

## مدل‌بندی احتمالی داده‌های جهت وزش باد ایستگاه‌های هواشناسی استان کردستان با استفاده از توزیع‌های دایره‌ای چوله

حمیدرضا مسافری قمی کلائی و موسی گل‌علی‌زاده<sup>۱</sup>

گروه آمار، دانشگاه تربیت مدرس

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۷/۱۸

**چکیده:** در بررسی بعضی از پدیده‌ها، پژوهش‌گران معمولاً با داده‌هایی مواجه می‌شوند که ذاتاً ماهیت اقلیدسی ندارند. تحقیق راجع به ویژگی‌های این نوع داده‌ها نیازمند استفاده از ابزارهای جدید آماری است. روش‌های آماری برای تحلیل این‌گونه داده‌ها به آمار غیرخطی معروف هستند. آمار دایره‌ای مثالی از این حوزه از آمار است. در این مقاله ضمن معرفی چند توزیع دایره‌ای که قابلیت مدل‌بندی داده‌های دایره‌ای چوله را دارند، به مدل‌بندی احتمالاتی داده‌های جهت وزش باد ایستگاه‌های هواشناسی استان کردستان پرداخته می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** آمار غیرخطی، توزیع‌های دایره‌ای، چولگی، داده‌های جهت وزش باد.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲P۱۲، ۶۲H۱۱.

### ۱- مقدمه

گاهی اوقات در تحلیل و بررسی‌های آماری، با داده‌هایی مواجه می‌شویم که ذاتاً ماهیت اقلیدسی ندارند. لذا از روش‌های مرسوم در آمار خطی نمی‌توان برای تحلیل این‌گونه داده‌ها استفاده کرد. داده‌های جهت وزش باد، مثالی از این‌گونه داده‌هاست. در بررسی داده‌های جهت وزش باد باید به این نکته توجه کرد که داده‌ها ماهیت زاویه‌ای و دوره تناوب  $2\pi$  دارند. به همین دلیل برای تحلیل آن‌ها باید از روش‌های آماری استفاده کرد که خصوصیات و ویژگی‌های آن‌ها را لحاظ کند. اصطلاحاً به این‌گونه داده‌ها، داده‌های دایره‌ای و به مجموعه روش‌ها و تکنیک‌های آماری که برای تحلیل آن‌ها مورداستفاده قرار می‌گیرد، آمار دایره‌ای اطلاق می‌شود. برای مطالعه بیشتر در مورد آمار دایره‌ای می‌توان به [۱-۳] مراجعه کرد.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: golalizadeh@modares.ac.ir

یکی از مهم‌ترین توزیع‌ها در حوزه آمار دایره‌ای توزیع فون‌میزس<sup>۱</sup> است. تابع چگالی این توزیع به صورت

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\kappa)} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}$$

می‌باشد که در آن  $\theta \in [0, 2\pi)$ ،  $\mu \in [0, 2\pi)$ ،  $\kappa > 0$  و  $I_0(\kappa)$  تابع بسط اصلاح‌شده نوع اول از مرتبه صفر است. معمولاً این توزیع را با نماد  $VM(\mu, \kappa)$  نمایش می‌دهند. قابل اشاره است که پارامترهای  $\mu$  و  $\kappa$  به ترتیب مکان و تمرکز داده‌ها را نشان می‌دهند. توجه شود که پارامتر  $\kappa$  عکس واریانس بوده و لذا بزرگی آن نشانه‌ای از تمرکز زیاد داده‌ها حول میانگین است. به دلیل تقارن توزیع حول پارامتر  $\mu$ ، می‌توان پیش‌بینی کرد که آن توانایی مدل‌بندی داده‌های دایره‌ای چوله را ندارد. لذا، در این مقاله ابتدا برخی از توزیع‌های دایره‌ای چوله معرفی و خواص آن‌ها مطالعه می‌شود. سپس با کمک آن‌ها، داده‌های مربوط به جهت وزش باد ایستگاه‌های هواشناسی استان کردستان مدل‌بندی احتمالاتی خواهد شد. بر این اساس ابتدا در بخش ۲ چند توزیع دایره‌ای برای مدل‌بندی داده‌های دایره‌ای چوله معرفی و در بخش ۳ توزیع‌های مختلف به داده‌ها برازش داده‌شده و با استفاده از معیارهای مختلف مقایسه می‌شوند.

## ۲- توزیع‌های دایره‌ای چوله

یک روش ساخت توزیع‌های دایره‌ای چوله، پیچاندن توزیع‌های چوله موجود در آمار خطی به دور دایره است. خواننده علاقه‌مند به مطالعه راجع به توزیع‌های پیچانده و ویژگی‌های آن‌ها می‌تواند به [۱] مراجعه کند. روش‌های دیگری نیز برای به دست آوردن توزیع‌های دایره‌ای چوله وجود دارد که در ادامه این بخش، به آن‌ها پرداخته خواهد شد؛ اما قبل از آن، شرح پیشینه‌ای از فعالیت محققین آماری در معرفی چنین توزیع‌هایی ارائه می‌شود.

یکی از توزیع‌های پرکاربرد چوله، توزیع چوله‌نرمال<sup>۲</sup> ( $SN$ ) است که اولین بار توسط [۴] معرفی شد. [۵] مشکلات استنباطی مرتبط با برآورد ماکزیمم درست‌نمایی این توزیع را بررسی کرد. ایشان سپس با مدنظر قرار دادن آن ضعف‌ها، پیچاندن توزیع  $SN$  را روی دایره موردبررسی قرار داد [۶-۷] را ببینید). جزئیاتی از روش ایشان، در ادامه می‌آید. بنا به [۴]، توزیع ( $SN$ ) با پارامتر مکان  $\zeta$ ، مقیاس  $\eta$  و چولگی  $\lambda$  با نماد  $SN(\zeta, \eta, \lambda)$  نمایش داده

1- von Mises

2- Skew-Normal

می‌شود. با فرض  $X \sim SN(\zeta, \eta, \lambda)$  و اختیار  $\theta = X \bmod 2\pi$ ، [۶] نشان داد که  $\theta$  دارای توزیع چوله‌نرمال پیچانده<sup>۱</sup> ( $WSN$ ) با تابع چگالی

$$f_{WSN}(\theta) = \frac{2}{\eta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{\theta + 2k\pi - \zeta}{\eta}\right) \Phi\left(\lambda \left(\frac{\theta + 2k\pi - \zeta}{\eta}\right)\right)$$

است که در آن  $\lambda \in \mathbb{R}$  و  $\eta > 0$ ،  $\zeta \in [0, 2\pi)$ ،  $\theta \in [0, 2\pi)$ . معمولاً این توزیع را با نماد  $WSN(\zeta, \eta, \lambda)$  نمایش می‌دهند. با استفاده از قوانین حاکم بر بسط فوریه، می‌توان تابع چگالی توزیع  $WSN$  را به صورت

$$f_{WSN}^*(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \left[ e^{-\frac{1}{2}\eta^2 p^2} (\cos(p(\theta - \zeta)) + Q(\delta\eta p) \sin(p(\theta - \zeta))) \right] \right\}$$

نوشت که در آن  $\delta = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \in (-1, 1)$ . همچنین به ازای  $x$ ‌های مثبت،

ساختار توزیع معرفی شده در [۴]، تعمیم منعطف‌تری از توزیع چوله‌نرمال را پیشنهاد و سپس پیچاندن آن به دور دایره را بررسی کردند.  $Q(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$  و  $Q(-x) = -Q(x)$ . قابل اشاره است که  $[\lambda]$  با اختیار تابعی فرد در

ایده دیگر برای معرفی توزیع‌های دایره‌ای چوله، تعمیم توزیع‌های دایره‌ای موجود به‌گونه‌ای است که قابلیت مدل‌بندی داده‌های دایره‌ای چوله را نیز داشته باشند. بر این اساس [۹] توزیع فون‌میزس تعمیم‌یافته<sup>۲</sup> را معرفی کردند. تابع چگالی توزیع فون‌میزس تعمیم‌یافته به صورت

$$f_{GvM}(\theta) = \frac{1}{2\pi G_0(\delta, \kappa_1, \kappa_2)} e^{\kappa_1 \cos(\theta - \mu_1) + \kappa_2 \cos(\theta - \mu_2)}$$

است که در آن  $\theta \in [0, 2\pi)$ ،  $\mu_1 \in [0, 2\pi)$ ،  $\mu_2 \in [0, \pi)$ ،  $\kappa_1 > 0$ ،  $\kappa_2 \in \mathbb{R}$ ،  $\delta = (\mu_1 - \mu_2) \bmod \pi$  و  $G_0(\delta, \kappa_1, \kappa_2)$  ثابت نرمال‌ساز است، به قسمی که

$$GvM(\mu_1, \mu_2, \kappa_1, \kappa_2) = \int_0^{2\pi} e^{\kappa_1 \cos(\theta) + \kappa_2 \cos(\theta + \delta)} d\theta$$

نمایش داده می‌شود، دارای انعطاف زیادی است به‌گونه‌ای که بسته به مقادیر متفاوت پارامترهای توزیع، می‌تواند متقارن، نامتقارن، تک مدی و یا دو مدی باشد. همان‌طور که انتظار

- 1- Wrapped Skew-Normal
- 2 - Generalized von Mises

می‌رود، پارامترهای  $\mu_r$  و  $\mu_l$  کماکان پارامترهای مکان توزیع هستند؛ اما، نمی‌توان در خصوص تمرکز توزیع بر اساس پارامترهای  $\kappa_r$  و  $\kappa_l$  نظر داد. بنا به [۹] این امر در تقابل با نسبیتی از این دو پارامتر و همچنین پارامتر  $\delta$  امکان‌پذیر است. قابل اشاره است که جزئیات بیشتری راجع به خواص و ویژگی‌های نظری توزیع  $GvM$  توسط [۱۰] نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. نکته جالب توجه این است که توزیع فون‌میزس حالت خاصی از این توزیع به ازای  $\kappa_r = 0$  است.

یک روش برای ساخت توزیع‌های چند مدی، آمیختن توزیع‌های تک مدی است. بر این اساس می‌توان با آمیختن دو توزیع فون‌میزس یک توزیع دایره‌ای دو مدی را معرفی کرد. گوییم متغیر تصادفی  $\theta$  دارای توزیع آمیخته فون‌میزس<sup>۱</sup> است هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f_{MvM}(\theta) = \frac{p}{2\pi I_0(\kappa_l)} e^{\kappa_l \cos(\theta - \mu_l)} + \frac{1-p}{2\pi I_0(\kappa_r)} e^{\kappa_r \cos(\theta - \mu_r)}$$

باشد که در آن  $\theta \in [0, 2\pi)$ ،  $\mu_l, \mu_r \in [0, 2\pi)$ ،  $\kappa_l, \kappa_r > 0$  و  $p \in [0, 1]$  ویژگی‌های توزیع  $MvM$  در [۲] بررسی شده است.

یک روش دیگر برای ساخت توزیع‌های دایره‌ای چوله توسط [۱۱] ارائه شد که در ادامه می‌آید.

فرض کنید  $f_0$  و  $g$  دو تابع چگالی دایره‌ای متقارن حول صفر باشند و  $G(\theta) = \int_0^\theta g(u) du$  و  $W(\theta)$  تابعی فرد باشد که دارای دوره تناوب  $2\pi$  است؛ یعنی رابطه  $W(\theta) = W(\theta + 2k\pi)$  به ازای  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  برقرار باشد. به علاوه، با فرض اینکه به ازای هر  $\theta \in [0, 2\pi)$  تابع  $W(\theta)$  در شرط  $0 \leq W(\theta) < 2\pi$  صدق کند، تابع

$$f_\zeta(\theta) = 2f_0(\theta - \zeta)G(W(\theta - \zeta))$$

یک تابع چگالی است. لذا، با استفاده از این روش و انتخاب توابع  $f_0$ ،  $G$  و  $W$  مختلف می‌توان خانواده وسیعی از توزیع‌های دایره‌ای چوله را به دست آورد. یک انتخاب برای  $f_0$  تابع چگالی  $vM(0, \kappa)$  است. توجه شود که می‌توان توزیع یکنواخت دایره‌ای را برای  $G$  در نظر

گرفت؛ یعنی  $G(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}$ . به علاوه، تابع  $W$  را نیز می‌توان به صورت  $W(\theta) = \pi(1 + \lambda \sin(\theta - \zeta))$  که در آن  $\lambda \in [-1, 1]$  انتخاب کرد. در این صورت توزیع فون‌میزس چوله‌ی سینوسی<sup>۲</sup> ( $SSvM$ ) به دست می‌آید که تابع چگالی مربوطه به فرم

1- Mixture of von Mises  
2- Sine-Skewed von Mises

$$f_{SSVM}(\theta) = \frac{e^{\kappa \cos(\theta - \zeta)}}{2\pi I_0(\kappa)} (1 + \lambda \sin(\theta - \zeta))$$

است که در آن  $\theta \in [0, 2\pi)$ ،  $\zeta \in [0, 2\pi)$ ،  $\kappa > 0$  و  $\lambda \in [-1, 1]$ . این توزیع در حالت کلی چوله است و در آن پارامتر  $\lambda$  چولگی توزیع را کنترل می‌کند. ملاحظه می‌شود که اگر  $\lambda = 0$  آنگاه توزیع  $SSVM$  به توزیع فون‌میزس تبدیل می‌شود. بررسی برخی از ویژگی‌های نظری این توزیع در [۱۱-۱۲] آمده است.

نکته قابل اشاره، برآورد پارامترهای توزیع‌های بررسی‌شده در این مقاله است. مرسوم‌ترین روش برای این امر روش‌های ماکزیمم درست‌نمایی و گشتاورهای مثلثاتی است که جزئیاتی از به‌کارگیری آن‌ها در منابع مرتبط با توزیع‌های مورد استفاده آمده است که برای جلوگیری از تکرار از ذکر آن‌ها خودداری می‌شود.

### ۳- مدل‌بندی احتمالی داده‌های جهت وزش باد

در این بخش چگونگی مدل‌بندی آماری داده‌های مربوط به جهت وزش باد در چهار ایستگاه هواشناسی استان کردستان با استفاده از چند توزیع مهم در آمار دایره‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور داده‌های مورد تحلیل قرار می‌گیرد. این ایستگاه‌ها در شهرهای سنندج، قروه، مریوان و بیجار قرار دارند. جهت وزش باد از سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۶ به صورت روزانه در این چهار ایستگاه هواشناسی اندازه‌گیری شده و میانگین دایره‌ای ماهانه داده‌ها محاسبه شده است. به عبارت دیگر در هر ایستگاه ۸۴ داده ماهانه وجود دارد. تحلیل اکتشافی داده‌های ایستگاه سنندج قبلاً در [۱۳] انجام شد و نحوه برازش یک توزیع فون‌میزس به این داده‌ها مورد ارزیابی قرار گرفت. هدف اصلی این بخش مدل‌بندی داده‌ها با استفاده از توزیع‌های دایره‌ای معرفی شده در این مقاله به آن مجموعه داده‌ها به انضمام داده‌های مربوط به ایستگاه‌های قروه، بیجار و مریوان است. لازم به اشاره است که کلیه محاسبات مربوط به این مثال در نرم‌افزار آماری  $R$  انجام شده است.

برای انجام تحلیل مورد نظر پنج توزیع دایره‌ای فون‌میزس، فون‌میزس تعمیم‌یافته، آمیخته فون‌میزس، چوله‌نرمال پیچانده و فون‌میزس چوله‌سینوسی را به داده‌ها برازش دادیم. مقادیر برآورد شده پارامترهای این توزیع‌ها با روش ماکسیمم درست‌نمایی در هر کدام از چهار ایستگاه در جداول ۱ الی ۴ آمده است.

برای ارزیابی توزیع‌های برازش داده‌شده به هر کدام از مجموعه داده‌ها، سه معیار  $p$ -مقدار آزمون نیکویی برازش کولموگوروف-اسمیرنوف، مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی و معیار  $AIC$  برای هر مدل محاسبه شد که نتایج در جداول ۵ الی ۸ آمده است.

جدول ۱: برآورد پارامترهای توزیع‌های برازش شده در ایستگاه سنندج

پارامتر	$vM$	$GvM$	$MvM$	$WSN$	$SSvM$
$\mu_1$	۳/۸۴۱	۳/۱۷۹	۴/۰۶۴	-	-
$\mu_4$	-	۲/۹۴۸	۲/۶۵۹	-	-
$\zeta$	-	-	-	۳/۷۲۷	۳/۷۴۴
$\kappa_1$	۲/۶۶۷	۵/۵۰۶	۱۲/۸۹۱	-	۲/۶۳۷
$\kappa_r$	-	-۲/۷۷۷	۲/۲۶۶	-	-
$\eta$	-	-	-	۰/۷۲۱	-
$\lambda$	-	-	-	۰/۰۰۶	۰/۲۶۸
$p$	-	-	۰/۷۶۴	-	-

جدول ۲: برآورد پارامترهای توزیع‌های برازش شده در ایستگاه قروه

پارامتر	$vM$	$GvM$	$MvM$	$WSN$	$SSvM$
$\mu_1$	۳/۶۵۰	۳/۸۲۰	۳/۶۶۴	-	-
$\mu_4$	-	۰/۲۹۴	۱/۰۲۴	-	-
$\zeta$	-	-	-	۳/۱۷۰	۳/۴۴۳
$\kappa_1$	۳/۵۴۹	۲/۴۶۶	۷/۶۵۰	-	۳/۲۵۰
$\kappa_r$	-	۰/۸۱۲	۰/۰۰۳	-	-
$\eta$	-	-	-	۰/۷۸۰	-
$\lambda$	-	-	-	۱/۳۷۱	۰/۶۹۵
$p$	-	-	۰/۸۶۸	-	-

با توجه به جدول ۵ و بر اساس معیارهای لگاریتم درست‌نمایی و  $AIC$ ، توزیع  $GvM$  و بر اساس معیار  $p$ -مقدار آزمون نیکویی برازش کولموگوروف-اسمیرنوف توزیع  $MvM$  بهتر به داده‌های ایستگاه سنندج برازش می‌شوند. در شکل ۱ نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه سنندج به همراه چگالی‌های برازش شده به داده‌ها رسم شده است.

جدول ۳: برآورد پارامترهای توزیع‌های برازش شده در ایستگاه مریوان

$SSvM$	$WSN$	$MvM$	$GvM$	$vM$	پارامتر
-	-	۳/۷۴۷	۳/۵۶۸	۳/۷۳۸	$\mu_1$
-	-	۰/۵۸۷	۲/۸۹۹	-	$\mu_2$
۳/۶۹۸	۳/۶۹۳	-	-	-	$\zeta$
۲/۷۰۴	-	۲/۹۲۴	۲/۷۷۴	۲/۷۰۳	$\kappa_1$
-	-	۰/۰۰۰۷	-۰/۴۳۹	-	$\kappa_2$
-	۰/۷۸۰	-	-	-	$\eta$
۰/۱۱۰	۰/۰۱۱	-	-	-	$\lambda$
-	-	۰/۹۷۷	-	-	$p$

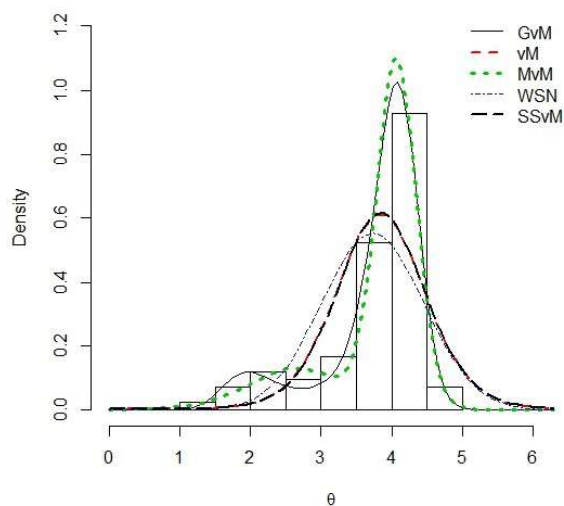
جدول ۴: برآورد پارامترهای توزیع‌های برازش شده در ایستگاه بیجار

$SSvM$	$WSN$	$MvM$	$GvM$	$vM$	پارامتر
-	-	۴/۰۷۷	۳/۳۵۲	۳/۸۲۷	$\mu_1$
-	-	۳/۱۰۰	۱/۰۵۳	-	$\mu_2$
۴/۲۷۵	۳/۶۷۰	-	-	-	$\zeta$
۱/۷۷۳	-	۱۱/۹۲۳	۱/۹۱۲	۲/۱۹۸	$\kappa_1$
-	-	۱/۲۹۷	۱/۳۰۴	-	$\kappa_2$
-	۰/۹۰۴	-	-	-	$\eta$
-۰/۹۵۳	۰/۰۰۴	-	-	-	$\lambda$
-	-	۰/۶۱۱	-	-	$p$

همان‌طور که از جدول ۶ مشخص است بر مبنای معیارهای لگاریتم درست‌نمایی و  $p$ -مقدار آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف توزیع  $MvM$  بهتر به داده‌های ایستگاه قروه برازش شده اما بر مبنای معیار  $AIC$  توزیع  $GvM$  بهتر به این داده‌ها برازش شده است. نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه قروه به همراه چگالی‌های برازش شده به داده‌ها در شکل ۲ رسم شده است.

جدول ۵: ارزیابی چگالی‌های برازش شده به داده‌های ایستگاه سنندج

SSvM	WSN	MvM	GvM	vM	معیار
-۸۹/۸۳۸	-۹۴/۱۰۶	-۶۶/۷۶۷	-۶۶/۲۷۳	-۸۹/۹۰۷	لگاریتم درست‌نمایی
۱۸۵/۶۷۷	۱۹۴/۲۱۲	۱۴۳/۵۳۳	۱۴۰/۵۴۵	۱۸۳/۸۱۴	AIC
۰/۰۷۴	۰/۰۰۲	۰/۹۹۶	۰/۹۶۴	۰/۰۷۵	p-مقدار

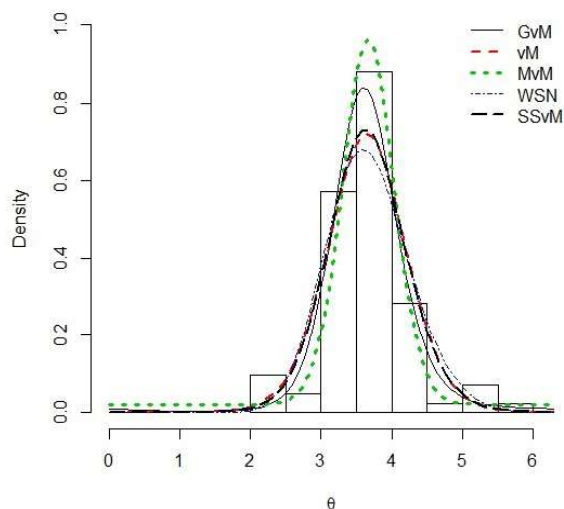


شکل ۱: نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه سنندج و چگالی‌های برازش شده

جدول ۶: ارزیابی چگالی‌های برازش شده به داده‌های ایستگاه قروه

SSvM	WSN	MvM	GvM	vM	معیار
-۷۳/۳۶۶	-۷۵/۲۷۶	-۷۰/۷۰۷	-۷۰/۸۴۴	-۷۳/۸۱۶	لگاریتم درست‌نمایی
۱۵۲/۷۳۱	۱۵۶/۵۵۳	۱۵۱/۴۱۵	۱۴۹/۶۸۸	۱۵۱/۶۳۲	AIC
۰/۶۰۸	۰/۳۷۹	۰/۹۹۵	۰/۹۴۱	۰/۵۵۶	p-مقدار



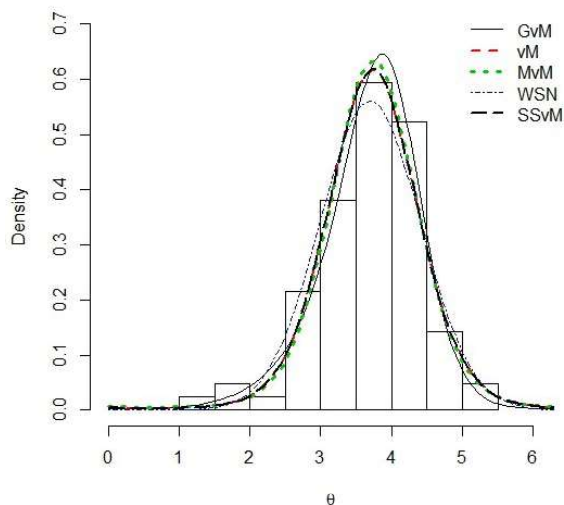


شکل ۲: نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه قروه و چگالی‌های برازش شده

بر مبنای معیارهای لگاریتم درست‌نمایی و  $-p$  مقدار آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف توزیع  $GvM$  به داده‌های ایستگاه مریوان بهتر برازش شده است که نتایج در جدول ۷ قابل مشاهده است. همچنین بر اساس این جدول توزیع  $vM$  دارای  $AIC$  کمتری نسبت به سایر توزیع‌های برازش شده، است. در شکل ۳ نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه مریوان به همراه چگالی‌های برازش شده به داده‌ها رسم شده است.

جدول ۷: ارزیابی چگالی‌های برازش شده به داده‌های ایستگاه مریوان

$SSvM$	$WSN$	$MvM$	$GvM$	$vM$	معیار
-۸۹/۱۴۵	-۹۰/۶۵۲	-۸۹/۰۳۳	-۸۸/۰۱۵	-۸۹/۱۴۶	لگاریتم درست‌نمایی
۱۸۴/۲۹۰	۱۸۷/۳۰۴	۱۸۸/۰۶۵	۱۸۴/۰۳۱	۱۸۲/۲۹۳	$AIC$
۰/۶۹۶	۰/۳۶۲	۰/۷۷۴	۰/۹۳۳	۰/۷۲۳	$-p$ مقدار

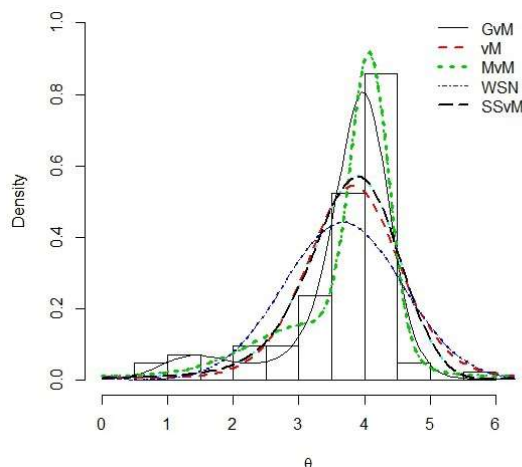


شکل ۳: نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه مریوان و چگالی‌های برازش شده

با توجه به جدول ۸ و بر مبنای هر سه معیار، توزیع  $MvM$  برازش بهتری به داده‌های ایستگاه بیجار دارد. همچنین، نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه بیجار به همراه چگالی‌های برازش شده در شکل ۴ رسم شده است.

جدول ۸: ارزیابی چگالی‌های برازش شده به داده‌های ایستگاه بیجار

$SSvM$	$WSN$	$MvM$	$GvM$	$vM$	معیار
-۹۶/۱۹۶	-۱۰۹/۷۰۹	-۸۵/۴۵۳	-۸۶/۸۰۱	-۱۰۰/۹۲۱	لگاریتم درست‌نمایی
۱۹۸/۳۹۲	۲۲۵/۴۱۸	۱۸۰/۹۰۶	۱۸۱/۶۰۳	۲۰۵/۸۴۲	$AIC$
۰/۱۳۸	۰/۰۲۰	۰/۷۸۶	۰/۳۳۷	۰/۰۲۲	$p$ -مقدار



شکل ۴: نمودار هیستوگرام داده‌های ایستگاه بیجار و چگالی‌های برازش شده

### بحث و نتیجه‌گیری

امروزه با توجه به رشد و پیشرفت علوم مختلف، گاهی اوقات پژوهش‌گران آماری با داده‌هایی روبه‌رو می‌شوند که ابزارهای آمار کلاسیک قادر به تجزیه و تحلیل آن‌ها نیستند. یکی از این نوع داده‌ها، داده‌های دایره‌ای هستند. در این مقاله ضمن معرفی چند توزیع دایره‌ای، نحوه ساخت توزیع‌های دایره‌ای چوله تشریح شد. سپس، با استفاده از این توزیع‌ها به مدل‌بندی احتمالاتی داده‌های جهت وزش باد ایستگاه‌های هواشناسی استان کردستان پرداخته شد.

### مراجع

- [1] Mardia, K. V. (1972). *Statistics of directional data*, Academic Press, London.
- [2] Mardia, K. V. and Jupp, P. E. (2000). *Directional statistics*, Wiley, Chichester.
- [3] Jammalamadaka, S. R. and SenGupta, A. (2001). *Topics in Circular Statistics*, World Scientific, New Jersey.
- [4] Azzalini, A. (1985). A Class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.
- [5] Pewsey, A. (2000). Problems of inference for Azzalini's skew-normal distribution, *Journal of Applied Statistics*, **27**, 859-870.

- [6] Pewsey, A. (2000). The Wrapped skew-normal distribution on the circle, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **29**, 2459-2472.
- [7] Pewsey, A. (2006). Modelling asymmetrically distributed circular data using the wrapped skew-normal distribution, *Environmental and Ecological Statistics*, **13**, 257-269.
- [8] Hernández-Sánchez, E., and Scarpa, B. (2012). A Wrapped flexible generalized skew-normal model for a bimodal circular distribution of wind directions. *Chil. J. Statist*, **3**, 131-143.
- [9] Gatto, R., and Jammalamadaka, S. R. (2007). The Generalized von Mises distribution, *Statistical Methodology*, **4**, 341-353.
- [10] Gatto, R. (2008). Some computational aspects of the generalized von Mises distribution, *Statistics and Computing*, **18**, 321-331.
- [11] Umbach, D., and Jammalamadaka, S. R. (2009). Building asymmetry into circular distributions, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 659-663.
- [12] Abe, T., and Pewsey, A. (2011). Sine-Skewed circular distributions, *Statistical Papers*, **52**, 683-707.

[۱۳] نجیبی، س. م؛ و گل‌علی‌زاده، م. (۱۳۸۹). بررسی آماری زوایای جهت وزش باد، نشریه نده، سال هشتم، شماره دوم، ۴۹-۴۲.

## Probabilistic Modeling of Wind Direction Data Related to Meteorological Stations of Kurdistan Province Using Skew Circular Distributions

Hamidreza Mosafery Ghomi Kolahi and Mousa Golalizadeh

Department of Statistics, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

### Abstract

In studying some phenomena, the researchers are usually encountered with data that are not Euclidean in nature. To investigate the properties of these data, it is required to use some new statistical tools. Statistical methods to analysis these typical data are called non-linear statistics. Circular statistics is an example of this field. After explaining some circular distributions that are able to model skew circular data, probabilistic modeling of wind direction data related to meteorological stations of Kurdistan province is studied in this paper.

**Keywords:** Non-linear statistics, Circular distributions, Skewness, Wind direction data.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 62P12, 62H11.