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = g^{rr} n_r n_r = g^{rr} \quad 11$$

مقدار  $g^{rr}$  در محل گلوگاه کرمچاله مقدار متناهی صفر می شود بنابراین گلوگاه کرمچاله با سطح کمینه بر روی ابر رویه نول قرار دارد.

اکنون با استفاده از متریک 3 و معادله میدان 2 مؤلفه های تانسور انرژی تکانه در یک چارچوب متعامد به شکل زیر نوشته می شوند:

$$3(w + 1) \left( \frac{d}{dt} R(t) \right)^2 + 6R(t)w \left( \frac{d}{dt^2} R(t) \right) =$$

$$\frac{2wre^{2\phi(r)}(r - b(r)) \left[ \left( \frac{d^2}{dr^2} \phi(r) \right) + \left( \frac{d}{dr} \phi(r) \right)^2 \right]}{r^2} +$$

$$\frac{-e^{2\phi(r)}w \left( r \left( \frac{d}{dr} b(r) \right) + 4r - 3b(r) \right)}{r^2} \times$$

$$\left( \frac{d}{dr} \phi(r) \right) - \left( \frac{d}{dr} b(r) \right) e^{2\phi(r)}(w + 1) \quad 17$$

در ادامه می‌توان با مساوی قرار دادن دو طرف معادله 17 با ثابت صفر معادلات دیفرانسیل قسمت شعاعی و زمانی را حل نمود و تابع شکل و ضریب مقیاس کرمچاله‌های دینامیکی را محاسبه نمود.

### دینامیک جواب‌های کرمچاله‌ای

در ادامه با جایگذاری تابع سرخ گرایبی گرانشی معرفی شده در معادله 17 داریم

$$\frac{\left( \frac{d}{dr} b(r) \right) \sigma + 2wn \left( (n-1)k_1 r^n + \frac{(n-2)k_2}{2} \right) k_2}{r^n R(t)^2 r^2 (k_1 r^n + k_2)} +$$

$$\frac{wn \left( \left( -n + \frac{1}{2} \right) b(r) k_1 r^n + \frac{1}{2} (-n+1) b(r) k_2 \right) k_2}{r^n R(t)^2 r^3 (k_1 r^n + k_2)} = 0 \quad 18$$

که

$$\sigma = (k_1 r^n + k_2) (-2k_1 (w + 1) r^n + (-2 + (n - 2)w) k_2)$$

حاصل می‌شود. با حل این معادله دیفرانسیل می‌توان تابع شکل کرمچاله را به شکل

$$b(r) = k_1 F(r) r^{\frac{nw(n-1)}{nw-2w-2}} (k_1 r^n + k_2) [C1 + \int_{r_0}^r S(r) dr] \quad 19$$

علاقمند به بررسی کرمچاله‌های دینامیکی با فشار غیر همسانگرد در یک فضا زمان غیر همگن هستیم که در فواصل دور از کرمچاله به آرامی به فضا زمان با زمینه کیهانی همگرا می‌شوند. در اینجا ما با اعمال معادله حالت معرفی شده در مقاله‌های [25] و [26] به شکل زیر

$$\rho = w(p_r + 2p_t) \quad 16$$

به دنبال یافتن جواب‌های کرمچاله‌ای در زمینه کیهانی هستیم. در فیزیک کرمچاله‌ها توزیع ماده و انرژی حمایت کننده ساختارهای کرمچاله‌ای غیر همگن می‌باشد یعنی چگالی انرژی وابسته به فاصله شعاعی تغییر می‌کند و در فواصل دور از گلوگاه کرمچاله برای جواب‌های مجانباً تخت مقدار آن به سمت چگالی همگن در کیهان‌شناسی استاندارد میل می‌کند. همچنین انتظار می‌رود برای جواب‌های مجانباً تخت در فواصل دور از گلوگاه کرمچاله مقادیر فشار شعاعی و عرضی با هم برابر شوند و در نتیجه معادله حالت بالا به معادله خطی معروف در مدل استاندارد کیهان‌شناسی تبدیل می‌شود.

در ادامه به منظور یافتن جواب‌های کرمچاله‌ای دینامیکی می‌بایستی تابع شکل و ضریب مقیاس کیهان و تابع سرخ گرایبی گرانشی را به دست آوریم. ما علاقمند به جواب‌های کرمچاله‌ای مجانباً تخت هستیم. بنابراین در ادامه از تابع سرخ گرایبی گرانشی به صورت  $e^{2\phi(r)}$  با  $k_1 + \frac{k_2}{r^n}$  مقادیر ثابت  $k_1, k_2$  و مثبت  $n$  استفاده خواهد شد. با استفاده از معادلات 12 تا 14 و معادله حالت 16 و جداسازی متغیرها معادله زیر حاصل

می‌شود

جواب‌های کرمچاله‌ای در زمان تورم و حاکمیت تابش را با جزئیات مطالعه می‌نماییم.

### دوران حاکمیت تورم

اولین بار رومن کرمچاله‌های زمان تورم را معرفی نمود [28]. در این مقاله با اعمال تابع سرخ‌گرایی گرانشی صفر کرمچاله‌های موریس و تورن را در یک پس‌زمینه کیهانی به صورت دینامیکی با ضریب مقیاس زمان تورم بررسی نموده است. در واقع کرمچاله‌های میکروسکوپی که با انرژی افت و خیزهای کوانتومی در زمان‌های اولیه کیهان شکل می‌گیرند ممکن است اندازه آنها به صورت طبیعی با مکانیزمی مانند تورم رشد کنند و دارای اندازه‌های بزرگی شوند. در مدل استاندارد کیهان‌شناسی در انرژی‌های پایین از نظریه گرانش اینشتین استفاده می‌شود در حقیقت برای زمان‌های قبل از تورم و در انرژی‌های بالا برای بررسی عالم می‌بایستی از نظریه گرانش کوانتومی استفاده نمود و تأثیر هندسه و حالت‌های کوانتومی بر روی فرایندهای بعدی مانند تورم را بررسی نمود. در واقع در زمان آغازین عالم نظریه اینشتین به علت حضور آثار کوانتومی و اثر آنها بر طبیعت فضا زمان با شکست مواجه می‌شود که در [29] به آن پرداخته شده است. در ادامه اجازه دهید مقدار  $w = -\frac{1}{3}$  را در معادله دیفرانسیل 20 جایگزین نماییم. با حل این معادله دیفرانسیل وابسته به زمان برای  $R(t)$  عامل مقیاس به صورت

$$R(t) = C_2 e^{C_1 t} \quad 22$$

نوشت. که ثابت C1 در این معادله از شرط  $b(r_0) = \Gamma_0$  به دست می‌آید. در این معادله  $F(r)$  و  $S(r)$  به صورت

$$F(r) = (2k_1 r^n w - wnk_2 + 2k_2 w + 2k_2) \frac{-2nw-3w-2}{nw-2w-2}$$

$$S(r) = \frac{wnr^{\frac{-nw(n-1)}{nw-2w-2}} k_2 (2k_1 r^n n - 2k_1 r^n + k_2 n - 2k_2) g(r)}{(k_1 r^n + k_2)^2} \text{ و}$$

تعریف شده‌اند که تابع  $g(r)$  در  $S(r)$  به شکل

$$g(r) = (2k_1 r^n w - wnk_2 + 2k_1 r^n + 2k_2 w + 2k_2) \frac{w(n-1)}{nw-2w-2}$$

نوشته می‌شود. در ادامه به دنبال بررسی دینامیک جواب‌های کرمچاله‌ای هستیم. بنابراین با انتخاب  $n$  و  $w$  مناسب می‌توان جواب‌های دقیق کرمچاله‌ای در زمینه کیهانی با تحول کیهان را با جزئیات کامل مطالعه نمود.

در ادامه با حل معادله دیفرانسیل قسمت زمانی می‌توان دینامیک جواب‌های کرمچاله‌ای را بررسی نمود. بنابراین از معادله

$$2wR(t) \left( \frac{d}{dt} R(t) \right)^2 + (w+1) \left( \frac{d}{dt} R(t) \right)^2 = 0 \quad 20$$

می‌توان تحول این ساختارها را در پس زمینه کیهانی مطالعه نمود. جواب معادله دیفرانسیل 20 برای پارامتر حالت مناسب به صورت

$$R(t) = [(c_1 t + c_2)]^{\frac{2w}{3w+1}} \quad 21$$

حاصل می‌شود که با جواب مدل استاندارد در کیهان‌شناسی مطابقت دارد [27]. در ادامه به بررسی کامل‌تر جواب‌های کرمچاله‌ای در زمان‌های مختلف می‌پردازیم. درحقیقت می‌توان دینامیک کرمچاله‌ها را در یک زمینه کیهانی بررسی نمود. ما برای نمونه

$$p_t(r,t) = \frac{-4\delta + 8(k_1r + k_2) \left( k_1r_0 + \frac{5k_2}{4} \right) \left( k_1r + \frac{k_2}{2} \right)}{(k_1r + k_2)r^2 e^{2C_1t} C_2^2 (4k_1r + 5k_2)^2} \quad 25$$

$$p_r(r,t) = \frac{-\delta - 4(k_1r + k_2) \left( k_1r_0 + \frac{5k_2}{4} \right)}{(k_1r + k_2)r^2 e^{2C_1t} C_2^2 (4k_1r + 5k_2)} \quad 26$$

$$\delta = 12(k_1r + \frac{5k_2}{4})^2 r^3 C_2^2 C_1^2 e^{2C_1t}$$

$$q(r) = \frac{C_1 k_2}{(k_1r + k_2)^2} \quad 27$$

با استفاده از معادلات 12 تا 15، می‌توان شرایط انرژی

ضعیف چک را نمود. در شرط انرژی ضعیف می‌بایستی

برای هر بردار زمان گونه  $V^u$  مقدار  $T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$

همیشه مثبت باشد. از نظر فیزیکی مشاهده گر زمان

گونه مقدار چگالی انرژی مثبت را اندازه‌گیری

می‌نمایید. ارتباط نقض شرایط انرژی ضعیف و وجود

کرمچاله‌ها در مقالات متعددی مطالعه شده است [30].

بنابراین شرط انرژی ضعیف برای تانسور انرژی تکانه

غیر قطری به صورت  $\rho + p_r + 2q \geq 0$ ،  $\rho \geq 0$  و

$\rho + p_t \geq 0$  بیان می‌شود [31]. در این صورت

28

$$wec_0 = \frac{32(k_1r + \frac{5k_2}{4})^2 k_2 r^2 C_2^2 C_1 e^{2C_1t} - 16(k_1r + k_2)^3 (k_1r_0 + \frac{5k_2}{4})}{(k_1r + k_2)^2 e^{2C_1t} C_2^2 (4k_1r + 5k_2)^2 r^2}$$

$$wec_1 = \frac{2(k_1r + k_2)(4k_1r_0 + 5k_2)}{e^{2C_1t} C_2^2 (4k_1r + 5k_2)^2 r^2} \quad 29$$

خواهند شد. که  $wec_0 = (\rho + p_r + 2q)$  و  $wec_1 =$

$\rho + p_t$  تعریف شده‌اند. همچنین می‌توان شرایط انرژی

ضعیف را در محل گلوگاه در زمان  $t=0$  به صورت

30

حاصل می‌شود. که در آن  $C_1$  و  $C_2$  ثابت‌های

انتگرال‌گیری معرفی شده‌اند. همچنین با اعمال مقادیر

$w = -\frac{1}{3}$  در تابع شکل کرمچاله 19 می‌توان

جواب‌های کلی کرمچاله‌ای در زمان تورم را به دست

آورد. برای نمونه برای مورد خاص  $n=1$  بعد از حل

انتگرال 19 جواب کرمچاله‌ای به شکل

$$b(r) = \frac{(k_1r + k_2)(4k_1r_0 + k_2)}{(4k_1r + 5k_2)k_1} - \frac{k_2^2}{(4k_1r + 5k_2)k_1} \quad 23$$

حاصل می‌شود. با اعمال شرط باز شدگی در محل

گلوگاه داریم

$$b'(r_0) = \frac{k_2}{4k_1r_0 + 5k_2} \Rightarrow \frac{k_2}{4k_1r_0 + 5k_2} < 1$$

همچنین برای حذف تکینگی (rs) از فضا زمان می‌توان

شرط

$$rs = -\frac{5k_2}{4k_1} < r_0$$

را اعمال نمود. در این صورت برای داشتن جواب

کرمچاله‌ای می‌بایستی

$$k_1 > 0, k_2 > -\frac{4k_1r_0}{5}$$

انتخاب شوند. نمودار تابع شکل این نوع کرمچاله‌ها در

شکل 1 ترسیم شده است و گلوگاه کرمچاله در  $r_0 =$

2 واقع شده است. در ادامه ما می‌توانیم با جایگذاری

تابع شکل 23 و ضریب مقیاس 22 در معادلات میدان

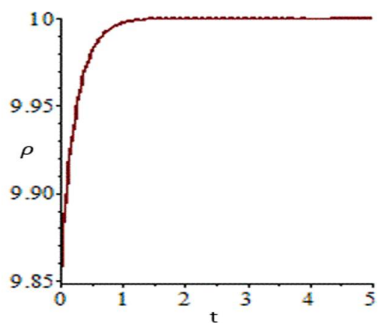
چگالی انرژی و فشار شعاعی و عرضی را به صورت

زیر نوشت

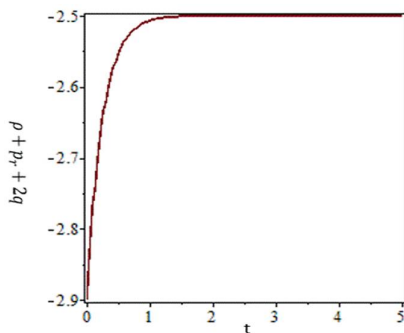
$$\rho(r,t) = \frac{4\delta + 4k_2(k_1r + k_2) \left( k_1r_0 + \frac{5k_2}{4} \right)}{(k_1r + k_2)r^2 e^{2C_1t} C_2^2 (4k_1r + 5k_2)^2} \quad 24$$



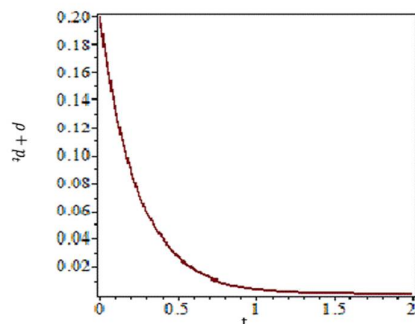
زمان ترسیم شده است. طبق این نمودار، در گلوگاه کرمچاله، در تمام زمان ها به علت منفی شدن  $\rho + p_r + 2q$ ، شرط انرژی ضعیف نقض می شوند.



شکل 2الف: نمودار چگالی انرژی نسبت به زمان با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2$  و ثابت های  $k_1 = 2, k_2 = 2, C_1 = C_2 = 2$ .



شکل 2ب: نمودار  $\rho + p_r + 2q$  نسبت به زمان با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2$  و ثابت های  $k_1 = 2, k_2 = 2.5, C_1 = C_2 = 2$ .



شکل 2ج: نمودار  $\rho + p_t$  نسبت به زمان با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2$  و ثابت های  $k_1 = 2, k_2 = 2.5, C_1 = C_2 = 2$ .

$$\rho(r_0) = \frac{12C_2^2 C_1^2 k_1 r_0^4 + 15C_2^2 C_1^2 k_2 r_0^3 + k_1 k_2 r_0 + k_2^2}{(k_1 r_0 + k_2) r_0^2 C_2^2 (4k_1 r_0 + 5k_2)}$$

$$wec_0(r_0) = \frac{8C_1 C_2^2 k_1 k_2 r_0^3 + 10C_1 C_2^2 k_2^2 r_0^2 - 4k_1^3 r_0^3}{(k_1 r_0 + k_2)^2 r_0^2 C_2^2 (4k_1 r_0 + 5k_2)} - \frac{12k_1^2 k_2 r_0^2 + 12k_1 k_2^2 r_0 + 4k_2^3}{(k_1 r_0 + k_2)^2 r_0^2 C_2^2 (4k_1 r_0 + 5k_2)} \quad 31$$

$$wec_1(r_0) = \frac{2k_1 r_0 + 2k_2}{r_0^2 C_2^2 (4k_1 r_0 + 5k_2)} \quad 32$$

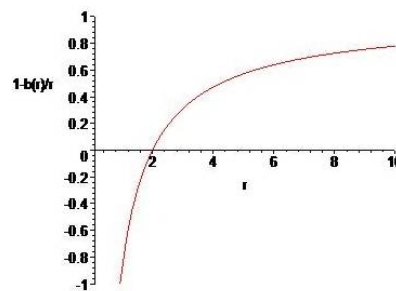
نوشت. همچنین شرایط انرژی در زمان های بزرگ از معادلات 28 تا 29 به شکل

$$\rho(r) = \frac{3rC_1^2}{(k_1 r + k_2)} \quad 33$$

$$wec_0(r) = \frac{2k_2 C_1}{(k_1 r + k_2)^2} \quad 34$$

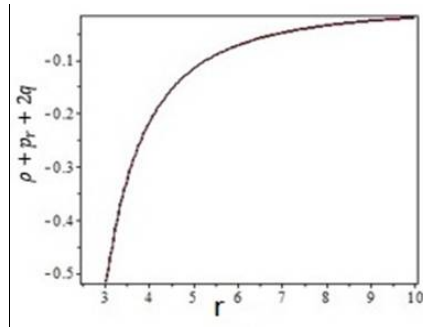
$$wec_1(r) = 0 \quad 35$$

ساده می شوند.

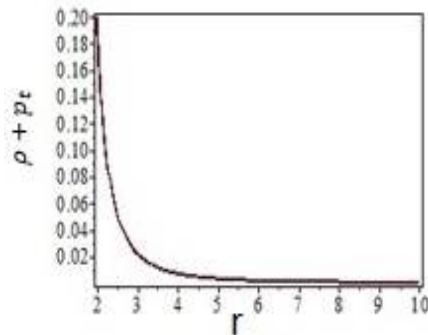


شکل 1: نمودار  $1 - \frac{b(r)}{r}$  بر حسب  $r$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2, k_1 = 2$  و  $k_2 = 2.5$ .

در ادامه شرایط انرژی برای کرمچاله معرفی شده مطالعه شده است. ابتدا شرایط انرژی در محل گلوگاه بر حسب زمان ترسیم شده است. شکل های 2الف تا 2ج شرایط انرژی در گلوگاه کرمچاله با فرض ثابت های  $r_0 = 2$ ،  $k_1 = 2, k_2 = 2.5, C_1 = C_2 = 2$ ، بر حسب

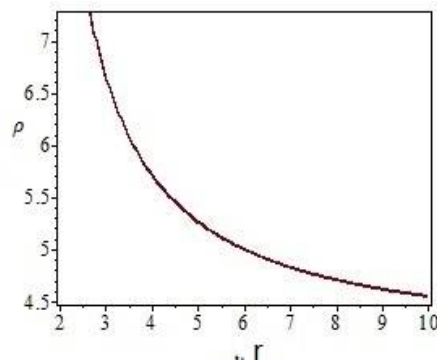


شکل 3ب: نمودار  $\rho + p_r + 2q$  نسبت به  $r$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2$ .  
 $k_2 = 2.5$  و  $k_1 = 2, C_1 = C_2 = 2$ . در زمان  $t=10$ .



شکل 3ج: نمودار  $\rho + p_t$  نسبت به  $r$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2, C_1 = C_2 = 2$ .  
 $k_2 = 2.5$  و  $k_1 = 2$  در زمان  $t=10$

در پایان این قسمت نمودارهای شرایط انرژی ضعیف برای این نوع کرمچاله در زمان  $t=10$ s ترسیم شده است. در شکل‌های 3الف و 3ج چگالی انرژی و شرط  $wec_1$  ارضاء می‌شوند. اما در شکل 3ب نمودار  $wec_0$  منفی می‌شود و در نتیجه شرط انرژی ضعیف نقض می‌شود.



شکل 3الف: نمودار چگالی انرژی نسبت به  $r$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2, C_1 = C_2 = 2$ .  
 $k_2 = 2.5$  و  $k_1 = 2$  در زمان  $t=10$

### دوران حاکمیت تابش

در ادامه اگر در معادله 19،  $w=1$  و  $n=1$  را جانشین

کنیم، تابع شکل به صورت

$$b(r) = \frac{(k_1 r + k_2) C_1}{4k_1 r + 3k_2} + \frac{k_2^2}{(4k_1 r + 3k_2) k_1} \quad 36$$

حاصل می‌شود که  $w=1$  مربوط به دوره حاکمیت تابش

است.  $C_1$  موجود در معادله 36 ثابت انتگرالی است که

می‌توان آن را با جای‌گذاری  $b(r_0) = r_0$  (در گلوگاه)،

به صورت

$$C_1 = \frac{4k_1 r_0 - k_2}{k_1}$$

$$\rho(r,t) = \frac{(-6C_1t - 6C_2)k_2 + \left(-6\left(r + \frac{4r_0}{3}\right)(C_1t + C_2)k_1 + 27r^3C_1^2\right)k_2^2}{64(k_1r + k_2)r^2\left(k_1r + \frac{3k_2}{4}\right)^2(C_1t + C_2)^2} +$$

$$\frac{8r(-r_0(C_1t + C_2)k_1 + 9r^3C_1^2)k_1k_2 + 48C_1^2k_1^2r^5}{64(k_1r + k_2)r^2\left(k_1r + \frac{3k_2}{4}\right)^2(C_1t + C_2)^2}$$

40

$$p_r(r,t) = \frac{\Sigma_1}{\Delta} + \frac{3k_2((-2C_1t - 2C_2)k_2 + r^3C_1^2)}{\Delta}$$

41

$$p_t(r,t) = \frac{\Sigma_2}{\Delta} + \frac{\Sigma_3}{\Delta}$$

42

$$q(r,t) = \frac{C_1k_2}{2(k_1r + k_2)^2(C_2 + C_1t)}$$

43

$$\Sigma_1 = -8k_1^2r_0(C_1t + C_2)r + \left(-6\left(r + \frac{4}{3}r_0\right)(C_1t + C_2)k_2 + 4r^4C_1^2\right)k_1$$

$$\Sigma_2 = 16r^2r_0(C_1t + C_2)k_1^3 + (12(C_1t + C_2)(r + 2r_0)k_2 + 4r^4C_1^2)rk_1^2$$

$$\Sigma_3 = \left(18(C_1t + C_2)\left(r + \frac{4}{9}r_0\right)k_2 + 4r^4C_1^2\right)k_2k_1 + 6(C_1t + C_2)k_2^3 + 9k_2^2r^3C_1^2$$

$$\Delta = 16(C_1t + C_2)^2r^2\left(k_1r + \frac{3k_2}{4}\right)(k_1r + k_2)$$

حاصل می شوند. معادلات شرایط انرژی ضعیف به صورت

$$wec_0(r,t) = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3)}{\Delta_1} +$$

$$\frac{8(-r_0(C_2 + C_1t)k_1 + 2r^3C_1^2)r^3k_1^3}{\Delta_1}$$

44

به دست آورد. با جای گذاری این ثابت در معادله 36 رابطه

$$b(r) = \frac{(k_1r + k_2)(4k_1r_0 - k_2)}{(4k_1r + 3k_2)k_1} + \frac{k_2^2}{(4k_1r + 3k_2)k_1}$$

37

حاصل می شود. اگر از معادله 37 مشتق گرفته و شعاع  $r$  را برابر با  $r_0$  قرار دهیم معادله

$$b'(r_0) = -\frac{k_2}{4k_1r_0 + 3k_2}$$

38

حاصل می شود. بر طبق شرط بازشدگی که باید  $b'(r_0) < 1$  باشد، شرط

$$-\frac{k_2}{4k_1r_0 + 3k_2} < 1 \Rightarrow -k_1r_0 < k_2$$

نتیجه می شود. برای حذف تکینگی از تابع شکل 37 می بایستی شعاع گلوگاه در رابطه

$$-\frac{3k_2}{4k_1} < r_0$$

صدق کند. همچنین با جانشین نمودن  $w=1$  در معادله 21 عامل مقیاس به صورت

$$R(t) = \sqrt{2C_1t + C_2}$$

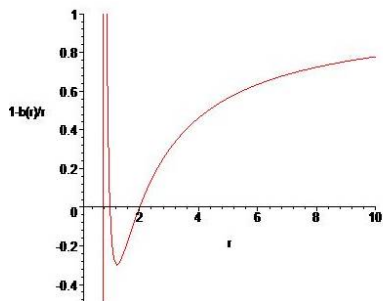
39

حاصل می شود. با جانشین نمودن تابع شکل 37 و عامل مقیاس 39 در معادلات میدان 12 تا 15 و پس از عملیات ساده سازی، مؤلفه های غیر صفر تانسور انرژی تکانه به صورت

$$wec_0(r_0) = \frac{(3C_1C_2k_2^2 - 6C_2k_1^2k_2)r_0^2}{(4k_1r_0 + 3k_2)(k_1r_0 + k_2)^2C_2^2r_0^2} - \frac{-6C_2k_1k_2^2r_0 - 2C_2k_1^2}{(4k_1r_0 + 3k_2)(k_1r_0 + k_2)^2C_2^2r_0^2} + \frac{4C_1^2k_1^2r_0^5 + 7k_1k_2r_0^4C_1^2}{(4k_1r_0 + 3k_2)(k_1r_0 + k_2)^2C_2^2r_0^2} + \frac{(3C_1^2k_2^2 + 4C_1C_2k_1k_2 - 2C_2k_1^3)r_0^3}{(4k_1r_0 + 3k_2)(k_1r_0 + k_2)^2C_2^2r_0^2}$$

$$wec_1(r_0) = \frac{4r_0^2C_2k_1^3 + (16C_1^2r_0^4 + 7C_2k_2r_0)k_1^2}{(k_1r_0 + k_2)r_0C_2^2(4k_1r_0 + 3k_2)^2} + \frac{(24C_1^2k_2r_0^3 + 3C_2k_2^2)k_1 + 9r_0^2k_2^2C_1^2}{(k_1r_0 + k_2)r_0C_2^2(4k_1r_0 + 3k_2)^2}$$

نوشت. از معادلات 44 تا 45 واضح است که برای زمان‌های بزرگ، مقادیر  $\rho$ ،  $\rho + p_r + 2q$  و  $\rho + p_t$  به سمت صفر میل می‌کنند. در پایان شکل کلی  $1 - \frac{b(r)}{r}$  نسبت به  $r$  برای این نوع کرمچاله در شکل 4 ترسیم شده است.



شکل 4. نمودار  $1 - \frac{b(r)}{r}$  برحسب  $r$  در دوره حاکمیت تابش با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2$ ،  $k_1 = 2$ ،  $k_2 = -2$  و  $b(r_0) = \frac{1}{5}$ .

دیده می‌شود که با انتخاب پارامترهای مناسب در تمام زمان‌ها چگالی انرژی مثبت خواهد بود شکل 5الف. در نمودار 5ب سمت راست دیده می‌شود که  $\rho + p_r$

$$\begin{aligned} 47 \quad \vartheta_1 &= (-6C_1t - 6C_2)k_2^4 + (9r^3C_1^2 + (9C_1^2t + 9C_1C_2)r^2 - 18k_1(C_1t + C_2)r - 8r_0(C_1t + C_2)k_1)k_2^3 \\ \vartheta_2 &= 3(11r^3C_1^2 + 8C_1(C_1t + C_2)r^2 - 6k_1(C_1t + C_2)r - 8r_0(C_1t + C_2)k_1)rk_1k_2^2 \\ \vartheta_3 &= 2(20r^3C_1^2 + 8C_1(C_1t + C_2)r^2 - 3k_1(C_1t + C_2)r - 12r_0(C_1t + C_2)k_1)r^2k_1^2k_2 \end{aligned}$$

48

$$\Delta_1 = (k_1r + k_2)^2(C_1t + C_2)^2(4k_1r + 3k_2)^2r^2$$

$$wec_1(r, t) = \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{\Delta_2} \quad 45$$

$$\Delta_2 = (k_1r + k_2)r(C_1t + C_2)^2(4k_1r + 3k_2)^2$$

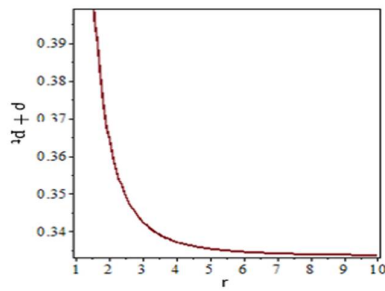
$$\beta_1 = 4rr_0(C_1t + C_2)k_1^3 + \left(3\left(r + \frac{4r_0}{3}\right)(C_1t + C_2)k_2 + 16r^4C_1^2\right)k_1^2$$

$$\beta_2 = \left((3C_1t + 3C_2)k_2^2 + 24r^3k_2C_1^2\right)k_1 + 9r^2k_2^2C_1^2$$

بیان می‌شوند. معادلات شرایط انرژی در زمان صفر را می‌توان در گلوگاه کرمچاله به صورت

46

$$\rho(r_0) = \frac{12C_1^2k_1r_0^4 + 9C_1^2k_2r_0^3 - 2C_2k_1k_2r_0 - 2C_2k_2^2}{16C_2^2(k_1r_0 + k_2)(k_1r_0 + \frac{3k_2}{4})r_0^2}$$

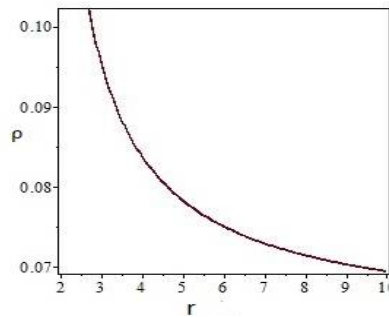


شکل 5 ج: نمودار  $\rho + p_t$  نسبت به  $r$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2, C_1 = C_2 = 2, k_1 = 2, k_2 = -2$  و زمان ثابت  $t = 100s$ .

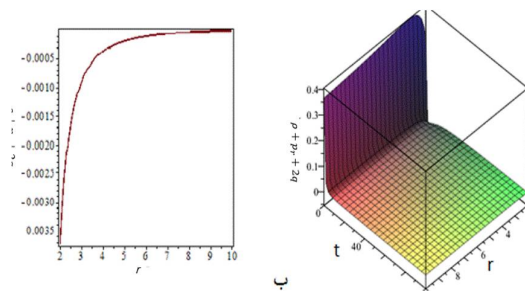
### بحث و نتیجه گیری

در این کار ما به دنبال جواب های کرمچاله ای هستیم که در یک زمینه کیهانی می توانند انبساط یابند. احتمالاً کرمچاله هایی در زمان اولیه عالم به صورت میکروسکوپی تشکیل شده اند و با تورم و انبساط عالم اندازه آنها تا حد ماکروسکوپی افزایش می یابد. بنابراین با اعمال یک معادله حالت مشابه با مدل های کیهان شناسی بین مؤلفه های تانسور انرژی تکانه به محاسبه جواب های کرمچاله ای پرداخته ایم. این دسته از جواب ها با روش جداسازی متغیرها بین قسمت زمانی و مکانی محاسبه شده اند. ما علاقمند به جواب های مجانباً تخت در یک زمینه کیهانی هستیم بنابراین با معرفی تابع سرخ گرایی مجانباً تخت به محاسبه جواب های کرمچاله ای مجانباً تخت پرداخته ایم. دینامیک این دسته از جواب ها با همان ضریب مقیاس که در کیهان شناسی شناخته شده است، به دست می آید. به علاوه شرایط انرژی به ازای پارامترهای حالت متفاوت و برای جواب های مختلف کرمچاله ای به طور کامل با ذکر جزئیات بررسی شده است. در این کار دیده می شود که برای کرمچاله های زمان تورم می توان با انتخاب ثابت های مناسب شرایط انرژی ضعیف را در

2q برای زمان های اولیه مثبت بوده اما با افزایش زمان در نمودار سمت چپ منفی می شود. همچنین با افزایش فاصله از گلوگاه، نقض شرایط انرژی ضعیف کمتر می شود. در نمودار 5 ج مقدار  $\rho + p_t$  ترسیم شده است و مقدار آن مثبت می باشد.



شکل 5 الف: نمودار چگالی انرژی نسبت به  $r$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2, C_1 = C_2 = 2, k_1 = 2, k_2 = -2$  و زمان ثابت  $t = 100s$ .



شکل 5 ب: نمودار  $\rho + p_r + 2q$  نسبت به  $r$  و  $t$  با شعاع گلوگاه  $r_0 = 2, C_1 = C_2 = 2, k_1 = 2, k_2 = -2$  و نمودار سمت چپ نمودار  $\rho + p_r + 2q$  در زمان ثابت  $t = 100s$ .

انحراف برای ماده‌ای که شرایط انرژی را نقض می‌کند متفاوت از موادی هستند که شرایط انرژی را ارضاء می‌کنند. در واقع برای کرمچاله‌هایی که شرایط انرژی را نقض می‌کنند زاویه انحراف آنها می‌تواند مثبت و منفی یا صفر باشد. بنابراین شناخت و بررسی پدیده همگرایی گرانشی و سایه تشکیل شده توسط کرمچاله‌ها از نظر نظری می‌تواند به کشف این ساختارها در طبیعت به ما کمک کند. در پدیده همگرایی گرانشی، میدان گرانشی کرمچاله می‌تواند پرتوهای نوری که از یک چشمه دور به طرف آن تابیده شده‌اند را همانند یک عدسی منحرف کرده به طوری که ناظری که این پرتوها را توسط تلسکوپ‌های خود مشاهده می‌کند می‌تواند به حضور کرمچاله پی‌برد. در این حالت با مطالعه رفتار ژئودزیک‌های نورگونه در اطراف کرمچاله مشاهده می‌شود که کمیتی به نام زاویه انحراف نور در دهانه کرمچاله به بینهایت میل می‌کند [34]. در مورد دوم سایه تشکیل شده توسط میدان گرانشی کرمچاله می‌تواند با سایه تشکیل شده توسط یک سیاهچاله متفاوت باشد چراکه شکل این سایه تنها به متریک فضازمان در برگیرنده کرمچاله یا سیاهچاله بستگی دارد [35]. در واقع بخشی از پرتو نوری که از چشمه دور دست به سمت سیاهچاله ساطع می‌شود توسط افق رویداد آن بلعیده شده و برای همیشه ارتباط علی خود را با عالم از دست می‌دهد. بخش دیگری از این پرتو نور در کره‌ای به نام کره نوری به شعاع بیشتر از شعاع افق رویداد دوران می‌کند. از آنجاییکه این کره ناپایدار است، پرتوهای نور می‌توانند از آن فرار کرده و به سمت تلسکوپ‌های ما روانه شوند و چیزی تحت عنوان سایه سیاه چاله تشکیل دهند. پیش‌بینی می‌شود که سایه سیاه

زمان‌های بزرگ ارضاء نمود در مقایسه با جواب‌های کرمچاله‌ای زمان تورم معرفی شده در مقاله [24] که شرایط انرژی ضعیف را نقض می‌کنند. در واقع نویسندگان این مقاله نشان داده‌اند که برای جواب‌های مجانباً تخت در زمان‌های بزرگ شرط  $\rho + p_r$  نقض می‌شود.

در مقاله [32] جواب‌های کرمچاله‌ای با اعمال اسکالر ریچی وابسته به زمان در یک زمینه کیهانی در چهار بعد و ابعاد بالاتر مطالعه شده است. نویسندگان نشان داده‌اند که در ابعاد بالاتر از چهار بعد می‌توان با انتخاب ثابت‌های مناسب شرایط انرژی ضعیف را در تمام فضا در همه زمان‌ها برقرار نمود. به علاوه آنها نشان داده‌اند برای کرمچاله‌های معرفی شده در زمان تورم همواره مقدار  $\rho + p_r$  منفی می‌باشد. در حالی که در زمان تابش جواب‌های معرفی شده می‌توانند شرایط انرژی نول را در محل گلوگاه ارضاء کنند. در اینجا دیده می‌شود که جواب‌های کرمچاله‌ای در زمان تابش می‌توانند شرایط انرژی ضعیف را در محل گلوگاه کرمچاله در همه زمان‌ها حفظ کنند و در واقع این ساختارها می‌توانند با ماده معمولی حمایت شوند.

در پایان به ذکر نکاتی درباره آثار مشاهداتی کرمچاله‌ها از جمله لنزینگ و سایه‌ها می‌پردازیم. در نسبیت عام شرط انرژی نول به علت شرط اساسی بازشدگی در کرمچاله‌های استاتیک نقض می‌شود. بنابراین ماده مجازی حمایت کننده کرمچاله‌ها می‌تواند آثار مشاهداتی جالبی داشته باشد. در حقیقت کرمچاله‌هایی که شرایط انرژی را ارضاء یا نقض می‌کنند آثار مشاهداتی متفاوتی ایجاد خواهند نمود که در مقاله [33] به آن پرداخته شده است. آنها نشان دادند که زاویه

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.67.064027>;

S. Sushkov, Wormholes supported by a phantom energy, *Physical Review D* **71** (2005) 043520.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.71.043520>;

F. Rahaman, M. Kalam, M. Sarker, K. Gayen, A Theoretical construction of wormhole supported by phantom energy, *Physics Letters B* **633** (2006) 161.

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.11.080>;

F.S.N. Lobo, F. Parsaei, N. Riazi, New asymptotically flat phantom wormhole solutions, *Physical Review D* **87** (2013) 084030.

<https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.87.084030>

[5] M. Cataldo, L. Liempi, P. Rodriguez, Static spherically symmetric wormholes with isotropic pressure, *Physics Letters B* **757** (2016) 130-135.

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.03.057>

[6] K.A. Bronnikov, K.A. Baleevskikh, M.V. Skvortsova, Wormholes with fluid sources: A no-go theorem and new examples, *Physical Review D* **96** (2017) 124039.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.124039>

[7] H. Maeda, M. Nozawa, Static and symmetric wormholes respecting energy conditions in Einstein-Gauss-Bonnet gravity, *Physical Review D* **78** (2008) 024005.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.024005>

G. Dotti, J. Oliva, R. Troncoso, Static wormhole solution for higher-dimensional gravity in vacuum, *Physical Review D* **75** (2007) 024002.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.75.024002>

چاله با کرمچاله متفاوت باشد و این دو موجود از این طریق در عالم از یکدیگر قابل تمیز باشند. مطالعه در این راستا برای کرمچاله‌های باردار [36] و کرمچاله‌های دوار انجام شده است [37]. بنابراین بررسی آثار مشاهداتی نظیر لنزهای گرانشی و سایه‌های این دسته از جواب‌های کرمچاله‌ای معرفی شده در زمینه کیهانی نیاز به ذکر جزئیات کاملی دارد که در مقاله‌ای مستقل در آینده با جزئیات کامل بررسی خواهد شد.

## مرجع‌ها

[1] M.S. Morris, K.S. Thorne, Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity, *American Journal of Physics* **56** (1986) 395. <https://doi.org/10.1119/1.15620>

[2] M.S. Morris, K.S. Thorne, U. Yurtsever, Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition, *Physical Review Letters* **61** (1988) 1446. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.1446>

M. Visser, Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking, *American Institute of Physics*, New York (1995).

[3] M. Visser, S. Kar, N. Dadhich, Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations, *Physical Review Letters* **90** (2003) 201102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.201102>

N. Dadhich, S. Kar, S. Mukherjee, M. Visser, R=0 space-times and self-dual Lorentzian wormholes, *Physical Review D* **65** (2002) 064004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.064004>

[4] K.A. Bronnikov, S.-W. Kim, Possible wormholes in a brane world, *Physical Review D* **67** (2003) 064027.

- Klein theory, *Physical Review D* **59** (1999) 064018;
- J.P. de Leon, J. Cosmol., Static wormholes on the brane inspired by Kaluza-Klein gravity, *Astroparticle Physics* **11** (2009) 013. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2009/11/013>
- [12] F.S.N. Lobo, M.A. Oliveira, Traversable Wormholes and Energy Conditions with Two Different Shape Functions in  $f(R)$  Gravity, *Physical Review D* **80** 104012 (2009) 104012;
- N.M. Garcia, F.S.N. Lobo, Wormhole geometries supported by a nonminimal curvature-matter coupling, *Physical Review D* **82** (2010) 104018;
- N.M. Garcia, F.S.N. Lobo, Nonminimal curvature-matter coupled wormholes with matter satisfying the null energy condition, *Classical Quantum Gravity* **28** (2011) 085018. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/28/8/085018>
- [13] M.R. Mehdizadeh, A.H. Ziaie, Einstein-Cartan wormhole solutions, *Physical Review D* **95** (2017) 064049. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.064049>
- [14] R. Shaikh, S. Kar, Wormholes, the weak energy condition, and scalar-tensor gravity, *Physical Review D* **94** (2016) 024011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.94.024011>
- [15] Peter Taylor, Propagation of Test Particles and Scalar Fields on a Class of Wormhole Space-Times, *Physical Review D* **90** (2014) 024057;
- G.J. Olmo, D. Rubiera-Garcia, A Sanchez-Puente, Geodesic completeness in a wormhole spacetime with horizons, *Physical Review D* **92** (2015) 044047;
- Th. Muller, Exact geometric optics in a Morris-Thorne wormhole spacetime, *Physical Review D* **77** (2008) 044043. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.044043>
- [8] M.R. Mehdizadeh, M.K. Zangeneh, F.S. N. Lobo, Einstein-Gauss-Bonnet traversable wormholes satisfying the weak energy condition, *Physical Review D* **91** (2015) 084004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.084004>;
- M.K. Zangeneh, F.S.N. Lobo, M.H. Dehghani, Traversable wormholes satisfying the weak energy condition in third-order Lovelock gravity, *Physical Review D* **92** (2015) 124049. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.124049>
- [9] A.G. Agnese, M. La Camera, Wormholes in the Brans-Dicke theory of gravitation, *Physical Review D* **51** (1995) 2011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.2011>;
- K.K. Nandi, A. Islam, J. Evans, Brans wormholes, *Physical Review D* **55** (1997) 2497. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.2497>;
- F.S.N. Lobo, M.A. Oliveira, General class of vacuum Brans-Dicke wormholes, *Physical Review D* **81** (2010) 067501;
- S.V. Sushkov, S.M. Kozyrev, Composite vacuum Brans-Dicke wormholes, *Physical Review D* **84** (2011) 124026. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.124026>
- [10] E.F. Eiroa, G.F. Aguirre, Thin-shell wormholes with a generalized Chaplygin gas in Einstein-Born-Infeld theory, *European Physical Journal C* **72** (2012) 2240. <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2240-6>;
- M. Richarte, C. Simeone, Wormholes in Einstein-Born-Infeld theory, *Physical Review D* **80** (2009) 104033. <https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.81.109903>
- [11] V.D. Dzhunushaliev, D. Singleton, Wormholes and flux tubes in 5-D Kaluza-



- wormholes supported by normal matter in Einstein-Maxwell-Gauss-Bonnet gravity, *Physical Review D* **81** (2010) 104002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.81.104002>
- [20] M. Cataldo, P. Meza, P. Minning, N-dimensional static and evolving Lorentzian wormholes with cosmological constant, *Physical Review D* **83** (2011) 044050. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.83.044050>
- [21] S. Sushkov, Wormholes supported by a phantom energy, *Physical Review D* **71** (2005) 043520;
- F.S.N. Lobo, F. Parsaei, and N. Riazi, New asymptotically flat phantom wormhole solutions, *Physical Review D* **87**, (2013) 084030. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.084030>
- [22] A.V.B. Arellano, F.S.N. Lobo, Non-existence of static, spherically symmetric and stationary, axisymmetric traversable wormholes coupled to nonlinear electrodynamics, *Classical Quantum Gravity* **23** (2006) 7229. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/24/003>;
- A.V.B. Arellano, N. Breton, R. Garcia-Salcedo, Some properties of evolving wormhole geometries within nonlinear electrodynamics, *General Relativity and Gravitation* **41** (2009) 2561. <https://doi.org/10.1007/s10714-009-0780-3>;
- S.V. Sushkov, Y.-Z. Zhang, Scalar wormholes in cosmological setting and their instability, *Physical Review D* **77** (2008) 024042;
- A.V.B. Arellano, F.S.N. Lobo, Evolving wormhole geometries within nonlinear electrodynamics, *Classical Quantum Gravity* **23** (2006) 5811. <https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/20/004>;
- B.N. Esfahani, The null energy condition in [16] N. Tsukamoto, T. Harada, K. Yajima, Can we distinguish between black holes and wormholes by their Einstein ring systems, *Physical Review D* **86** (2012) 104062. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.104062>
- [17] M. Safonova, D.F. Torres, G.E. Romero, Microlensing by natural wormholes: Theory and simulations, *Physical Review D* **65** (2001) 023001;
- F. Abe, Demagnifying gravitational lenses toward hunting a clue of exotic matter and energy, *Physical Review D* **87** (2013) 027501;
- N. Tsukamoto, T. Harada, Light curves of light rays passing through a wormhole, *Physical Review D* **95** (2017) 024030. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.024030>
- [18] H. Falcke, F. Melia, E. Agol, Viewing the Shadow of the Black Hole at the Galactic Center, *The Astrophysical Journal* **528** (2000) L13;
- P.G. Nedkova, V.K. Tinchev, S.S. Yazadjiev, Shadow of a rotating traversable wormhole, *Physical Review D* **88** (2013) 124019;
- T. Ohgami, N. Sakai, Wormhole shadows, *Physical Review D* **91** (2015) 124020;
- A. Abdujabbarov, B. Juraev, B. Ahmedov, Z. Stuchlik, Shadow of rotating wormhole in plasma environment, *Astrophysics and Space Science* **361** (2016) 226;
- P.V.P. Cunha, C.A.R. Herdeiro, Shadows and strong gravitational lensing: a brief review, *General Relativity and Gravitation* **50** (2018) 42. <https://doi.org/10.1007/s10714-018-2361-9>
- [19] E. Gravanis, S. Willison, Mass without mass' from thin shells in Gauss-Bonnet gravit, *Physical Review D* **75** (2007) 084025;
- S. Habib Mazharimousavi, M. Halilsoy and Z. Amirabi, Stability of thin-shell

- [27] R.A. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press, Oxford, (1992).
- [28] T.A. Roman, Inflating Lorentzian wormholes, *Physical Review D* **47** (1993) 1370.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.47.1370>
- [29] George F.R. Ellis, Malcolm MacCallum, and Roy Maartens, *Relativistic Cosmology* (1983).
- [30] S. Kar, Evolving wormholes and the weak energy condition, *Physical Review D* **49** (1994) 862;
- M. Visser, Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild space-times, *Nuclear Physics B* **328**, (1989) 203.  
[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(89\)90100-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(89)90100-4)
- [31] L.A. Anchordoqui, D.F. Torres, M.L. Trobo, S.E. Perez Bergliaffa, Evolving wormhole geometries, *Physical Review D* **57** (1998) 829;
- F.S.N. Lobo. *Wormholes, warp drives and energy conditions*, volume 189, Springer, (2017);
- E. Curiel. A primer on energy conditions. In D. Lehmkuhl, G. Schieman, E. Scholz, editors, *Towards a Theory of Spacetime Theories*, volume 13, Birkhauser, Basel, (2017) 43-104;
- S.M. Carroll, *Spacetime and geometry* Cambridge University Press, (2019).
- [32] M.K. Zangeneh, F.S.N. Lobo, N. Riazi, Higher-dimensional evolving wormholes satisfying the null energy condition, *Physical Review D* **90** (2014) 024072.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.024072>
- [33] R. Shaikh, S. Kar, Gravitational lensing by scalar-tensor wormholes and the energy conditions, *Physical Review D* **96** (2017) 044037.
- wormholes with cosmological constant, *General Relativity and Gravitation* **37** (2005) 271;
- P.K.F. Kuhfittig, Static and dynamic traversable wormhole geometries satisfying the Ford-Roman constraints, *Physical Review D* **66** (2002) 024015;
- A.V.B. Arellano, F.S.N. Lobo, Non-existence of static, spherically symmetric and stationary, axisymmetric traversable wormholes coupled to nonlinear electrodynamics, *General Relativity and Gravitation* **23** (2006) 7229.  
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/23/24/003>
- [23] M. Cataldo, S. del Campo, Two-fluid evolving Lorentzian wormholes, *Physical Review D* **85** (2012) 104010;
- M. Cataldo, P. Meza, Phantom evolving wormholes with big rip singularities, *Physical Review D* **87** (2013) 064012.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.064012>
- [24] M.R. Bordbar, N. Riazi, Time-dependent wormhole in an inhomogeneous spherically symmetric space time with a cosmological constant, *Astrophysics and Space Science* **331** (2011) 315.  
<https://doi.org/10.1007/s10509-010-0435-6>
- [25] L.A. Anchordoqui, S.E. Perez Bergliaffa, D.F. Torres, Brans-Dicke wormholes in nonvacuum space-time, *Physical Review D* **55** (1997) 5226.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.5226>
- [26] M.R. Mehdizadeh, N. Riazi, Cosmological wormholes in Lovelock gravity, *Physical Review D* **85** (2012) 124022;
- M.R. Mehdizadeh, F.S.N. Lobo, Novel third-order Lovelock wormhole solutions, *Physical Review D* **93** (2016) 124014.  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.93.124014>

interferometry facilities, *Physical Review D* **87** (2013) 107501.

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.107501>

[36] P.G. Nedkova, V.K. Tinchev, S.S. Yazadjiev, Shadow of a rotating traversable wormhole, *Physical Review D* **88** (2013) 124019;

R. Shaikh, Shadows of rotating wormholes, *Physical Review D* **98** (2018) 024044. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.024044>

[37] M. Amir, A. Banerjee, S.D. Maharaj, Shadow images of Kerr-like wormholes, *Annals of Physics* **400** (2019) 198. <https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab42be>

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.044037>

[34] Kamal Kanti Nandi, Yuan-Zhong Zhang, Alexander V. Zakharov, Gravitational lensing by wormholes, *Physical Review D* **74** (2006) 024020;

Rajibul Shaikh, Pritam Banerjee, Suvankar Paul, Tapobrata Sarkar, Strong gravitational lensing by wormholes, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **07** (2019) 028. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/07/028>

R. Shaikh, P. Banerjee, S. Paul, T. Sarkar, A novel gravitational lensing feature by wormholes, *Physics Letters B* **789** (2019) 270. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.12.030>

[35] C. Bambi, Can the supermassive objects at the centers of galaxies be traversable wormholes? The first test of strong gravity for mm/sub-mm very long baseline