Archive of SID

مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۳

روایی برآوردگرهای شاخص عملکرد طول عمر تحت تابع زیان مربع خطای وزنی در توزیع پارتو بر اساس داده سانسور شده پیش‌رونده

حجت اله ذاکرزاده، مریم شیخ‌علیشاهی [1]

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۸/۱۵

چکیده: طول عمر محصولات تولیدی، یکی از بهترین مشخصه‌های کیفی را ارائه می‌دهد به این صورت که هر چه طول عمر محصول بیشتر باشد کیفیت آن بالاتر خواهد بود. بر اساس همین ایده مونت گومری [1] شاخص قابلیت فرایند C_L را برای ارزیابی عملکرد طول عمر محصولات تولیدشده پیشنهاد کرد. در این مقاله ما این شاخص را موردبررسی قرار می-دهیم.فرض می‌کنیم که طول عمر محصولات دارای توزیع پارتو باشند و با استفاده از داده‌هایم. از راست سانسور شده پیش‌رونده نوع دوم، شاخص عملکرد طول عمر را به دو روش بیز و درستنمایی ماکزیمم برآورد می‌کنیم. همچنین برآورد نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم و برآورد بیز تجربی هم برای شاخص عملکرد طول عمر ارائه خواهیم داد. تحت تابع زیان مربع خطای وزنی روایی این برآوردگرها موردبررسی قرار می‌گیرد. سپس برای بررسی این‌که آیا شاخص عملکرد طول عمر به سطح کیفی موردنظر دست‌یافته است یا نه آزمون فرض انجام خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: آزمون نسبت درستنمایی، برآورد بیز تجربی، برآورد روا، شاخص عملکرد طول عمر.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲C۱۵، ۶۲C۱۰

۱- مقدمه

فرآیندهای اصلی سازمان‌ها شامل فعالیت‌ها و فرآیندهایی هستند که عملیات تولید یا ارائه خدمات را شامل می‌شوند. که باید با مدیریت صحیح، باعث کارایی و اثربخش بودن آن فرایند

1- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله:مریم شیخ علیشاهی maryamsheikhalishahi@yahoo.com

www.SID.ir

Archive of SID

شوند و یا کارایی فرایند را بالا ببرند. در این مقاله بحث اصلی بر روی فرایندهای تولیدی است و هدف این است که با ارائه شاخصی فرایند را تحت کنترل قرار دهیم و با رفع مشکلات احتمالی و در صورت امکان طرح برنامه‌هایی، کارایی فرایند را افزایش دهیم.

در برخی از فرایندهای تولیدی عملکرد آن فرایند رابطه مستقیمی با طول عمر تولیدات آن فرایند دارد به این صورت که هرچه طول عمر تولیدات بیشتر باشد کیفیت آن‌هم بالاتر خواهد بود در فرایندهایی با چنین مشخصه‌ای مونت گومری[1] [۱]پیشنهاد کرد که می‌توان از شاخص عملکرد طول عمر C_L برای اندازه‌گیری میزان اثربخشی و کارایی آن فرایند استفاده کرد. با در اختیار داشتن داده‌های حقیقی از محاسبه این شاخص امکان برنامه‌ریزی، اجرا و بازبینی و اقدام اصلاحی به وجود می‌آید [۲].

تانگ[2] [۳] برآوردگر نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم برای این شاخص تحت نمونه کامل از توزیع نمایی به دست آورد. چن[3] [۴] از برآورد نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم استفاده کرد و فواصل اطمینان برای این شاخص تحت توزیع نمایی ساخت.

توزیع‌های نمایی، وایبل، گاما و پارتو از توزیع‌های مهم در بررسی طول عمر هستند. ازآنجاکه توزیع پارتو کاربرد گسترده‌ای در این زمینه دارد [۵]، در این مقاله فرض شده که طول عمر تولیدات دارای توزیع پارتو باشد.در مباحث مربوط به آزمون‌های طول عمر، معمولاً آزمایشگر، به دلیل مشکلاتی که در جمع‌آوری داده‌ها موجود است، به طول عمر تمام تولیدات که در آزمون موردبررسی قرار می‌گیرند دسترسی ندارد. بنابراین از روش‌های سانسور شده برای جمع‌آوری داده‌ها استفاده می‌شود. اگر آزمایشگر تصمیم بگیرد از بین n واحد مورد آزمایش، آزمون طول عمر تا انجام ادامه دهد که به $m(m<n)$ شکست برسد و بقیه $m-n$ واحد باقی‌مانده را کنار بگذارد داده‌های از راست سانسور شده نوع دوم به دست می‌آید. همان‌طور که مشخص است زمان سانسور واحدها تصادفی است و البته تمام واحدهای سانسور شده در زمان m امین شکست از آزمون کنار گذاشته می‌شوند. اگر آزمایشگر تمایل به سانسور کردن واحدها در زمان‌های متفاوت داشته باشد از روش سانسور شده پیش‌رونده نوع دوم استفاده کرده است [۶]. به این صورت که پس از iامین مشاهده r_i واحد کنار گذاشته می‌شود.

$$\circ \le r_i \le \sum_{j=1}^{i-1} r_j - i\ , \quad i = 2,3,\ldots,m-1, \tag{۱}$$

1- Montgomery
2-Tong
3- Chen

www.SID.ir

Archive of SID

$$\circ \le r_1 \le n-1\,,\; r_m = n-\sum_{j=1}^{m-1} r_j - m, \tag{۲}$$

که در این روش m و r_i از قبل بر اساس تجربیات آزمایشگر مشخص می‌شود [۷]. اگر $r_1 = r_2 = \ldots = r_m = \circ$ نمونه، نمونه‌ای کامل است. اگر نمونه ما از راست سانسور شده نوع دوم باشد آنگاه $r_1 = r_2 = \ldots = r_{m-1} = \circ\,,\; r_m = n-m$، که حالت‌های خاصی از نمونه سانسور شده پیش‌رونده نوع دوم می‌باشند.

در این مقاله فرض بر این است که داده‌ها از روش راست سانسور شده پیش‌رونده نوع دوم جمع‌آوری شده‌اند. هدف اصلی برآورد شاخص عملکرد طول عمر C_L با روش درستنمایی ماکزیمم و بیز تحت توزیع پارتو با نمونه از راست سانسور شده پیش‌رونده نوع دوم می‌باشد. که در ادامه با استفاده از این برآوردگرها فاصله اطمینان و فاصله اعتباری را خواهیم ساخت. برآوردهای مختلف با ملاک مخاطره باهم مقایسه شده و روایی آن‌ها موردبررسی قرار می‌گیرد.

۲- شاخص عملکرد طول عمر

فرض کنید که طول عمر تولیدات (X) از توزیع پارتو با تابع چگالی f و تابع توزیع F، به‌صورت زیر پیروی کنند

$$f_x\left(x|\theta\right) = \theta\beta^{\theta}\left(x+\beta\right)^{-(\theta+1)},\; x>\circ, \tag{۳}$$

$$F_X\left(x|\theta\right) = 1-\left(\frac{x+\beta}{\beta}\right)^{-\theta},\quad x\ge\circ \quad \theta,\beta>\circ. \tag{۴}$$

با فرض معلوم بودن β تحت تبدیل $Y = ln\left(\frac{X}{\beta}+1\right)$، Y دارای توزیع نمایی با تابع چگالی زیر است

$$f_Y\left(y|\theta\right) = \theta e^{-\theta y},\; \theta>\circ,\; y>\circ. \tag{۵}$$

واضح است که هر چه طول عمر تولیدات بیشتر باشد کیفیت کالاهای ما بهتر خواهد بود. کالاها برای اینکه ازنظر اقتصادی و سرمایه‌گذاری مقرون به‌صرفه باشند باید طول عمرشان از L واحد زمانی فراتر رود. که L را به‌عنوان کران پایین مشخص‌شده در نظر می‌گیریم. بنابراین طول عمر کالاها می‌تواند به‌عنوان مشخصه اصلی کیفیت تولیدات مورد ارزیابی قرار گیرد که مونت-گومری شاخص قابلیت C_L را برای اندازه‌گیری کیفیت کالاهایی با این مشخصه به‌صورت زیر معرفی کرد

www.SID.ir

Archive of SID

$$C_L = \frac{\mu - L}{\sigma}. \qquad (۶)$$

بطوریکه μ میانگین فرآیند است، σ انحراف معیار فرآیند، و L کران پایین مشخص‌شده می‌باشد. برای ارزیابی عملکرد یک فرآیند، می‌توانیم از C_L به‌عنوان یک شاخص استفاده کنیم. شاخص عملکرد طول عمر C_L را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$C_L = \frac{1/\theta - L}{1/\theta} = 1 - \theta L \ , \quad C_L < 1, \qquad (۷)$$

زیرا میانگین فرآیند $\mu = E\left(Y\right) = 1/\theta$ و انحراف معیار فرآیند $\sigma = \sqrt{var\left(Y\right)} = 1/\theta$ و L کران پایین مشخص‌شده می‌باشد.

چون تبدیل لگاریتمی $Y = Ln\left(\frac{X}{\beta} + 1\right)$ یک تبدیل یک به یک و اکیداً صعودی می‌باشد مجموعه داده‌های X و مجموعه داده‌های Y نتایج یکسانی را در ارزیابی عملکرد فرآیند دارند و همچنین استفاده از تبدیل لگاریتمی محاسبه بسیاری از خصوصیات مهم را برای ما آسان می‌کند. هنگامی‌که میانگین $\left(\frac{1}{\theta}\right)$ بزرگ‌تر از L باشد آنگاه شاخص عملکرد طول عمر $C_L > ۰$. همان‌طور که مشاهده می‌شود هر چه میانگین $\left(\frac{1}{\theta}\right)$ بزرگ‌تر، شاخص بهره‌وری طول عمر $\left(C_L\right)$ بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که شاخص عملکرد طول عمر نماینده عملکرد فرآیند باشد.

۳- نرخ تطابق

اگر طول عمر محصولات از کران پایین ویژه مشخص‌شده آن فراتر رود آن کالا به‌عنوان تولید منطبق تعریف می‌شود. نسبت محصولات منطبق به‌عنوان نرخ تطابق بیان می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌گردد

$$P_r = P\left(Y \geq L\right) = \int_L^{\infty} \theta e^{-\theta y}\, dy = e^{-\theta L} = e^{C_L - 1}. \qquad (۸)$$

مقدار این شاخص به‌طور آشکارا به ما می‌گوید که فرآیند تولیدی ما تا چه اندازه موفق عمل کرده است. بنابراین برآورد این شاخص در صنعت تولید از اهمیت خاصی برخوردار است. اما نکته قابل‌توجه این است که، یک رابطه به‌طور اکیداً صعودی بین نرخ تطابق $\left(P_r\right)$ و شاخص عملکرد طول عمر $\left(C_L\right)$ وجود دارد. شاخص عملکرد طول عمر به یک ابزار مؤثر و قابل‌انعطافی

www.SID.ir

Archive of SID

تبدیل می‌شود که نه‌تنها برای اندازه‌گیری میزان کارایی فرآیند بلکه برای برآورد نرخ تطابق می‌توان مورداستفاده قرار داد. در جدول ۱ برای مقادیری از P_r شاخص عملکرد طول عمر آورده شده است. همان‌طور که پیش‌تر بیان شد رابطه صعودی بین آن‌ها ملاحظه می‌شود.

جدول ۱: شاخص عملکرد طول عمر در مقابل نرخ تطابق

P_r	C_L	P_r	C_L	P_r	C_L
۰/۷	۰/۶۵	۰/۴	۰/۱	۰	$-\infty$
۰/۷۴	۰/۷	۰/۴۵	۰/۲	۰/۰۰۴	-۴/۵
۰/۸	۰/۷۸	۰/۵	۰/۳	۰/۰۱	-۳/۵
۰/۸۲	۰/۸	۰/۵۲	۰/۳۵	۰/۰۳	-۲/۵
۰/۸۶	۰/۸۵	۰/۵۵	۰/۴	۰/۰۸	-۱/۵
۰/۹	۰/۹	۰/۵۸	۰/۴۵	۰/۱۳	-۱
۰/۹۵	۰/۹۵	۰/۶	۰/۵	۰/۶	-۰/۵
۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۶۷	۰/۶	۰/۳۷	۰

۴- برآورد نقطه‌ای شاخص عملکرد طول عمر

متغیر تصادفی X را به‌عنوان طول عمر تولیدات در نظر بگیرید که دارای توزیع پارتو با تابع چگالی (۳) می‌باشند. به‌جای کار مستقیم با این داده‌ها از مقادیر تبدیل یافته آن‌ها تحت تبدیل $Y = Ln(1+X)$ استفاده می‌شود. برآورد پارامتر مجهول روش‌های متفاوتی می‌توان به کار برد. که در این قسمت از دو روش متداول "روش درستنمایی ماکزیمم" و "روش بیز" صحبت خواهیم کرد.

۴-۱- روش درستنمایی ماکزیمم

فرض کنید $Y_{1:m:n} \leq Y_{2:m:n} \leq \ldots \leq Y_{m:m:n}$ نمونه‌های جمع‌آوری شده از روش سانسور شده پیش‌رونده نوع دوم با الگوریتم سانسوری $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)$ باشند. تابع چگالی توأم m آماره ترتیبی $Y = (Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \ldots, Y_{m:m:n})$ به‌صورت زیر می‌باشد [۸]:

$$g(\boldsymbol{y}) = C\prod_{i=1}^{m} f_Y(y_{i:m:}|\theta)\left[1 - F_Y(y_{i:m:n}|\theta)\right]^{r_i}, \quad C = n(n - r_1 - 1)\ldots(n - r_1 - \ldots - r_{m-1} - m + 1). \tag{۹}$$

www.SID.ir

Archive of SID

$F_Y\left(y_{i:m:n}|\theta\right)$ و $f_Y\left(y_{i:m:}|\theta\right)$ به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع تجمعی معرفی‌شده در رابطه (۳) و (۴) هستند. بنابراین تابع درستنمایی برای $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \ldots, Y_{m:m:n}$ برابر است با

$$L\left(\theta|\mathbf{y}\right)=C\,\theta^m exp\left\{-\theta\sum_{i=1}^{m}\left(1+r_i\right)y_i\right\}. \tag{۱۰}$$

به‌سادگی برآورد درستنمایی ماکزیمم برای θ به‌صورت زیر به دست خواهد آمد

$$\hat{\theta}_{ML}=\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\left(1+r_i\right)Y_i}. \tag{۱۱}$$

با توجه به خاصیت پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم [۹]، برآورد پارامتر C_L برابر است با

$$\hat{C}_L^{ML}=1-L\,\hat{\theta}_{ML}. \tag{۱۲}$$

۴-۲- برآوردگر بیزی

روش بیز روشی برای ادغام اطلاعات پیشین با داده‌های نمونه برای استنباط پارامترهای مدل فراهم می‌کند. اگر θ پارامتر جامعه باشد آن به‌عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود بطوریکه اطلاعات پیشین در مورد آن در تابع چگالی پیشین نهفته است. در این مقاله فرض می‌شود که چگالی پیشین دارای توزیع نمایی باشد

$$\pi\left(\theta\right)=\lambda e^{-\theta\lambda},\quad \lambda>0, \tag{۱۳}$$

که شامل هیچ‌گونه پارامتر مجهولی نیست(λ معلوم). با توجه به رابطه (۱۳) و با استفاده از قانون بیز چگالی احتمال پسین برای $\theta>0$ به‌صورت زیر خواهد بود

$$\pi\left(\theta|y,\ldots,y_{m:m:n}\right)=\frac{\left[\sum_{i=1}^{m}\left(1+r_i\right)y_i\right]^{m+1}}{\Gamma\left(m\right)}\theta^m exp\left[-\theta\sum_{i=1}^{m}\left(1+r_i\right)y_i\right]. \tag{۱۴}$$

اگر تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن θ^2 باشد، یعنی

$$L\left(\gamma\left(\theta\right),d\right)=\left(\frac{d-\gamma\left(\theta\right)}{\theta}\right)^2. \tag{۱۵}$$

www.SID.ir

Archive of SID

برآوردگر بیز پارامتر $\gamma(\theta)$ نسبت میانگین $\gamma(\theta)\frac{1}{\theta^2}$ به $\frac{1}{\theta^2}$ تحت چگالی پسین است [۹]. یعنی

$$d = E\left[\frac{\gamma(\theta)}{\theta^2} \mid X\right] \Big/ E\left[\frac{1}{\theta^2} \mid X\right]. \tag{۱۶}$$

برآوردگرهای بیز θ و C_L به ترتیب عبارت‌اند از

$$\hat{\theta}_B = \left((m-1)/(\sum_{i=1}^{m} Y_i(1+r_i)+\lambda\right), \tag{۱۷}$$

$$\hat{C}_L^B = 1 - L\left(\frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m} Y_i(1+r_i)+\lambda}\right). \tag{۱۸}$$

تا اینجا فرض بر این بود که چگالی پیشین شامل هیچ پارامتر مجهولی نیست اما اگر پارامتر موجود در چگالی پیشین (λ) مجهول باشد از برآورد بیز تجربی شاخص عملکرد طول عمر استفاده می‌شود. برآورد درستنمایی ماکزیمم (λ) با استفاده از چگالی حاشیه‌ای $\boldsymbol{Y}$ به‌صورت زیر است [۹]

$$m(\boldsymbol{Y}) = \int g(\boldsymbol{y} \mid \theta)\pi(\theta)d\theta = \frac{c\lambda m!}{\left(\sum_{i=1}^{m} y_i(1+r_i)+\lambda\right)^{m+1}}. \tag{۱۹}$$

$$\hat{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^{m} Y_i(1+r_i)\right)/m. \tag{۲۰}$$

درنتیجه برآورد بیز تجربی شاخص عملکرد طول عمر به‌صورت زیر می‌باشد

$$\hat{C}_L^{EB} = 1 - L\left(\frac{m(m-1)}{(m+1)\sum_{i=1}^{m} Y_i(1+r_i)}\right). \tag{۲۱}$$

۳-۴- برآوردگر UMVU

فرض می‌کنیم که $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \ldots, Y_{m:m:n}$ نمونه تصادفی از چگالی معرفی‌شده در رابطه (۵) باشد. با توجه به رابطه (۱۰)، $W = \sum_{i=1}^{m} Y_i(1+r_i)$ یک آماره بسنده کامل است به‌سادگی

www.SID.ir

Archive of SID

می‌توان نشان داد که W دارای توزیع گاما با پارامتر m و θ می‌باشد. برآوردگرهای UMVUE برای θ و C_L به ترتیب به‌صورت زیر است

$$\theta^* = \frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m} y_i\left(1+r_i\right)}, \tag{۲۲}$$

$$C_L^* = 1 - \frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m} y_i\left(1+r_i\right)}. \tag{۲۳}$$

۶- برآورد فاصله‌ای شاخص عملکرد طول عمر

۶-۱- فاصله اطمینان

با توجه به اینکه $W = \sum_{i=1}^{m} Y_i\left(1+r_i\right)$ دارای توزیع گاما $\Gamma(m,\theta)$ است، می‌توان نشان داد که $2\theta W$ دارای توزیع کای-دو با $2m$ درجه آزادی می‌باشد. با استفاده از این کمیت محوری فاصله اطمینان یک‌طرفه در سطح $1-\alpha$ برای C_L به‌صورت زیر به دست می‌آید

$$P_\theta\left(C_L \geq 1 - \frac{\chi^2_{2m,1-\alpha}}{m}\left(1-\hat{C}_L^{ML}\right)\right) = 1-\alpha. \tag{۲۴}$$

بنابراین یک کران پایین در سطح $1-\alpha$ برای C_L با استفاده از روش غیر بیزی به‌صورت زیر می‌باشد

$$LB_{MLE} = 1 - \frac{\chi^2_{2m,1-\alpha}}{m}\left(1-\hat{C}_L^{ML}\right), \tag{۲۵}$$

به‌طوری‌که $\hat{C}_L^{ML} = 1 - L\left(\frac{m}{\omega}\right)$ برآورد درستنمایی ماکزیمم C_L می‌باشد.

۶-۲- فاصله اعتباری

در این قسمت با استفاده از چگالی احتمال پسین یک فاصله تصادفی را به دست می‌آوریم. قرار دهید $Z = 2\theta(W+\lambda)$ (λ معلوم). به‌سادگی نشان داده می‌شود که

$$Z\big|_{Y_{1:m:n},\ldots,Y_{m:m:n}} \sim \chi^2_{2m}. \tag{۲۶}$$

با استفاده از (۳۰)، فاصله اعتباری یک‌طرفه برای C_L در سطح $1-\alpha$ عبارت است از

www.SID.ir

Archive of SID

$$P\left(C_L \geq 1-\frac{\chi^2_{2m,1-\alpha}}{2(m+1)}\left(1-\hat{C}_L^B\right)\right)=1-\alpha. \tag{۲۷}$$

بنابراین یک کران پایین در سطح $1-\alpha$ برای C_L با استفاده از روش بیز به‌صورت

$$LB=1-\frac{\chi^2_{2m,1-\alpha}}{2(m+1)}\left(1-\hat{C}_L^B\right), \tag{۲۸}$$

خواهد بود، به‌طوری‌که $\hat{C}_L^B=1-\mathrm{L}\left(\frac{\mathrm{m}+1}{\omega+\lambda}\right)$ برآورد بیز C_L، m تعداد شکست‌های مشاهده‌شده و α ضریب اطمینان می‌باشد.

۷- آزمون فرض آماری

گاهی اوقات هدف فقط برآورد پارامترها و شاخص‌هاست. اما در بیشتر موارد هدف نهایی این است که تعیین کنیم آیا شاخص عملکرد طول عمر، مقدار معیار پذیرش (c) را به دست آورده است یا خیر که به این منظور باید آزمون زیر را انجام دهیم

$$H_0: C_L \leq c \quad vs \quad H_1: C_L > c. \tag{۲۹}$$

با استفاده از دو روش این آزمون را موردبررسی قرار می‌دهیم.

آزمون نسبت درستنمایی

با فرض این‌که $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \ldots, Y_{m:m:n}$ یک نمونه سانسور شده پیش‌رونده با تابع چگالی رابطه (۱۰) باشد. آزمون (۲۹) معادل با آزمون $H_0: \theta \geq \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta < \theta_0$ است. بطوریکه $\theta_0=\frac{1-c}{L}$. روش آزمون نسبت درستنمایی منجر به ناحیه رد زیر می‌شود

$$R:\left\{\sum_{i=1}^{m} y_i\left(1+r_i\right)>k\right\}. \tag{۳۰}$$

بنابراین ناحیه رد آزمون (۳۲) در سطح معنی‌دار بودن α عبارت است از

$$R:\left\{\hat{C}_L^{ML}>1-\frac{2m(1-c)}{L\chi^2_{2m,1-\alpha}}\right\}. \tag{۳۱}$$

www.SID.ir

Archive of SID

آزمون بر اساس روش بیزی

برای انجام این آزمون بر اساس فاصله اعتباری یک‌طرفه $\left[LB,\infty\right)$ اگر مقدار معیار پذیرش در فاصله اعتباری قرار نگیرد، آنگاه فرض صفر در سطح معنی‌دار بودن α رد می‌شود

۸- برآورد نرخ تطابق

با توجه به بخش ۳، نرخ تطابق تابعی از شاخص عملکرد طول عمر می‌باشد به این صورت که

$$P_r = P\left(Y \geq L\right) = exp\left\{C_L - 1\right\}.$$

با توجه به خاصیت پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکزیمم، برآورد نرخ تطابق به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\hat{P}_r^{ML} = exp\left\{\hat{C}_L^{ML} - 1\right\}, \tag{۳۲}$$

به‌طوری که $\hat{C}_L^{ML}$ برآورد درستنمایی ماکزیمم شاخص عملکرد طول عمر می‌باشد. برآوردگر بیز نرخ تطابق نسبت به چگالی پیشین معرفی شده در (۱۳) و تابع زیان مربع خطای وزنی (۱۵) به‌صورت زیر است

$$\hat{P}_r = \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} Y_i\left(1+r_i\right)+\lambda}{\sum_{i=1}^{m} Y_i\left(1+r_i\right)+\lambda+L}\right)^{m-1}. \tag{۳۳}$$

اگر پارامتر موجود در توزیع پیشین (λ) مجهول باشد آن‌گاه برآورد بیز تجربی نرخ تطابق به‌صورت زیر است

$$\hat{P}_r^{EB} = \left[(m+1) \Big/ \left(m+1\right)+L\left(\frac{m}{\sum_{i=1}^{m} Y_i\left(1+r_i\right)}\right)\right]^{m-1}. \tag{۳۴}$$

۹- مقایسه برآوردها

به‌منظور مقایسه بین برآوردها ابتدا تابع مخاطره آن‌ها را به دست می‌آوریم

$$R\left(\hat{C}_L^{ML}, \gamma(\theta)\right) = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\theta^2}\left(\hat{C}_L^{ML} - C_L\right)^2 \frac{\theta^m}{\Gamma(m)}(w)^{m-1} e^{-\theta w} dw = L^2\left[\frac{m+2}{(m-1)(m-2)}\right]$$

www.SID.ir

Archive of SID

$$R\left(C_L^*,\gamma(\theta)\right)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{\theta^2}\left(\hat{C}_L^*-C_L\right)^2\frac{\theta^m}{\Gamma(m)}(w)^{m-1}e^{-\theta w}dw=L^2\left[\frac{1}{m-2}\right]$$

$$R\left(\hat{C}_L^{EB},\gamma(\theta)\right)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{\theta^2}\left(\hat{C}_L^{EB}-C_L\right)^2\frac{\theta^m}{\Gamma(m)}(w)^{m-1}e^{-\theta\omega}dw=L^2\left[\frac{(m-1)(m+2)}{(m+1)^2(m-2)}\right]$$

$$R\left(\hat{C}_L^{B},\gamma(\theta)\right)=\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{\theta^2}\left(\hat{C}_L^{B}-C_L\right)^2\frac{\theta^m}{\Gamma(m)}(w)^{m-1}e^{-\theta\omega}dw.$$

با مقایسه تابع مخاطره برآوردها برای هر θ در Θ و $m>2$ ملاحظه می‌شود که

$$R(\hat{C}_L^{EB},d)<R(C_L^*,d)<R(\hat{C}_L^{ML},d).$$

بنابراین برآورد بیز تجربی برآورد بهتری از برآورد درستنمایی ماکزیمم و برآورد ناااریب با کمترین واریانس استو همچنین برآورد ML و برآورد UMVU برآوردهای ناروایی هستند. تابع زیان $L\left(d,\gamma(\theta)\right)=\frac{1}{\theta^2}\left[d-\gamma(\theta)\right]^2$ در d محدب است و مقدار مخاطره بیز برآوردگر بیز نسبت به توزیع پیشین(۱۳)، متناهی است زیرا

$$\circ\le r\left(\hat{C}_L^B,\pi\right)=E\left[R\left(\hat{C}_L^B,C_L\right)\right]=\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{\infty}\frac{1}{\theta^2}\left(\hat{C}_L^B-C_L\right)^2 f\left(y_{i:m:n}\mid\theta\right)\pi(\theta)dyd\theta$$

$$\le\int_{\circ}^{\infty}\int_{\circ}^{\infty}\frac{L^2}{\theta^2}\left[\theta^2+\left(\frac{m-1}{\sum_{i=1}^{m}(1+r_i)y_i}\right)^2\right]f\left(y_{i:m:n}\mid\theta\right)\pi(\theta)dyd\theta=L^2\left[\frac{m-1}{m-2}+1\right]<\infty.$$

در نتیجه برآوردگر بیز $\hat{C}_L^B$ به ازای هر $\lambda>0$ و معلوم، رواست [۱۰].

۱۰- مثال

از یک فرآیند تولیدی، ۲۰ =n واحد که طول عمر آن‌ها دارای توزیع پارتو با پارامتر θ و با فرض $\beta=0/9$ به طور همزمان در آزمون قرار گرفتند و نتایج زیر حاصل شده است [۱۰].

۰/۹۰۰۰، ۰/۴۰۰، ۰/۰۱۴۲، ۰/۰۲۲۱، ۰/۰۲۶۱، ۰/۰۱۴۸، ۰/۰۴۷۳، ۰/۰۸۳۴، ۰/۱۰۹۱، ۰/۱۲۵۲، ۰/۱۴۰۴، ۰/۱۴۹۸، ۰/۱۷۵۰، ۰/۲۰۳۱، ۰/۲۰۹۹، ۰/۲۱۶۸، ۰/۲۹۱۸، ۰/۳۴۶۵، ۰/۴۰۳۵، ۰/۶۱۴۳.

نمونه ۱۰ $= m$ به روش سانسور شده پیشرونده نوع دوم با الگوریتم سانسوری (۱، ۱، ۰، ۲، ۰، ۰، ۲، ۱، ۰، ۳) $= r$ از این نمونه مرتب شده استخراج می‌شود که در جدول ۲ داده شده است.

www.SID.ir

Archive of SID

جدول۲: نمونه سانسور شده بر اساس داده‌ها

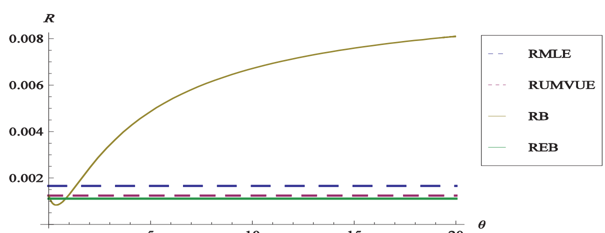
i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
$x_{i:m:n}$	۰/۰۰۰۹	۰/۰۲۶۱	۰/۰۴۱۸	۰/۰۸۳۴	۰/۱۴۰۴	۰/۱۴۹۸	۰/۱۷۵۰	۰/۲۱۶۸	۰/۲۹۱۸	۰/۴۰۳۵
r_i	۳	۰	۱	۲	۰	۰	۲	۰	۱	۱

فرض کنید کران پایین طول عمر $l = 0/1$ باشد. بدین معنی که محصولات دارای طول عمر بیش از ۰/۱ به‌عنوان کالای منطبق در نظر گرفته می‌شوند. همچنین با فرض نمایی بودن توزیع پیشین θ با پارامتر معلوم $\lambda = 4$، نتایج زیر در مورد شاخص عملکرد طول به دست می‌آید.

جدول۳: نتایج شاخص عملکرد طول عمر

	درستنمایی ماکزیمم	بهترین برآوردگر ناااریب خطی	بیز	بیز تجربی
برآورد C_L	۰/۶۲۲۵	۰/۶۶۰۲	۰/۸۶۴۶	۰/۶۹۱۱
$R\left(\hat{C}_L, \gamma(\theta)\right)$	۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۱۲	$R(\theta)$	۰/۰۰۱۱

نمودار توابع مخاطره برآوردگرهای ارائه‌شده در بخش ۴، در شکل ۱ رسم شده که نشان می‌دهد برآوردگر بیز تجربی مخاطره کمتری نسبت به ماکسیمم درستنمایی و UMVUE دارد.



شکل ۱: توابع مخاطره برآوردگرهای مختلف

فرض کنید که ۸۰٪ نرخ تطابق مقداری ایده آل باشد. با توجه به رابطه نرخ تطابق و شاخص عملکرد طول عمر برای اینکه نرخ تطابق بیش از ۸۰٪ شود شاخص عملکرد طول عمر باید از ۰/۷۸ فراتر رود. به‌منظور بررسی اینکه آیا در سطح معنی‌دار بودن α=۰/۰۵ فرآیند تولیدی به سطح کیفی موردنظر رسیده است یا خیر، آزمون زیر انجام می‌گیرد

$$H_\circ : C_L \leq 0/78 \text{ و } H_1 : C_L > 0/78 \,.$$

www.SID.ir

Archive of SID

ناحیه رد این آزمون با استفاده از روش نسبت درستنمایی به‌صورت زیر خواهد بود

$$R:\left\{\hat{C}_L^{MLE} > -3/081\right\}.$$

چون $\hat{C}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{ML}} = 0/6225$، بنابراین فرض صفر در سطح معنی‌دار بودن ۰/۰۵ رد می‌شود به این معنی که بر مبنای این داده‌ها می‌توان نتیجه گرفت که فرآیند تولیدی به سطح کیفی موردنظر رسیده است.

مراجع

[1] Montgomery, D.C. (1985) *Introduction to statistical Quality Control*. John Wiley & Sons, New York.

[2] Wen-Chuan lee, Jong-Wuu Wu and Mei-Ling Hong. (2011). Assessing the lifetime performance index of Rayleigh product based on the Bayesian estimation under progressive type II right censored sample. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **235**, 1676-1688.

[3] Tong, L.I. Chen, K.S. and Chen, H.T. (2002). Statistical testing for assessing the performance of lifetime index of electronic components with exponential distribution. *International Journal of Quality & Reliability Management*, **19**, 812-824.

[4] Chen, H.T., Tong, L.I. and Chen, K.S. (2002). Assessing the lifetime performance of electronic components by confidence interval. *Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers*, **19**, 53-60.

[5] Ali Mousa, M.A.M. (2003). Bayesian prediction based on Pareto doubly censored data. *Statistics*, **37**, 65-72.

[6] Balakrishna, N. and Aggarwala, R. (2000).*Progressive censoring: Theory, methods and application.* Boston.

[7] Balakrishnan N. (2007). Progressive censoring methodology. *Test*, **16**, 211-259.

[8] Casella, G., Roger, L. and Berger, R.L. (2001).*Statistical inference*. Duxbury Press, New York.

[9] Lehman, E.L. and Casella, G. (1998). *Theory of point estimation*. Springer-Verlag, New York.

[10] Nigm, A.M., AL-Hussaini, E.K. and Jaheen, Z.F. (2003). Bayesian one – sample prediction of future observation under Pareto distribution. *Statistics*, **37**, 527-536.

www.SID.ir

Archive of SID

Admissibility of lifetime performance index with respect to weighted squared-error loss function in Pareto distribution under progressive type II right censored sample

Hojatolah Zakerzadeh, Maryam Sheikhalishahi

Department of Statistics, University of Yazd, Yazd, Iran

Abstract

Process capability analysis is an effective means to measure the performance and potential capabilities of a process. Process capability analysis has the following benefits: continuously monitoring the process quality through process capability indices (PCIs) in order to assure the products manufactured are conforming to the specifications; supplying information on product design and process quality improvement for engineers and designer; and providing the basis for reducing the cost of product failures. In the manufacturing industry, process capability indices are utilized to assess whether product quality meets the required level. For instance, Montgomery proposed the process capability index CL (or CPL) for evaluating the lifetime performance of electronic components, where L is the lower specification limit, since the lifetime of electronic components exhibits the larger-the-better quality characteristic of time orientation. In lifetime testing experiments, the experimenter may not always be in a position to observe the lifetimes of all the products on test. This may be because of time limitation or other restrictions (such as lack of funds, lack of material resources, mechanical or experimental difficulties, etc.) on data collection. Therefore, censored samples may arise in practice. And, in an industrial experiment, products may break accidently. Therefore, in this paper, we consider the case of the progressive type II right censoring. In this paper, under the assumption of Pareto distribution, construct a maximum likelihood estimator, UMVUE and also, assuming the Exponential prior distribution and weighted squared-error loss function, this study construct Bayes and Empirical Bayes estimator of C_L based on the progressive type II right censored sample. An admissible estimator of C_L is given for Pareto distribution with respect to the weighted squared-error loss function. The MLE and Bayes estimator of C_L is then utilize to develop a confidence and credible interval. Moreover, we also propose a likelihood Ratio Tests and a Bayesian Test to assess the lifetime performance index. Finally, we give one example to illustrate the use of testing procedure under given significance level.

Keywords: Likelihood Ratio Test, Empirical Bayes estimators, Admissible estimators, Lifetime Performance Index, Progressive Censored Sample.

Mathematics Subject Classification (2000): 62C10, 62C15.

www.SID.ir