مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۴، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۳

توسعه روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی بر اساس روش شمارش ضمنی و روش دوگان

اقبال حسینی [*]، عیسی نخعی کمال آبادی [۱]، محمد فتحی [***]**

[*] دانشجوی دکتری تحقیق در عملیات، مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران، تهران

[**] گروه صنایع، دانشگاه تربیت مدرس و دانشگاه کردستان، سنندج

[***] گروه برق، دانشگاه کردستان، سنندج

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۵/۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۲/۵

چکیده: با توجه به کاربردهای فراوان مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی ازجمله کاربرد آن در ترافیک، حمل‌ونقل و اقتصاد، حل این مسئله از اهمیت خاصی برخوردار است. روش‌های متداول برای حل مسئله تبدیل آن به تک سطحی بر اساس شرایط بهینگی کاروش – کاهن – تاکر و یا توابع جریمه است. اما مدل‌های حاصل از این روش‌ها بسیار پیچیده و به‌صورت غیرخطی ظاهر می‌شوند به‌طوری‌که حل آن‌ها خود یک چالش جدی به‌حساب می‌آید. در این مقاله، دو روش برای حل این مسئله ارائه می‌شود که روش اول یک روش ابتکاری جدید بوده و روش دوم بر اساس قضایا و روابط بین مسئله اولیه و دوگان ، مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی را تک سطحی می‌کند. برای اثبات کارایی روش‌های ارائه‌شده چند مثال عددی حل‌شده و مقایسه‌ای نیز بین نتایج حاصل از این روش‌ها با نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های دیگر صورت می‌گیرد که کارا بودن روش‌های ارائه‌شده را نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی، شرایط بهینگی کاروش – کاهن – تاکر، روش شمارش ضمنی، مسئله دوگان.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰B۰۸ و ۹۰C۰۴

1- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: عیسی نخعی کمال آبادی nakhai@modares.ac.ir

۱- مقدمه

تراکم ترافیک، آلودگی محیط‌زیست و آلودگی هوا، افزایش تأخیرهای ترافیک و مدیریت مصرف انرژی از مسائل جدی در مدیریت حمل‌ونقل نواحی مرکزی و پرتراکم شهرهای بزرگ مانند شهر تهران است. به علت هزینه بالای گسترش خیابان‌های موجود به‌منظور افزایش ظرفیت سامانه حمل‌ونقل شهری ازیک‌طرف و تمرکز بر توسعه هوشمند سازی در سامانه‌های حمل‌ونقل از طرف دیگر، برنامه ریزان مدیریت حمل‌ونقل شهری را قادر می‌سازد که ظرفیت‌های موجود را بهتر مدیریت نموده و وسایل نقلیه را با توجه به ترجیحات متفاوت آن‌ها ازلحاظ میزان ایجاد آلودگی و مصرف انرژی، انتخاب زمان مناسب، کاهش تأخیرها، روانی تردد و از این قبیل، به شکل مؤثری بر استفاده از ظرفیت و فضای در دسترس هدایت نمود. در این‌گونه مدیریت، از یک‌سو موضوع درآمد حاصل از صدور مجوز تردد دارای اهمیت بوده و از سوی دیگر مشکلات ناشی از ازدحام خودروها، کمبود ظرفیت تردد و توقفگاهی و نیز هزینه‌های ناشی از افزایش آلودگی و هدر رفتن سرمایه‌های مربوط به انرژی اهمیت می‌یابد. امروزه این نوع مسائل را می‌توان به‌صورت یک مسئله برنامه‌ریزی چند سطحی مدل‌بندی نمود. در این مقاله هدف ارائه روش‌هایی مؤثر برای حل مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی، به‌عنوان حالتی خاص از مسئله برنامه‌ریزی چند سطحی می‌باشد.

مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی یک مسئله از نوع برنامه‌ریزی ریاضی بوده که شامل یک مسئله بهینه‌سازی در محدودیت‌هایش است. به‌عبارتی دیگر این مسئله شامل دو سطح است که تصمیم‌گیرنده سطح اول تصمیم خود را بر سطح دوم اعمال کرده، عکس‌العمل سطح دوم را مشاهده نموده و قصد دارد که تابع هدف خود را بهینه کند. تصمیم‌گیرنده سطح دوم نیز تصمیم سطح اول را مشاهده کرده و یک تصمیم منطقی را در جهت بهینه نمودن تابع هدفش اتخاذ می‌نماید.

مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی یک مسئله NP – hard است [۱]. اما بااین‌وجود به دلیل کاربردهای فراوان آن در عمل روش‌های زیادی برای حل آن ارائه‌شده است. روش‌های حل این مسئله را می‌توان به پنج دسته روش‌های کلی، روش‌های شمارشی، روش‌های متناظر کردن سطح دوم، روش‌های فازی، روش‌های فرا ابتکاری تقسیم‌بندی کرد [۱].

۱-۱- روش‌های کلی

جواب‌های بهینه همواره می‌توانند محلی یا سراسری باشند، جواب‌های بهینه محلی تنها در یک بازه محدود و به‌اصطلاح در یک همسایگی بهینه‌اند. اما جواب‌های سراسری در کل ناحیه شدنی، بهینه‌اند. آن دسته از الگوریتم‌هایی که در جواب‌های بهینه محلی گرفتار نشده و جواب‌های سراسری به دست می‌آورند روش‌های سراسری یا کلی می‌باشند. در سال ۱۹۹۴ یک روش کلی بر اساس الگوریتم ژنتیک ارائه شد که در آن جواب‌های سطح اول به‌طور تصادفی از بین مجموعه جواب‌ها انتخاب‌شده و سطح دوم بنا بر روش‌های خطی حل‌شده است. همچنین هر کروموزوم شدنی یک جواب شدنی مسئله است نه یک نقطه راسی درنتیجه در این روش منطقه‌ی جواب بزرگ‌تر است [۲].

۱-۲- روش‌های شمارشی

در روش‌های شمارشی ایده کلی این است که نقطه بهینه یکی از نقاط را سی است. این دسته از روش‌ها مختص مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی هستند و جواب بهینه دقیق را به دست می‌آورند اما به علت پیچیدگی محاسباتی بالا، مقالات محدودی در این زمینه ارائه‌شده است که به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌شود. بر مبنای شمارش ضمنی روشی ارائه‌شده است که از یک نقطه شدنی شروع کرده اما الزاماً به یک جواب بهینه سراسری نمی‌رسد؛ بلکه ممکن است در یک جواب بهینه محلی متوقف شود [۳]. در سال‌های اخیر نیز یک روش کلی شمارشی برای این مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی ارائه شد که جواب دقیق مسئله را به دست می‌آورد [۴].

۱-۳- روش‌های متناظر کردن سطح دوم

در این روش‌ها مسئله توسط شرایط بهینگی KKT یا تابع جریمه جایگزین می‌شود به‌طوری‌که مسئله سطح دوم به محدودیت‌هایی برای مسئله اصلی تبدیل می‌گردد. این دسته از روش‌ها برای حل مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی در هر دو حالت خطی و غیرخطی بکار گرفته می‌شوند. در ۲۰۰۷ روشی ارائه شد که ابتدا با استفاده از شرایط بهینگی KKT مسئله را تک سطحی نموده و سپس محدودیت‌های مربوط به مکمل زائد که باعث غیرخطی شدن مسئله می‌شود را با یک تابع جریمه به تابع هدف سطح اول اضافه می‌نمود؛ و به‌این‌ترتیب مسئله خطی شده و با استفاده از الگوریتم‌های خطی قابل‌حل می‌باشد [۵]. در

سال ۲۰۱۱ الگوریتمی بر اساس شرایط بهینگی KKT برای حل مسئله در حالتی که سطح اول و دوم غیرخطی هستند ،با استفاده از تابع‌های جریمه، ارائه شد [۶]. در ۲۰۱۲ روشی ارائه شد که بعد از اعمال شرایط بهینگی KKT به‌منظور خطی‌سازی مسئله غیرخطی حاصل، از متغیرهای باینری استفاده کرده و سپس با استفاده از الگوریتم‌های خطی جوابی دقیق برای مسئله ارائه می‌نمود [۷]. در ۲۰۱۲روشی ارائه شد که با معرفی شرایط جدیدی برای شرایط بهینگی KKT، در حالتی که سطح اول مسئله غیرخطی بود، آن را حل نمود [۸].

۱-۴- روش‌های فازی

ایده کلی در این دسته از روش‌ها تعریف تابع تعلق برای تابع هدف‌ها، محدودیت‌ها، متغیرها و یا ترکیبی از آن‌ها در هرکدام از سطح‌های مسئله است. در ۲۰۰۷ یک روش فازی بر اساس تابع تعلق برای تابع هدف‌های هر سطح و متغیرهای سطح اول را ارائه شد [۹]. در ۲۰۰۹ روشی ارائه شد که با تعریف تابع تعلق‌هایی برای تابع هدف‌های سطح اول و دوم، مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی را حل نمود [۱۰]. در ۲۰۱۲ نیز روشی برای حل مسئله دوسطحی خطی در حالت فازی ارائه شد [۱۱].

۱-۵- روش‌های فرا ابتکاری

اخیراً ابداع روش‌های فرا ابتکاری برای حل مسائل NP-hard گسترش‌یافته است. ازجمله این روش‌ها می‌توان به جستجوی ممنوع، الگوریتم ژنتیک، شبکه‌های عصبی، الگوریتم پرندگان و الگوریتم مورچگان اشاره کرد. این دسته از روش‌ها جزو روش‌های دقیق نیستند و یک جواب تقریبی از جواب بهینه ارائه می‌دهند که درعین‌حال دارای پیچیدگی محاسباتی مناسبی هستند. در ۲۰۰۸ روشی ارائه شد که ابتدا با استفاده از شرایط بهینگی KKT مسئله را تک سطحی کرده و سپس با استفاده از الگوریتم ژنتیک یک جواب بهینه تقریبی را برای مسئله به دست آورد. در این روش با استفاده از روش سیمپلکس مقادیر شدنی برای الگوریتم ژنتیک به‌دست‌آمده و سپس جواب بهینه ارائه‌شده است [۱۲]. در ۲۰۱۰ یک روش شبکه عصبی جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی ارائه شد که دارای پایداری لیاپانوف بود [۱۳]. همچنین یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله دوسطحی فازی ارائه گردید [۱۴]. در ۲۰۱۲ یک الگوریتم ترکیبی هوشمند بر اساس

الگوریتم ذرات انبوه برای حل مسئله دوسطحی غیرخطی ارائه شد که ابتدا بهترین نقاط شدنی سطح دوم را به‌عنوان جمعیت اولیه در نظر گرفته و سپس با استفاده از جستجوی خطی سعی در یافتن جواب بهینه می‌نماید [۱۵]. در ۲۰۱۳ روشی دیگر برای تک سطحی نمودن مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی بر اساس الگوریتم ذرات انبوه ارائه‌شده است [۱۶].

الگوریتم ژنتیک یکی از مهم‌ترین الگوریتم‌های فرا ابتکاری است و به این صورت عمل می‌کند که ابتدا تعدادی جواب شدنی به‌طور تصادفی در نظر گرفته‌شده و در ادامه بر اساس مقادیر تابع هدف هرکدام از جواب‌های شدنی، تعدادی از آن‌ها را که دارای مقادیر بهتری هستند انتخاب و باهم ترکیب کرده و جمعیت جدیدی پدید می‌آورند. در مرحله بعدی جمعیت اولیه ترکیبی از والدها، فرزندان و جمعیت اولیه است و این روند تا زمانی که به یکی از معیارهای توقف ارضا شود ادامه می‌یابد. معیار توقف می‌تواند تعداد تکرارهای از قبل تعیین‌شده، تکرار بهترین جواب‌ها و یا زمان اجرای الگوریتم باشد.

در این مقاله هدف ارائه دو روش برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی است. روش‌های ارائه‌شده در دسته‌های اول و دوم از روش‌های حل مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی قرار می‌گیرند. در روش اول با یک ایده ابتکاری تابع هدف سطح دوم در قالب متغیری جدید به تابع هدف سطح اول اضافه‌شده و به‌این‌ترتیب یک محدودیت جدید به مسئله اضافه‌شده و مسئله تک سطحی می‌گردد. در ادامه با توجه به خطی بودن مسئله حاصل، می‌توان نقطه بهینه را در میان نقاط راسی جستجو کرد. در روش دوم سعی می‌شود که با استفاده از قضایای مربوط به مسائل اولیه و دوگان، مسئله سطح دوم را توسط محدودیت‌های مسائل اولیه و دوگان حذف کرده، تا مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی تک سطحی گردد. در ادامه، مسئله حاصل با استفاده از الگوریتم ژنتیک ساده حل می‌گردد. از مزایای دو روش ارائه‌شده سادگی مسئله تک سطحی حاصل بعد از اعمال روش‌های مذکور است به‌طوری‌که برخلاف دیگر روش‌ها که مسئله تک سطحی حاصل کاملاً غیرخطی می‌شود، در روش اول مسئله تک سطحی حاصل خطی و در روش دوم تنها یک محدودیت غیرخطی وجود دارد. در ادامه ابتدا در بخش دوم تعریف مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی ارائه می‌گردد. در بخش سوم روش پیشنهادی اول و قضایای مربوطه توضیح داده می‌شود. در بخش چهارم چند قضیه مربوط به مسائل اولیه و دوگان بیان خواهد شد و سپس روش

دوم ارائه‌شده و مراحل اجرای الگوریتم خواهد آمد. در بخش پنجم مثال‌های استاندارد با استفاده از روش‌های پیشنهادی حل می‌گردند و نتایج محاسباتی ارائه می‌شود و نیز مقایسه‌ای بین نتایج حاصله با نتایج روش‌های دیگر صورت می‌گیرد. درنهایت در بخش ششم نتیجه‌گیری‌ها و جهت‌گیری‌های آینده ارائه خواهد شد.

۲- تعریف مسئله دوسطحی خطی

فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min_{x}\ & a^T x + b^T y \\ s.t\ \min_{y}\ & c^T x + d^T y \\ & s.t\quad Ax + By \le r, \\ & \qquad x, y \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$$a,\ c \in R^{n_1}.\ b, d \in R^{n_2},\ A \in R^{m\times n_1}.\ B \in R^{m\times n_2},\ r \in R^{m},\ x \in R^{n_1},\ y \in R^{n_2}$$

تعریف ۱ : مجموعه محدودیت‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \{(x, y) \mid Ax + By \le r\ \ ,\ x, y \ge 0\} \tag{2}$$

تعریف ۲: تصویر S بر فضای سطح اول عبارت است از:

$$S(x) = \{y \mid By \le r - Ax\ \ ,\ x, y \ge 0\} \tag{3}$$

تعریف ۳ : مجموعه شدنی مسئله عبارت است از:

$$IR = \{(x, y) \in S,\ y = y(x)\} \tag{4}$$

که در آن $y(x)$ جواب بهینه مسئله سطح دوم به ازای مقدار ثابت x است.

تعریف ۴ : (x, y) را یک نقطه شدنی گوییم هرگاه $(x, y) \in IR$.

تعریف ۵ : (x^*, y^*) جواب بهینه مسئله است هرگاه داشته باشیم:

$$f(x^*.y^*) \le f(x, y)\ \forall (x, y) \in IR \tag{5}$$

۳- روش شمارش ضمنی

تعریف ۶: هرگاه یک یا چند محدودیت از محدودیت‌های یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی را حذف کنیم یک فرم آزادشده از آن مسئله به دست می‌آید.

تعریف ۷: اگر X یک مجموعه از بالا کران‌دار باشد آنگاه کوچک‌ترین کران بالای X را با نماد $Sup(X)$ نمایش داده و آن را سوپرمم مجموعه X گوییم و داریم:

$$\forall_{x\in X} \quad Sup(X)\geq x \tag{۶}$$

تعریف ۸: اگر X یک مجموعه از پایین کران‌دار باشد آنگاه بزرگ‌ترین کران پایین X را با نماد $Inf(X)$ نمایش داده و آن را اینفیمم مجموعه X گوییم و داریم:

$$\forall_{x\in X} \quad Inf(X)\leq x \tag{۷}$$

تعریف ۹: نقطه p یک نقطه حدی مجموعه X است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q\in X$ غیر از p باشد.

تعریف ۱۰: X مجموعه‌ای بسته است هرگاه هر نقطه حدی X یک نقطه از X باشد.

قضیه۱: اگر X مجموعه‌ای ناتهی و از بالا کران‌دار باشد و $a=\sup(X)$ در این صورت برای هر عدد مثبت کوچک دلخواه مانند ε داریم: $a+\varepsilon\notin X$

قضیه ۲: اگر X مجموعه‌ای ناتهی و از پایین کران‌دار باشد و $a=\inf(X)$ در این صورت برای هر عدد مثبت کوچک دلخواه مانند ε داریم: $a-\varepsilon\notin X$

قضیه ۳ : فرض کنید که X مجموعه‌ای ناتهی، بسته و کران‌دار است. قرار می‌دهیم $a=\sup(X)$، $b=\inf(X)$ آنگاه

الف) $a\in X$ ب) $b\in X$.

اثبات: الف) به برهان خلف فرض کنیم که $a\notin X$. در این صورت، با توجه به خاصیت سوپرمم بودن a، به ازای هر $h>0$ نقطه‌ای مانند $x\in X$ هست که $a-h<x<a$ زیرا در غیر این صورت $a-h$ یک کران بالای X خواهد بود و این با خاصیت سوپرمم بودن a در تناقض است. لذا a یک نقطه حدی X می‌باشد و چون X بسته است، شامل هر نقطه حدی خود است. بنابراین $a\in X$.

ب) به برهان خلف فرض کنیم که $b \notin X$. در این صورت، با توجه به خاصیت اینفیمم بودن b، به ازای هر $k > 0$ نقطه‌ای مانند $x \in X$ هست که $b < x < b+k$ زیرا در غیر این صورت $b+k$ یک کران پایین X خواهد بود و این با خاصیت اینفیمم بودن b در تناقض است. لذا b یک نقطه حدی X می‌باشد و چون X بسته است، شامل هر نقطه حدی خود است. بنابراین $b \in X$.

نتیجه ۱: اگر X مجموعه‌ای ناتهی، بسته و کران‌دار باشد آنگاه:

$$\min(X) = \inf(X), \ \ \max(X) = \sup(X)$$

مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۱) را در نظر بگیرید، فرض کنید که مجموعه محدودیت‌ها، X، کران‌دار باشد. با توجه به فرم مسئله، X بسته است. قرار می‌دهیم $z = cx + dy$. چون در مسئله سطح دوم x ثابت بوده و توسط سطح اول تعیین می‌گردد بنابراین تنها متغیر سطح دوم y است. در این صورت داریم:

$$y = \frac{1}{d}(z - cx)$$

با جایگذاری رابطه اخیر در مسئله (۱)، مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی به‌صورت زیر تک سطحی می‌گردد.

$$\begin{aligned} &\min \ \ ax + \frac{b}{d}(z - cx) \\ &\quad s.t \quad Ax + \frac{B}{d}(z - cx) \le b, \\ &\quad x \ge 0 \end{aligned} \tag{۸}$$

مسئله فوق یک مسئله برنامه‌ریزی تک سطحی خطی است و با توجه به اینکه نقطه بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی یکی از نقاط راسی است، بنابراین برای حل مسئله کافی است که نقاط راسی با روش شمارش ضمنی به دست آورده شوند. اما چون z همان تابع هدف سطح دوم است، بنابراین باید مینیمم گردد و به‌این‌ترتیب محدودیتی جدید به مسئله اضافه می‌شود. این محدودیت جدید (مینیمم شدن z) باعث حذف برخی از نقاط راسی می‌گردد. به‌عبارتی‌دیگر تنها نقاط راسی که مینیمم بودن z را ارضا می‌کنند در مجموعه نقاط راسی شدنی قرار می‌گیرند. تشخیص این نقاط به کمک قضایای ارائه‌شده در این بخش امکان‌پذیر است. درنهایت با به دست آوردن نقاط راسی شدنی و یافتن مقدار تابع

هدف سطح اول متناظر آن‌ها نقطه بهینه مسئله مشخص می‌گردد. در ادامه جزئیات الگوریتم ارائه می‌شود.

۳-۱- مراحل اجرای الگوریتم

گام ۱: در این مرحله ابتدا تابع هدف سطح دوم را به‌عنوان یک متغیر جدید در نظر گرفته و سپس در تابع هدف مسئله سطح اول و محدودیت‌های دیگر جایگذاری می‌کنیم.
درنتیجه مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی به یک مسئله تک سطحی تبدیل می‌شود. فضای شدنی مسئله (۸) را بدون اعمال مینیمم بودن z، X و با اعمال مینیمم بودن z، S در نظر می‌گیریم.

گام ۲: محدودیت مربوط به متغیر جدید تعریف‌شده در مرحله اول حذف می‌گردد تا یک فرم آزادشده از مسئله موردنظر به دست آید.

گام ۳: تمام نقاط راسی شدنی (نقاط شدنی پایه) مسئله حاصل از مرحله دوم را پیدا می‌کنیم. با توجه به اینکه مسئله حاصل از مرحله دوم فرم آزادشده مسئله موردنظر است، واضح است که برخی از نقاط مفروض ممکن است برای مسئله نشدنی باشند.

گام ۴: بنابر قضایای ارائه‌شده در این بخش، هر نقطه راسی $(x,z) \in X$ یک نقطه راسی S است اگر و تنها اگر برای هر عدد دلخواه کوچک و مثبت ε داشته باشیم
$(x,z-\varepsilon) \notin X$ هرگاه مسئله سطح دوم مینیمم سازی و $(x,z+\varepsilon) \notin X$ هرگاه مسئله سطح دوم ماکزیمم سازی باشد.

به‌این‌ترتیب تمام نقاط راسی شدنی مسئله موردنظر به دست می‌آید و با مقایسه مقدار تابع هدف در این نقاط جواب بهینه حاصل می‌شود.

در این روش تابع هدف مسئله سطح دوم که اصلی‌ترین چالش مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی است در قالب یک متغیر جدید به مسئله سطح اول اضافه می‌گردد. مهم‌ترین مزیت این روش آن است که مسئله تک – سطحی حاصل خطی می‌ماند و درنتیجه می‌توان مسئله را با استفاده از الگوریتم‌های خطی موجود حل کرد. البته الگوریتم‌های خطی تنها تقریبی از جواب مسئله را ارائه می‌دهند زیرا مسئله تک – سطحی حاصل شامل یک محدودیت جدید (مینیمم یا ماکزیمم بودن متغیر جدید) است و برای اینکه بتوان از الگوریتم‌های خطی استفاده نمود باید فرم آزادشده آن‌که از حذف محدودیت مذکور به

دست می‌آید را حل کرد. به همین دلیل برای رفع این مشکل از قضایای موجود در آنالیز ریاضی استفاده‌شده است به‌این‌ترتیب که با استفاده از قضایای مربوط به مجموعه‌های کران‌دار، سوپریمم و اینفیمم می‌توان نقاط راسی شدنی مسئله تک سطحی حاصل را به دست آورده و با استفاده از روش شمارش ضمنی دقیقاً جواب بهینه را مشخص نمود. همچنین با توجه به کاوش ادبیات انجام‌شده در زمینه روش‌های حل مسائل دوسطحی، روش‌های کلاسیک بسیار کمی ارائه‌شده است. ضمناً برخلاف تمام روش‌های دیگر در این روش از شرایط بهینگی کاروش – کاهن – تاکر استفاده نشده است و به نظر می‌رسد که روش ارائه‌شده ضمن دقیق بودن یک روش بدیع و منحصربه‌فرد است.

۴- روش دوگان

سطح دوم مسئله (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \min_{y} \quad & d^T y \\ s.t \quad & By \le r - Ax, \\ & y \ge ۰. \end{aligned} \qquad (۹)$$

با توجه به اینکه تنها متغیر موجود در سطح دوم y است و x توسط سطح اول تعیین می‌گردد، می‌توان سطح دوم مسئله را به فرم بالا نوشت. حال بنا به تعریف مسئله دوگان، دوگان مسئله (۹) را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max_{y} \quad & (r - Ax)^T u \\ s.t \quad & B^T u \le d, \\ & u \le ۰. \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

در ادامه قضایایی ارائه می‌گردد که نشان می‌دهد ترکیب دو مسئله (۹) و (۱۰) با مسئله (۱) معادل خواهد بود.

قضیه ۴ (قضیه اساسی دوگان) [۱۷]: برای مسائل اولیه و دوگان دقیقاً یکی از حالت‌های زیر صحیح است:

۱. دو مسئله دارای جواب‌های بهینه w^*, x^* با تابع هدف‌های یکسان $w^* \mathrm{b} = cx^*$ هستند.

۲. یک مسئله مقدار تابع هدف نامتناهی دارد درحالی‌که دیگری نشدنی است.

۳. هر دو مسئله نشدنی هستند.

اثبات: بیان و اثبات این قضیه در [۱۷] ارائه‌شده است.

قضیه ۵: (x^*, y^*) جواب بهینه مسئله (۱) و u^* جواب بهینه مسئله دوگان سطح دوم است اگر و تنها اگر (x^*, y^*, u^*) جواب مسئله زیر باشد:

$$
\begin{aligned}
\min_{x}\ & a^T x + b^T y \\
s.t\quad & Ax + By \le r, \\
& B^T u \le d, \\
& d^T y - (r - Ax)^T u = 0 \\
& x, y \ge 0.
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

اثبات: طرف اول: اگر جواب بهینه مسائل (۱) و (۱۰) به ترتیب $u^*, (x^*, y^*)$ باشند آنگاه داریم:

$$
\begin{aligned}
By^* \le r - Ax^* \Rightarrow Ax^* + By^* \le r \\
B^T u^* \le d
\end{aligned}
$$

و بنا به قضیه اساسی دوگان برای مسائل اولیه و دوگان داریم:

$d^T y^* = (r - Ax^*)^T u^* \Rightarrow d^T y^* - (r - Ax^*)^T u = 0$ به‌عبارتی دیگر (x^*, y^*, u^*) جواب بهینه (۱۱) است زیرا تمام محدودیت‌های مسئله (۱۱) ارضا شده و هر دو مسئله (۱) و (۱۱) مینیمم سازی هستند.

طرف دوم: اگر جواب بهینه مسئله (۱۱) (x^*, y^*, u^*) باشد آنگاه داریم:

$$
\begin{aligned}
& Ax^* + By^* \le r \\
& B^T u^* \le d, \\
& d^T y^* - (r - Ax^*)^T u = 0
\end{aligned}
$$

به‌عبارتی‌دیگر u^* جواب بهینه مسئله (۱۰) و (x^*, y^*) جواب بهینه مسئله (۹) بوده و

بنابراین مینیمم مقدار تابع هدف سطح دوم مسئله (۱)، (x^*, y^*) می‌باشد و چون مینیمم شدن تابع هدف سطح دوم مسئله جزو محدودیت‌های مسئله (۱) است و باید ارضا گردد بنابراین (x^*, y^*) یک جواب بهینه مسئله (۱) نیز هست.

پس مسئله دوسطحی (۱) به تک سطحی فوق تبدیل می‌گردد به‌طوری‌که دو مسئله جواب‌های بهینه یکسان دارند. یعنی می‌توان بجای مسئله دوسطحی (۱) مسئله (۱۱) را حل کرد که آخرین محدودیت آن هنوز غیرخطی است و به همین دلیل برای حل آن باید از الگوریتم‌های فرا ابتکاری استفاده شود. در ادامه برای حل مسئله حاصل توسط روش ارائه‌شده، از الگوریتم ژنتیک ساده با تغییرات جزئی استفاده می‌گردد و تمامی محاسبات نیز توسط نرم‌افزار مطلب ۷.۱ صورت گرفته است.

۴-۱- مراحل اجرای الگوریتم

گام ۱: در این مرحله سطح دوم مسئله (۱) را با توجه به ثابت بودن متغیر x، به فرم مسئله (۹) می‌نویسیم. سپس دوگان مسئله حاصل را به دست می‌آوریم تا مسئله‌ای به فرم (۱۰) به دست آید.

گام ۲: به کمک قضایای ۴ و ۵ و مسائل حاصل در گام قبلی، مسئله (۱) را به فرم مسئله (۱۱) می‌نویسیم. با توجه به معادل بودن مسائل (۱) و (۱۱) در ادامه مسئله (۱۱) به کمک الگوریتم ژنتیک ساده حل خواهد شد.

گام۳: جمعیت اولیه الگوریتم ژنتیک شامل جواب‌های شدنی مسئله با حل مسئله (۹) ساخته می‌شود. (۲۰ جواب در نظر گرفته می‌شود)

گام ۴: بهترین کروموزوم‌ها در هر تکرار در یک ارائه ذخیره‌شده و این روند تا پایان الگوریتم ادامه می‌یابد.

گام ۵: به‌منظور تشکیل جمعیت جدید کروموزوم‌ها بر طبق قاعده زیر باهم ترکیب می‌شوند:

1+0=1	0+1=1	0+0=0	1+1=0

گام ۶: الگوریتم بعد از رسیدن به تعداد تکرارها از قبل تعیین‌شده خاتمه می‌یابد و بهترین

کرومزوم ذخیره‌شده در ارائه گام پنجم به‌عنوان جواب بهینه مسئله (**۱**) معرفی می‌شود.

بیشتر روش‌های حل ارائه‌شده برای مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی مستقیماً از شرایط بهینگی کاروش – کاهن – تاکر به‌منظور تک-سطحی نمودن مسئله استفاده می‌کنند لذا ارائه یک روش که بتواند جایگزین مناسبی برای شرایط بهینگی کاروش – کاهن – تاکر باشد از اهمیت خاصی برخوردار است. در این بخش سعی شد با استفاده از دوگان مسئله سطح دوم و قضایای دوالیتی، مسئله تک-سطحی شود. این روش برای مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی – خطی مورداستفاده واقع‌شده است و می‌دانیم که در مسائل خطی دوالیتی گپ صفر است و این یک مزیت روش مذکور محسوب می‌گردد.

۵- نتایج محاسباتی

در این بخش چهار مثال استاندارد و یک مسئله نمونه، شبیه‌سازی از ترافیک تهران، با الگوریتم‌های ارائه‌شده حل می‌گردد و نتیجه با نتایج به‌دست‌آمده در مراجع مقایسه می-شود.

مثال ۱ [۱۳]**:** (روش شمارش ضمنی): مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min_{x} \ & x-4y \\ s.t \ & \min_{y} \ y \\ & \quad s.t \quad x+y\geq 3, \\ & \quad\quad -2x+y\leq 0, \\ & \quad\quad 2x+y\leq 12, \\ & \quad\quad 3x-2y\leq 4, \\ & \quad\quad x,y\geq 0. \end{aligned}$$

با توجه به توضیحات ارائه‌شده در بخش سوم، تابع هدف مسئله سطح دوم به‌عنوان یک متغیر جدید در نظر می‌شود. آنگاه مسئله فوق به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد.

$$
\begin{aligned}
\min\ & x-4z \\
s.t\ & x+z \geq 3, \\
& -2x+z \leq \circ, \\
& 2x+z \leq 12, \\
& 3x-2z \leq 4, \\
& x \geq \circ
\end{aligned}
$$

تمام نقاط شدنی راسی مسئله اخیر بنا بر گام ۳ در بخش سوم عبارت‌اند از:

$$
\begin{aligned}
& x+z=3, -2x+z=\circ \Rightarrow (x,z)=(1,2) \\
& x+z=3,\ 3x-2z=4 \Rightarrow (x,z)=(2,1) \\
& 2x+z=12, -2x+z=\circ \Rightarrow (x,z)=(3,6) \\
& 3x-2z=4, 2x+z=12 \Rightarrow (x,z)=(4,4)
\end{aligned}
$$

برخی از نقاط راسی فوق بر طبق قاعده ارائه‌شده در گام ۴ بخش سوم ممکن است حذف شوند.

$$
\begin{aligned}
& (2,1-\varepsilon) \notin X \quad (1,2-\varepsilon) \notin X \\
& (4,4-\varepsilon) \notin X \quad (3,6-\varepsilon) \in X
\end{aligned}
$$

جدول (۱): مقایسه جواب بهینه مثال ۱ توسط روش شمارش ضمنی با دیگر روش‌ها در مراجع

جواب بهینه توسط روش					
شبکه عصبی ارائه‌شده در مرجع [۱۳]		شمارش ضمنی		تحلیلی	
z^*	(x^*,y^*)	z^*	(x^*,y^*)	z^*	(x^*,y^*)
-۱۲/۱	(۳/۹,۴)	-۱۲	(۴,۴)	-۱۲	(۴,۴)

با استفاده از قضیه ۳، نقطه (۳،۶) نشدنی است. بنابراین مسئله تنها دارای نقاط شدنی راسی زیر است:

(۱،۲)،(۲،۱)،(۴،۴)

با محاسبه تابع هدف در نقاط شدنی به‌دست‌آمده و مقایسه آن‌ها نقطه بهینه تعیین می‌-شود که نتایج حاصله در جدول (۱) خلاصه‌شده است.

مثال ۲ [۱۳]**:** (روش شمارش ضمنی): مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} &\max_x \; 4x + y_1 + y_2 \\ &\quad s.t \quad \max_y \; x + 3y_1 \\ &\qquad\qquad s.t \quad x + y_1 + y_2 \le \frac{25}{9}, \\ &\qquad\qquad\qquad x + y_1 \le 2, \\ &\qquad\qquad\qquad y_1 + y_2 \le \frac{8}{9}, \\ &\qquad\qquad\qquad z \ge x, \\ &\qquad\qquad\qquad x, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

فرض کنید که $z = x + 3y_1$، در این صورت مسئله فوق به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

برخی از نقاط پایه‌ای شدنی مسئله اخیر عبارت‌اند از:

$$(0,\frac{8}{9},0),(0,\frac{25}{9},0),(2,0,2),$$
$$(2,\frac{7}{9},2),(\frac{17}{9},\frac{21}{27},\frac{20}{9}),(\frac{17}{9},\frac{8}{9},0)$$

که در آن

$$\left(0,0,0+\varepsilon\right)\notin \mathrm{X},\left(0,\frac{8}{9},0+\varepsilon\right)\notin \mathrm{X},$$
$$\left(0,\frac{25}{9},0+\varepsilon\right)\in \mathrm{X},\ \left(2,0,2+\varepsilon\right)\notin \mathrm{X},\ \left(2,\frac{7}{9},2+\varepsilon\right)\notin \mathrm{X},$$
$$\left(\frac{17}{9},\frac{21}{27},\frac{20}{9}+\varepsilon\right)\in \mathrm{X},\ \left(\frac{17}{9},\frac{8}{9},0+\varepsilon\right)\notin \mathrm{X}$$

بنا بر قضیه ۳، نقاطی مانند

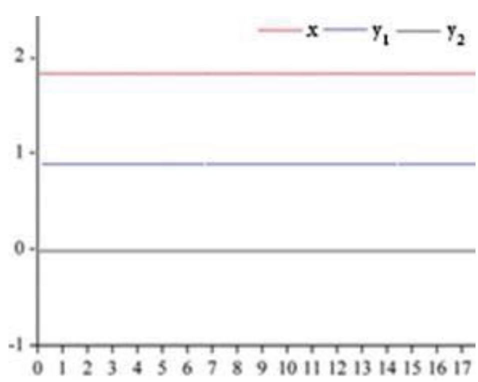
$$\left(0, \frac{25}{9}, 0+\varepsilon\right), \left(\frac{17}{9}, \frac{21}{27}, \frac{20}{9}+\varepsilon\right)$$

از مجموعه نقاط شدنی راسی حذف می‌شوند. با محاسبه تابع هدف مسئله در نقاط شدنی و مقایسه آن‌ها، نقطه بهینه $\left(\frac{17}{9}, \frac{8}{9}, 0\right)$ به دست می‌آید. نتایج محاسباتی این مثال در جدول (۲) آمده است.

جدول ۱: مقایسه جواب بهینه مثال ۲ توسط روش شمارش ضمنی با دیگر روش‌ها در مراجع

جواب بهینه توسط روش					
شبکه عصبی ارائه‌شده در مرجع [۱۳]		شمارش ضمنی		تحلیلی	
z^*	(x^*, y_1^*, y_2^*)	z^*	(x^*, y_1^*, y_2^*)	z^*	(x^*, y_1^*, y_2^*)
۸/۳۸	(۱/۸۸,۰/۸۹,۰/۰۰۴)	۸/۴۴	$\left(\frac{17}{9}, \frac{8}{9}, 0\right)$	۸/۴۴	$\left(\frac{17}{9}, \frac{8}{9}, 0\right)$

رفتار متغیرهای مثال در حین حل با روش شمارش ضمنی در شکل (۱) نمایش داده‌شده است.



شکل ۱: رفتار متغیرهای مثال (۲) با روش شمارش ضمنی در ۱۷ هزار تکرار

مثال ۳ [۱۳]: (روش دوگان): مسئله مثال ۱ را در نظر بگیرید. مسئله سطح دوم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$
\begin{aligned}
\min\ & y \\
s.t\ & y \geq 3 - x, \\
& y \leq 2x, \\
& y \leq 12 - 2x, \\
& -2y \leq 4 - 3x, \\
& y \geq ۰.
\end{aligned}
$$

زیرا x برای مسئله سطح دوم ثابت است. حال دوگان مسئله سطح دوم فوق به‌صورت زیر خواهد بود.

$$
\begin{aligned}
& \max\left(x-3\right)u_1 + \left(2x\right)u_2 + \left(12-2x\right)u_3 + \left(4-3x\right)u_4 \\
& s.t \\
& \quad -u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 \leq 1, \\
& \quad u_1, u_2, u_3, u_4 \leq ۰.
\end{aligned}
$$

بنا به الگوریتم دوگان ارائه‌شده مسئله فوق معادل مسئله زیر است:

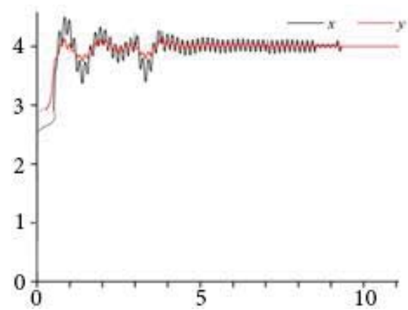
$$
\begin{aligned}
& \min x - 4y \\
& s.t \\
& \quad x + y \geq 3, \\
& -2x + y \leq ۰, \\
& \quad 2x + y \leq 12, \\
& \quad 3x - 2y \leq 4, \\
& \quad y - \left(x-3\right)u_1 + \left(2x\right)u_2 + \\
& \left(12-2x\right)u_3 + \left(4-3x\right)u_4 = ۰, \\
& -u_1 + u_2 + u_3 - 2u_4 \leq 1, \\
& x, y \geq ۰,\ u_۱, u_۲, u_۳, u_۴ \leq ۰.
\end{aligned}
$$

به‌منظور حل مسئله اخیر، الگوریتم ژنتیک ساده توسط نرم‌افزار مطلب ۷.۱ اعمال‌شده و نتایج جدول (۳) حاصل می‌گردد.

جدول ۳: مقایسه جواب بهینه مثال ۳ توسط روش دوگان ارائه‌شده با دیگر روش‌ها در مراجع

جواب بهینه توسط روش					
شبکه عصبی ارائه‌شده در مرجع [۱۳]		دوگان		تحلیلی	
z^*	(x^*, y^*)	z^*	(x^*, y^*)	z^*	(x^*, y^*)
-۱۲/۶	(۴,۳/۹)	-۱۲/۵۳	(۴/۰۳,۴/۱)	-۱۲	(۴,۴)

عملکرد متغیرهای مثال در تکرارهای مختلف توسط روش دوگان در شکل (۲) آمده است.



شکل ۲: رفتار متغیرهای مثال (۳) با روش دوگان در ۱۱ هزار تکرار

مثال ۴ [۱۸]: (روش دوگان): مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
&\max_x \; -2x+11y \\
&\quad s.t \;\; \max_y \; -x-3y \\
&\qquad\quad s.t \;\; x-2y \le 4, \\
&\qquad\qquad\; 2x-y \le 24, \\
&\qquad\qquad\; 3x+4y \le 96, \\
&\qquad\qquad\; x+7y \le 126, \\
&\qquad\qquad\; -4x+5y \le 65, \\
&\qquad\qquad\; x+4y \ge 8, \\
&\qquad\qquad\; x, y \ge 0.
\end{aligned}$$

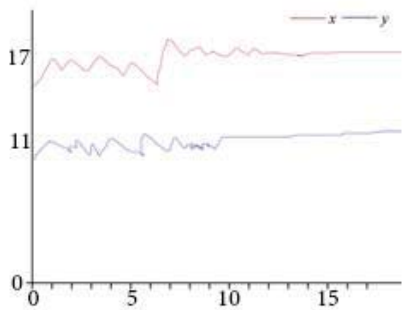
بنا به الگوریتم ارائه‌شده مسئله فوق معادل مسئله زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\max -2x + 11y \\
&\text{s.t} \\
&x - 2y \le 4, \\
&2x - y \le 24, \\
&3x + 4y \le 96, \\
&x + 7y \le 126, \\
&-4x + 5y \le 65, \\
&x + 4y \ge 8, \\
&x + 3y + (4 - x)u_1 + (24 - 2x)u_2 \\
&+ (96 - 3x)u_3 + (126 - x)u_4 + (65 + 4x)u_5 + (x - 8)u_6 = 0, \\
&-2u_1 - u_2 + 4u_3 + 7u_4 + 5u_5 - 4u_6 \ge -3, \\
&x, y,\ u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \ge 0.
\end{aligned}
$$

با حل مسئله اخیر نتایج جدول (۴) حاصل می‌گردد. رفتار متغیرهای مثال در حین حل مسئله با روش دوگان در شکل (۳) نشان داده‌شده است.

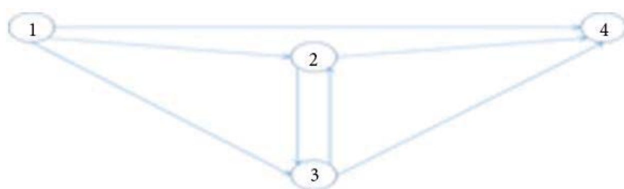
جدول ۴: مقایسه جواب بهینه مثال ۴ توسط روش دوگان ارائه‌شده با دیگر روش‌ها در مراجع

جواب بهینه توسط روش					
ارائه‌شده در مرجع [۱۸]		دوگان		تحلیلی	
z^*	(x^*, y^*)	z^*	(x^*, y^*)	z^*	(x^*, y^*)
۸۵/۰۸	(۱۷/۴,۱۰/۹)	۸۶/۸	(۱۷/۱,۱۱)	۸۶/۸	(۱۷/۱۱,۱۱)



شکل ۳: رفتار متغیرهای مثال (۴) با روش دوگان در ۱۷ هزار تکرار

مثال ۵ [۱۹]: (حل با روش دوگان): در این مثال مدل ایجادشده با یک مسئله که دارای چهار گره و هفت کمان می‌باشد (شکل ۴) بررسی خواهد شد.



شکل ۴: گراف مسئله نمونه شبیه‌سازی بخشی از ترافیک تهران

$$
\begin{aligned}
& Max\ 50(x_{14} + x_{12} + x_{24} + x_{13} + x_{34} + x_{23} + x_{23}) \\
& \quad s.t \\
& \qquad N_T = x_{14} + x_{12} + x_{13} \\
& \qquad \circ \pm \leq N_T \leq 20 \\
& \quad x_{14} + x_{24} + x_{34} = -1 \\
& \quad Max\ 250 + 0/18x_{14} + 0/34x_{12} + 0/08x_{12} + 0/2x_{24} \\
& \qquad + 0/75x_{34} + 0/08x_{23} + 0/1x_{23} \\
& \qquad - x_{14} - x_{12} - x_{13} = 1, \\
& \qquad x_{32} + x_{12} - x_{24} - x_{23} = \circ, \\
& \qquad x_{13} + x_{23} - x_{34} - x_{32} = \circ, \\
& \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} = -1, \\
& x_{14}, x_{12}, x_{24}, x_{13}, x_{34}, x_{23}, x_{32} \geq \circ.
\end{aligned}
$$

بنا به الگوریتم دوگان ارائه‌شده، مسئله ترکیبی زیر با مسئله دوسطحی داده‌شده معادل است.

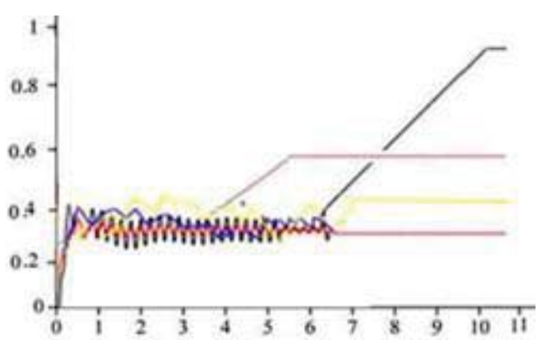
$$
\begin{aligned}
&Max\ 50(x_{14}+x_{12}+x_{24}+x_{13}+x_{34}+x_{23}+x_{23})\\
&\quad s.t.\\
&\qquad \mathrm{N_T}=\mathrm{x}_{14}+\mathrm{x}_{12}+\mathrm{x}_{13}\\
&\qquad 0\le \mathrm{N_T}\le 20\\
&\qquad 250+0/18x_{14}+0/34x_{12}+0/08x_{12}+0/2x_{24}\\
&\qquad\quad +0/75x_{34}+0/08x_{23}+0/1+(1+x_{14}+x_{13})\mathrm{u}_1+(-x_{32}+x_{24}+x_{23})\mathrm{u}_2=0,\\
&\qquad\quad u_2-u_1=0/34.
\end{aligned}
$$

با حل مسئله اخیر نتایج جدول (۵) حاصل می‌گردد.

جدول ۵: مقایسه جواب بهینه مثال ۵ توسط روش دوگان ارائه‌شده با دیگر روش‌ها در مراجع

جواب بهینه توسط روش			
ارائه‌شده در مرجع [۲۰]		دوگان	
z^*	$\left(x_{12}^*,x_{13}^*,x_{14}^*,x_{23}^*,x_{24}^*,x_{32}^*,x_{34}^*\right)$	z^*	$\left(x_{12}^*,x_{13}^*,x_{14}^*,x_{23}^*,x_{24}^*,x_{32}^*,x_{34}^*\right)$
۲۱۰	(۰/۹۹,۰/۷۲,۰,۰,۱,۰/۷۲,۰)	۲۲۵	(۰/۵۹,۰/۳۴,۰/۰۷,۰,۱,۰/۴,۰)

ضمناً رفتار متغیرهای مسئله با روش دوگان در شکل (۵) نمایش داده‌شده است.



شکل ۵: رفتار متغیرهای مثال (۵) با روش دوگان در ۱۱ هزار تکرار

این مثال مدلی از ترافیک تهران بوده و تمامی فاکتورها مانند ظرفیت هر کمان، طول

کمان‌ها، فاصله و زمان بین دو گره و جزئیات کامل آن در مرجع [۱۹] آمده است. درنهایت به‌منظور نشان دادن کارایی روش‌های ارائه‌شده، مثال‌های بیشتری حل‌شده و نتیجه محاسباتی آن‌ها و نیز مقایسه با دیگر روش‌ها در جداول (۶) و (۷) آمده است. همان‌طور که از جدول‌ها ملاحظه می‌گردد، در تمامی مثال‌ها نتایج حاصله از روش‌های ارائه‌شده بهتر از نتایج در مراجع است.

جدول ۶: مقایسه جواب‌های بهینه مثال‌های مختلف توسط روش دوگان ارائه‌شده با دیگر روش‌ها در مراجع

مثال‌ها	جواب بهینه توسط دیگر روش‌ها در مراجع	جواب بهینه توسط روش ارائه‌شده	جواب بهینه
	(x^*, y^*)	(x^*, y^*)	(x^*, y^*)
مثال ۵ [۲۱]	(۱/۸۸,۰/۸۹,۰/۰۰۴)	(۱/۸۸۹,۰/۸۸۸,۰)	$\left(\frac{17}{9},\frac{8}{9},0\right)$
مثال ۶ [۱۰]	(۰,۰)	(۰,۰)	(۰,۰)
مثال **۷** [۵]	(۱,۰)	(۱,۰)	(۱,۰)
مثال **۸** [۲۲]	(۰,۰/۷۵,۰,۰/۵,۰)	(۰۰۰۱,۰/۷۳,۰,۰/۵۴,۰)	(۰,۰/۷۵,۰,۰/۵,۰)

جدول ۷: مقایسه جواب‌های بهینه مثال‌های مختلف توسط روش شمارش ضمنی با دیگر روش‌ها در مراجع

مثال‌ها	جواب بهینه توسط دیگر روش‌ها در مراجع		جواب بهینه توسط روش ارائه‌شده	
	z^*	(x^*, y^*)	z^*	(x^*, y^*)
مثال **۹** مینیمم‌سازی [۲۳]	۵۱/۳۱-	(۱/۳۲,۱/۲۸,۰,۰/۳۳,۱/۲۵,۰/۹۲)	۵۲/۷۳-	(۱/۴۴,۱/۳۳,۰,۰/۲۴,۱/۴,۰/۸۸)
مثال **۱۰** ماکزیمم‌سازی [۷]	۱۰	(۲,۰,۰,۰)	۱۰	(۲,۰,۰,۰)
مثال **۱۱** ماکزیمم‌سازی [۲۴]	۲۹/۲	(۰,۰/۹,۰,۰/۶,۰/۴)	۲۹/۸	۰/۴),۰/۶,۰,۰/۹۵,(۰/۰۵
مثال **۱** ماکزیمم‌سازی [۶]	۸۵/۰۸	(۱۷/۴۵,۱۰/۹۰)	۸۶/۰۶	(۱۷/۱,۱۱)

در جدول (۸) مقایسه‌ای بین جواب بهینه حاصل و تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به جواب توسط دو روش ارائه‌شده صورت گرفته است که برتری نسبی روش شمارش ضمنی را نشان می‌دهد. درمجموع اگرچه روش شمارش ضمنی بهتر به نظر می‌رسد اما برای حل

مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نیست ولی روش دوگان برای حل مسئله با ابعاد بزرگ نیز جواب قابل‌قبول به دست می‌دهد.

جدول ۸: مقایسه زمان رسیدن به جواب بهینه‌ی مثال۳ (برحسب ثانیه) توسط روش دوگان و روش شبکه عصبی در مرجع [۱۰]

مثال	زمان لازم بر ثانیه در		
	مرجع [۱۰] با $\varepsilon = 0/001$	مرجع [۱۰] با $\varepsilon = 0/0001$	روش دوگان ارائه‌شده
مثال ۳ [۱۳]	۱/۱۵	۲/۲۱	۰/۲۶

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله دو الگوریتم برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی ارائه شد که در الگوریتم اول توسط محدودیت‌های مسئله سطح دوم و نیز دوگان آن تابع هدف سطح دوم مسئله به محدودیتی برای سطح اول تبدیل‌شده و درنتیجه مسئله تک سطحی می‌گردد. در الگوریتم دوم تابع هدف مسئله سطح دوم در قالب یک متغیر جدید به مسئله اضافه می‌گردد و به‌این‌ترتیب مسئله تک سطحی می‌شود. از مزایای این روش خطی ماندن مسئله تک سطحی حاصل است. به‌عنوان پیشنهاد در کارهای آینده با توجه به اینکه الگوریتم‌های ارائه‌شده، مسئله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی را به یک مسئله تک سطحی خطی و یا مسئله‌ای که تنها یک محدودیت غیرخطی دارد تبدیل می‌کنند، برای حل مسئله حاصله می‌توان با حذف این محدودیت، مسئله را کاملاً خطی نموده و به‌این‌ترتیب یک فرم آزادشده خطی برای مسئله ایجاد کرد و با حل آن توسط الگوریتم‌های خطی مثلاً الگوریتم سیمپلکس جواب بهینه فرم آزادشده مذکور را به دست آورده که یک جواب نزدیک به جواب بهینه مسئله دوسطحی است. همچنین می‌توان الگوریتم‌های ارائه‌شده را برای مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی دوسطحی محدب بکار برد. زیرا استفاده از روش‌های دیگر برای تبدیل مسئله غیرخطی دوسطحی محدب به تک سطحی، مسئله را غیر محدب می‌کند. اما استفاده از این الگوریتم‌ها ممکن است محدب بودن را حفظ کند و امکان استفاده از الگوریتم‌های حل مسائل غیرخطی محدب را فراهم آورد.

مراجع

[1] Bard, J.F. (1991). Some properties of the bi-level linear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **68**, 371–378.

[2] Mathieu, R., Pittard, L. and Anandalingam, G. (1994). Genetic algorithm based approach to bi-level Linear Programming, *Operations Research*, **28,** 1–21.

[3] L. Vicente, L., Savard, G. and Judice, J. (1994). Descent approaches for quadratic bi-level programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **81,** 379–399.

[4] Wang, G., Jiang, B. and Zhu, K. (2010). Global convergent algorithm for the bi-level linear fractional-linear programming based on modified convex simplex method, *Journal of Systems Engineering and Electronics*, **21**, 239–243.

[5] Yibing, Lv., Tiesong, Hu., Guangmin, Wang. and Zhongping, Wan (2007). A penalty function method Based on Kuhn–Tucker condition for solving linear bi-level programming, *Applied Mathematics and Computation*, **188**, 808–813.

[6] Zhongping, W. and Guangmin, W. (2011). A Dual-Relax Penalty Function Approach for Solving Non- Linear Bi-Level Programming with Linear Lower Level Problem, *Acta Mathematica Scientia*, **31**, 652–660.

[7] Allende, G. B. and Still, G. (2012). Solving bi-level programs with the KKT-approach, *Springer and Mathematical Programming Society*, **131**, 37–48.

[8] Dempe, S. and Zemkoho, A.B. (2012). On the Karush–Kuhn–Tucker reformulation of the bi-level optimization problem, *Nonlinear Analysis*, **75**, 1202–1218.

[9] Arora, S.R. and Gupta, R. (2007). Interactive fuzzy goal programming approach for bi-level programming problem, *European Journal of Operational Research*, **176**, 1151–1166.

[10] Pramanik, S. and Ro, T.K. (2009). Fuzzy goal programming approach to multilevel programming Problems, *European Journal of Operational Research*, **194**, 368–376.

[11] Masatoshi, S. and Takeshi.M. (2012). Stackelberg solutions for random fuzzy two-level linear programming through possibility-based probability model, *Expert Systems with Applications*, **39**, 10898–10903.

[12] Wang, G.Z., Wan, X. and Wang, Y.Lv (2008). Genetic algorithm based on simplex method for solving Linear-quadratic bi-level programming problem, *Computers and Mathematics with Applications*, **56**, 2550–2555.

[13] Hu, T. X., Guo, X. and Fu, Y. Lv. (2010). A neural network approach for solving linear bi-level programming problem, *Knowledge-Based Systems*, **23**, 239–242.

[14] Baran Pal, B., Chakraborti, D. and Biswas, P. (2010). A Genetic Algorithm Approach to Fuzzy Quadratic Bi-level Programming, Second International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies.

[15] Wan, Z.G. and Wang, B. Sun. (2012). A hybrid intelligent algorithm by combining particle Swarm Optimization with chaos searching technique for solving nonlinear bi-level programming Problems, Swarm and Evolutionary Computation.

[16] Yan, J., Xuyong, L., Chongchao.H. and Xianing, W. (2013). Application of particle swarm optimization based on CHKS smoothing function for solving nonlinear bi-level programming problem, *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 4332–4339.

[17] Bazaraa, M.S., Jarvis, J.J. and Sherali, H.D. (2011). *Linear Programming and Network Flows, Theory and Algorithm*, New York.

[18] Kuen-Ming Lana, and Ue-Pyng Wena. (2007). A hybrid neural network approach to bilevel programming problems, *Applied Mathematics Letters*, **20**, 880–884.

[۱۹] غلامرضا مروجی (۱۳۹۱) رساله دکتری مهندسی صنایع – صنایع، ارائه مدل سه سطحی قیمت‌گذاری و تعیین تراکم بار ترافیکی برای محدوده‌های طرح ترافیک، استاد راهنما: دکتر عیسی نخعی کمال آبادی، دانشگاه تربیت مدرس.

[20] Hejazia, S.R., Memariania, A., Jahanshahloo, G. and Sepehria, M.M. (2002). Linear bi-level programming solution by genetic algorithm, *Computers and Operations Research*, **29**, 1913–1925.

[21] Zhongping, W. and Guangmin, W. (2008). An interactive fuzzy decision making method for a class of bi-level programming, Fifth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery.

[22] Kuen-Ming, L., Ue-Pyng.W. and Hsu-Shih, S. (2007). A hybrid neural network approach to bi-level programming problems, *Applied Mathematics Letters*, **20**, 880–884.

[23] Yibing, Lv. and Tiesong, Hu. (2010). A neural network approach for solving nonlinear bi-level programming problem, *Computers and Mathematics with Applications*, **55**, 2823–2829.

[24] Dempe, S. and Dutta, Is bi-level programming a special case of a mathematical program with J. h complementarity constraints? Springer and Mathematical Programming Society.

Enhancing the Solution Method of Linear Bi – level Programming Problem Based on Enumeration Method and Dual Method

Eghbal Hosseini[*], Isa Nakhai Kamalabadi[**], Mohammad Fathi[***]

[*]Payamenur University of Tehran, Department of Mathematics, Tehran, Iran

[**]Department of Industrial Engineering, University of Kurdistan, Sanandaj. Iran

[***]Department of Power Engineering, University of Kurdistan Sanandaj. Iran

Abstract

The bi-level programming problem (BLPP), have received much interest from researchers because of their application in several areas such as economic, traffic, transportation and so on. There are several known algorithms to solve BLPP as an NP-hard problem. Almost all proposed algorithms in references have been used the Karush-Kuhn–Tucker to convert the BLPP into the single level problem which the obtained problem is complicated. In this paper, we attempt to develop two effective approaches, one based on enumeration method and the other based on duality characteristic for solving the linear BLPP. In these approaches, the BLPP is solved without using the Karush-Kuhn–Tucker conditions. The presented approaches achieve an efficient and feasible solution in an appropriate time, which has been evaluated by comparing to references and test problems.

***Keywords*:** Bi-level programming problem, KKT conditions, Enumeration method, Dual problem.

Mathematics Subject Classification (2010): 90B08, 90C04.