طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی و استنباط پیرامون پارامترهای دو جامعه وایبول تحت این طرح

حمزه ترابی[۱]، سعیده بافکری فدافن و حسین نادب

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۸/۱۱

چکیده: نمونه‌های سانسور شده در آزمایش‌های مربوط به آزمون‌های طول عمر مطرح می‌شوند؛ یعنی هنگامی‌که آزمایشگر زمان‌های از کار افتادگی تمام واحدهای موجود در آزمون طول عمر را مشاهده نمی‌کند. در سال‌های اخیر، استنباط بر پایه‌ی نمونه‌های سانسور شده بسیار موردتوجه قرارگرفته است به‌طوری‌که در مورد پارامترهای توزیع‌های مختلفی مانند نرمال، نمایی، گاما، رایلی، وایبول، لوگ‌نرمال، گوسی معکوس، لجستیک، لاپلاس و پارتو بر اساس نمونه‌های سانسور شده استنباط صورت گرفته است. در این مقاله، تعمیمی از طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم معرفی می‌شود. کاربرد این طرح در مواردی است که طول عمر تعدادی از واحدهای اولیه‌ی مربوط به دو جامعه در دست نیست و هم‌چنین به دلیل جلوگیری از طولانی شدن زمان آزمایش، در طول آزمایش، تعدادی از واحدها از آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. پس از معرفی طرح، برای پارامترهای دو جامعه وایبول تحت این طرح، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و بازه اطمینان با استفاده از روش‌های تقریب نرمال و بوت‌استرپ ارائه می‌شود. سرانجام، با استفاده از شبیه‌سازی، دقت برآوردگرها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و هم‌چنین بازه اطمینان‌های مختلف ازنظر احتمال پوشش مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: احتمال پوشش، تقریب نرمال، توزیع وایبول، سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی، بازه اطمینان بوت‌استرپ.

رده‌بندی موضوعی: ۶۲N۰۱، ۶۲N۰۲.

۱- مقدمه

طرح سانسور توأم، نقش مهمی در مقایسه طول عمر محصولات واحدهای مختلف تولید، تحت شرایط یکسان دارد. فرض کنید کارخانه‌ای دارای دو خط تولید باشد. با استفاده از طرح سانسور

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: htorabi@yazd.ac.ir

توأم می‌توان تحت شرایط یکسان، محصولات این دو خط تولید را به‌طور هم‌زمان در یک آزمایش طول عمر قرار داد تا در یک آزمون مقایسه‌ای، کیفیت خط‌های مختلف تولید بررسی و مقایسه شوند. مزیت این طرح سانسور این است که علاوه بر صرفه‌جویی در وقت و هزینه، نیازی به ایجاد شرایط آزمایش برای واحدهای هر جامعه به‌صورت مجزا نیست و با قرار دادن تمام واحدهای مربوط به دو جامعه در یک محیط آزمایشی و اعمال طرح سانسور، پس از پایان آزمایش می‌توان در مورد پارامترهای توزیع دو جامعه به‌طور هم‌زمان استنباط انجام داد. به‌عنوان مثال یک کارخانه کاشی با دو خط تولید را در نظر بگیرید. مسئولان بخش کنترل کیفیت این کارخانه در نظر دارند میزان استحکام کاشی‌های دو خط تولید را ارزیابی کنند. برای این منظور آن‌ها می‌توانند از هر خط تولید تعدادی کاشی را انتخاب کنند و به‌صورت هم‌زمان در دستگاه فشار قرار دهند. با افزایش فشار، کاشی‌ها شروع به شکستن می‌کنند. چون براثر حمل‌ونقل ممکن است کاشی‌ها آسیب ببینند، بنابراین مسئولان کنترل کیفیت تعدادی از کاشی‌هایی را که تحت فشارهای پایین می‌شکنند، نادیده می‌گیرند که این تعداد از قبل معلوم است. پس‌ازآن، سانسور توأم فزاینده نوع دوم را برای کاشی‌های سالم به‌کار می‌گیرند. با انجام این نوع سانسور، آن‌ها با صرفه‌جویی در وقت و هزینه (هزینه‌ای که بابت شکستن بیش از اندازه کاشی‌ها می‌شود) به‌طور هم‌زمان در مورد میزان استحکام کاشی‌های هر دو خط تولید استنباط انجام می‌دهند.

بالاکریشنان و رسولی [۱] استنباط درستنمایی دقیق را برای دو جامعه نمایی، تحت سانسور توأم نوع دوم موردمطالعه قرار دادند. در این مقاله، آن‌ها برآوردگر ماکزیمم درستنمایی پارامترها و توزیع آن‌ها را ارائه کردند. گاهی در آزمون‌های طول عمر تحت سانسور توأم، به دلیل صرفه‌جویی در زمان و هزینه آزمایش، آزمایشگر تصمیم می‌گیرد که با مشاهده هر شکست، تعدادی از واحدهای باقی‌مانده در آزمایش را به‌طور تصادفی انتخاب و از آزمون حذف کند که این طرح، به‌عنوان طرح سانسور توأم فزاینده، توسط بالاکریشنان و رسولی [۲] ارائه شد که در بخش دوم به معرفی طرح سانسور فزاینده نوع دوم پرداخته‌شده است. برای استنباط آماری ژرف‌تر پیرامون پارامترهای مدل، افزون بر برآورد پارامترها، می‌توان بازه اطمینان را برای آن‌ها ارائه داد. بالاکریشنان و ویوروس [۳] برآورد بازه‌ای پارامترهای طول عمر را تحت داده‌های سانسور فزاینده بررسی کردند. در اینجا برای برآورد بازه‌ای پارامترها از روش تقریب نرمال و بوت‌استرپ استفاده می‌شود. روش تقریب نرمال بر پایه‌ی توزیع تقریبی نرمال برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی تحت شرایط نظم است؛ برای آگاهی بیشتر می‌توان به سرفلینگ [۴] مراجعه کرد.

۲-طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی

پارسی و همکاران [۵] استنباط در مورد پارامترهای دو جامعه وایبول تحت طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم را ارائه دادند. فرض کنید $x_1,...,x_m$، مشاهدات یک نمونه تصادفی مربوط به جامعه اول با تابع توزیع $F(.)$ و تابع چگالی $f(.)$ و $y_1,...,y_n$، مشاهدات یک نمونه تصادفی مربوط به جامعه دوم با تابع توزیع $G(.)$ و تابع چگالی $g(.)$ هستند. واحدهای دو نمونه را به‌طور هم‌زمان در یک آزمایش طول عمر قرار می‌دهیم؛ بنابراین یک نمونه توأم با اندازه‌ی $N=m+n$ در آزمون طول عمر در اختیار است. فرض کنید برای این نمونه توأم Nتایی، مرتب‌شده داده‌ها به‌صورت $\mathbf{w}=(w_1,...,w_N)$ نشان داده شود؛ به عبارتی، بردار $\mathbf{w}$، بردار داده‌های مرتب‌شده دو نمونه تصادفی در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین متغیر z_i را درصورتی‌که w_i مربوط به نمونه اول (x)ها باشد، ۱ و در غیر این صورت صفر تعریف شود. در این صورت $\mathbf{z}=(z_1,...,z_N)$. فرض کنید $\mathbf{r}=(r_1,...,r_k)$ ، بردار از پیش تعیین‌شده‌ای باشد و آزمایشگر تعیین کند که تعدادی از داده‌ها در حین آزمایش تا قبل از زمان خاتمه آن حذف شوند به‌این‌ترتیب که با مشاهده‌ی اولین شکست، r_1 تا از واحدهای توأم باقی‌مانده $(r_1=r_1'+r_1'')$، به‌طور تصادفی انتخاب و از آزمون طول عمر حذف می‌شوند که r_1' تعداد واحدهای حذف‌شده از نمونه انتخاب‌شده از جامعه اول و r_1'' تعداد واحدهای حذف‌شده از نمونه انتخاب‌شده از جامعه دوم هستند. به همین ترتیب با مشاهده دومین شکست، $r_2=r_2'+r_2''$ تا از واحدهای باقی‌مانده از آزمایش حذف می‌شوند. اگر آزمایشگر برای صرفه‌جویی در زمان یا هزینه آزمایش، زمان خاتمه آزمون طول عمر را زمان مشاهده l امین شکست تعیین کند، در زمان خاتمه آزمایش، یعنی زمان مشاهده kامین شکست، r_k واحد باقی‌مانده از آزمایش حذف می‌شوند که $r_k=N-k-r_1-...-r_{k-1}$؛ به این طرح، طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم گفته می‌شود. توجه کنید که در این طرح سانسور، بردار $\mathbf{r}=(r_1,...,r_k)$ معلوم و از قبل مشخص می‌شود. وانگ [۶] استنباطی دقیق برای خانواده مقیاس را برای طرح سانسور فزاینده نوع دوم کلی مربوط به یک جامعه ارائه داد. در این طرح سانسور، طول عمر تعدادی از واحدهای اولیه (l) در دسترس نیست ولی از مشاهده شکست واحد $(l+1)$ام، طرح سانسور مانند سانسور فزاینده نوع دوم پیش می‌رود. اگر در طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم، l واحد از واحدهای اولیه کنار گذاشته شوند و از شکست واحد $(l+1)$ام این طرح ادامه یابد، طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم به طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی تبدیل می‌شود. کنار گذاشتن تعدادی از واحدهای اولیه آزمایش، علاوه بر سانسور کلی می‌تواند به‌عنوان طرح سانسور توأم از چپ نیز در نظر گرفته شود. توجه کنید که اگر $l=0$، آنگاه این طرح به طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم تبدیل می‌شود.

۳-تابع چگالی توأم و روش برآورد پارامترها

با توجه به مطالب بیان‌شده در بخش دوم، اگر l به‌عنوان تعداد مشاهدات مشاهدات اولیه‌ای باشد که در همان ابتدا از آزمون حذف‌شده‌اند (شامل تعداد l' مشاهده از نمونه اول و l'' مشاهده از نمونه دوم)، بردار مشاهدات تحت این طرح به‌صورت $\mathbf{w}=(w_{l+1},...,w_k)$ خواهد بود که متناظر با آن، بردار $\mathbf{z}=(z_{l+1},...,z_k)$ تعیین می‌شود. هم‌چنین فرض کنید $\mathbf{r}=(r_{l+1},...,r_k)$، بردار معلومی باشد. در این‌صورت به‌شرط معلوم بودن l' و $\mathbf{r}'$ ، تابع چگالی توأم $\mathbf{W}$ و $\mathbf{Z}$ عبارت است از

$$f(\mathbf{w},\mathbf{z}\,|\,l',\mathbf{r}')=C[F(w_{l+1})]^{l'}[G(w_{l+1})]^{l''}\prod_{i=l+1}^{k}f(w_i)^{z_i}\,g(w_i)^{1-z_i}\,\overline{F}(w_i)^{r_i'}\,\overline{G}(w_i)^{r_i''},\quad (1)$$

که در آن l' و l'' به ترتیب تعداد xها و yهایی هستند که در l واحد اول حذف‌شده‌اند و در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$l'=m-\sum_{i=l+1}^{k}z_i-\sum_{i=l+1}^{k}r_i',$$

$$l''=n-\sum_{i=l+1}^{k}(1-z_i)-\sum_{i=l+1}^{k}r_i'',$$

جایی‌که C یک ضریب ثابت است. بدیهی است که $l''=l-l'$ و $\mathbf{r}''=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. فرض کنید دو جامعه مستقل و دارای توزیع وایبول به ترتیب با پارامترهای (α_1,β_1) و (α_2,β_2) با تابع توزیع‌های زیر باشند:

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right],\quad x>0 \text{ و } G(y)=\left(1-\exp\left[-\left(\frac{y}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right]\right),\quad y>0.$$

برای یافتن برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترهای مدل، تابع درستنمایی مدل که همان تابع چگالی معرفی‌شده در (۱) است، به‌کاربرده می‌شود:

$$L(\alpha_۱,\alpha_۲,\beta_۱,\beta_۲)=C\left(۱-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۱}\right)^{\beta_۱}\right]\right)^{l'}\left(۱-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۲}\right)^{\beta_۲}\right]\right)^{l''}$$
$$\times\left(\frac{\beta_۱}{\alpha_۱}\right)^{\sum_{i=l+۱}^{k} z_i}\times\left(\frac{\beta_۲}{\alpha_۲}\right)^{\sum_{i=l+۱}^{k}(۱-z_i)}\prod_{i=l+۱}^{k}\left(\frac{w_i}{\alpha_۱}\right)^{(\beta_۱-۱)z_i}$$
$$\times\left[\exp\left\{-\left(\frac{w_i}{\alpha_۱}\right)^{\beta_۱}\right\}\right]^{z_i+r_i'}\times\left(\frac{w_i}{\alpha_۲}\right)^{(\beta_۲-۱)(۱-z_i)}\left[\exp\left\{-\left(\frac{w_i}{\alpha_۲}\right)^{\beta_۲}\right\}\right]^{(۱-z_i)+r_i''}.$$

از تابع لگاریتم درستنمایی $(\ln L(\boldsymbol{\theta}))$ نسبت به پارامترها مشتق می‌گیریم که در این صورت داریم:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_۱}=\frac{l'\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۱}\right)^{\beta_۱}\ln\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۱}\right)\exp\left[-\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۱}\right)^{\beta_۱}\right]}{\left(۱-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۱}\right)^{\beta_۱}\right]\right)}+\frac{\sum_{i=l+۱}^{N} z_i}{\beta_۱}+\sum_{i=l+۱}^{N} z_i\ln\left(\frac{w_i}{\alpha_۱}\right)$$
$$-\sum_{i=l+۱}^{N}(z_i+r_i')\left(\frac{w_i}{\alpha_۱}\right)^{\beta_۱}\ln\left(\frac{w_i}{\alpha_۱}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_۲}=\frac{l''\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۲}\right)^{\beta_۲}\ln\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۲}\right)\exp\left[-\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۲}\right)^{\beta_۲}\right]}{\left(۱-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+۱}}{\alpha_۲}\right)^{\beta_۲}\right]\right)}+\frac{\sum_{i=l+۱}^{N}(۱-z_i)}{\beta_۲}$$
$$+\sum_{i=l+۱}^{N}(۱-z_i)\ln\left(\frac{w_i}{\alpha_۲}\right)-\sum_{i=l+۱}^{N}(r_i''+۱-z_i)\left(\frac{w_i}{\alpha_۲}\right)^{\beta_۲}\ln\left(\frac{w_i}{\alpha_۲}\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_1}=\frac{l'\left(-\frac{\beta_1}{\alpha_1^2}\right)\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\ln\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right]}{\left(1-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_1}\right)^{\beta_1}\right]\right)}-\sum_{i=l+1}^{N} z_i\frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

$$+\sum_{i=l+1}^{N}(r_i'+z_i)(\frac{\beta_1}{\alpha_1})(\frac{w_i}{\alpha_1})^{\beta_1}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_2}=\frac{l''\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2^2}\right)\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\ln\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right]}{\left(1-\exp\left[-\left(\frac{w_{l+1}}{\alpha_2}\right)^{\beta_2}\right]\right)}-\sum_{i=l+1}^{N}(1-z_i)\frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

$$+\sum_{i=l+1}^{N}(r_i''+1-z_i)(\frac{\beta_2}{\alpha_2})(\frac{w_i}{\alpha_2})^{\beta_2}.$$

با صفر گذاشتن مشتقات بالا و حل معادله‌های درستنمایی، برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترهای α_1 و β_1 و α_2 و β_2 به‌دست می‌آیند. همان‌طور که مشاهده می‌شود نمی‌توان فرم بسته‌ای برای برآورد پارامترها ارائه داد و بنابراین باید از روش‌های عددی آن‌ها را یافت. خوشبختانه حل چنین دستگاه‌هایی با استفاده از نرم‌افزارها به‌سادگی امکان‌پذیر است که در این مقاله از نرم‌افزار R و تابع *optim* موجود در آن استفاده می‌شود. در بخش شبیه‌سازی، برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. باید توجه کرد که اگر $\sum_{i=l+1}^{k} z_i=0$، آنگاه نمی‌توان برآورد پارامترهای α_1 و β_1 را یافت و هم‌چنین اگر $\sum_{i=l+1}^{k} z_i=k$، آنگاه برآورد پارامترهای α_2 و β_2 به‌دست نمی‌آید؛ به‌بیان‌دیگر، اگر در $N-l$ واحد باقی‌مانده داشته باشیم $\sum_{i=l+1}^{N} z_i=0$ و $\sum_{i=l+1}^{N} z_i=N-l$، به ترتیب پارامترهای جامعه‌های اول و دوم قابل برآورد نیستند.

۴- بازه‌های اطمینان تقریبی برای پارامترها

در این بخش، برای پارامترهای مدل با استفاده از روش‌های تقریب نرمال و بوت‌استرپ، بازه اطمینان ارائه می‌شود. روش بوت‌استرپ به دو نوع پارامتری و ناپارامتری تقسیم‌بندی می‌شود

که برای به‌دست آوردن بازه اطمینان بوت‌استرپ پارامتری از روش بوت‌استرپ $-t$ و برای به‌دست آوردن بازه اطمینان بوت‌استرپ ناپارامتری از روش بوت‌استرپ $-p$ استفاده خواهد شد.

۴-۱- روش تقریب نرمال

فرض کنید $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4) := (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامتر برداری $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) := (\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_4)$ باشد. روشن است که در این حالت ماتریس اطلاع فیشر $I_{\boldsymbol{\theta}}$ چنین است:

$$I_{\boldsymbol{\theta}} = E\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}\right] = E\begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_1^2} & 0 & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_2^2} & 0 & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_2 \partial \theta_4} \\ -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_1 \partial \theta_3} & 0 & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_3^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_2 \partial \theta_4} & 0 & -\frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta_4^2} \end{bmatrix}.$$

اگر در ماتریس اطلاع فیشر به‌جای پارامترها، برآورد آن‌ها قرار داده شود، ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده به‌دست می‌آید که با $I_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ نشان داده می‌شود؛ به بیان دقیق‌تر

$$I_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = E\left[-\frac{\partial^2 \log L}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}\right]_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}} .$$

اگر در ماتریس اطلاع فیشر مشاهده‌شده عملگر امید ریاضی در نظر گرفته نشود، در این صورت به آن عدد اطلاع فیشر مشاهده‌شده می‌گویند و $\hat{I}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}$ میانگین اعداد فیشر شبیه‌سازی‌شده در B بار تکرار خواهد بود؛ یعنی

$$\hat{I}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B} \left[\frac{\partial^2 \log L_i}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}\right]_{\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i} .$$

البته باید توجه کرد که در عدد اطلاع فیشر مشاهده‌شده، از بردار مشاهدات $\mathbf{w}$ و $\mathbf{z}$ ، به‌جای بردارهای $\mathbf{w}$ و $\mathbf{z}$ استفاده می‌شود. چنان‌که می‌دانیم تحت شرایط نظم روی چگالی‌ها، برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی دارای توزیع مجانبی نرمال هستند؛ به‌ویژه در این مبحث، به‌طور تقریبی داریم:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \approx N_{4}\left(\boldsymbol{\theta}, \hat{I}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^{-1}\right),$$

اگر $\hat{I}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(i,i)}^{-1}$ نمایانگر درآیه‌ی سطر و ستون i ام ماتریس $\hat{I}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^{-1}$ باشد، آنگاه بازه اطمینان تقریب نرمال (AN) در سطح $(1-\alpha)$ برای پارامتر θ_i به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\hat{\theta}_i \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \hat{I}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}(i,i)}^{-\frac{1}{2}}\right), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

که $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$، چندک مرتبه $(1-\frac{\alpha}{2})$ام توزیع نرمال استاندارد است. برای توزیع مجانبی نرمال برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی و شرایط نظم مربوط به آن‌ها، می‌توان به سرفلینگ [۴] یا فرگوسن [۷] مراجعه کرد.

۴-۲- روش بوت‌استرپ پارامتری (بوت‌استرپ $- t$)

فرض کنید مشاهدات توأم $z_{l+1},\dots,z_N$ و $w_{l+1},\dots,w_N$ از دو جامعه مستقل با توزیع وایبول به ترتیب با پارامترهای (α_1, β_1) و (α_2, β_2) موجود باشد. ابتدا با استفاده از تابع درستنمایی ارائه‌شده در (۱) برآوردهای ماکزیمم درستنمایی پارامترها را به‌دست می‌آوریم و با $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ نشان می‌دهیم. سپس B بار به‌اندازه m از توزیع وایبول با پارامتر برداری و به‌اندازه n از توزیع وایبول با پارامتر $(\hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2)$ تولید می‌شود و این نمونه‌های ایجادشده را با $(x_{i1}^{\#},\dots,x_{im}^{\#})$ و $(y_{i1}^{\#},\dots,y_{in}^{\#})$، $i = 1,\dots,B$ نشان می‌دهیم. با توجه به این دو نمونه در هر بار، بردار مشاهدات توأم $\mathbf{w}$ و $\mathbf{z}$ را ایجاد می‌کنیم و هر بار برآورد پارامترها را محاسبه و با $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^{\#} = (\hat{\alpha}_{i1}^{\#}, \hat{\alpha}_{i2}^{\#}, \hat{\beta}_{i1}^{\#}, \hat{\beta}_{i2}^{\#})$ نشان می‌دهیم. برآورد بوت‌استرپ β_1 را با $\hat{\beta}_1^{\#}$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\beta}_1^{\#} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{B} \hat{\beta}_{i1}^{\#}.$$

برای به‌دست آوردن بازه اطمینان در سطح $1-\alpha$ برای پارامتر β_1، در آغاز برآوردگرهای نمونه‌های بوت‌استرپ مربوط به β_1 را به‌صورت زیر استاندارد می‌کنیم:

$$z_{\hat{\beta}_{i1}^{\#}} = \frac{\hat{\beta}_{i1}^{\#} - \hat{\beta}_1}{\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\beta}_1^{\#})} \quad i = 1,\dots,B,$$

که در آن، $\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\beta}_1^{\#})$ انحراف معیار نمونه‌ای $\hat{\beta}_1^{\#}$ها است که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\mathrm{sd}}(\hat{\beta}_1^{\#}) = \sqrt{\frac{1}{B-1}\Sigma_{i=1}^{B}(\hat{\beta}_{i1}^{\#} - \hat{\beta}_1^{\#})^2}.$$

در این صورت بازه اطمینان بوت‌استرپ $t-$ (BT) پارامتری در سطح $1-\alpha$ به‌صورت زیر است:

$$\left(\hat{\beta}_1 + \hat{\mathrm{sd}}(\hat{\beta}_1^{\#}) z_{\hat{\beta}_1^{\#}(\frac{\alpha}{2})}, \hat{\beta}_1 + \hat{\mathrm{sd}}(\hat{\beta}_1^{\#}) z_{\hat{\beta}_1^{\#}(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

که در آن، $z_{\hat{\beta}_1^{\#}(\frac{\alpha}{2})}$ و $z_{\hat{\beta}_1^{\#}(1-\frac{\alpha}{2})}$، به ترتیب چندک‌های $\frac{\alpha}{2}$ و $1-\frac{\alpha}{2}$ هستند که بعد از مرتب کردن $z_{\hat{\beta}_{11}^{\#}},\dots,z_{\hat{\beta}_{1B}^{\#}}$ها به‌دست می‌آیند. به‌طور مشابه می‌توان برای سایر پارامترها نیز بازه اطمینان بوت‌استرپ ارائه داد.

۴-۳- روش بوت‌استرپ ناپارامتری (بوت‌استرپ $-p$)

فرض کنید $x_1,x_2,\cdots,x_n$ داده‌های یک نمونه تصادفی کامل از جامعه‌ای با تابع چگالی $f(x;\theta)$ باشد. برای به‌دست آوردن بازه اطمینان بوت‌استرپ ناپارامتری (برای داده‌های کامل) با استفاده از روش بوت‌استرپ $-p$، ابتدا B بار از داده‌های موجود نمونه nتایی با جایگذاری گرفته می‌شود و در هر بار نمونه‌گیری برآورد پارامتر به‌دست می‌آید و با $\hat{\theta}_i^*$ نشان داده می‌شود که $i=1,\dots,B$. بعد از مرتب کردن این برآوردها، چندک‌های $\frac{\alpha}{2}$ و $1-\frac{\alpha}{2}$ به‌عنوان کران‌های برآورد بازه‌ای با ضریب اطمینان $1-\alpha$در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین بازه اطمینان به‌صورت $\left(\hat{\theta}^*(\frac{\alpha}{2}),\ \hat{\theta}^*(1-\frac{\alpha}{2})\right)$ و برآورد بوت‌استرپ θ برابر $\hat{\theta}^* = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}\hat{\theta}_i^*$ است؛ اما باید توجه داشت که در طرح سانسور فزاینده چون با مشاهده هر شکست تعدادی از واحدها از آزمون حذف می‌شوند نمی‌توان از روش بوت‌استرپ ناپارامتری برای برآورد بازه‌ای پارامترها استفاده کرد؛ یعنی نمی‌توان نمونه با جایگذاری گرفت؛ بنابراین روش بوت‌استرپ $-p$ را برای حالت پارامتری به‌کار می‌بریم؛ مانند حالت قبل فرض کنید داده‌های توأم $w_{l+1},\dots,w_N$ و $z_{l+1},\dots,z_N$ موجود باشد. در این روش در آغاز، برآورد ماکزیمم درستنمایی $\boldsymbol{\theta}$ را می‌یابیم و به‌طور مشابه Bبار به‌اندازه m از توزیع وایبول با پارامتر برداری $(\hat{\alpha}_1,\hat{\beta}_1)$ و به‌اندازه n از توزیع وایبول با پارامتر $(\hat{\alpha}_2,\hat{\beta}_2)$ تولید می‌شود. سپس هر بار برآورد پارامترها را به‌دست می‌آوریم و با $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i^*$ نشان می‌دهیم، $i=1,\dots,B$. در این صورت برآورد بوت‌استرپ β_1 چنین است:

$$\hat{\beta}_{۱}^{*}=\frac{۱}{B}\sum_{i=۱}^{B}\hat{\beta}_{i۱}^{*}.$$

هم‌چنین، برآورد بازه‌ای بوت‌استرپ $p-$ در سطح α برای این پارامتر به‌صورت زیر است:

$$\left(\hat{\beta}_{۱}^{*}(\frac{\alpha}{۲}),\hat{\beta}_{۱}^{*}(۱-\frac{\alpha}{۲})\right),$$

که در آن، $\hat{\beta}_{۱}^{*}(\frac{\alpha}{۲})$ و $\hat{\beta}_{۱}^{*}(۱-\frac{\alpha}{۲})$، به ترتیب چندک‌های $\frac{\alpha}{۲}$ و $۱-\frac{\alpha}{۲}$ مربوط به نمونه $\hat{\beta}_{۱۱}^{*},...,\hat{\beta}_{۱B}^{*}$ هستند. به‌طور مشابه می‌توان بازه اطمینان بوت‌استرپ $p-$ را برای سایر پارامترها به‌دست آورد.

توجه کنید که می‌توان به‌صورت کلی‌تر، تابع توزیع تجربی برآورد بوت‌استرپ پارامتر θ_j را بر اساس نمونه $\hat{\theta}_{۱j}^{*},...,\hat{\theta}_{Bj}^{*}$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{H}_j(t)=\hat{P}(\hat{\theta}_j^{*}\le t)=\frac{۱}{B}\sum_{i=۱}^{B}I(\hat{\theta}_{ij}^{*}\le t),\quad i=۱,...,B,\ j=۱,۲,۳,۴.$$

اینک فرض کنید

$$\hat{H}_j^{-۱}(u)=\inf\{t:\hat{H}_j(t)\ge u\},\quad ۰<u<۱.$$

در این صورت بازه اطمینان برای $\beta_۱$ در این روش به‌صورت زیر است:

$$\left(\hat{H}_j^{-۱}(\frac{\alpha}{۲}),\hat{H}_j^{-۱}(۱-\frac{\alpha}{۲})\right),\quad j=۱,۲,۳,۴.$$

برای جزئیات بیشتر در مورد روش بوت‌استرپ به افرون و تیبشیرانی [۸] مراجعه شود.

در این بخش، استنباط‌های ارائه‌شده در بخش‌های پیشین با شبیه‌سازی از دو جامعه وایبول ارزیابی می‌شود. فرض کنید دو جامعه مستقل دارای توزیع وایبول به ترتیب با پارامترهای $(۲,۵)$ و $(۳,۴)$ باشند. برای شبیه‌سازی برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها، ابتدا به‌اندازه m از توزیع وایبول با مقادیر $(۲,۵)$ و به‌اندازه n از توزیع وایبول با پارامترهای $(۳,۴)$ تولید می‌کنیم. سپس این داده‌ها را باهم ترکیب و مرتب می‌کنیم. با توجه به مقدار l، قبل از شروع طرح سانسور این تعداد را کنار می‌گذاریم؛ بنابراین بردار مشاهدات توأم $w_{l+۱},...,w_N$ تولید می‌شود که آزمون طول عمر تا مشاهده k امین از کارافتادگی، یعنی زمان مشاهده w_k ادامه می‌یابد. می‌دانیم که بردار $\mathbf{r}=(r_۱,...,r_k)$، تعداد واحدهایی است که با هر مشاهده، به‌طور

تصادفی از واحدهای باقی‌مانده در آزمایش انتخاب و از آزمون طول عمر حذف می‌شوند؛ بنابراین در روند شبیه‌سازی با هر مشاهده به تعداد r_i تا از بردار $\mathbf{w}$ حذف می‌کنیم.

جدول ۱: برآورد ماکزیمم درستنمایی پارامترها با فرض $\beta_1 = ۵$، $\beta_2 = ۴$، $\alpha_1 = ۲$ و $\alpha_2 = ۳$

$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_1$	(m,n)	$\mathbf{r}$	l	k	N
۲/۶۵۶	۱/۹۷۴	۶/۸۵۶	۵/۶۴۹	(۲۰,۱۰)	(۰,۲۰,...,۰)	۰	۱۰	۳۰
۲/۸۲۰	۱/۹۸۷	۵/۰۹۸	۶/۰۲۱	(۱۵,۱۵)				
۲/۷۱۴	۲/۰۱۸	۶/۴۷۰	۵/۰۹۰	(۱۰,۲۰)				
۳/۰۴۴	۲/۰۰۰	۴/۸۵۵	۴/۷۸۴	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۵,...,۰)	۵		
۳/۰۳۵	۱/۹۷۷	۴/۶۱۰	۴/۹۹۵	(۱۵,۱۵)				
۲/۹۵۶	۲/۰۱۲	۴/۲۴۹	۵/۲۲۳	(۱۰,۲۰)				
۳/۰۲۵	۲/۰۱۱	۵/۰۶۶	۵/۲۱۸	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۰,...,۰)	۱۰		
۳/۰۱۶	۲/۰۰۸	۴/۲۹۷	۵/۳۶۰	(۱۵,۱۵)				
۳/۰۳۰	۱/۹۹۸	۴/۲۴۸	۴/۸۱۰	(۱۰,۲۰)				
۲/۸۵۴	۲/۰۱۹	۶/۵۴۹	۵/۳۹۳	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳,	۰	۱۵	
۲/۹۱۰	۱/۹۹۷	۵/۳۵۳	۵/۶۸۱	(۱۵,۱۵)	۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)			
۳/۰۱۲	۱/۹۹۵	۳/۹۹۲	۵/۲۹۷	(۱۰,۲۰)				
۲/۸۹۶	۲/۰۱۴	۴/۷۶۵	۵/۴۳۲	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰,	۵		
۲/۹۶۱	۱/۹۹۸	۴/۴۸۹	۵/۴۹۸	(۱۵,۱۵)	۲,۲,۲,۰,۲,۰,۰)			
۲/۹۹۱	۱/۹۸۵	۳/۸۸۳	۵/۰۶۱	(۱۰,۲۰)				
۲/۹۹۴	۱/۹۹۷	۴/۴۸۶	۵/۴۷۳	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	۰	۲۰	۵۰
۲/۹۸۳	۲/۰۰۵	۴/۰۸۰	۵/۷۲۷	(۲۵,۲۵)				
۲/۹۵۹	۲/۰۱۲	۴/۵۶۵	۴/۸۸۹	(۲۰,۳۰)				
۲/۹۴۵	۱/۹۷۷	۴/۴۱۶	۵/۱۳۴	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۱۰,۱۰,۵,۰)	۵		
۳/۰۲۴	۲/۰۱۵	۴/۱۴۶	۵/۱۸۳	(۲۵,۲۵)				
۲/۹۴۷	۱/۹۸۲	۳/۸۶۵	۵/۲۶۱	(۲۰,۳۰)				

البته با توجه به تابع چگالی تعریف‌شده در (۱) تعداد حذفیات از نمونه xها و yها و هم‌چنین تعداد l' و l'' که قبل از شروع آزمایش حذف‌شده‌اند، مهم هستند. در جدول ۱ برآورد

ماکزیمم درستنمایی پارامترها بر اساس مقادیر متفاوتی از m، n، k و l تحت طرح‌های سانسور مختلف ارائه‌شده است. برای ارائه برآوردهای بهتر برای پارامترها روش شبیه‌سازی را ۱۰۰ بار تکرار می‌کنیم و میانگین برآوردهای به‌دست‌آمده در این تکرارها را به‌عنوان برآورد پارامترهای دو جامعه در نظر می‌گیریم.

جدول ۲: احتمال پوشش و طول بازه‌های اطمینان ٪۹۵ برای پارامتر β_1

					AN		BP		BT	
N	k	l	r	(m,n)	CP	طول	CP	طول	CP	طول
۳۰	۱۰	۰	(۰,۲۰,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۸۶	۹/۵۲۰	۰/۹۹	۲/۳۲۹	۰/۷۳	۷/۲۱۰
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۲	۸/۴۴۳	۰/۹۹	۳/۵۱۸	۰/۷۶	۱/۷۶۲
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۸	۱۰/۸۷۰	۰/۹۸	۲/۳۴۱	۰/۸۵	۳/۹۶۴
		۵	(۰,۱۵,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۵	۳/۹۷۱	۰/۸۱	۳/۵۰۷	۰/۸۹	۵/۹۲۳
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۴	۷/۰۵۴	۰/۸۳	۱/۳۸۶	۰/۹۹	۳/۲۹۸
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۳	۸/۱۷۱	۰/۷۸	۱/۳۵۹	۰/۸۱	۴/۵۵۵
		۱۰	(۰,۱۰,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۳	۴/۸۰۲	۰/۹۰	۲/۵۸۱	۰/۹۹	۲/۸۱۰
				(۱۵,۱۵)	۰/۸۸	۷/۲۷۳	۰/۹۱	۴/۲۰۱	۰/۹۹	۵/۵۷۴
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۲	۱۹/۵۳۰	۰/۸۲	۲/۳۱۹	۰/۷۹	۳/۲۲۴
	۱۵	۰	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳)	(۲۰,۱۰)	۰/۸۳	۵/۰۰۸	۰/۹۸	۱/۳۴۷	۰/۸۳	۳/۲۷۵
			(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)	(۱۵,۱۵)	۰/۹۱	۵/۷۷۶	۰/۹۹	۱/۶۰۶	۰/۸۲	۲/۰۸۹
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۶	۷/۴۵۷	۰/۹۴	۳/۵۶۵	۰/۷۵	۴/۸۳۰
		۵	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۰	۵/۶۵۷	۰/۹۹	۳/۵۰۱	۰/۹۰	۲/۳۳۴
			(۲,۲,۲,۰,۲,۰,۰)	(۱۵,۱۵)	۰/۹۲	۴/۸۳۴	۰/۷۶	۱/۲۳۰	۰/۷۶	۳/۵۰۰
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۶	۵/۷۷۶	۰/۹۹	۱/۲۸۵	۰/۹۸	۳/۲۷۶
۵۰	۲۰	۰	(۰,...,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	(۳۰,۲۰)	۰/۹۴	۴/۱۳۵	۰/۹۶	۰/۸۴۹	۰/۸۸	۱/۸۵۰
				(۲۵,۲۵)	۰/۹۴	۴/۸۰۸	۰/۸۷	۰/۹۵۴	۰/۷۵	۰/۴۶۳
				(۲۰,۳۰)	۰/۹۵	۶/۰۱۹	۰/۹۹	۰/۸۴۶	۰/۷۸	۱/۷۷۵
		۵	(۰,...,۱۰,۱۰,۵,۰)	(۳۰,۲۰)	۰/۹۳	۳/۹۷۴	۰/۹۹	۰/۹۵۲	۰/۹۸	۱/۱۸۱
				(۲۵,۲۵)	۰/۸۴	۴/۵۹۵	۰/۸۵	۰/۸۱۲	۰/۹۳	۱/۹۲۷
				(۲۰,۳۰)	۰/۹۳	۵/۵۶۴	۰/۹۰	۰/۵۹۶	۰/۷۲	۱/۸۷۰

برای شبیه‌سازی بازه اطمینان تقریب نرمال بر اساس مشاهدات تولیدشده $w_{l+1},\ldots,w_N$ و با استفاده از روش بیان‌شده در بخش ۴-۱ عمل می‌کنیم. بازه اطمینان بوت‌استرپ $- t$ و بوت‌استرپ $- p$ نیز بر پایه مشاهدات تولیدشده به‌صورتی که در بخش‌های ۴-۲ و ۴-۳ ارائه

کردیم، شبیه‌سازی می‌شوند. همان‌طور که می‌دانیم منظور از احتمال پوشش (CP) در بازه اطمینان‌ها این است که چه درصدی از برآوردهای بازه‌ای، مقدار پارامتر را شامل می‌شوند؛ بنابراین برای یافتن احتمال پوشش برای هر سه روش تقریب نرمال، بوت‌استرپ پارامتری و ناپارامتری، چند بار شبیه‌سازی تکرار می‌شود و نسبت تعداد بازه‌هایی که مقدار پارامتر را شامل می‌شود، به‌دست می‌آید. در جدول‌های ۲ تا ۵ طول بازه‌های اطمینان تقریب نرمال، بوت‌استرپ $-t$ و بوت‌استرپ $-p$ و احتمال پوشش آن‌ها ارائه‌شده‌اند که بازه اطمینان‌ها ۱۰۰ بار شبیه‌سازی‌شده‌اند.

جدول ۳: احتمال پوشش و طول بازه‌های اطمینان ٪۹۵ برای پارامتر $\beta_۲$

BT		*BP*		*AN*						
طول	CP	طول	CP	طول	CP	(m,n)	**r**	l	k	N
۳/۲۱۴	۰/۹۱	۱۵/۵۳۶	۰/۹۸	۱۰/۸۲۸	۰/۹۸	(۲۰,۱۰)	(۰,۲۰,...,۰)	۰	۱۰	۳۰
۸/۶۹۳	۰/۷۵	۶/۶۰۳	۰/۹۹	۳/۵۴۹	۰/۹۹	(۱۵,۱۵)				
۷/۱۰۴	۰/۷۱	۴/۰۰۱	۰/۹۸	۴/۴۰۲	۰/۹۰	(۱۰,۲۰)				
۶/۸۳۰	۰/۷۴	۳/۸۳۹	۰/۷۷	۲/۴۹۵	۰/۹۴	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۵,...,۰)	۵		
۷/۶۵۱	۰/۸۲	۳/۹۰۲	۰/۹۹	۸/۴۲۹	۰/۹۳	(۱۵,۱۵)				
۴/۸۱۳	۰/۹۹	۱/۷۰۲	۰/۷۲	۱۰/۲۲۹	۰/۸۵	(۱۰,۲۰)				
۳/۷۸۰	۰/۹۱	۲/۷۰۴	۰/۸۱	۲/۳۶۶	۰/۹۹	(۲۰,۱۰)	(۰,۱۰,...,۰)	۱۰		
۴/۶۰۳	۰/۷۹	۲/۳۸۹	۰/۷۸	۱۱/۰۱۶	۰/۸۸	(۱۵,۱۵)				
۴/۱۲۱	۰/۸۱	۱/۸۰۲	۰/۸۵	۶/۸۹۲	۰/۹۶	(۱۰,۲۰)				
۳/۴۱۲	۰/۸۶	۶/۲۴۹	۰/۹۷	۴/۰۷۶	۰/۸۶	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳)	۰	۱۵	
۱/۴۴۳	۰/۷۰	۵/۶۷۸	۰/۹۹	۱۴/۹۳۲	۰/۹۴	(۱۵,۱۵)	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)			
۱/۸۲۳	۰/۷۲	۱/۲۵۹	۰/۹۶	۵/۸۴۵	۰/۸۶	(۱۰,۲۰)				
۷/۷۴۰	۰/۶۱	۳/۱۱۵	۰/۹۸	۷/۲۶۲	۰/۸۹	(۲۰,۱۰)	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰)	۵		
۱/۸۲۶	۰/۴۱	۲/۹۰۹	۰/۸۱	۶/۲۰۸	۰/۹۵	(۱۵,۱۵)	(۲,۲,۲,۰,۲,۰,۰)			
۳/۵۸۱	۰/۷۲	۱/۵۱۱	۰/۹۶	۵/۵۶۲	۰/۹۳	(۱۰,۲۰)				
۶/۸۲۴	۰/۹۱	۲/۱۸۱	۰/۷۶	۵/۳۴۱	۰/۹۵	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	۰	۲۰	۵۰
۲/۵۸۰	۰/۷۹	۴/۹۰۶	۰/۷۳	۴/۳۲۷	۰/۸۸	(۲۵,۲۵)				
۱/۹۷۵	۰/۷۸	۲/۲۶۴	۰/۹۸	۶/۱۹۷	۰/۹۲	(۲۰,۳۰)				
۲/۶۲۲	۰/۸۱	۲/۰۶۶	۰/۹۹	۴/۵۸۸	۰/۹۶	(۳۰,۲۰)	(۰,...,۱۰,۱۰,۵,۰)	۵		
۲/۳۹۰	۰/۷۵	۲/۵۴۸	۰/۷۳	۳/۸۹۸	۰/۹۵	(۲۵,۲۵)				
۲/۱۸۳	۰/۸۴	۳/۷۴۰	۰/۷۵	۴/۸۸۵	۰/۸۶	(۲۰,۳۰)				

جدول ۴: احتمال پوشش و طول بازه‌های اطمینان ٪۹۵ برای پارامتر α_1

N	k	l	**r**	(m,n)	AN CP	AN طول	BP CP	BP طول	BT CP	BT طول
۳۰	۱۰	۰	(۰,۲۰,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۷	۰/۳۲۰	۰/۹۶	۰/۵۷۳	۰/۹۵	۰/۲۷۲
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۶	۰/۶۶۰	۰/۹۷	۰/۲۹۴	۰/۷۹	۰/۱۱۰
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۰	۰/۷۳۰	۰/۹۷	۰/۳۲۱	۰/۸۹	۰/۲۵۲
		۵	(۰,۱۵,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۸	۰/۲۸۸	۰/۹۳	۰/۱۶۹	۰/۸۰	۰/۱۵۶
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۹	۰/۴۹۸	۰/۹۴	۰/۲۸۹	۰/۹۰	۰/۰۹۰
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۹	۰/۶۰۳	۰/۸۳	۰/۲۱۱	۰/۷۶	۰/۱۷۷
		۱۰	(۰,۱۰,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۶	۰/۳۷۷	۰/۹۲	۰/۱۷۹	۰/۹۹	۰/۱۷۲
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۸	۰/۵۲۷	۰/۸۹	۰/۲۵۰	۰/۷۹	۰/۱۶۵
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۶	۰/۸۱۲	۰/۷۵	۰/۱۵۱	۰/۹۴	۰/۳۵۰
	۱۵	۰	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۳	۰/۴۸۶	۰/۹۸	۰/۱۸۵	۰/۹۸	۰/۱۵۹
			(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)	(۱۵,۱۵)	۰/۹۱	۰/۵۶۳	۰/۸۹	۰/۲۳۲	۰/۸۲	۰/۱۲۲
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۷	۰/۲۷۷	۰/۹۰	۰/۲۲۲	۰/۹۲	۰/۱۲۷
		۵	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۸۹	۰/۴۶۴	۰/۹۴	۰/۲۰۲	۰/۸۸	۰/۱۴۱
			(۲,۲,۲,۰,۲,۰,۰)	(۱۵,۱۵)	۰/۹۸	۰/۴۰۶	۰/۷۶	۰/۲۷۵	۰/۷۸	۰/۱۶۸
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۷	۰/۵۷۷	۰/۸۸	۰/۲۲۷	۰/۹۴	۰/۲۰۴
۵۰	۲۰	۰	(۰,...,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	(۳۰,۲۰)	۰/۹۰	۰/۴۳۸	۰/۹۸	۰/۱۶۲	۰/۸۴	۰/۱۶۶
				(۲۵,۲۵)	۰/۹۳	۰/۴۷۵	۰/۹۸	۰/۱۰۸	۰/۹۳	۰/۱۲۰
				(۲۰,۳۰)	۰/۸۶	۰/۵۲۲	۰/۹۹	۰/۱۲۴	۰/۹۱	۰/۱۶۴
		۵	(۰,...,۱۰,۱۰,۵,۰)	(۳۰,۲۰)	۰/۹۰	۰/۳۹۳	۰/۹۷	۰/۲۳۲	۰/۹۸	۰/۰۶۰
				(۲۵,۲۵)	۰/۹۳	۰/۴۲۴	۰/۹۹	۰/۱۳۲	۰/۶۹	۰/۱۲۲
				(۲۰,۳۰)	۰/۸۶	۰/۴۶۸	۰/۹۲	۰/۱۷۶	۰/۹۲	۰/۲۶۷

۵- مثال

به‌عنوان یک مثال کاربردی داده‌های موجود در اسمیت و نیلور [۹] را در نظر می‌گیریم. این داده‌ها میزان استحکام الیاف شیشه‌ای با دو طول متفاوت ۱/۵ سانتی‌متر و ۱۵ سانتی‌متر را نشان می‌دهد که در آزمایشگاه ملی فیزیک انگلستان جمع‌آوری شده‌اند. ما در نظر داریم این نمونه‌ها را تحت سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی قرار دهیم. برای این منظور داده‌های تکراری حذف‌شده است. نمونه اول (x) شامل ۳۹ مشاهده و نمونه دوم (y) شامل ۲۷ مشاهده است که به ترتیب در جدول‌های ۶ و ۷ آورده شده‌اند.

جدول ۵: احتمال پوشش و طول بازه‌های اطمینان ۹۵٪ برای پارامتر α_2

					AN		*BP*		*BT*	
N	k	l	$\mathbf{r}$	(m,n)	CP	طول	CP	طول	CP	طول
۳۰	۱۰	۰	(۰,۲۰,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۹	۵/۰۱۹	۰/۹۹	۵/۲۷۶	۰/۹۳	۰/۴۳۵
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۸	۱۹/۹۵۲	۰/۹۵	۹/۰۷۲	۰/۷۷	۱/۷۷۴
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۹	۱۶/۴۰۶	۰/۹۷	۳/۶۳۴	۰/۹۹	۰/۸۴۰
		۵	(۰,۱۵,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۷۸	۵/۰۶۰	۰/۹۲	۱/۹۲۵	۰/۹۸	۰/۷۰۰
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۶	۴/۶۴۵	۰/۷۹	۲/۵۰۵	۰/۸۹	۱/۵۸۳
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۸	۵/۵۰۴	۰/۸۳	۳/۵۲۵	۰/۹۴	۰/۵۳۷
		۱۰	(۰,۱۰,...,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۰	۱/۲۱۲	۰/۸۱	۲/۴۸۳	۰/۹۵	۱/۴۸۰
				(۱۵,۱۵)	۰/۹۸	۱/۳۷۹	۰/۹۲	۱/۵۵۶	۰/۸۹	۰/۴۶۷
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۵	۱/۳۷۹	۰/۸۸	۰/۵۹۷	۰/۷۸	۰/۵۳۱
	۱۵	۰	(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰,۳)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۶	۱/۰۴۲	۰/۹۹	۱/۴۳۳	۰/۸۸	۰/۴۱۸
			(۰,۲,۰,۲,۰,۲,۰)	(۱۵,۱۵)	۰/۹۸	۱/۰۶۳	۰/۹۶	۰/۷۸۰	۰/۹۰	۰/۲۵۴
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۰	۱/۰۸۲	۰/۹۹	۰/۸۳۳	۰/۷۸	۰/۲۶۲
		۵	(۰,۲,۰,۲,۰,۰,۰,۰)	(۲۰,۱۰)	۰/۹۷	۱/۸۴۷	۰/۸۸	۰/۵۴۹	۰/۷۲	۰/۴۹۰
			(۲,۲,۲,۰,۲,۰,۰)	(۱۵,۱۵)	۰/۹۸	۱/۰۷۰	۰/۷۱	۱/۶۱۱	۰/۹۰	۰/۳۳۷
				(۱۰,۲۰)	۰/۹۷	۰/۸۳۷	۰/۸۷	۰/۴۶۳	۰/۸۸	۰/۴۳۹
۵۰	۲۰	۰	(۰,...,۱۰,۱۰,۱۰,۰)	(۳۰,۲۰)	۰/۹۴	۰/۹۹۰	۰/۹۹	۰/۵۹۴	۰/۹۱	۰/۷۳۱
				(۲۵,۲۵)	۰/۹۵	۱/۲۰۵	۰/۹۸	۰/۸۰۶	۰/۹۸	۰/۱۳۸
				(۲۰,۳۰)	۰/۹۴	۰/۸۲۶	۰/۹۹	۱/۳۲۴	۰/۸۵	۰/۱۹۱
		۵	(۰,...,۱۰,۱۰,۵,۰)	(۳۰,۲۰)	۰/۹۳	۰/۹۲۵	۰/۹۷	۱/۰۹۵	۰/۹۳	۰/۳۶۶
				(۲۵,۲۵)	۰/۹۷	۰/۸۳۷	۰/۷۲	۰/۵۹۰	۰/۷۷	۰/۶۰۰
				(۲۰,۳۰)	۰/۹۷	۰/۷۷۹	۰/۷۶	۰/۹۹۶	۰/۸۶	۰/۲۶۲

آماره‌ی آزمون کولموگروف-اسمیرنف، وایبول بودن توزیع نمونه اول را با $\hat{\alpha}_1=$ ۱/۶۴۹۷ و $\hat{\beta}_1=$ ۵/۰۷۹۷ و وایبول بودن توزیع نمونه دوم را با $\hat{\alpha}_2=$ ۱/۱۳۰۷ و $\hat{\beta}_2=$ ۴/۶۴۵۲ می‌پذیرد که $\hat{\alpha}_1$، $\hat{\beta}_1$، $\hat{\alpha}_2$ و $\hat{\beta}_2$ برآورد پارامترها تحت نمونه کامل هستند. با ادغام کردن دو نمونه و به‌کارگیری طرح سانسور با $l=$ ۱۶ و $\mathbf{r}=(1,\cdots,1)$ به طول ۲۵، داده‌های جدول ۸ به‌دست‌آمده است. با استفاده از داده‌های جدول ۸ برآورد پارامترها و بازه‌های اطمینان ۰/۹۵ آن‌ها در جدول ۹ خلاصه‌شده است. همان‌گونه که در جدول ۹ مشاهده می‌شود برآورد پارامترها تحت سانسور معرفی‌شده بسیار نزدیک به برآورد پارامترها در حالت داده‌های کامل است.

جدول ۶: نمونه اول (x)

۰/۵۵	۰/۷۴	۰/۷۷	۰/۸۴	۰/۹۳	۱/۰۴
۱/۱۱	۱/۲۴	۱/۲۷	۱/۳۶	۱/۳۹	۱/۴۸
۱/۴۹	۱/۵۰	۱/۵۲	۱/۵۴	۱/۵۵	۱/۵۸
۱/۵۹	۱/۶۰	۱/۶۲	۱/۶۳	۱/۶۴	۱/۶۶
۱/۶۷	۱/۶۸	۱/۶۹	۱/۷۰	۱/۷۳	۱/۷۶
۱/۷۷	۱/۷۸	۱/۸۱	۱/۸۲	۱/۸۴	۱/۸۹
۲/۰۰	۲/۰۱	۲/۲۴			

جدول ۷: نمونه دوم (y)

۰/۳۷	۰/۴۰	۰/۷۰	۰/۷۵	۰/۸۰	۰/۸۳
۰/۸۶	۰/۹۲	۰/۹۴	۰/۹۵	۰/۹۸	۱/۰۳
۱/۰۶	۱/۰۸	۱/۰۹	۱/۱۰	۱/۱۴	۱/۱۵
۱/۱۷	۱/۲۰	۱/۲۱	۱/۲۲	۱/۳۵	۱/۳۷
۱/۳۸	۱/۴۰	۱/۴۳			

جدول ۸: نمونه سانسور شده توأم فزاینده نوع دوم کلی

w_i	z_i	w_i	z_i	w_i	z_i	w_i	z_i	w_i	z_i
۱/۵۹	۱	۱/۳۹	۱	۱/۲۲	۰	۱/۱۱	۱	۱/۰۳	۰
۱/۶۴	۱	۱/۴۰	۰	۱/۲۴	۱	۱/۱۴	۰	۱/۰۴	۱
۱/۶۶	۱	۱/۴۹	۱	۱/۲۷	۱	۱/۱۵	۰	۱/۰۶	۰
۱/۶۸	۱	۱/۵۴	۱	۱/۳۵	۰	۱/۱۷	۰	۱/۰۹	۰
۱/۷۷	۱	۱/۵۵	۱	۱/۳۷	۰	۱/۲۰	۰	۱/۱۰	۰

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی که تعمیمی از طرح سانسور توأم فزاینده نوع دوم است، معرفی شد. هم‌چنین برای پارامترهای دو جامعه وایبول تحت این طرح، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و هم‌چنین بازه اطمینان با استفاده از روش‌های تقریب نرمال و بوت‌استرپ ارائه شد. سرانجام، دقت برآوردگرها با استفاده از شبیه‌سازی مورد ارزیابی قرار گرفت. همان‌گونه که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، به‌ازای مقادیر ثابت m، n و l، با افزایش مقدار k (تعداد شکست‌های مشاهده‌شده) میانگین برآوردها به مقدار واقعی پارامتر

نزدیک‌تر می‌شود که خود یک نتیجه‌ی منطقی و قابل‌انتظار است. با توجه به جدول‌های مربوط به بازه‌های اطمینان، مشاهده می‌شود که ازنظر احتمال پوشش، بین بازه‌های اطمینان مربوط به سه روش، تفاوت محسوسی دیده نمی‌شود. می‌دانیم برای حجم نمونه‌های کم، روش بوت‌استرپ در برآورد بازه‌ای پارامترها نسبت به روش تقریب نرمال عملکرد بهتری دارد. در جدول‌های بالا ممکن است تعداد واحدهای اولیه زیاد باشد اما باید توجه داشت که این واحدها، تحت سانسور توأم فزاینده نوع دوم کلی قرار می‌گیرند. پس بر اساس مقدار l تعدادی از واحدهای اولیه و در هر مرحله تعدادی از واحدها از نمونه حذف می‌شوند. از طرف دیگر این نمونه، یک نمونه توأم است؛ بنابراین تعداد واحدهای باقی‌مانده از هر جامعه کم است. پس انتظار می‌رود روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری نسبت به روش تقریب نرمال داشته باشد. همان‌طور که نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند طول بازه‌های اطمینان در روش بوت‌استرپ نسبت به روش تقریب نرمال کم‌تر است؛ بنابراین مطابق انتظار، روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارد؛ که در مثال نیز به‌وضوح دیده می‌شود.

جدول ۹: برآوردها و بازه‌های اطمینان ٪۹۵ پارامترها بر اساس داده‌های جدول ۸

	α_1	β_1	α_2	β_2
برآورد	۱/۶۹۰۴	۴/۴۵۴۰	۱/۱۳۹۷	۵/۰۲۳۴
AN	(۱/۵۰۸۸,۱/۸۷۲۰)	(۲/۴۵۷۶,۶/۴۵۰۴)	(۱/۰۳۸۷,۱/۲۴۰۷)	(۲/۵۲۱۷,۷/۵۲۵۱)
BT	(۱/۵۸۳۱,۱/۷۸۴۷)	(۴/۳۳۵۴,۵/۹۲۹۵)	(۱/۰۵۸۶,۱/۲۱۰۹)	(۴/۹۷۴۰,۶/۱۷۲۸)
BP	(۱/۵۷۷۰,۱/۷۹۳۰)	(۴/۲۵۳۶,۵/۷۲۸۷)	(۱/۰۷۸۸,۱/۱۹۸۴)	(۴/۲۲۶۲,۶/۰۱۱۱)

همچنین نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که وقتی مقدار k کم است، اختلاف میانگین طول بازه‌ها در روش بوت‌استرپ و روش تقریب نرمال زیاد است؛ اما هرچه مقدار k افزایش می‌یابد، اختلاف میانگین طول بازه‌ها در روش بوت‌استرپ و روش تقریب نرمال کاهش می‌یابد که این نیز نتیجه‌ای قابل‌انتظار به شمار می‌رود چون اگر مقدار k بسیار زیاد شود عملکرد روش تقریب نرمال نسبت به عملکرد روش بوت‌استرپ بهبود پیدا می‌کند.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله بر خویش بایسته می‌دانند از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده‌شان در بهبودی مقاله سپاسگزاری نمایند.

مراجع

[1] Balakrishnan, N. and Rasouli, A. (2008). Exact likelihood inference for two exponential population under joint Type-II censoring, *Computational Statistics and Data Analysis,* **52**, 2738-2752.

[2] Rasouli, A. and Balakrishnan, N. (2010). Exact likelihood inference for two exponential populations under joint progressive Type-II censoring, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **39**, 2172-2191.

[3] Viveros, R. and Balakrishnan, N. (1994). Interval estimation of parameters of life from progressively censored data., *Technometrics,* **36**, 84-91.

[4] Serfling, R. J. (1980). *Approximation Theorems of Mathematical Statistics,* New York: Wiley.

[5] Parsi, S., Ganjali, M. and Sanjari, N. (2011). Conditional maximum likelihood and interval estimation for two Weibull populations under joint Type-II censoring, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **40**, 2117-2135.

[6] Wang, B. X. (2012). Exact inference estimation for the scale family under general progressive Type-II censoring, *Communication in Statistics-Theory and Methods,* **41**, 4444-4452.

[7] Ferguson, T.S. (1996). *A Course in Large Sample Theory,* **41**, New York: Chapman and Hall/CRC Press.

[8] Efron, B. and Tibshirani, R.J. (1994). *An Introduction to the Bootstrap,* New York: Chapman and Hall/CRC Press.

[9] Smith, R. L. and Naylor, J. C. (1987). A Comparison of Maximum Likelihood and Bayesian Estimators for the Three- Parameter Weibull Distribution, *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics),* **36**, 358-369.

General Joint Progressive Type-II Censoring Scheme and Inference for Parameters of Two Weibull Populations Under This Scheme

Hamzeh Torabi, Saeedeh Bafekri Fadafen and Hossein Nadeb

Department of Statistics, Yazd University, Yazd, Iran.

Abstract

Censored samples are discussed in experiments of life-testing; i.e. whenever the experimenter does not observe the failure times of all units placed on a life test. In recent years, inference based on censored sampling is considered, so that about the parameters of various distributions such as, normal, exponential, gamma, Rayleigh, Weibull, log normal, inverse Gaussian, logistic, Laplace, and Pareto, has been inferred based on censored sampling. In this paper, a generalization of the progressive joint Type-II censoring scheme is introduced. Application of this scheme is in the casees that the lifetimes of some first units of two samples are not available and also some units are removed during the test because of avoiding the long time of the test. After introducing the scheme, maximum likelihood estimators and confidence intervals based on asymptotic normality and bootstrap methods are obtained under the scheme for parameters of two Weibull populations. Finally, these estimations are evaluated via simulation and also all confidence intervals are compared based on coverage probabilities.

Keywords**:** Asymptotic normality, Bootstrap confidence interval, Coverage probabilities, General joint progressive Type-II censoring, Weibull distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N01, 62N02.