تعیین وزن‌های عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده با استفاده از مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم

علیرضا چاجی[۱]* و غلامحسین یاری**

*دانشگاه صنعتی شهدای هویزه

**گروه ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۹/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۷/۳۰

چکیده: یکی از موضوعات مهم در نظریه عملگرهای میانگین وزنی مرتب‌شده تعیین وزن‌های متناظر با هر ورودی به سیستم است. در روش پیشنهادی این مقاله، فرض شده است برحسب اطلاعات موجود، تصمیم‌گیرنده می‌داند وزن‌ها به‌طور صعودی یا نزولی مرتب‌شده‌اند. با توجه به این اطلاعات پیشین و مفهوم آنتروپی یکنوای نوع دوم، مدلی جدید برای تعیین وزن‌های OWA ارائه‌شده است. بعضی از ویژگی‌های مدل پیشنهادی مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته بعلاوه به طریق ضرایب لاگرانژ روشی مستقیم برای تعیین وزن‌ها به‌دست‌آمده است. مدل معرفی‌شده حل و وزن‌های به‌دست‌آمده با وزن‌های حاصل از بعضی مدل‌های دیگر و همچنین با مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع اول مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که مدل جدید، ازآن‌جهت که اطلاعات پیشین تصمیم‌گیرنده در تعیین وزن‌های اعمال‌شده، کاراتر است و وزن‌های به‌دست‌آمده از این مدل با وزن‌های تولیدشده از مدل‌های مشابه دیگر و همچنین با وزن‌های حاصل از مدل ماکزیمم آنتروپی نوع اول تفاوت معنی‌داری دارد. در پایان طی یک مطالعه کاربردی اهمیت و کارایی مدل معرفی‌شده در تصمیم‌گیری نشان داده‌شده است.

واژه‌های کلیدی: وزن‌های OWA، آنتروپی یکنوای نوع دوم، ماکزیمم آنتروپی، اطلاعات پیشین.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۴A۱۷، ۴۷B۳۷.

۱- مقدمه

عملگرهای میانگین وزنی مرتب‌شده (OWA) اولین بار توسط یاگر [۱] در سال ۱۹۸۸ معرفی شدند. این عملگرها در زمینه‌های مختلف علوم ازجمله: روش‌های تصمیم‌گیری چند معیاره [۲-۴]، داده‌کاوی [۵]، شبکه‌های عصبی [۶]، سیستم‌های هوشمند [۷ و ۸] کاربرد دارند.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: chaji85ms@yahoo.com

ازنقطه‌نظر دیگر می‌توان گفت این وزن‌ها رابطه‌ای نزدیک با مفاهیم کیفیت سازی در نظریه فازی دارند [۹] که در این خصوص می‌توان به مقاله‌های [۱۰-۱۳] اشاره کرد. یاگر [۱] دو نوع اندازه برای وزن-ها معرفی نمود که یکی اندازه "Orness" به‌منظور تعیین میزان خوش‌بینی تصمیم‌گیرنده در تعیین وزن‌ها و دیگری معیاری برای پراکندگی وزن‌ها توسط اندازه آنتروپی شانون می‌باشند. مدل‌های متعددی جهت تعیین وزن‌های OWA توسط محققین پیشنهادشده است [۹] که در ادامه با توجه به ارتباط آن‌ها به این مقاله، بعضی از این مدل‌ها اشاره می‌شود. اوهاگان [۱۴] با استفاده از اندازه شانون و اصل ماکزیمم آنتروپی، مدل ماکزیمم آنتروپی را برای تعیین وزن‌ها به‌شرط مقدار مشخصی از "Orness" پیشنهاد نمود، به وزن‌های حاصل از این مدل، وزن‌های MEOWA گفته می‌شود. مجلندر [۱۵] روش پیشنهادی توسط اوهاگان را با استفاده از معیار آنتروپی رنی انجام داد که این روش مدل ماکزیمم آنتروپی شانون را شامل می‌شود. جیان و همکاران [۱۶] بر اساس آنتروپی یاگر مدل ماکزیمم آنتروپی یاگر را برای تعیین وزن‌های OWA معرفی نمودند.

اندازه‌های آنتروپی یکنوا نخستین بار توسط کاپور و شرما [۱۷ و ۱۸] معرفی شدند، آن‌ها دو نوع اندازه تحت عنوان اندازه‌های آنتروپی یکنوای نوع اول و دوم برای هر یک از حالت‌های صعودی و نزولی پیشنهاد دادند. یاری و چاجی [۱۹] بر اساس اندازه آنتروپی یکنوای نوع اول و اصل ماکزیمم آنتروپی، مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوا را برای تعیین وزن‌های OWA معرفی کردند.

در این مقاله اندازه‌های با استفاده از آنتروپی یکنوای نوع دوم مدل‌های جدیدی برای تعیین وزن‌ها به‌شرط یک درجه خوش‌بینی مشخص ارائه‌شده‌اند. وزن‌های به‌دست‌آمده از این مدل با وزن‌های حاصل از مدل‌های مرتبط دیگر مورد مقایسه قرارگرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند که اطلاع تصمیم‌گیرنده در مورد صعودی یا نزولی بودن وزن‌ها، در تعیین آن‌ها مؤثر بوده و موجب تمایز با وزن‌های حاصل از مدل‌های مشابه بر مبنای اندازه‌های دیگر آنتروپی می‌شود. همچنین بعضی از ویژگی‌های مدل جدید در قالب قضایایی مورد تحلیل قرارگرفته‌اند. علاوه برآن جهت نشان دادن تمایز بین دو نوع مدل آنتروپی یکنوا، مقایسه‌ای بین آن‌ها صورت گرفته تا وجود تفاوت در نتایج حاصل از مدل‌ها در حالت صعودی یا نزولی موردبررسی قرار گیرد.

۲- معرفی عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده (OWA) و مروری بر مدل‌های موجود بر پایه آنتروپی

عملگر n بعدی OWA در حقیقت یک نگاشت از فضای R^n به R است که برای تجمیع ورودی‌های یک سیستم اعمال می‌شود و دارای یک بردار وزن به‌صورت

$W=[w_۱, w_۲,\ldots, w_n]$ می‌باشد، به‌طوری‌که هر عضو این بردار در بازه $[۰,۱]$ قرار دارد و $\sum_{i=۱}^{n} w_i = ۱$ و همچنین:

$$F_w(x_۱, x_۲,\ldots, x_n)=\sum_{j=۱}^{n} w_i y_i \qquad (۱)$$

که در رابطه (۱)، y_i، i-امین عضو بزرگ بردار ورودی $X=[x_۱, x_۲,\ldots, x_n]$ است. برای بردار $W=[w_۱, w_۲,\ldots, w_n]$ درجه خوش‌بینی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{orness}(W)=\alpha=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(n-i)w_i, \qquad ۰\le\alpha\le ۱.$$

هر چه مقدار orness بیشتر باشد، ورودی‌های بزرگ‌تر وزن بیشتری خواهند داشت بنابراین میزان ریسک‌پذیری تصمیم‌گیر بیشتر خواهد بود. معروف‌ترین بردارهای وزن W، عملگرهای ماکزیمم، مینیمم و میانگین هستند که به ترتیب با W^*، W_* و W_A نمایش داده و داریم:

۱- اگر $orness(W^*)=۱$ آنگاه $F_{w^*}(X)=\max_{۱\le i\le n}\{x_i\}$ بنابراین $W^*=(۱,۰,\ldots,۰)$

۲- اگر $orness(W_*)=۰$ آنگاه $F_{W_*}(X)=\min_{۱\le i\le n}\{x_i\}$ بنابراین $W_*=(۰,۰,\ldots,۱)$

۳-اگر $orness(W_A)=\frac{۱}{۲}$ آنگاه $F_{W_A}(X)=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}x_i$ بنابراین $W_A=\left(\frac{۱}{n},\frac{۱}{n},\ldots,\frac{۱}{n}\right)$ (میانگین ورودی‌ها).

مدل‌های متعددی جهت تعیین وزن‌های بردار $W=[w_۱, w_۲,\ldots, w_n]$ توسط محققین بر مبنای اندازه پراکندگی‌های مختلف بردار وزن W و یا مفروضات دیگر مسئله معرفی‌شده‌اند که بعضی از مدل‌های مرتبط با این مقاله در ادامه اشاره می‌گردند.

اوهاگان [۱۴] در سال ۱۹۸۸، روش زیر را برای به دست آوردن این وزن‌ها پیشنهاد کرد، در این روش از اصل ماکزیمم آنتروپی بهره گرفته‌شده است:

$$\text{Max disp}(W)=-\sum_{i=۱}^{n} w_i \ln w_i$$

$$\text{s.t.orness}(W)=\alpha=\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(n-i)w_i, \quad ۰\le\alpha\le ۱ \qquad (۲)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \qquad w_i \in [0,1], \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

جیان و همکاران مدلی خطی زیر را برای تعیین وزن‌های عملگر OWA بر پایه ماکزیمم کردن آنتروپی یاگر [۲۰] ارائه کردند:

$$\begin{aligned} &\text{Max } H_z(W) = Q_z(I) - Q_z(W) \\ &\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = c, \\ &\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i \in [0,1], \quad i = 1,2,\ldots,n, \end{aligned} \tag{۳}$$

به‌شرط آنکه $x_i > x_j$ باشد وقتی $i > j$ و داشته باشیم $x_i > c > x_j$ برای $(i, j = 1,2,\ldots,n)$. در مدل فوق $Q_z(P)$ همان آنتروپی یاگر است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_z(P) = D\left(P, \left[\frac{1}{n}\right]\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left|p_i - \frac{1}{n}\right|^z\right)^{1/z}, \quad z \geq 1, \ i = 1,2,\ldots,n$$

یاری و چاجی [۱۹] با تعریف اندازه‌های پراکندگی زیر برای بردار وزن W مدل‌هایی که از این به بعد به آن‌ها مدل‌های آنتروپی یکنوای نوع اول می‌گوییم جهت تعیین وزن‌ها وقتی به ترتیب صعودی و نزولی باشند معرفی نمودند:

$$ME_a(W) = -w_1 \ln(w_1) - (w_2 - w_1) ln(w_2 - w_1) - \ldots - (w_n - w_{n-1}) ln(w_n - w_{n-1})$$

و

$$ME_b(W) = -(w_1 - w_2) ln(w_1 - w_2) - \ldots - (w_{n-1} - w_n) ln(w_{n-1} - w_n) - w_n ln w_n .$$

در بخش بعد مدل‌های جدیدی بر مبنای تعریف اندازه‌های دیگری از پراکندگی وزن‌ها در حالت یکنوا، ارائه می‌کنیم.

۳- مدل‌های ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم برای تعیین وزن‌های عملگر OWA

در این بخش مدل‌هایی جدید برای به دست آوردن وزن‌های عملگر OWA ارائه می‌کنیم که مبنای این مدل‌ها را اطلاعات پیشین تصمیم‌گیرنده در مورد صعودی یا نزولی بودن وزن‌ها و

همچنین اندازه‌های آنتروپی یکنوای نوع دوم که اولین بار توسط کاپور و شرما معرفی شدند، تشکیل می‌دهند.

۳-۱- مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم برای تعیین وزن‌های OWA وقتی وزن‌ها صعودی‌اند

در بعضی از مسائل تصمیم‌گیری، بر اساس اطلاعات جانبی در مورد مسئله و ورودی‌ها، تصمیم‌گیرنده به این نتیجه می‌رسد که وزن‌های OWA باید به‌صورت صعودی باشند، یعنی:

$$0 \le w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_n \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \tag{۴}$$

با توجه به رابطه (۴) و اندازه‌های آنتروپی یکنوای[1] نوع دوم [۱۷ و ۱۸]، تعریف زیر را برای میزان پراکندگی وزن‌های OWA معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱. اگر وزن‌های OWA به‌طور صعودی مرتب‌شده باشند، اندازه پراکندگی وزن‌ها بر مبنای اندازه آنتروپی یکنوا نوع دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} ME_c(W) = {} & -w_1 \ln(w_1) - (w_2 - w_1) ln(w_2 - w_1) - \ldots - (w_n - w_{n-1}) ln(w_n - w_{n-1}) \\ & - (1 - w_n) ln(1 - w_n). \end{aligned} \tag{۵}$$

در رابطه (۵) قرارداد می‌کنیم که $0 ln 0 = 0$.

نتیجه ۱: اندازه آنتروپی یکنوای نوع دوم دارای خاصیت تقارن نیست؛ یعنی به‌طورکلی (مگر حالات خاصی) اگر $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ جایگشت دلخواهی از $(1, 2, \ldots, n)$ باشد، آنگاه:

$$ME_c(w_{\sigma_1}, w_{\sigma_2}, \ldots, w_{\sigma_n}) \ne ME_c(w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

با استفاده از تعریف ۱ و اصل ماکزیمم آنتروپی، مدل زیر را برای به دست آوردن وزن‌های OWA وقتی فرض شود که به‌طور صعودی‌اند، ارائه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad ME_c(W) = {} & -w_1 \ln(w_1) - (w_2 - w_1) ln(w_2 - w_1) - \ldots \\ & - (w_n - w_{n-1}) ln(w_n - w_{n-1}) - (1 - w_n) ln(1 - w_n). \end{aligned} \tag{۶}$$

$$\text{s.t.orness}(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i = \alpha, \qquad 0 \le \alpha \le 0.5 \tag{۱-۶}$$

---

1 - M-Entropy

$$0 \le w_1 \le w_2 \le \ldots \le w_n \le 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right), \qquad w_i \in [0,1], \quad i = (1,2,\ldots,n). \tag{۶-۲}$$

همان‌طور که در مدل (۶) مشاهده می‌شود، میزان درجه خوش‌بینی در نامساوی $0 \le \alpha \le 0/5$ محدودشده است. دلیل این محدودیت آن است که یاگر [۲۱] طی قضیه‌ای نشان داد چنانچه وزن‌ها به‌طور صعودی باشند، مقدار درجه خوش‌بینی کمتر یا مساوی با $0/5$ است.

نتیجه ۲: مینیمم مقدار برای مدل (۶) وقتی رخ می‌دهد که $\alpha = 0$ باشد که در این حالت همه وزن‌ها برابر صفر و وزن n-ام برابر یک باشد.

اثبات: با توجه به رابطه (۶) و قیود (۶-۱) و (۶-۲) نتیجه به‌راحتی حاصل می‌شود.

در ادامه بعضی ویژگی‌های دیگر مدل پیشنهادی را مورد تجزیه‌وتحلیل قرار می‌دهیم.

قضیه ۱: اگر $W^* = \left(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*\right)$ جواب مدل (۶) به‌شرط قیدهای (۶-۱) و (۶-۲) باشد، آنگاه این جواب به‌دست‌آمده یکتا خواهد بود.

اثبات: برای اثبات قضیه ثابت می‌کنیم تابع $ME_c(W)$ یک تابع یکنوا برحسب $w_1, w_2, \ldots, w_n$ است. تابع $h(w_i)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(w_i) = -(w_i - w_{i-1})\,ln(w_i - w_{i-1}) - (w_{i+1} - w_i)\,ln(w_{i+1} - w_i)$$

برای $i = 1,2,\ldots,n$ که در آن $w_0 = 0$ و $w_{n+1} = 1$. از این تابع نسبت به w_i مشتق می‌گیریم. لذا داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial w_i} &= -\left[\ln(w_i - w_{i-1}) + 1\right] - \left[-ln(w_{i+1} - w_i) - 1\right] \\ &= -\left[\ln(w_i - w_{i-1})\right] + \left[ln(w_{i+1} - w_i)\right]\end{aligned}$$

با گرفتن مشتق دوم داریم:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial w_i^2} = \frac{-1}{w_i - w_{i-1}} + \frac{-1}{w_{i+1} - w_i} < 0.$$

با توجه به منفی شدن مشتق دوم نتیجه می‌گیریم که تابع $h(w_i)$ یک تابع محدب نسبت به w_i است. از طرفی می‌دانیم که مجموع توابع محدب نیز خود یک تابع محدب است و چون

$ME_c(W)$ مجموع توابعی همانند $h(w_i)$ است، بنابراین $ME_c(W)$ یک تابع محدب نسبت به $w_1, w_2, \ldots, w_n$ می‌باشد. لذا ماکزیمم موضعی به‌شرط قیود خطی برای این تابع در حقیقت ماکزیمم کلی برای تابع است. ■

در ادامه از روش لاگرانژ جهت ماکزیمم کردن $ME_c(W)$ به‌شرط قیود (۶-۱) و (۶-۲) استفاده کنیم، لذا داریم:

$$\begin{aligned} L = & -w_1 \ln(w_1) - (w_2 - w_1) ln(w_2 - w_1) - \ldots \\ & -(w_n - w_{n-1}) ln(w_n - w_{n-1}) - (1 - w_n) ln(1 - w_n) \\ & + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha \right) + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^{n} w_i - 1 \right). \end{aligned} \qquad (۷)$$

از رابطه (۷) نسبت به w_i و ضرایب لاگرانژ λ_1 و λ_2 مشتق جزئی گرفته و برابر صفر قرار می-دهیم:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = -\left[\ln(w_i - w_{i-1}) \right] + \left[ln(w_{i+1} - w_i) \right] + \lambda_1 \frac{n-i}{n-1} + \lambda_2 = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0.$$

بنابراین روابط زیر برای وزن‌ها به دست می‌آیند:

$$ln \frac{w_{i+1} - w_i}{w_i - w_{i-1}} = -\lambda_1 \left(\frac{n-i}{n-1} \right) - \lambda_2, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (۸)$$

$$ln \left(\frac{1 - w_n}{w_n - w_{n-1}} \right) = \lambda_2 - 1 \qquad i = n. \qquad (۱-۸)$$

پس برای $i = 1, 2, \ldots, n$ داریم:

$$ln(w_{i+1} - w_i) = \sum_{j=1}^{i} -\lambda_1 \left(\frac{n-j}{n-1} \right) - (i) \lambda_2 + \ln w_1. \qquad (۲-۸)$$

درنتیجه برای $i = 1, 2, \ldots, n$ روابط زیر به دست می‌آیند:

$$w_{i+1}-w_i=exp\left(\sum_{j=1}^{i}-\lambda_1\left(\frac{n-j}{n-1}\right)-(i)\lambda_2+\ln w_1\right). \qquad (۳-۸)$$

$$1-w_1=\sum_{i=1}^{n}exp\left(\sum_{j=1}^{i}-\lambda_1\left(\frac{n-j}{n-1}\right)-(i)\lambda_2+\ln w_1\right). \qquad (۴-۸)$$

روابط اخیر در حقیقت یک روش مستقیم بدون حل مدل (۶) برای تعیین وزن‌ها وقتی n (تعداد ورودی‌ها) کم باشد ارائه می‌کنند اما برای nهای بالا حل عددی مدل توصیه می‌شود. در بخش بعد برای وزن‌هایی که به‌طور نزولی قرار دارند، مدلی بر اساس آنتروپی یکنوای نوع دوم ارائه‌شده است.

۳-۲- مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم برای تعیین وزن‌های OWA وقتی به‌طور نزولی مرتب‌شده‌اند

در این قسمت حالتی را در نظر می‌گیریم که بر اساس اطلاعات موجود، فرض می‌شود وزن‌ها به‌صورت نزولی هستند:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i=1 \ , 0\le w_n\le w_{n-1}\le\ldots\le w_1\le 1 \qquad (۹)$$

مشابه حالت صعودی، با توجه به‌اندازه آنتروپی یکنوای نوع دوم برای این حالت نیز تعریف زیر را داریم.

تعریف ۲: اگر وزن‌های OWA به شکل نزولی باشند، بر مبنای آنتروپی یکنوای نوع دوم، اندازه پراکندگی وزن‌ها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}ME_d(W)=&-(1-w_1)\ln(1-w_1)-(w_1-w_2)ln(w_1-w_2)-\ldots\\&-(w_{n-1}-w_n)\ln(w_{n-1}-w_n)-w_n\ln w_n\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

در رابطه (۱۰) فرض می‌کنیم که $0ln0=0$ است. این اندازه از پراکندگی نیز دارای خاصیت تقارن نیست.

با توجه به تعریف ۲ و استفاده از اصل ماکزیمم آنتروپی مدل زیر را پیشنهاد می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\text{Max }\ ME_d(W)=&-(1-w_1)\ln(1-w_1)-(w_1-w_2)ln(w_1-w_2)-\ldots\\&-(w_{n-1}-w_n)ln(w_{n-1}-w_n)-(w_n)ln(w_n)\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

$$\text{s.t.orness}(w)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{n-1}w_i=\alpha,\quad 0.5\le\alpha\le 1,\qquad (1-11)$$
$$0\le w_n\le w_{n-1}\le\ldots\le w_1\le 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i=1,\quad w_i\in[0,1],\ i=(1,2,\ldots,n).\qquad (2-11)$$

در قضیه زیر ثابت شده است که این مدل نیز دارای جواب یکتاست.

قضیه ۲: جواب به‌دست‌آمده از مدل (۱۱) به ازای یک مقدار مشخصی، جواب یکتا برای این مدل است.

اثبات: مطابق اثبات قضیه ۱، تابع $h(w_i)$ را برای $i=1,2,\ldots,n$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(w_i)=-(w_{i-1}-w_i)ln(w_{i-1}-w_i)-(w_i-w_{i+1})ln(w_i-w_{i+1})$$

با این فرض که $w_0=1$ و $w_{n+1}=0$ باشند. بقیه اثبات مشابه قضیه ۱ است.■

در قضیه مهم زیر به ارتباط بین وزن‌های به‌دست‌آمده از مدل‌های (۶) و (۱۱) می‌پردازیم.

قضیه ۳: اگر $W^*=(w_1^*,w_2^*,\ldots,w_n^*)$ جواب مدل (۶) با درجه خوش‌بینی $orness(W^*)=\alpha$ ($0\le\alpha\le 0/5$) باشد، آنگاه $\hat{W}^*=(w_n^*,w_{n-1}^*,\ldots,w_1^*)$ جواب مدل (۱۱) با درجه خوش‌بینی $orness(\hat{W}^*)=1-\alpha$ ($0/5\le 1-\alpha\le 1$) است و بالعکس.

اثبات: فرض کنید که $W^*=(w_1^*,w_2^*,\ldots,w_n^*)$ جواب مدل آنتروپی یکنوا (۶) با درجه خوش‌بینی $orness(W^*)=\alpha$ باشد که α در رابطه $0\le\alpha\le 0/5$ صدق می‌کند، بنابراین داریم:

$$\text{Max}\quad ME_d(W^*)=-w_1^*\ln(w_1^*)-(w_2^*-w_1^*)ln(w_2^*-w_1^*)-\ldots$$
$$-(w_n^*-w_{n-1}^*)ln(w_n^*-w_{n-1}^*)-(1-w_n^*)ln(1-w_n^*)$$

$$\text{s.t.}\ \ \text{orness}(W^*)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{n-1}w_i^*=\alpha,\quad 0\le\alpha\le 0.5,$$

$$0\le w_1^*\le w_2^*\le\ldots\le w_n^*\le 1,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}w_i^*=1\right),\quad w_i^*\in[0,1],\ i=(1,2,\ldots,n)$$

چون $1-\alpha = \sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n-1}w^*_{n-j+1} = \text{orness}\left(\hat{W}^*\right)$ و $(0/5 \le 1-\alpha \le 1)$ لذا اگر $\hat{W}_j = w^*_{n-j+1}$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود که $\hat{W}^* = \left(\hat{W}_1,\hat{W}_2,\ldots,\hat{W}_n\right)$ یک جواب بهینه برای مدل (۱۱) است؛ اما با توجه به قضیه ۲ جواب مدل (۱۱) یکتاست، بنابراین:

$$\begin{aligned}\text{Max}\quad ME_d\left(\hat{W}^*\right) = &-\left(1-\hat{W}_1\right)\ln\left(1-\hat{W}_1\right)-\left(\hat{W}_1-\hat{W}_2\right)ln\left(\hat{W}_1-\hat{W}_2\right)-\ldots\\ &-\left(\hat{w}_{n-1}-\hat{w}_n\right)ln\left(\hat{w}_{n-1}-\hat{w}_n\right)-\left(\hat{w}_n\right)ln\left(\hat{w}_n\right)\\ \text{s.t.}\quad &\text{orness}(w)=\sum_{i=1}^{n}\frac{n-i}{n-1}\hat{w}_i=\alpha,\qquad 0.5\le\alpha\le 1,\\ &0\le\hat{w}_n\le\hat{w}_{n-1}\le\ldots\le\hat{w}_1\le 1,\\ &\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i=1,\qquad \hat{w}_i\in[0,1],\qquad i=(1,2,\ldots,n).\end{aligned}$$

و اثبات قضیه کامل می‌شود.■

قضیه فوق از این لحاظ اهمیت دارد که وقتی یکی از مدل‌های (۶) یا (۱۱) را به ازای درجه خوش‌بینی α حل کنیم، نیازی به حل مدل دیگر به ازای درجه خوش‌بینی $1-\alpha$ نیست. فقط کافی است بردار وزن را عکس کنیم تا جواب مدل دیگر به دست آید.

نتیجه ۳: برای حالت $W=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)$ مقدار آنتروپی یکنوای نوع دوم در هر دو حالت صعودی و نزولی برابر است با:

$$ME_c\left(W\right)=ME_d\left(W\right)=\frac{1}{n}\ln n \tag{12}$$

که با مشتق گرفتن از رابطه بالا داریم:

$$\frac{\partial ME_c\left(W\right)}{\partial n}=\frac{\partial ME_d\left(W\right)}{\partial n}=\frac{1}{n^2}\left(1-\ln n\right) \tag{13}$$

با توجه به اینکه رابطه (۱۳) با افزایش n ($n>2$) کاهش می‌یابد بنابراین اندازه‌های آنتروپی یکنوا در این حالت نسبت n نزولی‌اند. این نتیجه در حقیقت به یکی از تفاوت‌های آنتروپی یکنوا و آنتروپی شانون اشاره دارد؛ زیرا آنتروپی شانون در حالت تساوی وزن‌ها نسبت به n افزایشی است ولی با توجه به رابطه (۱۳) آنتروپی‌های یکنوا نزولی هستند.

۴- مثال‌های عددی

در این بخش به‌منظور نشان دادن کارایی مدل‌های ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم در تعیین وزن‌های OWA مثالهایی آورده شده است. یکنوایی وزن‌ها و میزان درجه خوش‌بینی توسط تصمیم‌گیرنده مشخص شده‌اند.

مثال ۱: فرض کنید $n=۵$ و بر اساس اطلاعات موجود می‌دانیم وزن‌ها به‌طور نزولی‌اند. وزن-های OWA حاصل از مدل (۱۱) به‌ازای مقادیر مشخص خوش‌بینی در جدول (۱) آورده شده-اند.

جدول ۱: وزن‌های به‌دست‌آمده از مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوا نوع دوم وقتی وزن‌ها به‌طور نزولی باشند (وزن‌های با اندیس M)، مدل ماکزیمم آنتروپی شانون (وزن‌های با اندیس E) و مدل ماکزیمم آنتروپی یاگر (وزن‌های با اندیس Y)

W		$Orness(W)=\alpha$					
		۱	۰/۹	۰/۸	۰/۷	۰/۶	۰/۵
$w_{۱}$	$w_{۱M}$	۱	۰/۶۶۸	۰/۵۱۸	۰/۴۰۸	۰/۳۰۶	۰/۲
	$w_{۱E}$	۱	۰/۷۱۰	۰/۵۳۰	۰/۲۰۰	۰/۲۸۸	۰/۲
	$w_{۱Y}$	۱	۰/۷۰۰	۰/۵۳۳	۰/۴۰۰	۰/۳۰۰	۰/۲
$w_{۲}$	$w_{۲M}$	۰	۰/۲۶۹	۰/۲۶۶	۰/۲۳۸	۰/۲۱۳	۰/۲
	$w_{۲E}$	۰	۰/۲۰۶	۰/۲۶۵	۰/۲۵۷	۰/۲۳۵	۰/۲
	$w_{۲Y}$	۰	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲
$w_{۳}$	$w_{۳M}$	۰	۰/۰۵۶	۰/۱۳۲	۰/۱۶۵	۰/۱۸۵	۰/۲
	$w_{۳E}$	۰	۰/۰۶۰	۰/۱۲۴	۰/۰۶۷	۰/۱۹۲	۰/۲
	$w_{۳Y}$	۰	۰/۱۰۰	۰/۱۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲
$w_{۴}$	$w_{۴M}$	۰	۰/۰۰۵	۰/۰۶۰	۰/۱۱۷	۰/۱۶۴	۰/۲
	$w_{۴E}$	۰	۰/۰۱۷	۰/۰۵۹	۰/۱۰۸	۰/۱۵۶	۰/۲
	$w_{۴Y}$	۰	۰/۰۰۰	۰/۰۶۶	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲
$w_{۵}$	$w_{۵M}$	۰	۰/۰۰۰	۰/۰۲۱	۰/۰۶۹	۰/۱۳۰	۰/۲
	$w_{۵E}$	۰	۰/۰۰۵	۰/۰۲۸	۰/۰۷۰	۰/۱۲۷	۰/۲
	$w_{۵Y}$	۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۱۰۰	۰/۲

همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود، وزن‌های حاصل از روش ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم با وزن‌های تعیین‌شده از دو روش دیگر به‌جز حالات بدیهی یعنی وقتی درجه خوش‌بینی صفر، یک یا نیم است، در بقیه حالات تفاوت آشکاری دارند. تفاوت در نتایج نشان‌گر کارایی مدل و مهم بودن اطلاعات پیشین تصمیم‌گیرنده نسبت به یکنوایی وزن‌ها، در تعیین آن‌ها می‌باشد.

مثال:۲: فرض کنید n=۵ و با توجه به اطلاعات تصمیم‌گیرنده، وزن‌ها به‌طور صعودی باشند. وزن‌های به‌دست‌آمده از طریق مدل (۶) به ازای مقادیر مشخص خوش‌بینی در جدول (۲) نشان داده‌شده‌اند.

جدول ۲: وزن‌های حاصل از مدل آنتروپی یکنوا نوع دوم وقتی وزن‌ها به‌طور صعودی باشند (وزن‌های با اندیس M)، مدل آنتروپی شانون (وزن‌های با اندیس E) و مدل آنتروپی یاگر (وزن‌های با اندیس Y)

W		$Orness(W)=\alpha$					
		۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲	۰/۱	۰/۰
w_1	w_{1M}	۰/۲	۰/۱۳۰	۰/۰۶۹	۰/۰۲۱	۰/۰۰۰	۰
	w_{1E}	۰/۲	۰/۱۲۷	۰/۰۷۰	۰/۰۲۸	۰/۰۰۵	۰
	w_{1Y}	۰/۲	۰/۱۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰
w_2	w_{2M}	۰/۲	۰/۱۶۴	۰/۱۱۷	۰/۰۶۰	۰/۰۰۵	۰
	w_{2E}	۰/۲	۰/۱۵۶	۰/۱۰۸	۰/۰۵۹	۰/۰۱۷	۰
	w_{2Y}	۰/۲	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۰۶۶	۰/۰۰۰	۰
w_3	w_{3M}	۰/۲	۰/۱۸۵	۰/۱۶۵	۰/۱۳۲	۰/۰۵۶	۰
	w_{3E}	۰/۲	۰/۱۹۲	۰/۱۶۷	۰/۱۲۴	۰/۰۶۰	۰
	w_{3Y}	۰/۲	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۱۰۰	۰/۱۰۰	۰
w_4	w_{4M}	۰/۲	۰/۲۱۳	۰/۲۳۸	۰/۲۶۶	۰/۲۶۹	۰
	w_{4E}	۰/۲	۰/۲۳۵	۰/۲۵۷	۰/۲۵۶	۰/۲۰۶	۰
	w_{4Y}	۰/۲	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰/۲۰۰	۰
w_5	w_{5M}	۰/۲	۰/۳۰۶	۰/۴۰۸	۰/۵۱۸	۰/۶۶۸	۱
	w_{5E}	۰/۲	۰/۲۸۸	۰/۳۹۶	۰/۵۳۰	۰/۷۱۰	۱
	w_{5Y}	۰/۲	۰/۳۰۰	۰/۴۰۰	۰/۵۳۳	۰/۷۰۰	۱

نتایج جدول ۲ بیان‌گر آن است که تفاوت واضحی بین وزن‌های به‌دست‌آمده از مدل پیشنهادی برای حالتی که فرض شده وزن‌ها صعودی هستند با وزن‌های متناظر از مدل‌های دیگر به ازای یک درجه خوش‌بینی مشخص وجود دارد. این تفاوت‌ها بیان‌گر آن است که اطلاع از صعودی یا نزولی بودن وزن‌ها و استفاده از مدل‌های معرفی‌شده تأثیر به سزایی در به دست آوردن وزن-های OWA دارد.

به‌طورکلی در تصمیم‌گیری‌های چند معیاره، دادن وزن (w_i) به هر معیار بر اساس تقریب و تخمین‌های ذهنی تصمیم‌گیر کاری غیرعلمی و همراه با خطاست. جهت رفع این نقیصه می‌توان به کمک مدل‌های موجود از قبیل مواردی که در مقدمه و جداول آورده شده‌اند، به تعیین وزن‌ها پرداخت و چون بنا به مسئله و با انتخاب تصمیم‌گیر نوع مدل انتخاب می‌شود لذا مدل‌های متفاوت وزن‌های متفاوت را نتیجه خواهند داد؛ اما وقتی‌که فرض می‌شود وزن‌ها به-صورت صعودی یا نزولی‌اند، بیان‌گر نوعی ارتباط بین مؤلفه‌های بردار وزن است و آنچه مدل‌های بر پایه آنتروپی یکنوا را متمایز از مدل‌های دیگر می‌کند اعمال این فرض در مدل و درنتیجه در تعیین وزن‌هاست. تفاوت بین وزن‌های حاصل از مدل‌های مذکور در مقایسه با سایر مدل‌ها بیان‌گر اهمیت استفاده از فرض یکنوایی و تأثیر آن بر وزن‌های تولیدشده است بنابراین ضروری است در این حالت از مدل‌های ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع اول یا نوع دوم که در بخش بعد به تمایز بین این دو نوع مدل اشاره می‌کنیم، استفاده شود.

۵- مقایسه مدل‌های ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع اول و نوع دوم

طبق آنچه بیان شد در هر حالت صعودی یا نزولی دو نوع اندازه آنتروپی یکنوا معرفی‌شده که بر اساس آن‌ها مدل‌های ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع اول و نوع دوم ارائه گردیده است. یکی از نکاتی که لازم است به آن پرداخته شود وجود تمایز بین نتایج حاصل از دو نوع مدل ارائه‌شده است. علی‌رغم وجود تفاوت بین تعاریف دو نوع اندازه آنتروپی یکنوا که حاکی از تمایز بین این دو نوع می‌باشد، می‌توان برای نشان دادن وجود تفاوت بین دو نوع مدل، هر یک از مدل‌ها را به‌ازای یک درجه خوش‌بینی مشخص حل کرده و بردارهای وزن حاصل را با یکدیگر مقایسه کنیم که در مثال زیر این کار انجام‌شده است.

مثال ۳: سیستمی را با $n=۱۰$ ورودی در نظر گیرید به‌طوری‌که بر اساس اطلاعات موجود وزن‌های OWA به‌صورت صعودی و درجه خوش‌بینی برابر $\alpha=۰/۲$ است. مدل‌های آنتروپی یکنوای نوع اول و دوم را برای این حالت حل کرده و نتایج جدول ۳ به‌دست‌آمده است. تفاوت در نتایج حاصل از دو مدل بیان‌گر تمایز بین وزن‌های تولیدشده از مدل‌های آنتروپی یکنوای نوع اول و دوم می‌باشد.

جدول ۳: مقایسه وزن‌های حاصل از مدل آنتروپی یکنوا نوع اول و دوم با وزن‌ها صعودی

$\alpha = ۰/۲$	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$	$w_۴$	$w_۵$	$w_۶$	$w_۷$	$w_۸$	$w_۹$	$w_{۱۰}$
$ME_a(W)$	۰/۰۸۲	۰/۰۱۶	۰/۰۲۴	۰/۰۳۳	۰/۰۴۵۹	۰/۰۶۲	۰/۰۸۸	۰/۱۳۱	۰/۲۱۲	۰/۳۷۶
$ME_c(W)$	۰/۰۱۱	۰/۰۲۰	۰/۰۲۷	۰/۰۳۵	۰,۰۴۵۰	۰/۰۵۸	۰/۰۷۸	۰/۱۱۷	۰/۱۹۹	۰/۴۰۵

این مطلب در حقیقت نشان‌دهنده‌ی آن است که تصمیم‌گیرنده با انتخاب هر یک از مدل‌ها، وزن‌های مختلفی را به دست خواهد آورد. سؤالی که شاید در اینجا مطرح باشد این است که تصمیم‌گیرنده در شرایط یکسان از بین مدل‌های آنتروپی یکنوای نوع اول و دوم کدام مدل را انتخاب نماید؟ این موضوع می‌تواند به‌عنوان یک مسئله باز مطرح باشد زیرا تاکنون نتوانستیم دلیلی برای بهتر بودن هرکدام از مدل‌ها نسبت به مدل دیگر بیابیم و در واقع تصمیم‌گیرنده مختار است یکی از دو نوع مدل را انتخاب نماید. در ادامه جهت بیان کارایی مدل ارائه‌شده مطالعه‌ای کاربردی آورده شده است.

۶- مثال کاربردی

در این قسمت مسئله انتخاب دانشجوی دکترا که توسط گروهی از محققین [۲۲- ۲۶] موردتوجه قرارگرفته است را به طریق مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوا بررسی می‌کنیم. مسئله به این‌صورت است که از بین تعدادی داوطلب، فردی که دارای صلاحیت است جهت ادامه تحصیل در دوره دکترا برگزیده می‌شود. برای انتخاب فرد اصلح شاخص‌های زیر از دیدگاه دانشکده موردنظر هستند:

۱-توصیه‌نامه از اساتید

۲-دروس گذرانده شده در مقطع کارشناسی ارشد

۲-معدل دوره کارشناسی ارشد

۳-مدرک زبان انگلیسی

۴-مطابقت زمینه تحقیقاتی داوطلب با اعضای هیئت‌علمی دانشکده

۵- انگیزه و پشتوانه مالی برای ادامه تحصیل

۶-کارهای علمی انجام‌شده توسط داوطلب

مطابق یک مطالعه انجام‌شده [۲۲] داده‌های جدول ۴ برای یکی از داوطلبین به‌دست‌آمده است. در جدول مذکور عدد ۳ بیانگر عالی، عدد ۲ بیانگر متوسط و عدد ۱ بیانگر ضعیف بودن داوطلب از دیدگاه متخصص در هر یک از شاخص‌های فوق است.

ازآنجاکه هدف کمیته اجرایی ارفاق به داوطلبان است قرارداد می‌شود در تجمیع به نمرات بالا وزن بیشتری داده شود، بنابراین بردار وزن OWA باید به‌صورت نزولی در نظر گرفته شود. فرض کنید درجه خوش‌بینی که توسط تصمیم‌گیرندگان انتخاب‌شده است $\alpha = ۰/۶۴$ باشد. برای به دست آوردن وزن‌های موردنظر، مدل (۱۱) را به ازای $n=۶$ و درجه خوش‌بینی داده‌شده حل کرده و بردار وزن به‌صورت

$$W = \left(۰/۳۱۵,۰/۱۹۳,۰/۱۵۵,۰/۱۳۴,۰/۱۱۶,۰/۰۸۵\right)$$

به‌دست‌آمده است. نمرات حاصل از تجمیع در جدول ۴ مشاهده می‌شوند. حال باید نمرات حاصل را دوباره برای به دست آوردن نمره کل داوطلب تجمیع نمود که با همان درجه خوش‌بینی $\alpha = ۰/۶۴$ و به‌ازای $n = ۱۱$ بردار وزن حاصل‌شده در ستون آخر جدول ۴ آمده است که با اعمال آن، نمره کل داوطلب به‌صورت ۲/۴۰۱ به دست می‌آید. با انجام فرآیند فوق برای دیگر داوطلبین و بر اساس نمره کل هر داوطلب، می‌توان فرد موردنظر را برای ادامه تحصیل در دوره دکترا انتخاب نمود. همچنین اگر به خواهیم بیشتر از یک نفر را انتخاب نماییم می‌توان بر اساس ترتیب نمره کل داوطلبین افراد را انتخاب نمود.

جدول ۴: نمرات داوطلب در ارزیابی‌های صورت گرفته توسط متخصصین

	نمرات بعد از مرتب کردن						نمره بعد از تجمیع	بردار وزن OWA
متخصص ۱	۳	۳	۳	۲	۲	۱	۲/۵۷۴	۰/۰۸۹
متخصص ۲	۳	۳	۳	۲	۲	۲	۲/۶۵۹	۰/۱۲۱
متخصص ۳	۳	۲	۲	۲	۲	۱	۲/۲۲۶	۰/۰۶۴
متخصص ۴	۳	۳	۳	۳	۲	۲	۲/۷۹۳	۰/۲۲۵
متخصص ۵	۳	۳	۲	۲	۲	۱	۲/۴۱۹	۰/۰۷۴
متخصص ۶	۳	۳	۳	۲	۲	۱	۲/۵۷۴	۰/۰۷۹
متخصص ۷	۳	۳	۲	۲	۲	۱	۲/۴۱۹	۰/۰۷۱
متخصص ۸	۳	۳	۲	۲	۱	۱	۲/۳۰۳	۰/۰۶۹
متخصص ۹	۳	۲	۲	۲	۲	۱	۲/۲۲۶	۰/۰۵۹
متخصص ۱۰	۳	۳	۲	۲	۱	۱	۲/۳۰۳	۰/۰۶۷
متخصص ۱۱	۲	۲	۲	۲	۱	۱	۱/۷۹۵	۰/۰۴۵

لازم به ذکر است اگر بر مبنای مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع اول مثال فوق را انجام دهیم نمره کل داوطلب برابر با ۲/۴۹ خواهد بود که نشان‌دهنده وجود تفاوت در نتایج حاصل از دو نوع مدل آنتروپی یکنواست.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله مدل جدیدی تحت عنوان مدل ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع دوم برای تعیین وزن‌های OWA ارائه گردید. در این مدل اساس کار، اطلاعات یا مفروضات پیشین تصمیم‌گیرنده مبنی بر صعودی یا نزولی بودن وزن‌ها و همچنین استفاده از اصل ماکزیمم آنتروپی است. بعضی از ویژگی‌های مدل ارائه‌شده طی قضایایی مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته است. مدل مذکور حل‌شده و نتایج آن با مدل‌های مرتبط دیگر مقایسه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از اطلاعات یا مفروضات قبلی تصمیم‌گیرنده در خصوص یکنوایی وزن‌ها، منجر به تفاوت‌های معنی‌داری در وزن‌های تولیدشده در مقایسه با مدل‌های دیگر می‌شود. به‌علاوه مدل‌های ماکزیمم آنتروپی یکنوای نوع اول و دوم با یکدیگر مقایسه شده‌اند که تفاوت وزن‌های حاصل از دو مدل بیانگر تفاوت بین دو نوع مدل می‌باشد. در پایان کاربرد و کارایی مدل معرفی‌شده در قالب مسئله‌ای کاربردی شرح داده‌شده است.

مراجع

[1] Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision- making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **18**, 183–190.

[2] Merigó.José, M and Casanovas, Montserrat. (2010). The Fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making, *Cybernetics and Systems*, **41**, 359-370.

[3] Yager, R. R. (2004). OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* Part B **34**, 1952-1963.

[4] Yager, R. R. (2009). Weighted Maximum Entropy OWA Aggregation with Applications to Decision Making Under Risk, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, **39(3)**, 555-564.

[5] Torra, V. (2004). OWA operators in data modeling and reidentication, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **12**, 652-660.

[6] Yager, R. R. and Filew, D.P. (1992). Fuzzy logic controllers with flexible structures. In: Proc Second IntConf on Fuzzy Sets and Neural Networks, Izuka, Japan; 317–320.

[7] Kacprzyk, J. and Zadrozny, S. (2001). Computing with words in intelligent database querying: standalone and internet-based applications, *Information Sciences*, **134**, 71-109.

[8] Peláez, J.I. and Doña, J.M. (2003). Majority additive-ordered weighting averaging: a new neat ordered weighting averaging operator based on the majority process, *international Journal of Intelligent Systems,* **18**, 469-481.

[9] Fuller, R. (2007). On obtaining OWA operator weights: a short survey of recent developments, in: Proceedings of the 5-th IEEE International Conference on Computational Cybernetics (ICCC)

[10]Yager, R.R. (1998). Including importances in OWA aggregations using fuzzy systems modeling. *IEEE Trans Fuzzy Syst*, **6(1)**; 286–294.

[11] Herrera-Viedma, E, Cordón. O, Luque. M, Lopez. A.G and Muñoz. A.M. (2003). A model of fuzzy linguistic IRS based on multi-granular linguistic information, *International Journal of Approximate Reasoning*, **34**, 221239.

[12] Herrera-Viedma. E, Cordón. O, Luque. M, Lopez. A.G and Muñoz. A.M. (2007). A Model of Information Retrieval System with Unbalanced Fuzzy Linguistic Information, *International Journal of Intelligent Systems*, **22(11)**, 1197-1214.

[13] Herrera-Viedma, E and Pasi, G. (2003). Evaluating the Informative Quality of Documents in SGML-Format Using Fuzzy Linguistic Techniques Based on Computing with Words, Information Processing and Management, **39(2)**, 233-249.

[14] O'Hagan, M. (1988). Aggregating template rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. In Proceedings of 22nd annual IEEE Asilomar conference on signals, systems, and computers Pacific Grove, CA, 681–689.

[15] Majlender, P. (2005). OWA operators with maximal Rényi entropy. *Fuzzy Sets andSystems*, **155**, 340–360.

[16] Jian, Wu., Bo-Liang Sun, Chang-Yong Liang and Shan-Lin Yang. (2009). A linear programming model for determining ordered weighted

averaging operator weights with maximal Yager's entropy. *Computers & Industrial Engineering*, **57**, 742–747

[17] Kapur, J. N and Sharma, S. (1999). On measures of M-Entropy, *Indian J. pure appl. Math*, **30(2)**, 129-145.

[18] Kapur, J. N and Sharma, S. (2002). Some new measures of M-Entropy, *Indian J. pure appl. Math*, **33(6)**, 869-893.

[19] Yari, G and Chaji, A. (2012). Determination of Ordered Weighted Averaging Operator Weights Based on the M-Entropy Measures. *International Journal of Intelligent Systems*, **27(12)**,1020–1033.

[20] Yager, R. R. (1995). Measures of entropy and fuzziness related to aggregation operators, *Information Sciences*, **82**, 147-166.

[21] Filev, D. and Yager, R. (1995) Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators. *Information Sciences,* **85**, 11 – 27.

[22] Carlsson, C., Fuller, R. and Fuller, S. (1997) OWA Operators for Doctoral Student Selection Problem, in: R.R. Yager, J. Kacprzyk (Eds.), The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory, Methodology and Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 167–178.

[23] Bordogna, G. Fedrizzi, M. and Pasi, G. (1997). A Linguistic Modeling of Consensus in Group Decision Making Based on OWA Operators, *IEEE Trans. Systems, Man, Cybernet.-Pt. A: Systems Humans*, **27(1)**, 126–132.

[24] Davey, A., Olson, D. and Wallenius, J. (1994). The Process of Multi Attribute Decision Making: a Case Study of Selecting Applicants for a Ph.D. Program, *European J. Oper. Res*.**(72)**, 469–484,

[25] Smolíková, R. and Wachowiak, M.P. (2002) Aggregation Operators for Selection Problems, *Fuzzy Sets and Systems*. **131 (1).**,23-34

[۲۶] میان آبادی، حجت؛ افشار، عباس (۱۳۸۶). تصمیم‌گیری گروهی فازی، محاسبه وزن نسبی تصمیم‌گیرندگان؛ مطالعه کاربردی: انتخاب دانشجویان مقطع دکترا. *فصلنامه آموزش مهندسی ایران*، شماره ۳۵، سال نهم، صص ۵۳-۳۱.

Maximum M-Entropy Model- Type II for Obtaining the Ordered Weighted Averaging Operator Weights

Ali Reza Chaji[*], Gholamhussain Yari[**]

[*]Department of Electrical Engineering, Shohadaie Hovaizeh University of Technology Ahvaz, Iran

[**]Department of Mathematics, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Abstract

One key issue in the theory of the OWA operator is to determine its associated weights. In this paper, based upon the M-Entropy measures, new models for obtaining the ordered weighted averaging (OWA) operators are proposed. It is assumed that according to the available information, the OWA weights are in decreasing or increasing order. Some properties of the models are analyzed and the method of Lagrange multipliers is used to provide a direct way to find these weights. The models are solved with specific level of Orness comparing the results with some other related models and with the other maximum M-Entropy model. The results demonstrate the efficiency of the M-Entropy models in generating the OWA operator weights. In addition, the obtained weights of the two M-entropy models confirm the difference between two types of the models. Finally, an applied example is presented to illustrate the applications of the proposed model.

Keywords**:** OWA operator, Operator weights, Orness, Maximum entropy, Bayesian entropy.

Mathematics Subject Classification (2010): 94A17, 47B37.