

مدل ریاضی سه بعدی در حل تحلیلی معادله تحکیم در خاک اشباع همگن

رضا پورساکي^{۱*}، جواد احدیان^{*} و منصور سراج^{**}

^{**}گروه سازه های آبی، دانشگاه شهید چمران اهواز

^{**}گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۸/۱۶

چکیده: در مواردی که نیاز به تسریع در نشست تحکیمی باشد، طول مسیر زهکشی می تواند به وسیله ی زهکش های عمودی کاهش یابد و جریان به صورت شعاعی و قائم زهکشی شود. از آنجاکه معادله تحکیم در سه بعد، یک معادله ی پیچیده ریاضی است، در این تحقیق معادله ی سه بعدی سرعت زمانی تحکیم در مختصات استوانه ای با شرایط مرزی مرتبط با تحقیق حاضر، مورد استفاده واقع شد، سپس اقدام به حل تحلیلی معادله یاد شده گردید. پس از حل معادله، تحلیل نتایج با استفاده از نرم افزار MATLAB انجام شد و تغییرات درصد نشست متوسط نسبت به زمان بررسی شد و با نتایج حاصل از روش یک-بعدی و روش های استفاده شده توسط محققین در تحقیقات قبلی مقایسه شد. نتایج نشان داد که روش تحلیلی مورد استفاده در این تحقیق، در تطابق با روش های عددی به کار گرفته شده در تحقیقات گذشته است.

واژه های کلیدی: تحکیم سه بعدی، مختصات استوانه ای، شرایط مرزی، زهکشی شعاعی-عمودی.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۴BXX، ۳۴B۳۰.

۱- مقدمه

تحکیم به عنوان یک موضوع مهم در مهندسی خاک، فرآیند وابسته به زمان نشست لایه های رس اشباع زیر سطح آب زیرزمینی است که در اثر مستهلک شدن فشار آب اضافی ایجاد شده بر اثر اعمال بار بر روی پی، ایجاد می شود. ترزاقی (۱۹۲۵) اولین نظریه را که در آن سرعت تحکیم یک بعدی خاک های رس اشباع در نظر گرفته شده بود، ارائه نمود. تحلیل معادله ی

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: r-poursaki@mscstu.scu.ac.ir

یک‌بعدی ترزاقی بر اساس فرضیه‌های زیادی صورت گرفته است که از آن جمله می‌توان به همگن بودن سیستم رس-آب، اشباع کامل بودن خاک، عدم تراکم‌پذیری آب، حرکت آب در راستای فشردگی آن، معتبر بودن قانون داری و عدم تراکم‌پذیری ذرات خاک، اشاره نمود. در بسیاری از طرح‌ها با توجه به پتانسیل نشست پذیری خاک‌ها، نیاز به ایجاد زهکش‌های قائم برای تخلیه سریع آب و کاهش فشار منفذی احساس می‌شود که از نظر کاربردی، با احداث زهکش‌های قائم به فواصل مشخص، با در نظر گرفتن این که محدوده شعاع تأثیر هر زهکش برابر با نصف فاصله بین دو زهکش است، امکان‌پذیر است [۱]. حل معادله تحکیم در این شرایط حداقل به صورت دویبعدی صورت می‌پذیرد و معادله‌ی معمول ترزاقی چندان مناسب برای پاسخ به نیازهای طرح نخواهد بود؛ لذا در این تحقیق هدف تحلیل معادله‌ی ترزاقی در شرایطی است که جریان به صورت شعاعی و قائم زهکشی می‌شود.

حل تحلیلی و عددی معادله تحکیم از دیرباز مورد توجه قرار گرفته است و در این راستا محققین زیادی، پژوهش‌های متنوعی را انجام داده‌اند. در این راستا می‌توان به تحقیق مک کینلی [۲] اشاره نمود که با استفاده از روش تفاضل محدود و در نظر گرفتن تنش شعاعی، معادله‌ی ترزاقی را در مختصات قطبی حل نمود و تغییرات فشار آب منفذی اضافی و تغییر شکل جانبی خاک را نسبت به زمان و شعاع، به دست آورد و به این نتیجه رسید که فشار آب منفذی در مرکز استوانه‌ی خاک، نسبت به زمان ابتدا افزایش یافته و پس از رسیدن به یک مقدار بیشینه کاهش می‌یابد. عباسی و همکاران [۳] معادله‌ی یک‌بعدی تحکیم را به صورت دیفرانسیل جزئی غیرخطی در رس‌های نرم تحلیل نمودند و نفوذپذیری و تراکم‌پذیری خاک را به صورت متغیر در معادلات وارد نمودند. اولیایی و پاک [۴] با استفاده از روش عددی بدون شبکه‌ی بدون المان گالرکی، به بررسی مسئله‌ی تحکیم در لایه نازکی از خاک در شرایط کرنش صفحه‌ای پرداخته و نتایج خود را با استفاده از مدل عددی ABAQUS شبیه‌سازی نموده و با حل‌های تحلیلی گیبسون و همکاران [۵] مقایسه نمودند. ژنگ و همکاران [۶] با متغیر در نظر گرفتن ضریب تحکیم، ضریب نفوذپذیری و ضریب تراکم‌پذیری نسبت به زمان، معادله‌ی تحکیم را به صورت نیمه‌تحلیلی در حالت جریان شعاعی حل نمودند. کین و همکاران [۷] راه‌حل تحلیلی برای تحکیم یک‌بعدی ارائه داده‌اند. در این مطالعه خاک غیراشباع بوده و تحت بارگذاری‌های متفاوت قرار گرفته است. بارگذاری با گذشت زمان به صورت تصاعدی اضافه شده است. رانی و همکاران [۸] با استفاده از تبدیلات انتگرالی لاپلاس-هنکل، در شرایط بارگذاری دایره‌ای و با در نظر گرفتن تراکم‌پذیری آب و ذرات خاک، معادله‌ی تحکیم را برای لایه‌ی رس، به صورت تحلیلی حل نمودند و به این نتیجه رسیدند که تراکم‌پذیری آب و ذرات خاک سبب افزایش سرعت عمل تحکیم می‌شود. هوان و شوای [۹] با به کارگیری روش عددی مربع سازی دیفرانسیل (DQM)، معادله‌ی تحکیم را در خاک غیراشباع حل نموده و به این نتیجه رسیدند که این

روش برای حل معادله‌ی تحکیم در خاک‌های غیراشباع از دقت کافی برخوردار است. یی و همکاران [۱۰] مطالعه‌ای بر روی رس نرم انجام دادند و در آن فشار آب منفذی را محاسبه نمودند. آن‌ها از روش المان محدود استفاده نمودند. وانگ و ژو [۱۱] با فرض این‌که نفوذپذیری و تراکم‌پذیری خاک در حین عمل تحکیم متغیر است و با در نظر گرفتن توزیع خطی تنش نسبت به عمق، یک حل نیمه‌تحلیلی برای معادله‌ی تحکیم در خاک لایه‌ای ارائه دادند و نتیجه گرفتند که ضریب تحکیم در طول عمل تحکیم متغیر می‌باشد. لو و همکاران [۱۲] با در نظر گرفتن افزایش تحکیم به صورت اختیاری در یک پی چندلایه، معادله تحکیم را به صورت تحلیلی حل نموده و نتیجه گرفتند که سرعت زمانی تحکیم در یک پی چندلایه با ستون خاک نفوذناپذیر کمتر از سرعت زمانی تحکیم در همان پی با ستون خاک دانه‌ای می‌باشد. تانگ و همکاران [۱۳] راه‌حلی برای تحکیم خاک سه لایه در شرایط زهکشی ارائه دادند. فشار آب حفره‌ای در امتداد عمق خاک‌ریزی به صورت قابل قبولی و نزدیک به فشار آب حفره‌ای اندازه‌گیری شده محاسبه شد. تواتیا [۱۴] ترکیب معادلات شعاعی و عمودی تحکیم به صورت مجزا مورد بررسی قرار داد. وی بر اساس روش پیشنهادی کاریلو [۱۵] حل تحلیلی معادلات شعاعی و عمودی تحکیم را جداگانه انجام داد و در نهایت نتیجه‌گیری نمود که استفاده از روش اصل برهم‌نهی جواب‌های معادلات شعاعی و عمودی، به صورت ساده‌تر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بر اساس آنچه در مروری بر منابع گذشت، مشخص می‌شود که روش‌های تسریع در نشست تحکیمی به صورت تحلیلی کم‌تر مورد توجه واقع شده است، لذا در تحقیق حاضر، حل تحلیلی معادله سه بعدی تحکیم در شرایط زهکشی شعاعی-قائم مورد توجه قرار گرفته است. از طرفی در تحقیقات گذشته عموماً حل تحلیلی به صورت مجزا برای جریان‌های شعاعی و عمودی صورت می‌پذیرفته و با استفاده از اصل برهم‌نهی، جواب نهایی حاصل شده است. حال آن‌که در تحقیق حاضر حل توأمان و یکجای معادله سه بعدی تحکیم مدنظر است.

۲- تحلیل سه بعدی معادله ترزاقی

با استدلالی مشابه با روش ترزاقی برای استخراج معادله یک بعدی تحکیم، معادله سه بعدی تحکیم به دست خواهد آمد. معادله بیلان آب در خاک به صورت زیر به کار می‌رود [۱۶]:

$$\text{میزان تغییر حجم} = \text{میزان آب ورودی} - \text{میزان آب خروجی}$$

بنابراین می‌توان معادله بیلان آب را در سه بعد به صورت زیر نوشت:

$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right) dydz - v_x dydz + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy\right) dx dy - v_y dx dy + \left(v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz\right) dx dy - v_z dx dy = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1)$$

که پس از ساده‌سازی برابر است با:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (2)$$

با استفاده از قانون داریسی و با فرض این‌که نفوذپذیری خاک در همگی جهات یکسان باشد، معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (3)$$

در زمان تحکیم، سرعت تغییر حجم المان خاک برابر با سرعت تغییر حجم فضاهای خالی است [۱۶]؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_v}{\partial t} = \frac{\partial (V_s + eV_s)}{\partial t} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial V_s}{\partial t} \quad (4)$$

که در آن V_s ، حجم بخش جامد خاک و V_v ، حجم فضاهای خالی خاک می‌باشد. مقدار تغییرات کل حجم بر حسب زمان با تغییرات نسبت پوکی برابر می‌باشد، زیرا فرض بر این است که میزان تغییرات حجم ذرات جامد خاک نسبت به زمان صفر است ($\frac{\partial V_s}{\partial t} = 0$). از طرفی بر اساس روابط وزنی-حجمی در خاک می‌توان بین حجم بخش جامد و حجم کل، رابطه $V_s = \frac{V}{1+e_0}$ ارائه داد که e_0 نسبت پوکی اولیه خاک و $V = dx dy dz$ می‌باشد. از این رو معادله (۳) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$-\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{1+e_0} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (5)$$

با توجه به این‌که تغییرات نسبت پوکی در اثر افزایش تنش مؤثر و کاهش فشار آب منفذی به وقوع می‌پیوندد، می‌توان با استفاده از یک رابطه خطی و ضریبی به نام ضریب فشردگی، a_v ، بین آن‌ها رابطه زیر را برقرار نمود:

$$\partial e = a_v \cdot \partial(\Delta \sigma') = -a_v \partial u \quad (۶)$$

با جایگزینی رابطه (۶) در معادله (۵)، معادله دیفرانسیل سرعت تحکیم به دست می آید:

$$-\frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = -\frac{a_v}{1+e_0} \frac{\partial u}{\partial t} = -m_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (۷)$$

که m_v ضریب تراکم پذیری حجمی خاک می باشد و از رابطه $\frac{a_v}{1+e_0}$ به دست می آید.

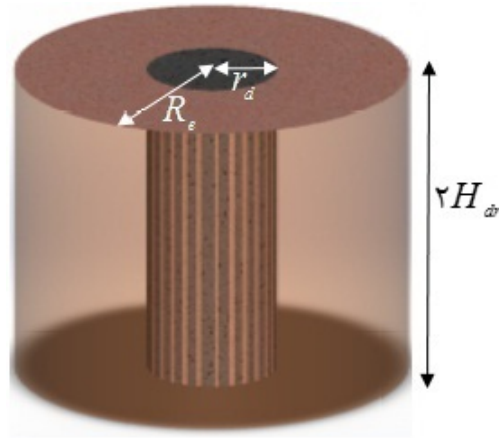
$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (۸)$$

که در آن C ضریب تحکیم می باشد و از رابطه $\frac{k}{\gamma_w m_v}$ به دست می آید. همان طور که پیش تر ذکر شد، در این تحقیق هدف حل تحلیلی معادله ی ترزاقی در شرایطی است که جریان به صورت شعاعی و عمودی زهکشی می شود. با توجه به نوع جریان، معادله ی معمول ترزاقی در دو بعد تحت تأثیر زهکش های عمودی و تبدیل عملگر مختصات دکارتی به مختصات استوانه ای با صرف نظر از جریان محیطی به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\begin{cases} u(r, 0, t) = u(r, 2H_{dr}, t) = 0 & \forall \quad 0 \leq z \leq 2H_{dr} \\ u(r_d, z, t) = 0 & \forall \quad r_d \leq r \leq R_e \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_e} = 0 & \forall \quad r_d \leq r \leq R_e \\ u(r, z, 0) = q = u_0 & \forall \quad t \geq 0 \end{cases} \quad (۹)$$

در معادله (۹) پارامتر u فشار آب منفذی اضافی، q سربار اعمال شده بر روی نمونه خاک است که برابر با فشار آب منفذی در لحظه ی صفر می باشد، r_d شعاع زهکش قائم و R_e شعاع تأثیر زهکش ها است. در این معادله به دلیل تقارن، می توان از توزیع فشار جریان محیطی صرف نظر نمود که بر حسب مکانیسم حرکت جریان، فرض صحیحی است.



شکل ۱: نمونه خاک تحت زهکشی شعاعی و قائم

۲-۱- حل معادله

شرایط مرزی قابل تعمیم در این معادله بر اساس شرایط فیزیکی مسئله از نوع دریکله و نیومن خواهد بود که موجب پیچیدگی در حل معادله خواهد شد. این معادله یک مسئله اشتورم لیوویل منفرد برحسب r با تابع وزنی $w(r) = r$ است که مولد سری فوریه بسط می‌باشد و همچنین یک مسئله اشتورم لیوویل عادی برحسب z با تابع وزنی $w(z) = 1$ است که مولد سری فوریه سینوسی می‌باشد. معادله فوق را با روش تفکیک پذیری می‌توان به صورت تحلیلی حل نمود. روش تفکیک پذیری مطابق با معادله (۱۰) نوشته می‌شود [۱۷]:

$$u(r, z, t) = F(r, z).G(t) \quad (10)$$

$$\frac{1}{C} \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{1}{F} (F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + F_{zz}) = -\gamma^2 \quad (11)$$

که بر اساس معادله (۱۱) جواب زمانی معادله به صورت معادله (۱۲) به دست می‌آید:

$$G(t) = e^{-C\gamma^2 t} \quad (12)$$

برای بخش مکانی، می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$F_{rr} + \frac{1}{r} F_r + F_{zz} + \gamma^2 F = 0 \quad (13)$$

معادله فوق، معادله هلمهولتز در مختصات استوانه‌ای است که می‌توان به روش تفکیک پذیری آن را حل نمود.

$$F(r, z) = R(r).Z(z) \quad (14)$$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = -\left(\frac{Z''(z)}{Z(z)} + \gamma^2\right) = -\lambda^2 \quad (15)$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + \lambda^2 r^2 R(r) = 0. \quad (16)$$

معادله (۱۶)، معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه صفر است. جواب‌های این معادله به توابع بسل معروف هستند. چون نقطه $r = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله است، این معادله یک مسئله اشتورم لیوویل منفرد برحسب r می‌باشد. با توجه به شرایط مرزی موجود در مسئله، معادله‌ی (۱۶) برحسب r به صورت زیر حل می‌شود:

$$R(r) = a \left\{ J_0(\lambda r) - \frac{J_1(\lambda R_e)}{Y_1(\lambda R_e)} Y_0(\lambda r) \right\} \quad (17)$$

که در این رابطه a ثابت غیر صفر معادله، λ ثابت جداسازی معادله، J_0 و Y_0 به ترتیب توابع بسل نوع اول و نوع دوم از مرتبه صفر و J_1 و Y_1 هم به ترتیب توابع بسل نوع اول و نوع دوم از مرتبه‌ی یک می‌باشند. معادله‌ی (۱۷) را می‌توان به صورت خلاصه مطابق با معادله‌ی (۱۸) نوشت:

$$R(r) = a \mu_0(\lambda_n r) \quad (18)$$

$$\mu_0(\lambda_n r) = J_0(\lambda_n r) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r) \quad (19)$$

با توجه به شرایط مرزی موجود در مسئله می‌توان نوشت:

$$\mu_0(\lambda_n r_d) = J_0(\lambda_n r_d) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n r_d) = 0 \quad (20)$$

λ_n ها مقادیر ویژه‌ای هستند که وابسته به صفرهای تابع μ_0 می‌باشند و با توجه به معادله‌ی (۲۰) با استفاده از نرم‌افزار (MATLAB) محاسبه شده‌اند.

$$Z''(z) + (\gamma^2 - \lambda^2)Z(z) = 0 \quad (21)$$

معادله‌ی (۲۱) یک مسئله‌ی اشتورم لیوویل ساده برحسب z است که با توجه به شرایط مرزی زیر، مولد سری فوریه سینوسی می‌باشد.

$$\beta^\nu = \gamma^\nu - \lambda^\nu \quad (22)$$

$$Z(z) = b \sin(\beta z) \quad (23)$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{\nu H_{dr}}. \quad (24)$$

با جایگزینی روابط (۱۲)، (۱۸) و (۲۳) در رابطه (۱۰) و ترکیب خطی بینهایت جواب مستقل خطی، می‌توان جواب کلی معادله (۸) را به صورت زیر نوشت:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \mu_o(\lambda_n r) \sin\left(\frac{m\pi z}{\nu H_{dr}}\right) e^{-C\gamma^\nu t}. \quad (25)$$

مقدار a_{mn} با استفاده از خواص تعامد و شرط اولیه موجود در معادله (۸)، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۱۷]:

$$a_{mn} = \frac{\int_0^{\nu H_{dr}} \int_{r_d}^{R_e} q r \mu_o(\lambda_n r) \sin\left(\frac{m\pi z}{\nu H_{dr}}\right) dr dz}{\int_0^{\nu H_{dr}} \int_{r_d}^{R_e} r \mu_o^\nu(\lambda_n r) \sin^\nu\left(\frac{m\pi z}{\nu H_{dr}}\right) dr dz} \quad (26)$$

که پس از انتگرال‌گیری و خلاصه‌سازی مقدار آن برابر است با:

$$a_{mn} = \frac{\nu q}{M \lambda_n} \frac{r_d \mu_n(\lambda_n r_d)}{r_d^\nu \mu_n^\nu(\lambda_n r_d) - R_e^\nu \mu_o^\nu(\lambda_n R_e)} \quad (27)$$

$$m = \nu m' - 1 \quad (28)$$

$$M = (\nu m' - 1) \frac{\pi}{\nu} \quad (29)$$

$$\gamma^\nu = \beta^\nu + \lambda^\nu \quad (30)$$

$$\gamma_{m'n}^\nu = \frac{M^\nu}{H_{dr}^\nu} + \lambda_n^\nu. \quad (31)$$

پس از جایگذاری مقادیر فوق در معادله (۲۵)، تابع $u(r, z, t)$ به ازای $r_d \leq r \leq R_e$ و $0 \leq z \leq \nu H_{dr}$ به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{M \lambda_n} \frac{r_d \mu_1(\lambda_n r_d)}{r_d^2 \mu_1^2(\lambda_n r_d) - R_e^2 \mu_0^2(\lambda_n R_e)} \mu_0(\lambda_n r) \sin\left(\frac{Mz}{H_{dr}}\right) e^{-C\gamma^2 t} \quad (32)$$

$$\mu_0(\lambda_n R_e) = J_0(\lambda_n R_e) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_0(\lambda_n R_e) \quad (33)$$

$$\mu_1(\lambda_n r_d) = J_1(\lambda_n r_d) - \frac{J_1(\lambda_n R_e)}{Y_1(\lambda_n R_e)} Y_1(\lambda_n r_d) \quad (34)$$

درجه تحکیم در هر شعاع و در هر زمان با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$u_{r,z} = 1 - \frac{u}{q} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{M \lambda_n} \frac{r_d \mu_1(\lambda_n r_d)}{r_d^2 \mu_1^2(\lambda_n r_d) - R_e^2 \mu_0^2(\lambda_n R_e)} \mu_0(\lambda_n r) \sin\left(\frac{Mz}{H_{dr}}\right) e^{-C\gamma^2 t} \quad (35)$$

و درجه متوسط تحکیم برای کل لایه خاک که هم به صورت قائم و هم به صورت شعاعی زهکشی می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

$$U = \frac{1}{V} \iiint u_{r,z} dV = \frac{\int_{r_d}^{R_e} \int_0^{H_{dr}} u_{r,z} 2\pi r dr dz}{\int_{r_d}^{R_e} \int_0^{H_{dr}} 2\pi r dr dz} \quad (36)$$

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda r_d^2}{M \lambda_n^2 (R_e^2 - r_d^2)} \frac{\mu_1^2(\lambda_n r_d)}{R_e^2 \mu_0^2(\lambda_n R_e) - r_d^2 \mu_1^2(\lambda_n r_d)} e^{-C\gamma^2 t} \quad (37)$$

در حالت قبل، معادله دیفرانسیل سرعت زمانی تحکیم در شرایطی که هدایت هیدرولیکی خاک در همه‌ی جهات یکسان باشد، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. اگر هدایت هیدرولیکی خاک در جهت افقی و قائم یکسان نباشد، معادله تحکیم اندکی دستخوش تغییر می شود. در این حالت معادله تحکیم را به صورت زیر می توان نوشت [۱۴]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (38)$$

در صورتی که خاک روی یک لایه نفوذناپذیر قرار گرفته باشد، شرایط مرزی و اولیه حاکم بر مسئله به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(r, 0, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=H} = 0 \\ u(r_d, z, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_e} = 0 \\ u(r, z, 0) = q \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \quad 0 \leq z \leq H \\ \forall \quad 0 \leq z \leq H \\ \forall \quad r_d \leq r \leq R_e \\ \forall \quad r_d \leq r \leq R_e \\ \forall \quad t \geq 0 \end{array} \right. \quad (39)$$

معادله فوق نیز با استفاده از روش جداسازی متغیرها به صورت تحلیلی حل می شود [۱۷]. روش جداسازی در بخش قبل به طور کامل توضیح داده شد. در این حالت میزان فشار آب منفذی در هر نقطه از نمونه خاک در هر زمان از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$u(r, t, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q}{M \lambda_n} \frac{r_d \mu_1(\lambda_n r_d)}{r_d^\gamma \mu_1^\gamma(\lambda_n r_d) - R_e^\gamma \mu_0^\gamma(\lambda_n R_e)} e^{-\left(C_v \frac{M^*}{H^*} + C_h \lambda_n^\gamma\right) t} \times \left[\mu_0(\lambda_n r) \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-\left(C_v \frac{M^*}{H^*} + C_h \lambda_n^\gamma\right) t} \right] \quad (40)$$

درجه تحکیم در هر شعاع، عمق و در هر زمان برابر است با:

$$u_{r,z} = 1 - \frac{u}{q} = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{M \lambda_n} \frac{r_d \mu_1(\lambda_n r_d)}{r_d^\gamma \mu_1^\gamma(\lambda_n r_d) - R_e^\gamma \mu_0^\gamma(\lambda_n R_e)} \times \left[\mu_0(\lambda_n r) \sin\left(\frac{Mz}{H}\right) e^{-\left(C_v \frac{M^*}{H^*} + C_h \lambda_n^\gamma\right) t} \right]. \quad (41)$$

درجه متوسط تحکیم برای کل لایه خاک که روی یک لایه نفوذناپذیر قرار دارد از رابطه زیر به دست می آید:

$$U = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda r_d^\gamma}{M^\gamma \lambda_n^\gamma (R_e^\gamma - r_d^\gamma)} \frac{\mu_1^\gamma(\lambda_n r_d)}{R_e^\gamma \mu_0^\gamma(\lambda_n R_e) - r_d^\gamma \mu_1^\gamma(\lambda_n r_d)} e^{-\left(C_v \frac{M^*}{H^*} + C_h \lambda_n^\gamma\right) t} \quad (42)$$

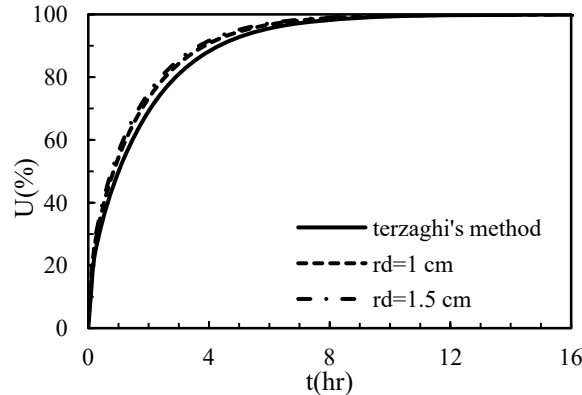
لازم به توضیح است که روابط نهایی به دست آمده برای نشست زمانی، یعنی روابط (۳۷) و (۴۱)، برای شعاع‌های نزدیک به فر، قابل تعریف نیست. به دلیل این که توابع بسل از نوع Y در نقطه صفر تعریف نمی‌شوند. این موضوع محدودیت استفاده از معادلات یاد شده می‌باشد.

۳- نتایج و بحث

۳-۱- بررسی نتایج عددی و مقایسه با روش ترزاقی

برای بررسی بهتر نتایج، اقدام به انجام آزمون تحکیم یک بعدی روی نمونه خاکی به قطر حدوداً ۷۵ میلی‌متر و ارتفاع ۲۰ میلی‌متر گردید. نمونه مورد آزمایش تحت بارگذاری ۱۰ کیلوگرم قرار گرفته و از بالا و پایین زهکشی می‌شود. نتایج آزمون انجام شده نشان داد که مشخصات مهندسی خاک شامل $k = 1/69 \times 10^{-6} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ و m_v برابر با $33/999 \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$

می‌باشد. در این آزمایش ضریب تحکیم $4/98 \times 10^{-5} \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$ به دست آمده است. برای مقایسه روش شعاعی-عمودی با روش یک بعدی ترزاقی، دو مقدار ۱ و ۱/۵ سانتی‌متر برای r_d در نظر گرفته شد و مقادیر مربوطه وارد رابطه (۳۷) شد و با استفاده از نرم افزار برنامه نویسی (MATLAB)، تغییرات درصد نشست تحکیمی متوسط نسبت به زمان به دست آمد. برای بررسی بهتر و دقیق تر، در شکل زیر نتایج حاصل از حل معادله تحکیم یک بعدی ترزاقی و معادله سه بعدی تحکیم تحت زهکشی شعاعی و قائم، نشان داده شده است.



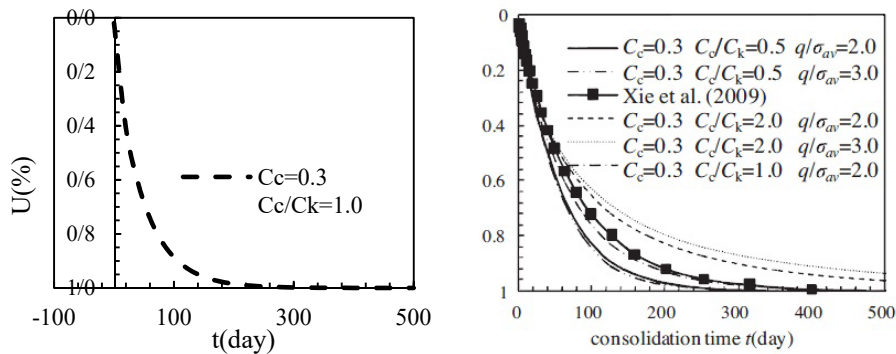
شکل ۲: مقایسه روش ترزاقی با روش شعاعی-عمودی

همان گونه که در شکل فوق مشخص است، می توان بیان نمود که استفاده از زهکش قائم باعث ایجاد تسریع در روند تحکیم می شود. به عنوان مثال، زمان رسیدن نمونه خاک به ۵۰ درصد نشست تحکیمی، با استفاده از روش ترزاقی برابر با ۳۶۰۰ ثانیه محاسبه می شود؛ در حالی که با استفاده از زهکش قائم به شعاع ۱ و ۱/۵ سانتی متر، این زمان به ترتیب برابر با ۳۰۰۰ و ۲۷۵۰ ثانیه محاسبه می شود. لازم به توضیح است که اختلاف زمانی بیان شده اگرچه ناچیز است، اما باید توجه داشت که این اعداد در مقیاس آزمایشگاهی به دست آمده است. چنانچه محاسبات ریاضی در ابعاد واقعی صحرایی انجام گیرد، اختلاف زمانی ایجاد شده بر اثر احداث زهکش های قائم، کاملاً محسوس خواهد بود. در رویدادهای میدانی در عمل، تحکیم سه بعدی رخ می دهد. این تحقیق با تکنیک های ریاضی، حل سه بعدی را به همراه دارد. از آنجایی که C_v به ازای یک بار مشخص در آزمایشگاه و شرایط میدانی یکسان است، می توان نتایج آزمایشگاهی را با توجه به روابط موجود برای C_v ، به صحرایی تعمیم داد. در خصوص شرایط سه بعدی با استفاده از روابط استخراج شده در این تحقیق با در نظر گرفتن شعاع تأثیر زهکش های عمودی، می توان نتایج را به شرایط میدانی تعمیم داد.

۳-۲- مقایسه نتایج حاصله با نتایج تحقیقات گذشته

از جمله تحقیقات مشابهی که در گذشته روی موضوع تحکیم صورت گرفته شده، می توان به تحقیق وانگ و ژو [۹] اشاره نمود که در دانشگاه شانگهای چین انجام شده است. در تحقیق یاد شده معادله دیفرانسیل نشست زمانی تحکیم برای بخش شعاعی و عمودی به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته و با متغیر در نظر گرفتن تراکم پذیری و نفوذ پذیری خاک در طول عمل تحکیم، به صورت نیمه تحلیلی حل شده است. شرایط مرزی حاکم بر مسئله همانند شرایط مرزی حاکم بر مسئله در این تحقیق می باشد. خاک مورد مطالعه در تحقیق یاد شده، خاک لایه ای می باشد که به وسیله ستون های سنگی مسلح سازی شده است. در تحقیق وانگ و ژو پارامتر r_g به عنوان شعاع ستون سنگی معرفی شده است که در این تحقیق همانند شعاع زهکش ماسه ای قائم با آن رفتار می شود و مقدار آن برابر با ۰/۲۵ متر در نظر گرفته شده است. پارامتر r_e نیز به عنوان شعاع تأثیر زهکشی معرفی شده و مقدار آن برابر با ۱ متر در نظر گرفته شده است؛ مقدار هدایت هیدرولیکی خاک مورد مطالعه در جهت افقی، k_h برابر با $\frac{m}{d} \cdot 0.0003$ ، هدایت هیدرولیکی در جهت قائم، k_v برابر با $\frac{m}{d} \cdot 0.0001$ و ضریب تراکم پذیری حجمی خاک، m_v به ترتیب برابر با ۰/۰۰۱ KPa منظور شده است [۱۱]. به منظور مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج به دست آمده از تحقیق وانگ و ژو (۲۰۱۲)، داده های مزبور به عنوان داده های ورودی، در معادله (۴۳) قرار داده شده است. برای بررسی دقیق تر، در شکل (۳)، نمودارهای درجه متوسط

نشست تحکیمی نسبت به زمان، با استفاده از روش وانگ و ژو و همچنین روش تحلیلی استفاده شده در این تحقیق، نشان داده شده است.



الف) درجه تحکیم نسبت به زمان در روش وانگ و ژو [۱۱] ب) درجه تحکیم نسبت به زمان با استفاده از معادله (۴۳)

شکل ۳: مقایسه نتایج به دست آمده از روش وانگ و ژو و روش استفاده شده در تحقیق حاضر برای درصد متوسط نشست تحکیمی.

همان گونه که در شکل (۳-الف) نشان داده شده است، می توان گفت که زمان رسیدن به نشست تحکیمی ۵۰ درصد و ۹۰ درصد، با استفاده از روش وانگ و ژو به ترتیب در حدود ۴۰ و ۱۴۰ روز می باشد؛ این در حالی است که با استفاده از روش استفاده شده در این تحقیق (معادله ۴۳)، زمان رسیدن به نشست تحکیمی ۵۰ درصد و ۹۰ درصد به ترتیب در حدود ۳۵ و ۱۲۰ روز می باشد؛ بنابراین می توان اذعان داشت که روش تئوری به درستی مورد ارزیابی واقع شده و همخوان با نتایج عددی مورد استفاده در تحقیق وانگ و ژو [۹] می باشد.

۴- نتیجه گیری

در این تحقیق یک الگوی کلی برای به دست آوردن سرعت زمانی تحکیم تحت جریان هیدرولیکی شعاعی و عمودی ارائه شد. از طرفی مشخص گردید نتایج تحقیق حاضر که به صورت تحلیلی معادله ی تحکیم در جریان شعاعی را بررسی می نماید در تطابق با روش های عددی به کار گرفته شده در تحقیقات گذشته می باشد. به لحاظ ریاضی می توان بیان نمود که با توجه به این که در معادله (۱۲)، جواب بخش شعاعی به صورت توابع بسط ظاهر می شود و این توابع دارای خواص نوسانی میرا می باشند، سرعت زمانی تحکیم در حالتی که جریان آب به صورت شعاعی و قائم زهکشی می شود بیش تر از حالتی است که جریان آب فقط به صورت قائم زهکشی می شود. از نظر فیزیکی، ایجاد زهکش های قائم که جریان آب را به صورت شعاعی

زهکشی می کنند، باعث تسریع در روند نشست تحکیمی می شوند. در بسیاری از طرح ها که نیاز به تثبیت خاک از نظر نشست پذیری باشد، می توان این موضوع را مدنظر قرار داد.

مراجع

- [1] Nova, R. (2012), *Soil mechanics*, John Wiley & Sons.
- [2] McKinley, J.D. (1998), Coupled consolidation of a solid infinite cylinder using a Terzaghi formulation, *Journal of Computers and Geotechnics*, **23**, 193-204.
- [3] Abbasi, N., Rahimi, H., Javadi, A.A. and Fakher A. (2007), Finite difference approach for consolidation with variable compressibility and permeability, *Journal of Computers and Geotechnics*, **34**, 41-52.
- [4] Oliaei, M. and Pak, A. (2009), Element free Galerkin meshless method for fully coupled analysis of consolidation process, *Scientia Iranica Transaction, A*, **16**, 65-77.
- [5] Gibson, R., Schiffman, R. and Pu, S. (1970), Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **23**, 505-520.
- [6] Zheng, J.J., Lu, Y.E., Yin, J.H. and Guo, J. (2010), Radial consolidation with variable compressibility and permeability following pile installation. *Computers and Geotechnics*, **37**, 408-412.
- [7] Qin, A., Sun, D., Yang, L. and Weng, Y. (2010), A semi-analytical solution to consolidation of unsaturated soils with the free drainage well, *Journal of Computers and Geotechnics*, **37**, 867-875.
- [8] Rani, S., Kumar, R. and Singh, S.J. (2011), Consolidation of an Anisotropic Compressible Poroelastic Clay Layer by Axisymmetric Surface Loads, *International Journal of Geomechanics*, **11**, 65-71.
- [9] Wan-Huan, Z. and Shuai, T. (2012), Unsaturated Consolidation in a Sand Drain Foundation by Differential Quadrature Method, *Procedia Earth and Planetary Science*, **5**, 52-57.
- [10] Yi, J.T., Lee, F.H., Goh, S.H., Zhang, X.Y. and Wu, J.F. (2012), Eulerian finite element analysis of excess pore pressure generated by spudcan installation into soft clay, *Journal of Computers and Geotechnics*, **42**, 157-170.

- [11] Wang, C. (2012), Semi-analytical solution of consolidation for composite ground, *Mechanics Research Communications*, **48**, 24–31.
- [12] Lu, M., Xie, K., Wang, S. and Li, C. (2013), Analytical solution for the consolidation of a composite foundation reinforced by an impervious column with an arbitrary stress increment, *International Journal of Geomechanics*, **13**, 33-40.
- [13] Tang, X., Niu, B., Cheng, G. and Shen, H. (2013), Closed-form solution for consolidation of three-layer soil with a vertical drain system, *Journal of Geotextiles and Geomembranes*, **36**, 81–91.
- [14] Tewatia, S. (2013), Equation of 3D consolidation in cartesian coordinates, *International Journal of Geotechnical Engineering*, **7**, 105-108.
- [15] Carillo, N. (1942), Simple two and three dimensional cases in the theory of consolidation of soils, *Journal of Mathematics and Physics*, **21**, 11–18.
- [16] Das, B.M. (2010), *Principles of geotechnical engineering*, C1 Engineering.
- [17] Jeffrey, A. (2001), *Advanced engineering mathematics*, Academic Press, USA.

A 3-D Mathematical Modeling in Solving Analytical Consolidation Equation in a Homogeneous Saturated Soil

Reza Poursaki^{*}, Javad Ahadian^{*} and Mansour Seraj^{**}

^{*}Department of Water Sciences Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

^{**}Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

The drainage length can be artificially decreased using vertical drains where need to accelerate in the consolidation settlement, so that the flow can be drained radially and vertically. In this research, the three dimensional consolidation equation with appropriate boundary conditions was used in cylindrical coordinates, and then was solved analytically. After the analytical solution, analysis of the results was done on using MATLAB software. Moreover, the average degree of consolidation versus time was obtained and compared with the results of one-dimensional method. Findings showed that, the analytical method in this research is in accordance with another numerical method in the previous researches.

Keywords: Three-dimensional consolidation, Cylindrical coordinates, Boundary condition, Radial-vertical drainage.

Mathematics Subject Classification (2010): 34BXX, 34B30.