

## مقایسه بازه‌های اطمینان خودگردان برای میانگین زمان پاسخ در یک مطالعه شبیه‌سازی

حسین کاظم‌زاده قره‌چبق، بهمن تارویردی‌زاده<sup>۱</sup>، علیرضا افشاری‌صفوی

گروه ریاضی، واحد ماکو، دانشگاه آزاد اسلامی، ماکو، ایران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۶/۲۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۰/۲۳

**چکیده:** میانگین زمان پاسخ نقش مهمی را در تحلیل و بهینه‌سازی سامانه‌ی صف‌بندی در تعیین تعداد و نوع سرویس‌دهنده‌ها ایفا می‌کند. در این مقاله برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی  $M/G/1$  با الگوی ورود  $FCFS$  بازه‌های اطمینانی بر اساس روش دلتای ناپارامتری و پنج روش خودگردان تولیدشده است که این روش‌ها عبارت‌اند از: بازه‌ی اطمینان به روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ، بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی نرمال، بازه‌ی اطمینان صدکی خودگردان، بازه‌ی اطمینان تی خودگران، بازه‌ی اطمینان خودگردان تصحیح ارببی شتابیده و بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی کمیت محوری. به‌منظور مقایسه‌ی این شش روش ارائه‌شده، در یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی دقت و عملکرد این بازه‌های اطمینان برای سه نوع مدل صف‌بندی متفاوت  $M/G/1$  با الگوی ورود  $FCFS$ ، بر اساس دو معیار درصد پوشش‌دهی و میانگین طول بازه‌های اطمینان موردبررسی قرار گرفته است.

**واژه‌های کلیدی:** صف‌بندی، بازه‌ی اطمینان بر اساس کمیت محوری، روش دلتای ناپارامتری، تابع نفوذ، میانگین زمان پاسخ.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۴۰، ۶۲G۱۵.

### ۱- مقدمه

بهینه‌سازی مدل‌های صف‌بندی معمولاً بر اساس معیارهای مؤثر بودن<sup>۱</sup> انجام می‌گیرد. یکی از مهم‌ترین این معیارها میانگین زمان پاسخ<sup>۲</sup> است، زیرا بر اساس آن متقاضیان تصمیم می‌گیرند

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: بهمن تارویردی‌زاده [bahtary@gmail.com](mailto:bahtary@gmail.com)

که به سامانه وارد شوند یا نه. اما برای به دست آوردن این معیار لازم است متغیرهای موجود در مدل شناسایی و سپس توزیع این متغیرها به دست آورده شوند. با توجه به این که توزیع زمان سرویس در بعضی از مدل‌های صف‌بندی کلی بوده و شکل ساده و بسته‌ای برای آن یافت نمی‌شود، لذا در مسائل کاربردی نمی‌توان این معیارهای مؤثر بودن را محاسبه کرد. یکی از روش‌های معمول برای تحلیل، بررسی و برآورد معیارهای مؤثر بودن در این شرایط، استفاده از روش خودگردان<sup>۲</sup> است. این روش یکی از روش‌های تولید نمونه به شیوه‌ی با جایگذاری است برای زمانی که توزیع داده‌ها نامعلوم باشد.

در بررسی مدل‌های صف‌بندی، مبحث‌های استنباط آماری به‌ندرت یافت می‌شود و کارهای انجام‌شده بر روی چنین مسئله‌هایی بیش‌تر از طریق استنباط آماری پارامتری انجام‌گرفته است. به‌طوری‌که در این نوع استنباط توزیع جامعه معلوم فرض می‌شود. بررسی استنباط آماری از این طریق بر روی پارامترهای مدل‌های صف‌بندی توسط افرادی انجام‌گرفته است. نخستین بار، مسئله‌ی برآورد پارامترها در مدل‌های صف‌بندی، توسط کلارک [۱] مطرح شد. وی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای نرخ ورود و سرویس در یک مدل صف‌بندی  $M/M/1$  را مورد مطالعه قرار داد، که  $M$  اول نشان‌دهنده‌ی این است که توزیع مدت‌زمان بین دو ورود نمایی،  $M$  دوم ارائه‌دهنده‌ی این است که الگوی توزیع احتمال زمان سرویس نیز نمایی و عدد یک نشان‌دهنده‌ی تعداد باجه‌های سرویس است. سپس لیلی فورس [۲] بازه‌های اطمینان در صف‌های  $M/E_k/1$ ،  $M/M/1$  و  $M/M/2$  را مورد بررسی قرار داد. به‌علاوه باساوا و پرابهو [۳]، دیو و شاه [۴]، جین و تمپلتون [۵]، روبین و رابسون [۶]، جین [۷]، و ابو و هریری [۸] و باساوا و همکاران [۹] در زمینه‌ی استنباط آماری بر روی مدل‌های صف‌بندی کارهای قابل توجهی انجام داده‌اند که بیش‌تر نرخ ورود، نرخ سرویس و میانگین تعداد متقاضیان سرویس گرفته را مورد بررسی قرار داده‌اند.

از دیدگاه استنباط آماری ناپارامتری، تاکنون تعداد اندکی از پژوهشگران، مسئله‌های نظریه‌ی صف‌بندی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. افرون [۱۰ و ۱۱] به روش بازنمونه‌گیری<sup>۳</sup>، روش خودگردان را پیشنهاد و آن را گسترش داد. خودگردان یک روش بازنمونه‌گیری است که به‌طور مؤثری می‌توان آن را در برآورد توزیع نمونه‌ای هر آماره به کاربرد. امروزه، با توجه به هزینه‌های نمونه‌گیری و نرم‌افزارهای آماری، روش خودگردان یکی از پرطرفدارترین و تواناترین روش برآورد ناپارامتری تبدیل شده است، به‌ویژه در زمینه‌ی برآورد بازه‌ای، افرون و گانگ [۱۲]،

1- Measurement of Effectiveness

2- Bootstrap

3- Resampling

افرون و تیشیرانی [۱۳] و افرون [۱۴] بازه‌ی اطمینان به روش خودگردان ارائه کرده‌اند. همچنین چو و کی [۱۵] در مدل صفبندی  $M / G / 1$  به بررسی بازه‌های اطمینان برای میانگین زمان پاسخ به روش خودگردان پرداختند و چو و کی [۱۶] برای میانگین زمان پاسخ در مدل صفبندی  $G / G / 1$  چهار بازه‌ی اطمینان خودگردان را ایجاد کردند.

هدف این مقاله، تحقیق و بررسی برآورد بازه‌ی برای میانگین زمان پاسخ بر اساس روش خودگردان و روش دلتای ناپارامتری است. در بخش دوم، ابتدا یک برآوردگر نقطه‌ای برای میانگین زمان پاسخ مدل صفبندی  $M / G / 1$  با الگوی ورود  $FCFS$  (نشان‌دهنده‌ی این است که نظم صف برای دریافت سرویس به ترتیب ورود افراد می‌باشد) به دست آورده می‌شود. سپس در بخش سوم، به‌عنوان مقدمه‌ای برای ورود به بخش اصلی مقاله، تابع نفوذ<sup>۱</sup> و تابع نفوذ تجربی شرح داده می‌شوند. در بخش چهارم، تابع نفوذ<sup>۲</sup> و تابع نفوذ تجربی برای میانگین زمان پاسخ به دست آورده می‌شود و با استفاده از روش دلتای ناپارامتری<sup>۳</sup> یک بازه‌ی اطمینان برای میانگین زمان پاسخ ایجاد می‌شود. در بخش پنجم، برآورد خودگردان میانگین زمان پاسخ بررسی می‌شود و سپس بازه‌های اطمینان به پنج روش خودگردان را برای میانگین زمان پاسخ به دست آورده می‌شود. در بخش ششم، بازه‌ی اطمینان خودگردان و روش دلتای ناپارامتری به روش شبیه‌سازی برای سه مدل صفبندی را محاسبه کرده و سپس بر اساس درصد پوشش و میانگین طول بازه‌ها عملکرد آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در نهایت در بخش هفتم، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی درباره‌ی روش‌های خودگردان و روش دلتای ناپارامتری برای میانگین زمان پاسخ در مدل صفبندی  $M / G / 1$  ارائه می‌شود.

## ۲- برآورد میانگین زمان پاسخ در مدل صفبندی $M / G / 1$

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ای تصادفی از  $X$  با تابع توزیع  $F(\cdot)$  و همچنین  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه‌ای تصادفی از  $Y$  با تابع توزیع  $H(\cdot)$  باشند، به طوری که  $X$  دارای توزیع نمایی با میانگین  $1/\lambda$  بوده و از  $Y$  مستقل است. در اینجا نماد  $(X_i, Y_i)$  برای نمایش زمان‌های بین دو ورود متوالی و سرویس برای  $i$ امین متقاضی از یک مدل صفبندی  $M / G / 1$  بانظم  $FCFS$  به کار می‌رود. بنابراین متوسط تعداد متقاضیان در سامانه برابر است با:

$$E(N) = \rho + \frac{\lambda^2 E(Y^2)}{2(1-\rho)} \quad (1)$$

1 -First come first served

2 -Influence function

3 -Nonparametric delta method

که در آن  $N$  تعداد متقاضیان در سامانه در هر لحظه از زمان،  $\rho = \lambda E(Y)$  شدت ترافیک (ضریب بهره‌وری)،  $E(Y)$  میانگین زمان سرویس،  $E(Y^2)$  نشان‌دهنده‌ی گشتاور مرتبه‌ی دوم توزیع  $H(\cdot)$  هستند.

حال فرض کنید  $R$  نشان‌دهنده‌ی زمان پاسخ در حالت پایا است. برای محاسبه‌ی میانگین زمان پاسخ یعنی  $E(R)$ ، از رابطه‌ی معروف لیتل استفاده می‌کنیم که در آن  $E(N)$  نشان‌دهنده‌ی میانگین تعداد متقاضیان در یک سامانه‌ی صف‌بندی در حالت پایا است و به‌صورت حاصل ضرب نرخ ورود در میانگین زمان پاسخ تعریف می‌شود. این رابطه عبارت است از  $E(N) = \lambda E(R)$ . بنابراین،  $E(R)$  برابر است با:

$$\begin{aligned} E(R) &= \frac{E(N)}{\lambda} = E(Y) + \frac{\lambda E(Y^2)}{2(1-\rho)} \\ &= E(Y) + \frac{E(Y^2)}{2(\lambda^{-1} - E(Y))}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $\bar{X}$  و  $\bar{Y}$  به ترتیب میانگین‌های نمونه‌ای  $X_1, \dots, X_n$  و  $Y_1, \dots, Y_n$ ، همچنین  $m_2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2 / n$  نشان‌دهنده‌ی گشتاور مرتبه‌ی دوم نمونه‌ای  $Y_1, \dots, Y_n$  باشد. بنا بر قانون قوی اعداد بزرگ  $\bar{X}$ ،  $\bar{Y}$  و  $m_2$  به ترتیب برآوردهای سازگار قوی از  $1/\lambda$ ،  $E(Y)$  و  $E(Y^2)$  هستند. بنابراین، یک برآوردهای برای  $E(R)$ ، برابر است با:

$$\hat{r} = \bar{Y} + \frac{m_2}{2(\bar{X} - \bar{Y})}$$

که بنا بر قضیه اسلاتسکی و قضیه‌ی حد مرکزی یک برآوردهای سازگار قوی از  $E(R)$  است و به‌طور تقریبی دارای توزیع نرمال می‌باشد. در ادامه برای سادگی از نماد  $r$  برای نشان دادن  $E(R)$  استفاده می‌کنیم.

### ۳- تابع نفوذ

تابع نفوذ برای تقریب خطای استاندارد مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای آشنایی با تابع نفوذ مطالبی در زیر ارائه می‌شود. ابتدا مشتق گته ایکس<sup>۱</sup> را معرفی کرده و سپس تابع نفوذ و تابع

1- Gateaux derivative

نفوذ تجربی ارائه می‌شود. در انتهای این بخش نیز برخی از ویژگی‌های تابع نفوذ را ارائه می‌کنیم.

**تعریف ۱:** مشتق گته‌ایکس  $T(F)$  در جهت  $G$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_F(G) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon G) - T(F)}{\varepsilon}.$$

اگر  $G = \delta_x$  یک نقطه‌ی چگال در  $x$  باشد، بنابراین، می‌نویسیم  $L_F(x) \equiv L_F(\delta_x)$  و آن را تابع نفوذ می‌نامیم. در این صورت:

$$L_F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T((1-\varepsilon)F + \varepsilon \delta_x) - T(F)}{\varepsilon}.$$

تابع نفوذ تجربی نیز به صورت  $\hat{L}(x) = L_{\hat{F}_n}(x)$  تعریف می‌شود و برابر است با:

$$\hat{L}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T((1-\varepsilon)\hat{F}_n + \varepsilon \delta_x) - T(\hat{F}_n)}{\varepsilon}.$$

در تمامی رابطه‌های بالا منظور از  $T(F)$  هر تابعی از  $F(x)$  است.

اکنون برای به دست آوردن یک بازه‌ی اطمینان به روش دلتای ناپارامتری اگر فرض کنید  $T(F) = \int a(x) dF(x)$  و  $\tau^2 = \int L_F^2(x) dR(x)$

$$\hat{\tau}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{L}^2(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a(x_i) - T(\hat{F}_n))^2$$

$$\sqrt{n}(T(F) - T(\hat{F}_n)) \rightarrow N(0, \tau^2)$$

9

$$\hat{\tau}^2 \xrightarrow{P} \tau^2, \quad \frac{\hat{S}e}{S_e} \xrightarrow{P} 1$$

که در آن  $S_e = \sqrt{\text{Var}(\hat{T}(F_n))}$  و  $\hat{S}e = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{n}}$ . بنابراین یک بازه‌ی اطمینان به روش دلتای ناپارامتری برای  $T(F)$  برابر است با [۱۷]:

$$T(\hat{F}_n) \pm Z_{\alpha} \frac{\hat{S}e}{2}.$$

#### ۴- تابع نفوذ، تابع نفوذ تجربی و برآورد بازه‌ای برای میانگین زمان پاسخ مدل صفبندی $M/G/1$

در این بخش با ارائه یک قضیه تابع نفوذ برای میانگین زمان پاسخ مدل صفبندی  $M/G/1$  به دست آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش دلتای ناپارامتری بازه‌ای اطمینان برای میانگین زمان پاسخ ارائه می‌شود.

**قضیه ۱:** اگر  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از  $X$  با تابع توزیع  $F(\cdot)$  و  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه‌ای تصادفی از  $Y$  با تابع توزیع  $H(\cdot)$  باشد در این صورت تابع نفوذ  $X$  و  $Y$  برابر است با:

$$L(x, y) = [T(F) - E(y)] (a + b - c)$$

که در آن

$$a = \left\{ \frac{2[E(x) - E(y)]}{E(y^2)} + \frac{1}{E(x) - E(y)} \right\} [y - E(y)]$$

$$b = \frac{y^2 - E(y^2)}{E(y^2)}$$

$$c = \frac{x - E(x)}{E(x) - E(y)}$$

اثبات: ابتدا  $T(F)$  با استفاده از رابطه‌ی (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(F) = E(y) + \frac{E(y^2)}{2[E(x) - E(y)]}$$

به بیانی دیگر می‌توان نوشت:

$$T(F) = T_1(F) + \frac{T_2(F)}{2[T_3(F) - T_1(F)]}$$

که در آن  $T(F)$  تابعی از  $T_1(F)$  و  $T_2(F)$  و  $T_3(F)$  است به این معنی که:

$$T(F) = a[T_1(F), T_2(F), T_3(F)]$$

و در آن

$$T_1(F) = \int y dF = \delta_1, \quad T_2(F) = \int y^2 dF = \delta_2, \quad T_3(F) = \int x dF = \delta_3$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای، تابع نفوذ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$L(x) = \sum \frac{\partial a}{\partial t_i} L_i(x)$$

به طوری که

$$L_i(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T_i((1-\varepsilon)F + \varepsilon\delta_x) - T_i(F)}{\varepsilon}.$$

$$a(t_1, t_2, t_3) = t_1 + \frac{t_2}{2(t_3 - t_1)}:$$

$$\frac{\partial a}{\partial t_1} = 1 + \frac{t_2}{2(t_3 - t_1)^2}, \quad L_1(y) = a(y) - T_1(F) = y - \int y dF \quad (2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t_2} = \frac{1}{2(t_3 - t_1)}, \quad L_2(y) = a(y) - T_2(F) = y^2 - \int y^2 dF \quad (3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t_3} = -\frac{t_2}{2(t_3 - t_1)^2}, \quad L_3(x) = a(x) - T_3(F) = x - \int x dF \quad (4)$$

سپس با جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) و (۴) در  $L(x)$  داریم:

$$L(x, y) = \left(1 + \frac{t_2}{2(t_3 - t_1)^2}\right) L_1(y) + \frac{1}{2(t_3 - t_1)} L_2(y) - \frac{t_2}{2(t_3 - t_1)^2} L_3(x)$$

که با قرار دادن  $t_1, t_2, t_3, L_1(x), L_2(y)$  و  $L_3(y)$  از رابطه‌های به دست آمده،  $L(x, y)$  به شکل زیر حاصل می‌شود:

$$L(x, y) = \left\{ 1 + \frac{E(y^2)}{2[E(x) - E(y)]^2} \right\} [y - E(y)] + \frac{1}{2[E(x) - E(y)]} [y^2 - E(y^2)] - \frac{E(y^2)}{2[E(x) - E(y)]^2} [x - E(x)]$$

حال پس از ساده کردن رابطه بالا تابع نفوذ برحسب تابعی از  $T(F)$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$L(x, y) = (T(F) - E(y)) \left\{ \left[ \frac{2(E(x) - E(y))}{E(y^2)} + \frac{1}{[E(x) - E(y)]} \right] (y - E(y)) \right. \\ \left. + \frac{y^2 - E(y^2)}{E(y^2)} - \frac{x - E(x)}{E(x) - E(y)} \right\}$$

و با توجه به تعریف  $a, b, c$  تابع نفوذ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$L(x, y) = [T(F) - E(y)] (a + b - c)$$

برای به دست آوردن بازه‌ی اطمینان میانگین زمان پاسخ به روش دلتای ناپارامتری، با استفاده از تابع نفوذ میانگین زمان پاسخ، تابع نفوذ تجربی آن با استفاده از قضیه‌ی بالا به دست آورده می‌شود که برابر است با  $\hat{L}(X_i, Y_i) = (T(\hat{F}_n) - \bar{Y})(A + B - C)$  که در آن:

$$A = \left( \frac{2(\bar{X} - \bar{Y})}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2} + \frac{1}{\bar{X} - \bar{Y}} \right) (Y_i - \bar{Y}), \quad B = \frac{Y_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}, \quad C = \frac{X_i - \bar{X}}{\bar{X} - \bar{Y}}$$

بنابراین، بازه‌ی اطمینان میانگین زمان پاسخ برای مدل صف‌بندی  $M/G/1$  بر اساس روش دلتای ناپارامتری برابر است با:

$$\left( \bar{Y} + \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i^2}{2(\bar{X} - \bar{Y})} \right) \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \hat{L}^2(X_i, Y_i)}$$

## ۵- روش خودگردان

این روش، یک روش نمونه‌گیری با جایگذاری است. در این روش، هدف تعیین برآوردی برای واریانس آماره‌ی موردنظر می‌باشد. به‌علاوه از این روش برای ساختن بازه‌های اطمینان نیز استفاده می‌شود. برای این منظور، فرض کنید  $T_n = g(X_1, \dots, X_n)$  آماره‌ی موردنظر باشد. جهت محاسبه‌ی واریانس برآورد کننده‌ی  $T_n = g(X_1, \dots, X_n)$  گام‌های زیر را انجام می‌دهیم:

۱. نمونه‌ی تصادفی  $X_1^*, \dots, X_n^*$  را از تابع توزیع تجربی  $\hat{F}_n$  انتخاب می‌کنیم،



۲. بر اساس نمونه‌ی  $X_1^*, \dots, X_n^*$ ، تابع  $T_n^* = g(X_1^*, \dots, X_n^*)$  محاسبه می‌شود،
۳. گام‌های ۱ و ۲،  $B$  بار تکرار می‌شوند و بر اساس تکرارها  $T_{n,1}^*, \dots, T_{n,B}^*$  محاسبه می‌شوند. توجه داشته باشید، از آنجاکه  $\hat{F}_n$  احتمال  $\frac{1}{n}$  را به هر داده نسبت می‌دهد، لذا تولید نمونه‌ای تصادفی  $n$  تایی با جایگذاری از  $\hat{F}_n$ ، با تولید نمونه‌ای تصادفی  $n$  تایی با جایگذاری از داده‌های اصلی یکسان است، پس می‌توان گام ۱ را به صورت زیر در نظر گرفت:
۱. نمونه‌ی  $X_1^*, \dots, X_n^*$  با جایگذاری از  $X_1, \dots, X_n$  انتخاب می‌شود،
۴. واریانس برآورد کننده‌ی آماره‌ی موردنظر، یعنی  $V_{boot}$ ، به شیوه‌ی خودگردان به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$V_{boot} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B (T_{n,b}^* - \frac{1}{B} \sum_{r=1}^B T_{n,r}^*)^2.$$

#### ۵-۱- برآورد خودگردان میانگین زمان پاسخ مدل صف $M/G/1$

فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$ ، نمونه‌ای از جامعه‌ای با توزیع  $F(\cdot)$ ، و همچنین  $Y_1, \dots, Y_n$  نیز نمونه‌ی دیگری از جامعه‌ای با توزیع  $H(\cdot)$  باشند. بر اساس روش خودگردان  $X_1^*, \dots, X_n^*$ ، یک نمونه‌ی خودگردان است که از تابع توزیع تجربی که بر اساس  $X_1, \dots, X_n$  محاسبه شده است، به دست آورده‌ایم و به طریق مشابه نمونه‌های خودگردان  $Y_1^*, \dots, Y_n^*$  نیز به دست آورده می‌شود. با توجه به مطالب فوق، برآورد میانگین زمان پاسخ بر اساس نمونه‌های خودگردان به صورت زیر است:

$$\hat{r}^* = \bar{Y}^* + \frac{m_2^*}{2(\bar{X}^* - \bar{Y}^*)}.$$

در رابطه‌ی بالا  $\bar{X}^*$  و  $\bar{Y}^*$ ، به ترتیب میانگین‌های نمونه‌ای از  $X_1^*, \dots, X_n^*$  و  $Y_1^*, \dots, Y_n^*$  و  $m_2^*$  گشتاور دوم نمونه‌ای  $Y_1^*, \dots, Y_n^*$  هستند و  $\hat{r}^*$  برآورد خودگردان  $\hat{r}$  نامیده می‌شود. فرایند بازنمونه‌گیری بالا می‌تواند چندین بار تکرار شود. فرض کنید این فرایند  $B$  بار تکرار شده است. در این صورت، برآوردهای خودگردان  $\hat{r}_1^*, \dots, \hat{r}_B^*$  را نیز می‌توان از نمونه‌های به دست آمده از روش بازنمونه‌گیری محاسبه نمود. با محاسبه‌ی میانگین  $\hat{r}_1^*, \dots, \hat{r}_B^*$ ، داریم:

$$\hat{r}_B = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{r}_B^*$$

که برآورد خودگردان  $r$  (میانگین زمان پاسخ) است و خطای استاندارد  $\hat{r}_B$  به صورت زیر می‌باشد:

$$se(\hat{r}_B) = \left\{ \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B (\hat{r}_i^* - \hat{r}_B)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

### ۵-۲- برآورد خودگردان بازه‌ی اطمینان میانگین زمان پاسخ مدل صف $M/G/1$

در بخش‌های قبل، برای مدل صف‌بندی  $M/G/1$ ، برآورد خودگردان میانگین زمان پاسخ را بررسی کردیم. حال بازه‌های اطمینان خودگردان برای میانگین زمان پاسخ را در مدل صف‌بندی  $M/G/1$  با نظم ورودی  $FCFS$ ، می‌سازیم. این بازه‌های اطمینان در ادامه آورده می‌شود.

### ۵-۲-۱- بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی نرمال

با توجه به قضیه‌ی حد مرکزی،  $\hat{r}$  (برآورد میانگین زمان پاسخ) دارای توزیع تقریبی نرمال است. بنابراین یک بازه‌ی اطمینان خودگردان<sup>۱</sup> (SB) به شیوه‌ی نرمال برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی  $M/G/1$  به صورت زیر است:

$$\left( \hat{r} - Z_{\frac{\alpha}{2}} se(\hat{r}_B), \hat{r} + Z_{\frac{\alpha}{2}} se(\hat{r}_B) \right)$$

که در بازه‌ی اطمینان بالا  $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ، چندک  $\frac{\alpha}{2}$  ام از توزیع نرمال استاندارد است.

### ۵-۲-۲- بازه‌ی اطمینان صدکی خودگردان

اگر  $\hat{r}_1^*, \dots, \hat{r}_B^*$  توزیع‌های خودگردان از  $\hat{r}$  (برآورد میانگین زمان پاسخ) و  $\hat{r}_{(1)}^*, \dots, \hat{r}_{(B)}^*$  آماره‌های ترتیبی  $\hat{r}_1^*, \dots, \hat{r}_B^*$  باشند، در این صورت با استفاده از صدک‌های  $\frac{\alpha}{2}$  از توزیع

خودگردان، یک بازه‌ی اطمینان صدکی خودگردان<sup>۱</sup> (PB) بر مبنای صدک‌ها برای  $r$  برابر است با:

$$\left( \hat{r}_{[(\frac{\alpha}{2})B]}^*, \hat{r}_{[(1-\frac{\alpha}{2})B]}^* \right)$$

که در آن  $[x]$  نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح عدد  $x$  است.

### ۵-۲-۳- بازه‌ی اطمینان تی خودگردان (روش BT<sup>۱۲</sup>)

در این حالت به منظور برآورد خطای استاندارد  $\hat{r}$  (برآورد میانگین زمان پاسخ)، بایستی ۲۵ نمونه‌ی دیگری خودگردان  $(\tilde{X}_{25}^s, \tilde{Y}_{25}^s), \dots, (\tilde{X}_1^s, \tilde{Y}_1^s)$ ، از نمونه‌های اصلی  $(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (X_1, \dots, X_n; Y_1, \dots, Y_n)$  انتخاب شوند و سپس مطابق با هر ۲۵ نمونه‌ی خودگردان مقدارهای زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{r}_j^s &= \bar{Y}_j^s + \frac{m_{2j}^s}{2(\bar{X}_j^s - \bar{Y}_j^s)}, \quad j=1, \dots, 25 \\ \hat{r}^s &= \frac{1}{25} \sum_{j=1}^{25} \hat{r}_j^s \\ \hat{s} &= \left\{ \frac{1}{25} \sum_{j=1}^{25} (\hat{r}_j^s - \hat{r}^s)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

که در رابطه‌های بالا،  $\bar{X}_j^s$  میانگین نمونه‌ای از  $\tilde{X}_j^s$  ها و  $\bar{Y}_j^s$  میانگین نمونه‌ای از  $\tilde{Y}_j^s$  ها است. حال اگر  $z_i^* = (\hat{r}_i^* - \hat{r})/\hat{s}$  برای  $i=1, \dots, B$  در این صورت  $z_1^*, \dots, z_B^*$  نمونه‌ی تصادفی از توزیع تقریبی  $t$  باشند (افرون و تیشیرانی، ۱۹۸۶)، بنابراین با به‌کارگیری صدک‌های نمونه‌های  $z_1^*, \dots, z_B^*$  بازه‌ی اطمینان تی خودگردان<sup>۲</sup> (BT) با میزان اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  برای میانگین زمان پاسخ به‌صورت زیر است:

$$\left( \hat{r} - t_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot se(\hat{r}_B), \hat{r} + t_{\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot se(\hat{r}_B) \right)$$

- 1- Percentile Bootstrap
- 2- Bootstrap-t

که در آن  $\hat{t}_{(\frac{\alpha}{2})}$  صدک  $\alpha/2$  ام از نمونه‌های تصادفی  $Z_1^*, \dots, Z_B^*$  است.

### ۵-۲-۴- بازه‌ی اطمینان خودگردان تصحیح اریبی شتابیده (روش $BCa^{13}$ )

توزیع خودگردان  $\hat{r}_1^*, \dots, \hat{r}_B^*$  ممکن است اریب باشد. بنابراین روش چهارم بر اساس این اریبی و همگرایی سریع توزیع خودگردان طراحی شده است. قرار می‌دهیم

$$p_o = \sum_{i=1}^B \frac{I(\hat{r}_i^* < \hat{r})}{B}$$

که در آن  $I(\cdot)$  یک تابع نشان‌گر است. تعریف می‌کنیم  $\hat{z}_o = \Phi^{-1}(p_o)$  باشد که در آن  $\Phi^{-1}$  نشان‌دهنده‌ی تابع معکوس توزیع نرمال استاندارد  $\Phi$  است. همچنین، چنانچه  $\tilde{X}(i)$  و  $\tilde{Y}(i)$  نمونه‌هایی باشند که در آن‌ها  $i$  امین مشاهده‌ی  $x_i$  و  $y_i$  حذف شده‌اند و  $\hat{r}(i)$  برآوردگر  $r$  محاسبه‌شده با استفاده از نمونه‌های  $\tilde{X}(i)$  و  $\tilde{Y}(i)$  است. تعریف می‌کنیم

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{r}_c - \hat{r}(i))^3}{\left\{ 6 \left[ \sum_{i=1}^n (\hat{r}_c - \hat{r}(i))^2 \right]^{3/2} \right\}},$$

$$\hat{r}_c = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{r}(i)}{n}$$

که  $\hat{z}_o$  و  $\hat{a}$  به ترتیب تصحیح اریبی و شتاب اریبی نامیده می‌شوند. در این صورت بازه‌ی اطمینان خودگردان تصحیح و شتاب اریبی  $100(1-\alpha)\%$  برای میانگین زمان پاسخ برابر است با:

$$(\hat{r}^*([\alpha_1, B]), \hat{r}^*([\alpha_2, B]))$$

که در آن

$$\alpha_1 = \Phi\left(\hat{z}_0 + (\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2}) / \left[1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2})\right]\right)$$

$$\alpha_2 = \Phi\left(\hat{z}_0 + (\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}) / \left[1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{\alpha/2})\right]\right).$$

### ۵-۲-۵- بازه‌ی اطمینان خودگردان به شیوه‌ی کمیت محوری

فرض کنید  $\theta = T(F)$  (هر تابعی از توزیع  $F$ ) و  $\hat{\theta}_n = T(\hat{F}_n)$  برآورد پارامتر  $\theta$  باشد. کمیت محوری را به صورت  $R_n = \hat{\theta}_n - \theta$  در نظر می‌گیریم. فرض کنید  $H(\theta)$  نشان‌دهنده‌ی تابع توزیع تجمعی این کمیت محوری به صورت زیر باشد:

$$H(\theta) = P_F(R_n \leq \theta)$$

همچنین فرض کنید  $C_n^* = (c, d)$  یک بازه‌ی اطمینان برای  $\theta$  باشد که در آن است و این توزیع نامعلوم می‌باشد. پس لازم است توزیع  $H$  نیز به روش خودگردان برآورد شود. این برآورد به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\hat{H}(\theta) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I(R_{n,b}^* \leq \theta)$$

در رابطه‌ی بالا  $R_{n,b}^* = \hat{\theta}_{n,b}^* - \hat{\theta}_n$  است. حال فرض کنید  $R_\beta^*$ ، نشان‌دهنده‌ی چندک نمونه‌ای  $\beta$  ام از  $R_{n,1}^*, \dots, R_{n,B}^*$  و همچنین  $\theta_\beta^*$ ، نشان‌دهنده‌ی چندک نمونه‌ای  $\beta$  ام از  $\theta_{n,1}^*, \dots, \theta_{n,B}^*$  باشند و  $R_\beta^* = \theta_\beta^* - \hat{\theta}_n$ . در نتیجه  $C_n = (\hat{c}, \hat{d})$  یک بازه‌ی اطمینان تقریبی  $100(1-\alpha)\%$  است، که در آن  $\hat{c}$  و  $\hat{d}$  به صورت زیر هستند:

$$\hat{c} = \hat{\theta}_n - \hat{H}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \hat{\theta}_n - R_{1-\frac{\alpha}{2}}^* = 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{1-\frac{\alpha}{2}}^*$$

$$\hat{d} = \hat{\theta}_n - \hat{H}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \hat{\theta}_n - R_{\frac{\alpha}{2}}^* = 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{\frac{\alpha}{2}}^*$$

به طور خلاصه، بازه‌ی اطمینان  $100(1-\alpha)\%$  به شیوه‌ی کمیت محوری برای میانگین زمان پاسخ را می‌توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$C_n = (2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{(1-\frac{\alpha}{2})B}^*, 2\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{(\frac{\alpha}{2})B}^*).$$

## ۶- مطالعه‌ی شبیه‌سازی

یکی از هدف‌های اصلی روش خودگردان، ایجاد بازه‌های اطمینان خوب است. افرون و تیبشیرانی [۱۸] اشاره‌ای داشتند بر این‌که منظور از خوب بودن در مورد بازه‌های اطمینان این است که بازه‌ی اطمینان خودگردان باید عملکرد نسبتاً دقیقی در پوشش‌دهی و به دنبال آن کوتاه شدن متوسط طول بازه در همه‌ی موقعیت‌ها داشته باشد. برای بررسی عملکرد پنج روش خودگردان و روش دلتای ناپارامتری بحث شده در بخش قبل، درصد پوشش‌دهی (نسبت دفعاتی که بازه‌های اطمینان تولیدشده میانگین واقعی زمان پاسخ را پوشش می‌دهند) و متوسط طول این بازه‌های اطمینان در یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای این منظور فرض بر آن است که توزیع زمان بین دو ورود، نمایی با میانگین  $1/\lambda$  و زمان سرویس دارای توزیع پیوسته‌ای با میانگین  $E(Y)$  است. سپس مقادارهای  $(0/1)$ ،  $(0/3)$ ،  $(0/5)$  و  $(0/7)$ ،  $(0/9)$  را برای زوج  $(\lambda, E(Y))$  در نظر گرفته و برای هر زوج، نمونه‌های تصادفی به اندازه‌های  $n = 20, 50, 80$  تولید می‌شود و برای هراندازه‌ی نمونه‌ی انتخاب‌شده، تعداد نمونه‌های خودگردان،  $B = 10000$  در نظر گرفته می‌شود و با پنج روش خودگردان و روش دلتای ناپارامتری بازه‌های اطمینان خودگردان در سطح اطمینان ۹۰ درصد برای میانگین زمان پاسخ به دست آورده می‌شود. برای تولید بازه‌ی اطمینان تی خودگردان نیز، ۲۵ نمونه‌ی خودگردان دیگر به‌اندازه‌ی  $n$  از نمونه‌ی اصلی برای محاسبه‌ی خطای استاندارد برآورد شده‌ی  $\hat{r}$  انتخاب‌شده است. فرایند شبیه‌سازی  $N = 1000$  مرتبه تکرار می‌شود و درصد پوشش و متوسط طول‌ها و انحراف استاندارد برای هر پنج بازه‌ی اطمینان خودگردان و روش دلتای ناپارامتری، محاسبه می‌شود. تمامی شبیه‌سازی‌ها در این بخش با استفاده از نرم‌افزار برنامه‌نویسی R انجام شده است. در حقیقت در این مطالعه‌ی شبیه‌سازی، سه نوع توزیع پیوسته‌ی مختلف با میانگین  $E(Y) = 1$  برای زمان سرویس در نظر گرفته شده است که عبارت‌اند از: توزیع نمایی که با نماد M نشان داده شده است، توزیع فوق نمایی چهار مرحله‌ای و توزیع ارلانگ چهار مرحله‌ای. جدول (۱) تابع چگالی هر سه توزیع را ارائه می‌دهد.

جدول ۱: سه توزیع مختلف زمان سرویس

مدل‌های صف‌بندی	تابع چگالی زمان سرویس
$M / M / 1$	$h(y) = \mu e^{-\mu y}$
$M / H_4 / 1$	$h(y) = 3/8 \mu_1 e^{-\mu_1 y} + 1/8 \mu_2 e^{-\mu_2 y} + 2/8 \mu_3 e^{-\mu_3 y} + 2/8 \mu_4 e^{-\mu_4 y}$
$M / E_4 / 1$	$h(y) = \mu^4 y^3 e^{-\mu y} / 3!$

جدول‌های ۲ و ۳ درصد پوشش‌دهی و متوسط طول بازه‌های اطمینان هر شش روش برای میانگین زمان پاسخ در هر سه مدل صف‌بندی ارائه‌شده در جدول ۱ را نشان می‌دهد. با توجه به جدول ۲ می‌توان دریافت که با افزایش اندازه‌ی نمونه درصد پوشش‌دهی روش تصحیح آریبی شتابیده نیز افزایش می‌یابد و زمانی که  $\lambda = 0/9$  است، درصد پوشش‌دهی روش تصحیح آریبی شتابیده، کمیت محوری و تابع نفوذ به‌طور معنی‌داری کم‌تر از سطح در نظر گرفته‌شده‌ی ۰/۹ است. در هر حال با توجه به نتایج شبیه‌سازی بهترین عملکرد از نظر درصد پوشش‌دهی مربوط به روش صدک‌ها است.

جدول ۳ نیز متوسط طول بازه‌های اطمینان روش‌های خودگردان و روش دلتا بر مبنای تابع نفوذ و انحراف معیار بازه‌های اطمینان را نشان می‌دهد. با توجه به این نتایج زمانی که اندازه‌ی نمونه برابر با ۲۰ و  $\lambda \leq 1/5$  است کم‌ترین طول بازه‌های اطمینان مربوط به روش دلتا می‌باشد. اما زمانی که اندازه‌ی نمونه ۲۰ و  $\lambda \geq 1/5$  در نظر گرفته شود کم‌ترین طول بازه‌ی اطمینان مربوط به روش کمیت محوری است. زمانی که اندازه‌ی نمونه از ۲۰ به ۸۰ افزایش می‌یابد، تحت  $\lambda \leq 1/5$  کم‌ترین طول بازه‌ی اطمینان مربوط به روش دلتا است و تحت  $\lambda \geq 1/7$  کم‌ترین طول بازه‌ی اطمینان مربوط به روش کمیت محوری می‌باشد.

در تمامی وضعیت‌ها روش صدک‌ها و کمیت محوری دارای بازه‌های اطمینان کوتاهی هستند. همچنین طول بازه‌های اطمینان در روش صدک‌ها در صورتی که  $\lambda \leq 1/5$  نزدیک طول بازه‌های اطمینان روش دلتا و در صورتی که  $\lambda \geq 1/7$  نزدیک به طول بازه‌های اطمینان در روش کمیت محوری می‌باشد. در تمامی وضعیت‌ها روش‌های نرمال استاندارد، کمیت محوری توزیع  $t$  و تصحیح آریبی شتابیده دارای عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش دلتا و کمیت محوری از نظر طول بازه‌ی اطمینان هستند. با مقایسه‌ی طول بازه‌های اطمینان در روش دلتای ناپارامتری برای نرخ ورودهای مختلف می‌توان دریافت که در نرخ‌های ورود  $\lambda = 1/7, 0/9$  طول بازه‌ها به‌شدت افزایش‌یافته است، به‌طوری‌که در مواردی این افزایش چندین برابر طول بازه‌های اطمینان در روش‌های دیگر است.

جدول ۴ نسبت درصد پوشش‌دهی در محدوده‌ی اطمینان ۹۹ درصد برای هر یک از ۶ روش بیان‌شده را ارائه می‌دهد. از آنجاکه فراوانی درصد پوشش‌دهی برای یک بازه‌ی اطمینان دقیق دارای توزیع دوجمله‌ای با  $N = 1000$  و  $p = 0/9$  است بنابراین یک محدوده‌ی اطمینان ۹۹ درصد برای احتمال پوشش برابر است با:

$$0/9 \pm 2/576 \sqrt{0/90 \times 0/10/1000} = 0/9 \pm 0/0244 = (0/876, 0/924).$$

جدول ۲: درصد پوشش‌دهی برای بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

نرخ ورود $\lambda$ در یک سیستم صف‌بندی					روش‌های خودگردان	اندازه‌ی نمونه	مدل‌های صف‌بندی
۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۱			
۰/۹۷۵	۰/۹۵۹	۰/۹۱۴ <sup>a</sup>	۰/۸۵۳	۰/۸۴۲	نرمال استاندارد	۲۰	M / M / 1
۰/۷۵۸	۰/۹۰۷ <sup>a</sup>	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	۰/۸۵۴	۰/۸۴۴	صدک‌ها		
۰/۷۹۶	۰/۸۶۱	۰/۸۵۴	۰/۸۱۱	۰/۸۲۷	کمیت محوری توزیع t		
۰/۴۵۸	۰/۶۳۲	۰/۸۲۹	۰/۸۶۲	۰/۸۵۱	تصحیح اربیبی شتابیده		
۰/۴۸۲	۰/۶۵۸	۰/۷۳۳	۰/۸۰۱	۰/۸۳۳	کمیت محوری		
۰/۴۸۵	۰/۷۷۴	۰/۷۹۳	۰/۸۳۴	۰/۸۴	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۸۱	۰/۹۶۸	۰/۸۶۸	۰/۸۷۵	۰/۸۸۷ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۵۰	
۰/۸۷۹ <sup>a</sup>	۰/۹۴۴	۰/۸۹۷ <sup>a</sup>	۰/۸۶۶	۰/۸۸۶ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۸۰۶	۰/۸۸۱ <sup>a</sup>	۰/۷۹۸	۰/۸۴۲	۰/۸۸۶ <sup>a</sup>	کمیت محوری توزیع t		
۰/۴۸۶	۰/۷۹	۰/۸۹۶ <sup>a</sup>	۰/۸۷۷ <sup>a</sup>	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	تصحیح اربیبی شتابیده		
۰/۶۱۳	۰/۷۳	۰/۷۸	۰/۸۳۶	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	کمیت محوری		
۰/۶۰۲	۰/۸۴۳	۰/۸۲۶	۰/۸۵۹	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۵۶۰	۰/۹۳۹	۰/۸۹۵ <sup>a</sup>	۰/۸۹۷ <sup>a</sup>	۰/۸۸۹ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۸۰	
۰/۹۱۵ <sup>a</sup>	۰/۹۴۵	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	۰/۸۸۰ <sup>a</sup>	۰/۸۸۲ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۷۹۲	۰/۸۵۷	۰/۸۳۲	۰/۸۶۹	۰/۸۸۵ <sup>a</sup>	کمیت محوری توزیع t		
۰/۵۶۶	۰/۸۶۱	۰/۸۹۶ <sup>a</sup>	۰/۸۸۵ <sup>a</sup>	۰/۸۸۲ <sup>a</sup>	تصحیح اربیبی شتابیده		
۰/۶۳۳	۰/۷۵۷	۰/۸۳۹	۰/۸۶۸	۰/۸۸۹ <sup>a</sup>	کمیت محوری		
۰/۷۰۲	۰/۸۵۶	۰/۸۶۴	۰/۸۹۲ <sup>a</sup>	۰/۸۸۵ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۴۴	۰/۹۵۴	۰/۹۴۲	۰/۹۲۲ <sup>a</sup>	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۲۰	M / E <sub>4</sub> / 1
۰/۸۴۲	۰/۹۵۸	۰/۹۳۹	۰/۸۷۰	۰/۸۷۹ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۷۸۱	۰/۸۶۸	۰/۸۹۰ <sup>a</sup>	۰/۸۷۷ <sup>a</sup>	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	کمیت محوری توزیع t		
۰/۴۵۳	۰/۷۰۳	۰/۸۹۱ <sup>a</sup>	۰/۸۸۱ <sup>a</sup>	۰/۸۸۶ <sup>a</sup>	تصحیح اربیبی شتابیده		
۰/۶۱۷	۰/۶۹۹	۰/۸۴۵	۰/۸۸۸ <sup>a</sup>	۰/۸۹۵ <sup>a</sup>	کمیت محوری		
۰/۵۶۵	۰/۸۳۲	۰/۸۸۷ <sup>a</sup>	۰/۸۹۲ <sup>a</sup>	۰/۸۸۱ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۶۱	۰/۹۴۵	۰/۹۴۱	۰/۹۰۳ <sup>a</sup>	۰/۸۹۲ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۵۰	
۰/۹۰۷ <sup>a</sup>	۰/۹۴۶	۰/۸۸۶ <sup>a</sup>	۰/۸۹۲ <sup>a</sup>	۰/۸۹۳ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۸۳۲	۰/۸۵۵	۰/۸۷۸ <sup>a</sup>	۰/۸۷۸ <sup>a</sup>	۰/۸۸۲ <sup>a</sup>	کمیت محوری توزیع t		
۰/۵۶۴	۰/۸۴۳	۰/۹۰۳ <sup>a</sup>	۰/۸۹۵ <sup>a</sup>	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	تصحیح اربیبی شتابیده		
۰/۶۳۸	۰/۷۸۸	۰/۸۸۹ <sup>a</sup>	۰/۸۸۶ <sup>a</sup>	۰/۸۸۸ <sup>a</sup>	کمیت محوری		
۰/۶۸۸	۰/۸۹۳ <sup>a</sup>	۰/۹۱۶ <sup>a</sup>	۰/۸۸۱ <sup>a</sup>	۰/۸۹۱ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۶۹	۰/۹۳۸	۰/۹۳۹	۰/۹۴۱	۰/۹۱۵ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۸۰	
۰/۹۴۱	۰/۹۵۸	۰/۸۸۶ <sup>a</sup>	۰/۹۰۵ <sup>a</sup>	۰/۹۱۳ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۸۴۴	۰/۸۹۲ <sup>a</sup>	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	۰/۹۰۲ <sup>a</sup>	۰/۹۰۳ <sup>a</sup>	کمیت محوری توزیع t		
۰/۶۰۶	۰/۹۰۵ <sup>a</sup>	۰/۹۱۴ <sup>a</sup>	۰/۹۱۱ <sup>a</sup>	۰/۹۱۳ <sup>a</sup>	تصحیح اربیبی شتابیده		
۰/۶۳۱	۰/۸۵۳	۰/۸۹۱ <sup>a</sup>	۰/۹۱۴ <sup>a</sup>	۰/۹۱۶ <sup>a</sup>	کمیت محوری		
۰/۷۱۵	۰/۹۱۹ <sup>a</sup>	۰/۹۰۱ <sup>a</sup>	۰/۹۲۱ <sup>a</sup>	۰/۹۱۱ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		

<sup>a</sup> نشان‌دهنده‌ی نسبت معنی‌داری ( $\alpha = 0/01$ ) در مقدار مورد انتظار ۰/۹



جدول ۲ (ادامه): درصد پوشش‌دهی برای بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

نرخ ورود $\lambda$ در یک سیستم صف‌بندی					روش‌های خودگردان	اندازه‌ی نمونه	مدل‌های صف‌بندی
۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۱			
۰/۹۴۹	۰/۹۵۸	۰/۹۱۱ <sup>a</sup>	۰/۹۱۸ <sup>a</sup>	۰/۸۷۵	نرمال استاندارد	۲۰	$M / H_4 / 1$
۰/۸۳۱	۰/۹۴۴	۰/۹۰۰ <sup>a</sup>	۰/۸۹۶ <sup>a</sup>	۰/۸۶۴	صدک‌ها		
۰/۷۶۷	۰/۸۷۵	۰/۸۴۵	۰/۸۸۱ <sup>a</sup>	۰/۸۶۴	کمیت محوری توزیع t		
۰/۴۴۵	۰/۷۴۳	۰/۸۷۰	۰/۸۹۶ <sup>a</sup>	۰/۸۶۷	تصحیح اریبی شتابیده		
۰/۵۷۸	۰/۷۳۲	۰/۸۱۴	۰/۸۷۱	۰/۸۷۳	کمیت محوری		
۰/۵۹۸	۰/۸۷۹ <sup>a</sup>	۰/۸۸۴ <sup>a</sup>	۰/۸۸۵ <sup>a</sup>	۰/۸۷۳	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۶۸	۰/۹۳۸	۰/۹۰۶ <sup>a</sup>	۰/۹۱۳ <sup>a</sup>	۰/۸۹۳ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۵۰	
۰/۹۴۳	۰/۹۳۴	۰/۸۹۶ <sup>a</sup>	۰/۸۶۵	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۸۲۴	۰/۸۵۴	۰/۸۶۴	۰/۸۸۲ <sup>a</sup>	۰/۸۷۴	کمیت محوری توزیع t		
۰/۵۶۷	۰/۸۶۵	۰/۸۹۴ <sup>a</sup>	۰/۸۶۵	۰/۸۹۱ <sup>a</sup>	تصحیح اریبی شتابیده		
۰/۶۶۵	۰/۷۷۸	۰/۸۶۷	۰/۸۸۳ <sup>a</sup>	۰/۸۶۴	کمیت محوری		
۰/۶۷۸	۰/۸۶۷	۰/۸۹۴ <sup>a</sup>	۰/۸۸۹ <sup>a</sup>	۰/۸۸۸ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		
۰/۹۸۱	۰/۹۳۴	۰/۹۰۳ <sup>a</sup>	۰/۹۱۸ <sup>a</sup>	۰/۸۸۹ <sup>a</sup>	نرمال استاندارد	۸۰	
۰/۹۴۴	۰/۹۴۵	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	۰/۸۹۷ <sup>a</sup>	۰/۸۸۴ <sup>a</sup>	صدک‌ها		
۰/۸۲۲	۰/۸۲۳	۰/۸۷۱	۰/۹۱۳ <sup>a</sup>	۰/۸۹۳ <sup>a</sup>	کمیت محوری توزیع t		
۰/۵۷۷	۰/۹۱۴ <sup>a</sup>	۰/۸۹۷ <sup>a</sup>	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	۰/۸۹۳ <sup>a</sup>	تصحیح اریبی شتابیده		
۰/۶۵۵	۰/۷۹۵	۰/۸۶۵	۰/۹۲۱ <sup>a</sup>	۰/۸۹۵ <sup>a</sup>	کمیت محوری		
۰/۷۹۸	۰/۸۶۵	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	۰/۹۲۳ <sup>a</sup>	۰/۸۹۸ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		

جدول ۳: متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

نرخ ورود $\lambda$ در یک سیستم صف‌بندی					روش‌های خودگردان	اندازه‌ی نمونه	مدل‌های صف‌بندی
۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۱			
۱۸,۸۴/۵۹	۵۷۳۸/۱۵	۵۴۲/۳۵	۳۵۰/۵	۰/۸۹	نرمال استاندارد	۲۰	$M / M / 1$
(۸۹۹۴/۸)	(۱۰۰۴۱۷/۱)	(۳۰۳۲/۹۴)	(۶۸۴۳/۱۲)	(۰/۴۱)			
۳۲/۸۱	۲۸/۴۹	۱۱/۹۲	۲/۵	۰/۸۸	صدک‌ها		
(۱۸/۸)	(۲۱/۸۵)	(۱۶/۹۵)	(۴/۷)	(۰/۳۷)			
۱۴۹۳/۴	۳۷۱۸/۳۱	۳۷۷/۵۸	۳۰۶/۸	۰/۹۱	کمیت محوری توزیع t		
(۷۴۹۶/۴)	(۷۶۹۴۳/۸۳)	(۱۶۰۷/۲)	(۶۳۷۰/۶۲)	(۰/۴۳)			
۷۹۷۸/۶۳	۱۸۵۶/۹۷	۴۱۵۴/۲	۵/۲۹	۰/۹۵	تصحیح اریبی شتابیده		
(۱۲۱۴۵۳/۹)	(۷۱۴۵/۰۷)	(۸۳۸/۴۵)	(۵۴/۲۵)	(۰/۴۷)			
۳۲/۷ <sup>a</sup>	۲۸/۴ <sup>a</sup>	۱۱/۸۳ <sup>a</sup>	۲/۴	۰/۸۸	کمیت محوری		
(۱۸/۷۵)	(۲۱/۷)	(۱۶/۸)	(۴/۷)	(۰/۳۷)			
۲۱۶۳۷/۰۴	۱۱۴۲/۶۲	۱۱۰۴/۴	۱/۷۳ <sup>a</sup>	۰/۸۷۳ <sup>a</sup>	دلتهای ناپارامتری		
(۵۰۸۶۴۵/۸)	(۱۲۷۷۹/۴۴)	(۳۳۷۶۷/۸)	(۲/۱)	(۰/۳۶)			

<sup>a</sup> نشان‌دهنده‌ی کوتاه‌ترین متوسط طول بازه‌های اطمینان

**جدول (ادامه) ۳:** متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان	نرخ ورود $\lambda$ در یک سیستم صف‌بندی				
			۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۱
۵۰	نرمال استاندارد		۴۵۵۳/۹۷۶	۶۲۶۹/۰۴۸	۲۳۳/۸	۱/۱۸	۰/۵۷
			(۲۷۸۷۳/۳۸)	(۱۳۶۶۵۰/۷)	(۲۱۱۰/۰۸)	(۱/۷)	(۰/۱۴)
			۵۲/۶۸	۳۱/۵	۳/۴	۱/۰۲	۰/۵۷
			(۲۹/۴)	(۳۱/۱)	(۸/۹)	(۰/۴۵)	(۰/۱۴)
			۳۴۱۸/۲۹	۶۹۴۲/۲۳	۱۸۷/۷۸	۱/۲	۰/۵۹
			(۲۰۳۲۲/۹۷)	(۱۷۳۹/۱۳)	(۱۴۰/۱۵)	(۲/۳)	(۰/۱۹)
			۴۳۰۰/۲	۱۵۷۴/۳	۸/۹	۱/۰۹	۰/۵۹
(۲۸۱۰۰/۷۲)	(۱۳۹۶۷)	(۵۶/۳)	(۰/۵۳)	(۰/۱۶)			
۵۲/۵ <sup>a</sup>	۳۱/۴ <sup>a</sup>	۳/۴	۱/۰۲	۰/۵۷			
(۲۹/۳)	(۳۱/۱)	(۸/۸)	(۰/۴۵)	(۰/۱۴)			
۶۹۷۲/۱۷	۱۵۹۰/۳	۲/۶ <sup>a</sup>	۰/۹۶ <sup>a</sup>	۰/۵۶ <sup>a</sup>			
(۱۳۶۲۷۸)	(۲۰۷۰/۱۹)	(۴/۹)	(۰/۳۸)	(۰/۱۴)			
۸۰	نرمال استاندارد		۴۴۰۹/۴	۴۱۲۳/۱۶	۱۸۰/۹	۱/۱۱	۰/۴۵ <sup>a</sup>
			(۵۵۱۲۷/۸)	(۱۱۴۹۱/۱۴)	(۱۵۴۶/۵۹)	(۱/۵۵)	(۰/۰۹)
			۶۴/۲۸	۲۵/۳۱	۳/۱۹	۰/۸۶	۰/۴۵ <sup>a</sup>
			(۳۴/۵۷)	(۳۱/۵۲)	(۶/۵۷)	(۰/۳۵)	(۰/۰۹)
			۴۰۳۹/۲۹	۳۲۱۱/۲۱	۱۲۳/۳۳	۰/۷۲	۰/۴۶
			(۷۷۴۸/۱۶)	(۱۳۹۲/۴۱)	(۱۲۳۱/۳۵)	(۰/۲۸)	(۰/۱۱)
			۳۱۰۵/۲۴	۹۸۳/۲۲	۳/۱۳	۰/۷۱	۰/۴۷
(۲۳۳۴۶/۲۲)	(۷۵۶۴/۲)	(۲۲/۳۷)	(۰/۲۳)	(۰/۱۲)			
۶۳/۴۶ <sup>a</sup>	۲۳/۴۸ <sup>a</sup>	۲/۱۹	۰/۶۹	۰/۴۵ <sup>a</sup>			
(۳۲/۲۵)	(۳۱/۵۱)	(۳/۶۱)	(۰/۲۲)	(۰/۰۹)			
۲۰	$M/E_4/1$	نرمال استاندارد	۱۳۵۱/۴۶	۹۶۷/۵۱	۸۸۰/۹۳	۱۰/۸۶	۰/۴۱
			(۹۱۳۶/۲۳)	(۴۴۹۳/۱۷)	(۶۹۱۳/۸۴)	(۸۵/۵۴)	(۰/۰۹)
			۲۶/۸۵	۱۸/۷۹	۵/۶	۰/۸۷	۰/۴۱ <sup>a</sup>
			(۱۴/۱۳)	(۱۵/۹۳)	(۹/۳۲)	(۱/۱)	(۰/۰۹)
			۹۱۳/۴۱	۳۹۳/۸	۵۹۳/۶۲	۷/۵۴	۰/۴۲
			(۴۹۴۹/۵۲)	(۱۸۵۲/۶۳)	(۵۱۴۶/۱۳)	(۵۳/۴۱)	(۰/۱۱)
			۱۳۴۵/۴	۵۲۲/۴۱	۱۳۷/۱۱	۰/۸۷	۰/۴۲
(۱۴۳۴۹/۰۷)	(۴۳۸۶/۴۸)	(۲۵۳۷/۳۹)	(۱/۳)	(۰/۱)			
۲۵/۵۴ <sup>a</sup>	۱۸/۵۶ <sup>a</sup>	۵/۵۱ <sup>a</sup>	۰/۸۷	۰/۴۱ <sup>a</sup>			
(۱۴/۷۶)	(۱۶/۴۲)	(۹/۳۶)	(۱/۱۶)	(۰/۰۹)			
۳۲۴۲/۴۲	۸۷۹/۳۴	۳۹۹/۵۲	۰/۶۸ <sup>a</sup>	۰/۴۱ <sup>a</sup>			
(۴۹۹۷۵/۳۶)	(۱۶۰۴۵/۲۳)	(۱۱۴۰۲/۹۱)	(۰/۳۳)	(۰/۰۹)			

<sup>a</sup> نشان‌دهنده‌ی کوتاه‌ترین متوسط طول بازه‌های اطمینان

جدول ۳ (ادامه): متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

نرخ ورود $\lambda$ در یک سیستم صف‌بندی					روش‌های خودگردان	اندازه‌ی نمونه	مدل‌های صف‌بندی
۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۳	۰/۱			
۱۳۵۶/۳۶ (۷۱۵۴/۴۳)	۴۶۷/۷۶ (۲۴۷۲/۶۹)	۲۴/۵۹ (۱۷۸/۶)	۰/۵۸ (۰/۴۴)	۰/۱۶ <sup>a</sup> (۰/۰۲)	نرمال استاندارد	۵۰	
۴۴/۴۵ (۲۵/۴۷)	۱۴/۴۴ (۲۲/۴۳)	۲/۴۴ (۱/۵۶)	۰/۴۴ (۰/۱۴)	۰/۱۶ <sup>a</sup> (۰/۰۲)			
۱۱۱۱/۴۴ (۵۹۵۱/۴۳)	۳۴۰/۱۴ (۲۱۱۲/۳۶)	۲۲/۳ (۲۱۶/۳۵)	۰/۴۵ (۰/۴۳)	۰/۲۸ (۰/۰۷)	کمیت محوری توزیع t		
۱۸۵۹/۳ (۱۲۱۴۸/۸)	۲۵۷/۵ (۳۰۵۰/۷)	۲/۴۳ (۳/۳۱)	۰/۴۴ (۰/۱۱)	۰/۱۶ <sup>a</sup> (۰/۰۱)			
۳۹/۲۷ <sup>a</sup> (۲۵/۲)	۱۴/۵۵ <sup>a</sup> (۱۵/۰۲)	۲/۴۶ (۱/۷۸)	۰/۴۲ (۰/۲۲)	۰/۱۶ <sup>a</sup> (۰/۰۳)	کمیت محوری		
۳۵۷۵۷/۶۴ (۷۶۵۲۸۷/۴۶)	۶۴۵۲/۷ (۱۸۷۸۹/۹۴)	۱/۷۵ <sup>a</sup> (۰/۸)	۰/۳۳ <sup>a</sup> (۰/۱۱)	۰/۱۶ <sup>a</sup> (۰/۰۲)			
۱۵۴۱/۸۹ (۵۴۵۱/۲۳)	۷۸۸/۸۲ (۱۳۵۳۰/۱)	۳/۵۵ (۴۶/۱۳)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۱۱ <sup>a</sup> (۰/۱۲)	نرمال استاندارد	۸۰	
۴۵/۶ (۲۹/۵۴)	۱۱/۳۲ (۱۵/۲۲)	۰/۸۲ (۰/۴۶)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۱۱ <sup>a</sup> (۰/۱۲)			
۱۵۴۴/۳۲ (۷۴۵۶/۹۹)	۷۱۳/۴۲ (۹۳۸۵/۶۳)	۳/۸۱ (۳۶/۷۹)	۰/۳۳ (۰/۰۷)	۰/۲۴ (۰/۱۴)	کمیت محوری توزیع t		
۱۶۶۴/۴۳ (۱۲۷۸۲/۷۱)	۵۸/۱۲ (۴۱۸/۳۶)	۰/۹۹ (۰/۷۱)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۱۱ <sup>a</sup> (۰/۱۲)			
۴۳/۴۹ <sup>a</sup> (۲۵/۵)	۹/۲۶ <sup>a</sup> (۱۴/۱۸)	۰/۹۲ (۰/۵۸)	۰/۳۷ (۰/۱۶)	۰/۱۱ <sup>a</sup> (۰/۱۲)	کمیت محوری		
۴۷۴۴۲/۳۲ (۱۳۴۷۶۸۴)	۲۳۳/۲۳ (۶۳۴۲/۳۲)	۰/۷۷ <sup>a</sup> (۰/۳۸)	۰/۳۳ <sup>a</sup> (۰/۰۵)	۰/۱۱ <sup>a</sup> (۰/۱۲)			
۹۶۹/۱۷ (۳۳۴۵/۵۳)	۱۸۳۴/۳۱ (۲۷۲۱۲/۷۲)	۳/۶۵۴ (۶۶۳۴/۳۴)	۹/۹۷ (۸۴/۵)	۰/۴۸ (۰/۱۳)	نرمال استاندارد	۲۰	$M/H_4/1$
۲۷/۶۷ (۱۴/۶)	۱۸/۴۱ (۱۴/۵۵)	۵/۶۱ (۸/۵۹)	۱/۱۴ (۱/۳۲)	۰/۴۸ (۰/۱۳)			
۶۴۴/۸۹ (۳۰۵۲/۳۸)	۱۰۲۳/۸۳ (۱۲۴۳۸/۵)	۱۶۴/۵ (۱۸۱۲/۴۵)	۵/۳۸ (۳۶/۴۶)	۰/۵۴ (۰/۱۹)	کمیت محوری توزیع t		
۱۲۴۱/۳۶ (۹۹۸۴/۲۱)	۹۳۲/۶۸ (۷۵۲۳/۵۸)	۴۴/۲ (۵۱۰/۳۴)	۱/۴۷ (۱۰/۵۵)	۰/۵۳ (۰/۱۷)			
۲۷/۱۲ <sup>a</sup> (۱۴/۲۶)	۱۸/۲۵ <sup>a</sup> (۱۵/۴۳)	۴/۵۸ <sup>a</sup> (۷/۵۲)	۱/۱۴ (۱/۳۱)	۰/۴۸ (۰/۱۳)	کمیت محوری		
۲۲۴۵۰/۱۶ (۸۵۳۴۵۰/۴)	۸۶۳۴/۹۸ (۲۵۲۴۴۳/۸)	۲۳/۸۱ (۳۸۴/۰۱)	۰/۷۴ <sup>a</sup> (۰/۵۷)	۰/۴۵ <sup>a</sup> (۰/۱۲)			

<sup>a</sup> نشان‌دهنده‌ی کوتاه‌ترین متوسط طول بازه‌های اطمینان

**جدول ۳ (ادامه):** متوسط طول و انحراف استاندارد (در داخل پرانتز) بازه‌های اطمینان ۹۰ درصد

مدل‌های صف‌بندی	اندازه‌ی نمونه	روش‌های خودگردان				
		نرخ ورود $\bar{x}$ در یک سیستم صف‌بندی	۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۳
۵۰	نرمال استاندارد	۲۹۸۸/۵	۶۳۳/۳۳	۳۳/۳۷	۰/۵۳	۰/۵۶
		(۱۳۵۹۴/۴۱)	(۴۲۲۰/۳)	(۳۵۰/۷۷)	(۰/۱۵)	(۰/۱۳)
		۴۲/۴۵	۱۴/۵۴	۱/۷۲	۰/۵۴	۰/۵۴ <sup>a</sup>
		(۲۶/۷۶)	(۱۷/۶۷)	(۲/۷۸)	(۰/۱۶)	(۰/۱۲)
		۱۴۲۰/۷۶	۵۱۱/۳۲	۱۷/۵۶	۰/۵۷	۰/۵۸
۸۰	نرمال استاندارد	(۶۳۲۷/۷۷)	(۳۸۷۹/۸۷)	(۱۴۲/۲۵)	(۰/۳۱)	(۰/۲۹)
		۱۳۴۵/۹۸	۱۷۲/۳۴	۲/۵۴	۰/۵۸	۰/۵۸
		(۵۴۲۷/۵۱)	(۲۸۵۲/۴۹)	(۲۹/۰۶)	(۰/۲۸)	(۰/۱۶)
		۴۱/۸۴ <sup>a</sup>	۱۳/۵ <sup>a</sup>	۱/۶۵	۰/۵۲	۰/۵۴ <sup>a</sup>
		(۲۵/۶۵)	(۱۷/۸۴)	(۲/۴۴)	(۰/۱۷)	(۰/۱۱)
۵۰	نرمال استاندارد	۴۷۸۵/۳۷	۴۳۳/۹۸	۱/۳۱ <sup>a</sup>	۰/۵۰ <sup>a</sup>	۰/۵۴ <sup>a</sup>
		(۷۶۵۷۸/۴۴)	(۱۶۵۴/۲۱)	(۵/۹۱)	(۰/۱۱)	(۰/۵)
		۱۹۴۴/۵	۳۹۴/۹۸	۲/۲۲	۰/۴۵	۰/۱۴ <sup>a</sup>
		(۸۵۴۵/۵۲)	(۲۸۷۸/۲۴)	(۱۸/۳۴)	(۰/۱۵)	(۰/۰۱)
		۵۵/۴۲	۹/۱۵	۱/۲۱	۰/۴۵	۰/۱۴ <sup>a</sup>
۸۰	نرمال استاندارد	(۲۶/۴۵)	(۱۴/۴۳)	(۰/۷۸)	(۰/۱۳)	(۰/۰۱)
		۱۷۴۵/۱۸	۲۷۵/۷۸	۲/۲۹	۰/۴۵	۰/۲۲
		(۱۳۳۴۷/۲۸)	(۲۶۴۲/۲۶)	(۱۸/۳۴)	(۰/۱۳)	(۰/۰۴)
		۱۸۴۵/۴۵	۶۳/۳۵	۱/۳۴	۰/۴۷	۰/۱۴ <sup>a</sup>
		(۷۶۵۴/۶۷)	(۹۲۵/۷۸)	(۰/۸۷)	(۰/۱۸)	(۰/۰۱)
۵۰	نرمال استاندارد	۴۹/۷۶ <sup>a</sup>	۸/۰۳ <sup>a</sup>	۱/۴۳	۰/۴۶	۰/۱۴ <sup>a</sup>
		(۲۵/۹۷)	(۱۲/۵۴)	(۰/۵۸)	(۰/۱۶)	(۰/۰۱)
		۱۵۴۲۳/۷۸	۳۲/۴۳	۰/۷۸ <sup>a</sup>	۰/۴۱ <sup>a</sup>	۰/۱۴ <sup>a</sup>
		(۳۷۳۵۱۲/۱)	(۷۳۱/۵۵)	(۰/۳)	(۰/۱)	(۰/۰۱)
		دلتای ناپارامتری	کمیت محوری	تصحیح اریبی شتابیده	کمیت محوری توزیع t	صدک‌ها
۶/۱۵	۲/۱۵	۴/۱۵	۴/۱۵	۵/۱۵	۵/۱۵	۲۰
۸/۱۵	۵/۱۵	۸/۱۵	۶/۱۵	۹/۱۵	۶/۱۵	۵۰
۹/۱۵	۶/۱۵	۱۱/۱۵	۷/۱۵	۱۰/۱۵	۷/۱۵	۸۰
۰/۵۱	۰/۲۸	۰/۵۱	۰/۳۷	۰/۵۳	۰/۴	متوسط

**جدول ۴:** نسبت درصد پوشش‌دهی در محدوده‌ی اطمینان ۹۹ درصد

روش‌های خودگردان						اندازه‌ی نمونه
دلتای ناپارامتری	کمیت محوری	تصحیح اریبی شتابیده	کمیت محوری توزیع t	صدک‌ها	نرمال استاندارد	
۶/۱۵	۲/۱۵	۴/۱۵	۴/۱۵	۵/۱۵	۵/۱۵	۲۰
۸/۱۵	۵/۱۵	۸/۱۵	۶/۱۵	۹/۱۵	۶/۱۵	۵۰
۹/۱۵	۶/۱۵	۱۱/۱۵	۷/۱۵	۱۰/۱۵	۷/۱۵	۸۰
۰/۵۱	۰/۲۸	۰/۵۱	۰/۳۷	۰/۵۳	۰/۴	متوسط

با توجه به این جدول روش دلتای ناپارامتری بهترین عملکرد را از نظر درصد پوشش‌دهی زمانی که اندازه‌ی نمونه برابر با ۲۰ است دارند. اما زمانی که اندازه‌ی نمونه برابر با ۵۰ است تنها روش

صدک‌ها بهتر عمل کرده است و با افزایش اندازه‌ی نمونه به ۸۰ روش تصحیح اریبی شتابیده عملکرد بهتری نسبت به دیگر روش‌ها از نظر درصد پوشش دارد. همچنین بهترین عملکرد از نظر متوسط درصد پوشش دهی را روش صدک‌ها داشته و پس از آن روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ، تصحیح اریبی شتابیده و نرمال استاندارد در رتبه‌های بعدی قرار دارند.

### ۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی برآورد ناپارامتری بازه‌های اطمینان میانگین زمان پاسخ مدل صف‌بندی  $M/G/1$  پرداخته شد، به طوری که برای بازه‌های مذکور از پنج روش خودگردان نرمال استاندارد، صدک‌ها، کمیت محوری توزیع  $t$ ، تصحیح اریبی شتابیده، کمیت محوری و روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ استفاده شد. ملاک موردنظر برای ارزیابی عملکرد این روش‌ها درصد پوشش دهی و طول بازه‌های اطمینان ایجاد شده است. با بررسی نتایج شبیه‌سازی مشاهده شد که

۱. از نظر میانگین درصد پوشش دهی، روش صدک‌ها بهترین عملکرد را داشته و روش دلتا عملکرد قابل قبولی بعد از روش صدک‌ها دارا است،

۲. با بررسی میانگین طول بازه‌های اطمینان در صورتی که  $J/5 \leq \lambda$ ، روش دلتا بهترین عملکرد را داشته و در حالت  $J/7 \geq \lambda$  روش کمیت محوری بهتر عمل کرده است، و

۳. با در نظر گرفتن هر دو ملاک درصد پوشش دهی و طول بازه‌ی اطمینان تحت  $J/5 \leq \lambda$ ، روش دلتا بر مبنای تابع نفوذ بهترین بازه‌های اطمینان ناپارامتری را برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی  $M/G/1$  ایجاد می‌کند و با توجه به نزدیکی طول بازه‌های اطمینان روش‌های کمیت محوری و صدک‌ها در حالت  $J/7 \geq \lambda$ ، روش صدک‌ها بهترین بازه‌های اطمینان ناپارامتری را برای میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی  $M/G/1$  ایجاد می‌کند.

این مقاله، نخستین مقاله‌ای است که در آن علاوه بر روش‌های خودگردان، از روش دلتای ناپارامتری بر مبنای تابع نفوذ برای ایجاد بازه‌های اطمینان ناپارامتری میانگین زمان پاسخ در مدل صف‌بندی  $M/G/1$  استفاده شد و نتایج جالب‌توجهی نیز به دست آمد. همچنین اعتقاد بر این است که روش دلتا بر مبنای تابع نفوذ را می‌توان در مورد دیگر معیارهای مؤثر بودن در صف  $M/G/1$  و یا دیگر مدل‌های صف‌بندی نیز به کار برد.

## سپاس‌گزاری

نویسندگان از داوران محترم به خاطر نظرات و پیشنهادهای ارزنده‌شان که موجب بهبود و غنای بیشتر مقاله گردید، کمال تشکر را دارند.

## مراجع

- [1] Clarke, A.B. (1957). Maximum likelihood estimates in a simple queue, *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 1036–1040.
- [2] Lilliefors, H.W. (1966). Some confidence intervals for queues, *Operations Research*, **14**, 723–727.
- [3] Basawa, I.V. and Prabhu, N.U. (1981). Estimation in single server queues, *Naval Research Logistics Quarterly*, **28**, 475–487.
- [4] Dave, U. and Shah, Y.K. (1980). Maximum likelihood estimates in an M/M/2 queue with heterogeneous servers, *Journal of the Operational Research Society*, **31**.
- [5] Jain, S. and Templeton, J.G.C. (1991). Confidence interval for M/M/2 queue with heterogeneous servers, *Operations Research Letters*, **10**, 99–101.
- [6] Rubin, G. and Robson, D.S.A. (1990). single server queue with random arrivals and balking: confidence interval estimation, *Queueing Systems Theory and Applications*, **7**, 283–306.
- [7] Jain, S. (1991). Estimation in M/E<sub>k</sub>/1 queueing systems, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **20**, 1871–1879.
- [8] Abou-E1-Ata, M.O. and Hariri, A.M.A. (1995). Point estimation and confidence intervals of the M/M/2/N queue with balking and heterogeneity, *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, **15**, 35–55.
- [9] Basawa, I.V., Bhat, U.N. and Lund, R. (1996). Maximum likelihood estimation for single server queues from waiting time data, *Queueing Systems-Theory and Applications*, **24**, 155–167.
- [10] Efron, B. (1979). Bootstrap methods: another look at the jackknife, *Annals of Statistics*, **7**, 1-26.

- [11] Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*, SIAM Monograph, 38.
- [12] Efron, B. and Gong, G.A. (1983). leisurely look at the bootstrap, the Jackknife and Cross-Validation, *American Statistician*, **37**, 36–48.
- [13] Efron B. and Tibshirani, R.J. (1986). *Confidence intervals of mean response time for an M/G/1 queueing system: bootstrap simulation*, Revised edition, John Wiley, New York.
- [14] Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 171–200.
- [15] Chu, K.Y. and Ke, C.J. (2006). Confidence intervals of mean response time for an M/G/1 queueing system: bootstrap simulation, *Applied Mathematics and Computation*, **180**, 255-263.
- [16] Chu, K.Y. and Ke, C.J. (2007). Mean response time for a G/G/1 queueing system: simulated computation, *Applied Mathematics and Computation*, **186**, 772-779.
- [17] Wasserman, L. (2005). *All of nonparametric statistics*, Springer Text in Statistics.
- [18] Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1998). *An introduction to the bootstrap*, Chapman and Hall, New York.

---

## Comparison of Confidence Interval Based on Bootstrap Method for the Mean Response Time in a Simulation Study

Hossein Kazemzadeh Garehchobogh, Bahman Tarvirdizade, Alireza Afshari Safavi

Department of Mathematics, Maku Branch, Islamic Azad University, Maku, Iran

### Abstract

The mean response time plays an important role in the analyzing and optimizing the queuing system, which determines the number and type of giving service. In this paper, new confidence intervals of mean response time for an M/G/1 FCFS queuing system is contrasted based on the nonparametric delta method and five bootstrap methods. These methods include: nonparametric delta method confidence interval based on the influence function, standard bootstrap confidence interval, percentile bootstrap confidence interval, bootstrap-t confidence interval, bias corrected, acceleration bootstrap confidence interval, and bootstrap pivotal confidence interval. In a simulation study, these six methods are compared and evaluated the accuracy and performance of the confidence intervals for three different M/G/1 FCFS queuing systems based on the coverage percentage and the average length of confidence intervals.

**Keywords:** Queuing Theory, Nonparametric delta method, Bootstrap pivotal confidence interval, Influence function, Mean response time.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62F40, 62G15.