محاسبه مرز کارای مدل دوسطحی خطی چندهدفه

عباس مهربانی[1] و حبیبه صادقی

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت:۱۳۹۴/۳/۲۷ تاریخ پذیرش:۱۳۹۵/۲/۲۸

چکیده: برنامه‌ریزی دوسطحی، مدلی برای مسائل بهینه‌سازی سلسله مراتبی است که در آن دو تصمیم‌گیرنده با توابع هدف، متغیرها و قیدهای متفاوتی وجود دارد. آلوز و همکاران در [۱]، روشی برای محاسبه مرز کارای مسئله دوسطحی خطی با دو تابع هدف در سطح بالا و یک تابع هدف در سطح پایین ارائه دادند. در این مقاله ما روش آن‌ها را برای حالتی که بیش از دو تابع هدف در هر دو سطح وجود دارد، تعمیم داده و با بهره‌گیری از تغییر متغیر مناسب، روش جدیدی برای محاسبه مرز کارای مسئله دوسطحی خطی با توابع هدف کسری در سطح بالا ارائه می‌دهیم. نهایتاً کارایی روش‌های پیشنهادی را با حل چند مثال عددی و مقایسه نتایج آن‌ها با دیگر روش‌ها نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی دوسطحی، برنامه‌ریزی چندهدفه، مرز کارایی، برنامه‌ریزی صحیح-آمیخته، برنامه‌ریزی کسری.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰C۲۹ و ۹۱A۶۵.

۱- مقدمه

در سازمان‌های بزرگ بخش‌های مختلفی وجود دارد که هر بخش دارای اهداف و اختیارات خاص خود می‌باشد. اجرای تصمیمات از بخش بالاتر به بخش پایین‌تر است و تصمیم هر بخش روی بخش‌های دیگر تأثیر می‌گذارد. در تصمیم‌گیری تک سطحی، تمام متغیرهای تصمیم و منابع در اختیار یک تصمیم‌گیرنده می‌باشد، به همین دلیل این نوع برنامه‌ریزی را برنامه‌ریزی متمرکز نیز می‌نامند. در برنامه‌ریزی چندسطحی[2]، چند تصمیم‌گیرنده داریم که هر یک تنها قادر به اتخاذ تصمیم برای بخشی از متغیرهای تصمیم می‌باشند، این ویژگی سبب غیر محدب شدن این نوع برنامه‌ریزی شده است. مسئله برنامه‌ریزی چندسطحی ابزاری بسیار قوی برای

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: Abbasmehr795@gmail.com

2 -Multi Level

مدل‌سازی مسائل بهینه‌سازی سلسله‌مراتبی[1] و غیرمتمرکز[2] است، هر سطح ممکن است، دارای چند تصمیم‌گیرنده و هر تصمیم‌گیرنده ممکن است دارای چندین تابع هدف باشد [۲]. فرم ریاضی این نوع برنامه‌ریزی اولین بار توسط کندلر و نورتن در سال ۱۹۷۷ به‌طور رسمی در مجلات و مقالات ارائه شد [۳]. بیشترین مقالات و کتاب‌های نوشته‌شده در این زمینه، مربوط به مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی می‌باشد. روش‌های حل برنامه‌ریزی دوسطحی را می‌توان در چهار دسته قرار داد:

الف) روش‌های مبتنی بر شمارش رئوس. پایه و اساس این روش‌ها بر این واقعیت استوار است که جواب مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی، در یک نقطه راسی از ناحیه شدنی واقع می‌باشد. کندلر و تونسلی اولین کسانی بودن که روشی بر این اساس ارائه دادند [۴]، دو سال بعد نیز بیلاس و کاروان الگوریتم معروف Kth-best را ارائه دادند [۵].

ب) روش‌های مبتنی بر شرایط کان-تاکر. امانس و بارد با استفاده از شرایط کان-تاکر، مسئله سطح دوم را به‌صورت محدودیت به قیود مسئله سطح اول اضافه کردند و بدین ترتیب مسئله دوسطحی را به یک مسئله تک سطحی تبدیل کردند [۶].

ج) روش‌های مبتنی بر مفاهیم فازی. لای اولین کسی بود که مفهوم تابع عضویت را برای به دست آوردن جواب مسائل چند سطحی به کار برد [۷]. در روش‌های فازی جواب‌های به‌دست‌آمده معمولاً رضایت‌بخش هستند.

د) روش‌های ابتکاری. این روش‌ها معمولاً دارای سرعت همگرایی بالایی هستند و جواب آن‌ها نزدیک به جواب بهین می‌باشد [۸].

برای مسائل دوسطحی چندهدفه نیز چندین روش ارائه‌شده است. در مرجع [۹] یک روش تعاملی برای حل این مسائل، با تجزیه آن‌ها به دو مسئله چندهدفه ارائه‌شده است که ده سال بعد، سینا و بکی همین روش را برای حل مسئله چندسطحی چندهدفه تعمیم دادند [۱۰]. فراهی و انصاری روشی بر اساس مفاهیم فازی و الگوریتم شمارشی رئوس ارائه دادند [۱۱]. پایم و همکارانش نیز روشی بر اساس تجزیه مسئله دوسطحی خطی چندهدفه به دو مسئله چند-هدفه خطی ارائه دادند [۱۲]. لکوانی و پونیا برای به دست آوردن جواب مسئله دوسطحی با توابع هدف کسری، روشی بر اساس مفاهیم فازی و برنامه‌ریزی آرمانی ارائه دادند [۱۳].

در این مقاله برای محاسبه مرز کارای مسئله دوسطحی خطی چندهدفه از رویکرد برنامه‌ریزی چندهدفه خطی صحیح-آمیخته استفاده شده است. در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مسئله

1- Hierarchical

2- Decentralized

دوسطحی خطی چندهدفه بیان شده و در بخش ۳ الگوریتمی برای تبدیل آن به یک مسئله چندهدفه خطی صحیح- آمیخته‌ی صفر و یک ارائه می‌شود. در بخش ۴ با بیان جهت‌های جستجو و الگوریتم نقطه مرجع[1]، روشی برای محاسبه مرز کارای مسئله چندهدفه صحیح- آمیخته ارائه می‌شود. در بخش ۵ با استفاده از نرم‌افزار (MOMILP) [۱۴]، با حل دو مثال عددی به تشریح روش و مقایسه نتیجه با دو روش موجود دیگر پرداخته شده است. در بخش ۶ برنامه‌ریزی کسری-خطی را معرفی کرده و روشی برای تبدیل مسئله دوسطحی خطی با توابع هدف کسری در سطح بالا، همراه با حل مثال عددی ارائه‌شده است. در پایان جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مباحث آمده است.

۲- مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی چندهدفه

فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی خطی چندهدفه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\max_x \left\{F_i(x,y)=c_i^1x+d_i^1y \ ,i=1,\dots,k_1\right\}\\
&\text{s.t.}\ \ A^1x\le b^1\\
&\qquad \max_y \left\{f_i(y)=c_i^2x+d_i^2y \ ,i=1,\dots,k_2\right\}\\
&\qquad \text{s.t.}\ \ A^2x+B^2y\le b^2\\
&\qquad\qquad x,y\ge 0
\end{aligned} \tag{1}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
&x,c_i\in R^{n_1},\ \ b^1\in R^{m_1}\ \ ,y,d_i\in R^{n_2}\ ,\ b^2\in R^{m_2}\\
&A^1\in R^{m_1\times n_1}\ \ ,\ \ A^2\in R^{m_2\times n_2}\ \ ,\ \ B^2\in R^{m_1\times n_2}
\end{aligned}$$

مسئله برنامه‌ریزی دوسطحی شامل دو مسئله بهینه‌سازی است که ناحیه شدنی مسئله سطح اول (رهبر[2]) به‌وسیله مسئله سطح دوم (پیرو[3]) تعیین می‌شود. توابع F_i و f_i به ترتیب توابع هدف سطح بالا و سطح پایین و متغیرهای $x\in X$ و $y\in Y$ متغیرهای تحت کنترل سطح اول و سطح دوم می‌باشند. هر تصمیم‌گیرنده از هدف و انتخاب‌های ممکن تصمیم‌گیرنده دیگر آگاهی کامل دارد. ابتدا رهبر در تلاش برای بهینه کردن تابع هدفش حرکت می‌کند، اگر او $\bar{x}$ را انتخاب کند، پیرو به ازای آن، مسئله خودش را بهینه می‌کند و با انتخاب $\bar{y}$ عکس‌العمل

1- Reference Point

2- Leader

3- Follower

نشان می‌دهد، سپس رهبر با توجه به واکنش‌های پیرو اقدام به بهینه کردن توابع هدفش می‌کند. برای تعریف جواب مسئله دوسطحی (۱) به تعاریف و مفاهیم زیر نیازمندیم:

تعریف ۱:

۱-۱. ناحیه قیدی[۱]:

$$S=\{(x,y): x\in X,\ \ y\in Y,\ \ A^1x\le b^1,\ A^2x+B^2y\le b^2\}$$

۱-۲. تصویر S بر فضای تصمیم‌گیرنده سطح اول عبارت است از:

$$S(X)=\left\{\ x\in X\quad :\exists\ \ y\in Y,\ \ni\ A^1x\le b^1,\ \ A^2x+B^2y\le b^2\right\}$$

۱-۳. مجموعه شدنی مسئله سطح دوم به ازای هر $x\in S(X)$ عبارت است از:

$$S(x)=\left\{\ y\in Y\quad :\ \ B^2y\le b^2-A^2x\right\}$$

۱-۴. مجموعه واکنش‌های منطقی[۲] پیرو به ازای هر $x\in S(X)$:

$$P(x)=\left\{y\in Y: y\in \arg\max\left[f(x,\hat{y}):\hat{y}\in S(x)\right]\right\}$$

که در آن:

$$\operatorname{argmax}\left[f(x,\hat{y}):\ \ \hat{y}\in S(x)\right]=\left\{y\in S(x):\ f(x,\hat{y})\le f(x,y)\ ,\ \hat{y}\in S(x)\right\}$$

۱-۵. ناحیه القایی[۳]: $IR=\left\{(x,y)\in S:\ y\in P(x)\right\}$.

ناحیه القایی در واقع ناحیه شدنی مسئله (۱) می‌باشد. در این مقاله قیدهای سطح اول شامل متغیرهای تحت کنترل سطح دوم نمی‌باشد، این فرض سبب همبند بودن ناحیه القایی می‌شود [۱۵]. با توجه به اینکه ناحیه القایی IR مجموعه‌ای است که رهبر روی آن تابع هدفش را بهینه می‌کند، مسئله دوسطحی (۱) با مسئله چندهدفه‌ی زیر معادل می‌شود:

$$\max\left\{F_i(x,y),\ i=1,\dots,k_1:(x,y)\in IR\right\}\qquad (۲)$$

برای وجود جواب مسئله (۱)، فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

1 - Constraint Region

2 – Rational Reaction

3 – Inducible Region

۱- ناحیه قیدی S ناتهی و فشرده باشد.

۲- $P(x)$ یک نگاشت نقطه‌به‌نقطه است.

قضیه ۱: ناحیه القایی IR مجموعه‌ای همبند است که می‌توان آن را به‌صورت قیود تساوی قطعه به قطعه خطی نمایش داد [۱۵].

قضیه ۲: اگر مفروضات بالا برقرار باشند آنگاه مسئله دوسطحی خطی دارای جواب است [۱۵].

تعریف ۲: فضای معیار[۱]: F، تصویر نقاط ناحیه القایی توسط بردار توابع هدف سطح اول را فضای معیار یا فضای توابع هدف می‌گوییم:

$$F=\left\{ F(x,y)=(F_1(x,y),\dots,F_{k_1}(x,y)):\ (x,y)\in IR \right\}$$

تعریف ۳: جواب کارا[۲]. $(x^*,y^*)\in IR$ یک جواب کارا است اگر و فقط اگر وجود نداشته باشد $(x,y)\in IR$، به‌طوری‌که $F_i(x^*,y^*)\le F_i(x,y)$ برای $i=1,\dots,k_1$ و حداقل برای یک اندیس i، $F_i(x^*,y^*)<F_i(x,y)$ باشد.

اگر (x^*,y^*) جوابی کارا باشد، آنگاه $F(x^*,y^*)=(F_1(x^*,y^*),\dots,F_{k_1}(x^*,y^*))$ بردار معیار نامغلوب[۳] نامیده می‌شود.

تعریف ۴: (جواب کارای ضعیف). $(x^*,y^*)\in IR$ یک جواب کارای ضعیف است اگر و فقط اگر وجود نداشته باشد $(x,y)\in IR$، به‌طوری‌که $F_i(x^*,y^*)<F_i(x,y)$ برای $i=1,\dots,k_1$.

لم ۱: اگر IR_E، مجموعه‌ی جواب‌های کارا و IR_{WE}، مجموعه‌ی جواب‌های کارای ضعیف باشند آنگاه رابطه $IR_E\subset IR_{WE}$ برقرار است [۱۶].

تعریف ۵: (جواب کارای پشتیبان شده[۴]). $(x^*,y^*)\in IR_E$ را یک جواب کارای پشتیبان شده می‌نامیم اگر و فقط اگر وجود نداشته باشد $(x^1,y^1),(x^2,y^2)\in IR_E$، به‌طوری‌که ترکیب محدب بردار معیارشان، بردار معیار (x^*,y^*) را مغلوب کند، در غیر این صورت $(x^*,y^*)\in IR_E$ را یک جواب کارای پشتیبان نشده می‌گوییم.

1 – Criterion Space

2 – Efficient

3 – Nondominated

4 – Supported

۳- تبدیل مسئله دوسطحی خطی چندهدفه به یک مسئله چندهدفه خطی صحیح- آمیخته

در این بخش الگوریتمی ارائه می‌دهیم که مسئله دوسطحی (۱) را به یک مسئله چندهدفه خطی معادل تبدیل می‌کند.

الگوریتم ۱

گام ۱: با استفاده از روش مجموع وزنی[1]، توابع هدف سطح دوم مسئله‌ی (۱) را با انتخاب وزن‌های $w_i > 0$ که $\sum_{i=1}^{k_2} w_i = 1$، به یک تابع هدف به فرم $\max_y \ c^2x + d^2y = \sum_{i=1}^{k_2} w_i (c_i^2 x + d_i^2 y)$ تبدیل می‌کنیم [۱]. با توجه به تعیین مقدار متغیر $x \in X$ توسط تصمیم‌گیرنده سطح اول و ارسال آن به تصمیم‌گیرنده سطح دوم، بدون از دست دادن کلیت، مسئله مجموع وزنی سطح دوم را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\max_y \ d^2y\\ &\text{s.t.} \ \ B^2y \le b^2 - A^2x\\ &\qquad y \ge 0\end{aligned}$$

گام ۲: شرایط بهینگی کاروش-کان-تاکر[2] (K.K.T) [۱۸]، متناظر با مسئله مجموع وزنی به‌دست‌آمده در گام ۱ را به‌صورت محدودیت به قیود سطح اول مسئله (۱) اضافه می‌کنیم تا مسئله دوسطحی (۱) به مسئله چندهدفه غیرخطی زیر تبدیل شود:

$$\begin{aligned}&\max_x \left\{F_i(x,y) = c_i^1x + d_i^1y \ , i = 1,\dots,k_1\right\}\\ &\text{s.t.} \ \ A^1x \le b^1 \qquad , \ A^2x + B^2y \le b^2\\ &\qquad y(\lambda B^2 - d^2) = 0 \ , \ \lambda(b^2 - A^2x - B^2y) = 0\\ &\qquad \lambda B^2 \ge d^2 \qquad , \ x, y, \lambda \ge 0 \ , \lambda \in R^{m_2}\end{aligned} \tag{۳}$$

گام ۳: دو محدودیت غیرخطی در مسئله چندهدفه (۳) را با کمک متغیرهای صفر و یک $u \in \{0,1\}^{m_2}$ و $v \in \{0,1\}^{n_2}$ و انتخاب یک عدد ثابت M به محدودیت‌های خطی تبدیل می‌کنیم [۲].بدین ترتیب مسئله (۳) به مسئله چندهدفه خطی صحیح- آمیخته زیر تبدیل می‌شود:

1 – Weighted Sum Method

2 – Karush-Kuhn-Tucker Conditions

$$\begin{aligned}&\max_x \left\{F_i(x,y)=c_i^1x+d_i^1y,\ i=1,\dots,k_1\right\}\\&\text{s.t.}\ \ A^1x\le b^1,\ A^2x+B^2y\le b^2,\ \lambda B^2\ge d^2\\&\quad \lambda+Mu\le Me,\ -A^2x-B^2y-Mu\le -b^2,\ y+Mv\le Me\\&\quad \lambda B^2-Mv\le d^2,\quad x,y,\lambda\ge 0,\ \lambda\in R^{m_2},\ u\in\{0,1\}^{m_2},\ v\in\{0,1\}^{n_2}\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن M یک عدد مثبت و به‌اندازه‌ی کافی بزرگ و (۱ , ... , ۱ , ۱) =**e** بردار واحد با بعد مناسب می‌باشد.

قضیه ۳: مسئله دوسطحی (۱) و مسئله چندهدفه خطی (۴) را در نظر بگیرید، (x',y') جوابی کارا برای مسئله (۱) است اگر و تنها اگر بردارهای λ',u',v' و عدد ثابت $M\ge 0$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که (x',y',λ',u',v') جواب کارای مسئله (۴) باشد.

اثبات: مسئله مجموع وزنی حاصل از گام یک در الگوریتم ۱ و دوگان آن به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{array}{lcl}\text{Primal:} & \Leftrightarrow & \text{Dual:}\\ \quad \max\ d^2y & & \quad \min\ \lambda(b^2-A^2x)\\ \quad \text{s.t}\ \ B^2y\le b^2-A^2x & & \quad \text{s.t}\ \ \lambda B^2\ge d^2\\ \quad\quad y\ge 0 & & \quad\quad \lambda\ge 0\end{array}$$

لذا شرایط مکمل زائد[1] عبارتند از:

$$\lambda(b^2-A^2x-B^2y)=0,\quad y(\lambda B^2-d^2)=0$$

می‌دانیم اگر نقطه‌ای در شرایط K.K.T صدق کند، جواب شدنی و بهین مسئله اولیه و دوگان می‌باشد، بنابراین (x',y') جواب کارای مسئله دوسطحی (۱) است اگر و تنها اگر (x',y',λ') جواب کارای مسئله (۳) باشد. حال نشان می‌دهیم که هر شرط مکمل زائد غیرخطی با سه محدودیت خطی معادل است، به‌عنوان نمونه نشان می‌دهیم:

$$\lambda(b^2-A^2x-B^2y)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}A^2x+B^2y\le b^2 & \text{(a)}\\ \lambda+Mu\le Me & \text{(b)}\\ -A^2x-B^2y-Mu\le -b^2 & \text{(c)}\end{cases}$$

با فرض اینکه M یک عدد به‌اندازه کافی بزرگ می‌باشد، برای هر مؤلفه‌ی بردار دودویی u دو حالت ممکن است رخ دهد:

1- Complementary Slackness Conditions

حالت اول: اگر $u_i = 1$ باشد، از قید iام محدودیت (b) و شرط $\lambda_i \geq 0$ نتیجه می‌شود $\lambda_i = 0$، لذا شرایط مکمل زائد برقرار می‌شود.

حالت دوم: اگر $u_i = 0$ باشد، آنگاه با توجه به قید i ام محدودیت (b)، λ_i می‌تواند مقادیر نامنفی گرفته و اشتراک محدودیت‌های (a) و (c)، تساوی $(b^2 - A^2x - B^2y = 0)_i$ را ایجاب می‌کند؛ بنابراین شرایط مکمل زائد برقرار است. به‌طور مشابه نیز می‌توان ثابت کرد که محدودیت غیرخطی $y(\lambda B^2 - d^2) = 0$ با محدودیت‌های خطی $\lambda B^2 \geq d^2, \lambda B^2 - Mv \leq d^2, \ y + Mv \leq Me$ معادل می‌شود، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مسائل (۱) و (۴) معادل هستند.

۴- محاسبه نقاط کارای مسئله چندهدفه صحیح- آمیخته

اکثر روش‌های حل مسائل چندهدفه، مسئله را به فرم یک مسئله تک هدفه تبدیل می‌کنند که اصطلاحاً به آن‌ها روش‌های اسکالرساز[1] گفته می‌شود [۱۶]. جواب حاصل از روش‌های اسکالرساز، معمولاً جوابی کارا یا کارای ضعیف، برای مسائل چندهدفه می‌باشد. جواب‌های کارا به دو دسته کارای پشتیبان شده و کارای پشتیبان نشده تقسیم می‌شوند که جواب‌های کارای پشتیبان نشده بخش عمده‌ای از جواب‌های کارا را تشکیل می‌دهند. در مسائل نامحدب بعضی از روش‌های اسکالرساز مانند روش مجموع وزنی نمی‌تواند جواب‌های کارای پشتیبان نشده را به دست آورند، اما روش نقطه مرجع این کارایی را دارد که تمام نقاط کارا اعم از پشتیبان شده و پشتیبان نشده را به دست آورد [۱]. حال الگوریتمی ارائه می‌دهیم تا مرز کارا مسئله دوسطحی خطی چندهدفه را به دست آوریم.

الگوریتم ۲

محاسبه مرز کارای مسئله (۱):

گام ۱: مسئله دوسطحی (۱) را با استفاده از الگوریتم ۱ به مسئله چندهدفه خطی صحیح-آمیخته (۴) تبدیل می‌کنیم.

گام ۲: هر تابع هدف مسئله (۴) را به‌تنهایی در فضای محدودیت‌ها بهینه می‌کنیم و جواب بهین آن را به دست می‌آوریم. با فرض اینکه (x^i, y^i) جواب‌های بهین مسائل تک هدفه و

1- Methods Scalarization

$F_i(x^i, y^i) = F_i^*$ برای $i = 1, ..., k_1$ باشد، جدول بازدهی[1] مسئله چندهدفه صحیح -آمیخته (۴) به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

جدول (۱): جدول بازدهی مسئله (۴)

	$F_۱$	$F_۲$	…	$F_{K_۱}$
(x^1, y^1)	$F_۱^*$	$F_۲^۱$	…	$F_{K_۱}^۱$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
(x^{k_1}, y^{k_1})	$F_۱^{K_۱}$	$F_۲^{K_۱}$	…	$F_{K_۱}^*$

قرار می‌دهیم $i = ۰$

گام ۳: $i \leftarrow i+1$ قرار داده و نقطه مرجع را $q^i = \left(F_1^i \ ,..., F_i^*, \ldots, F_k^i\right)$ در نظر می‌گیریم، مسئله اسکالرساز مین– ماکس افزوده زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\text{Min}\left\{\max_i((F_i^* - F_i(x,y)) - \rho\sum_{i=1}^{k_1} F_i(x,y)\right\}\\
&\text{s.t. } A^1x \le b^1,\ A^2x + B^2y \le b^2,\ \lambda B^2 \ge d^2 \qquad (۵)\\
&\lambda + Mu \le Me,\ -A^2x - B^2y - Mu \le -b^2,\ y + Mv \le Me,\ \lambda B^2 - Mv \le d^2\\
&x, y, \lambda \ge ۰, \lambda \in R^{m_2}, u \in \{۰,1\}^{m_2}, v \in \{۰,1\}^{n_2}
\end{aligned}$$

که در آن ρ عددی ثابت و به‌اندازه‌ی کافی کوچک می‌باشد [۱۹]. جواب بهین مسئله (۵) جواب کار آیی است که تصویر آن در فضای توابع هدف، نزدیک‌ترین نقطه از مجموعه نقاط نامغلوب به نقطه مرجع برحسب نرم چبیشف[2] (L_∞) می‌باشد.

گام ۴: مقدارهای $F_j(x,y)$ برای $j \ne i, j = 1, ..., k_1$ را بهبود می‌بخشیم. برای این منظور نقاط مرجع جدید را به‌صورت $q^{i,j,r} = \left(F_1^i, \ldots, F_i^*, ..., F_j^i + \theta_r^j, \ldots, F_{k_1}^i\right)$ در نظر می‌گیریم. در این گام مقدار $\theta_r^j > ۰$ به‌طور متوالی افزایش داده می‌شود. به علت پیوسته بودن پارامتر θ_r^j، هر چه مقدار افزایش کوچک‌تر انتخاب شود، فاصله نقاط کارای به‌دست‌آمده کمتر می‌باشد. به این

1- Pay-off

2 – Tchebyche Metric

شیوه تغییر نقطه مرجع، روش جستجوی جهت‌دار[1] می‌گویند [۱]. این تغییر نقطه مرجع تا زمانی ادامه می‌یابد که جواب مسئله (۵) نقطه کارایی به دست آید که به ازای آن تابع هدف j ام به مقدار بهینه‌اش (F_j^*) در جدول بازدهی برسد.

گام ۵: اگر $i > k_1$ توقف کنید، در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

این الگوریتم با نقاط کارایی که تابع i ام، $i=1,\dots,k_1$ را ماکزیمم می‌کند، آغاز و با به دست آوردن متوالی جواب‌های کارا و رسیدن به نقطه‌ی کارایی که تابع j ام $j=1,\dots,k_1$ به ازای آن بهینه می‌شود، به پایان می‌رسد. برای مسئله‌ای با k تابع هدف، باید تعداد $\binom{k}{2}=\frac{k!}{2!(k-2)!}$ جهت جستجو انجام شود تا مرز کارای مسئله چندهدفه صحیح-آمیخته (۴) به دست آید.

۵- نتایج محاسباتی

مثال ۱. برای تشریح الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله، مرز کارای مسئله دوسطحی خطی زیر را با چهار تابع هدف در سطح بالا و دو تابع هدف در سطح پایین به دست می‌آوریم.

$$
\begin{aligned}
&\max_X F_1(x,y)=2x_1-4x_2+y_1-y_2\\
&\max_X F_2(x,y)=-x_1+2x_2-y_1+5y_2,\\
&\max_X F_3(x,y)=x_1-y_2\\
&\max_X F_4(x,y)=-x_1-2x_2+y_1+2y_2\\
&\text{s.t}\ \max_y f_1(x,y)=2x_1+2x_2+3y_1-y_2\\
&\qquad \max_y f_2(x,y)=-x_1-x_2+3y_1+2y_2\\
&\qquad \text{s.t.}\quad 4x_1+3x_2+2y_1+y_2\le 60\ ,\ \ 2x_1+x_2+3y_1+4y_2\le 60\\
&\qquad\qquad\qquad x_1,x_2,y_1,y_2\ge 0
\end{aligned}
$$

مرحله ۱: با انتخاب وزن‌های $w_1=\frac{1}{3},\ w_2=\frac{2}{3}$ تابع هدف مجموع وزنی متناظر مسئله دو-هدفه سطح دوم، به‌صورت $\max_y f(y)=3y_1+y_2$ به دست می‌آید. برای چگونگی انتخاب وزن‌ها و تأثیر تغییرات وزن بر جواب‌های مسئله می‌توان به [۱۶] مراجعه کرد.

مرحله ۲: مسئله مجموع وزنی متناظر با مسئله چندهدفه سطح دوم را با شرایط K K.T متناظر با آن جایگزین کرده و به‌صورت محدودیت به قیود مسئله سطح اول اضافه می‌کنیم،

1 - Directional Search

سپس محدودیت‌های غیرخطی مربوط به شرایط مکمل زائد را به محدودیت‌های خطی، تبدیل می‌کنیم:

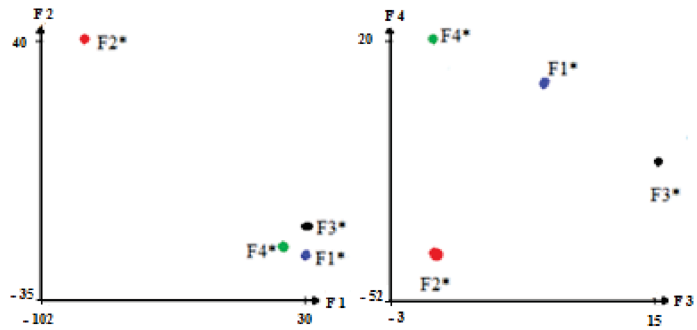
$$\begin{aligned}
&\max_X F_1(x,y) = 2x_1 - 4x_2 + y_1 - y_2\\
&\max_X F_2(x,y) = -x_1 + 2x_2 - y_1 + 5y_2,\\
&\max_X F_3(x,y) = x_1 - y_2\\
&\max_X F_4(x,y) = -x_1 - 2x_2 + y_1 + 2y_2\\
&\text{s.t.} \quad 4x_1 + 3x_2 + 2y_1 + y_2 \le 60 \ , \ 2x_1 + x_2 + 3y_1 + 4y_2 \le 60\\
&\qquad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \ge 3 \quad , \quad \lambda_1 + 4\lambda_2 \ge 1\\
&\qquad 4x_1 + 3x_2 + 2y_1 + y_2 + Mu_1 \ge 60 \quad , \quad \lambda_1 + Mu_1 \le M\\
&\qquad 2x_1 + x_2 + 3y_1 + 4y_2 + Mu_2 \ge 60 \quad , \quad \lambda_2 + Mu_2 \le M\\
&\qquad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - Mv_1 \le 3 \quad , \quad y_1 + Mv_1 \le M\\
&\qquad 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - Mv_2 \le 1 \quad , \quad y_1 + Mv_2 \le M\\
&\qquad x_1, x_2, y_1, y_2, \lambda_1, \lambda_2 \ge 0 \quad , \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

مرحله ۳: با در نظر گرفتن M=۱۵۰ و استفاده از نرم‌افزار (MOMILP) جدول بازدهی مسئله مرحله قبل و نمودار نقاط نامغلوب را به دست می‌آوریم.

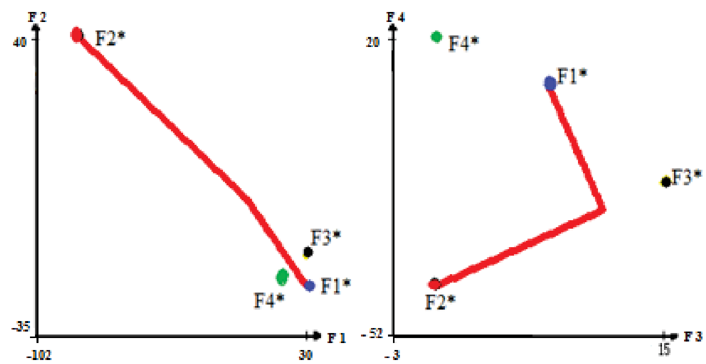
جدول (۲): جدول بازدهی مسئله مرحله ۲

	F_1	F_2	F_3	F_4
(x^1, y^1)	۳۰	-۲۲/۵	۷/۵	۷/۵
(x^2, y^2)	-۸۰	۴۰	۰	-۴۰
(x^3, y^3)	۳۰	-۱۵	۱۵	-۱۵
(x^4, y^4)	۲۰	-۲۰	۰	۲۰

مرحله ۴: با قرار دادن $q^1 = (F_1(x^1,y^1),...,F_4(x^1,y^1)) = (30, -22/5, 7/5, 7/5)$ به‌عنوان اولین نقطه مرجع و در نظر گرفتن $\rho = 10^{-3}$ و حل مسئله مین – ماکس افزوده (۵)، نقطه کار آیی دست می‌آید که مقدار تابع هدف اول به ازای آن بهینه است. با در نظر گرفتن $\theta_r^2 > 0,\ q^{12r} = (30, -22/5 + \theta_r^2,\ 7/5, 7/5)$ به‌عنوان نقاط مرجع جدید، جستجوی جهت‌داری را برای بهبود مقدار تابع هدف دوم آغاز می‌کنیم. افزایش متوالی مقدار θ_r^2، تا زمانی ادامه دارد که نقطه کارایی که به ازای آن مقدار تابع هدف دوم بهینه می‌باشد، به دست آید.

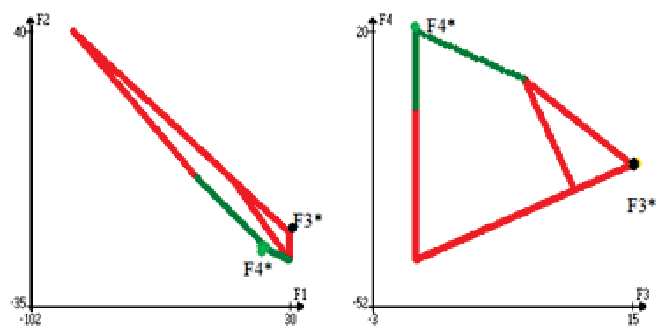


شکل (۱): نقاط نامغلوب به‌دست‌آمده در جدول بازدهی در فضای توابع هدف $(F_1 - F_2)$ و $(F_3 - F_4)$.



شکل (۲): نقاط نامغلوب به‌دست‌آمده در پایان مرحله (۴).

مرحله ۵: با بررسی همه‌ی جهت‌های جستجو، نقاط کارای دیگر مسئله به دست می‌آید. در شکل ۳ تصویر نقاط کارای به‌دست‌آمده‌ی مثال ۱ در فضای توابع هدف نشان داده‌شده است.



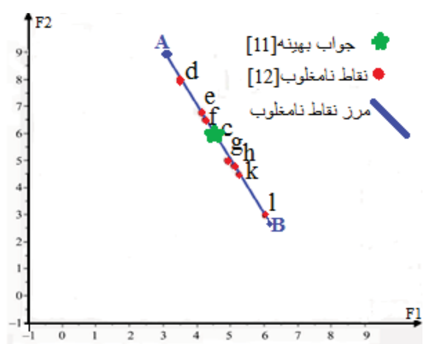
شکل (۳): مرز نقاط نامغلوب مثال ۱ در فضای توابع هدف $(F_1 - F_2)$ و $(F_3 - F_4)$.

در مثال بعد نتایج الگوریتم ارائه‌شده با جواب‌های حاصل از روش‌های دیگر، مقایسه می‌گردد.

مثال ۲. مسئله دوسطحی زیر که هر سطح دارای دو تابع هدف می‌باشد را در نظر بگیرید [۱۲]:

$$
\begin{aligned}
&\max_x\ F_1 = x_1 + 2x_2\\
&\max_x\ F_2 = 3x_1 + x_2\\
&\text{s.t.}\ \ x_1 + x_2 \le 3\\
&\qquad \max_y\ f_1 = y_1 + 3y_2\\
&\qquad \max_y\ f_2 = 2y_1 + y_2\\
&\qquad\quad \text{s.t.}\quad -x_1 + y_1 + y_2 \le 6\\
&\qquad\qquad\qquad\quad -x_2 + y_1 \le 3\\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_1 + x_2 + y_2 \le 8\\
&\qquad\qquad\qquad\quad x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

با روش ارائه‌شده در مقاله [۱۱]، تنها جواب کارای $(F_1, F_2) = (4/5\,, 6)$ با بردار معیار $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) = (1/5\ ,1/5\ ,4/1154\ ,3/3846)$ به‌دست‌آمده است که با نقطه c در شکل ۳ مشخص‌شده است. با روش ارائه‌شده در مقاله [۱۲]، هفت جواب کارا به‌دست‌آمده است که بردارهای معیار متناظرشان را با نقاط d، e، f، g، h، k و l در شکل ۴ نشان داده‌ایم. با روش ارائه‌شده در این مقاله تقریبی از مرز نقاط نامغلوب که همان پاره‌خط AB می‌باشد را به دست آورده‌ایم.



شکل (۴): نقاط نامغلوب به‌دست‌آمده در مقالات [۱۱ و ۱۲] و مرز نقاط نامغلوب.

۶- برنامه‌ریزی کسری

در برخی از کاربردها، تابع هدف مدل به‌صورت نسبتی از دو تابع دیگر معرفی می‌شود، مانند بیشینه‌سازی نسبت سود به سرمایه (بازدهی) یا نسبت کود مصرفی به سطح زیر کشت (شاخص پایداری). این نوع مسائل، مسائل برنامه‌ریزی کسری نام دارند. در چهار دهه اخیر، مسائل برنامه‌ریزی کسری به‌عنوان ابزار مهمی جهت مدل‌سازی مسائل واقعی زندگی، مورداستفاده قرارگرفته‌اند. چارنز و کوپر برای اولین بار در سال ۱۹۶۲ مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی را به مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل کردند و خواص دقیق و کاملی از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی با ارجاع به مدل برنامه‌ریزی خطی ارائه دادند [۲۰]. اگر بیش از یک تابع هدف کسری خطی برای بهینه‌سازی داشته باشیم، مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه کسری خطی حاصل می‌شود که مدل آن به فرم زیر است:

$$\operatorname{Max}\ Z(x)=[z_i(x)=\frac{c_i x+\alpha_i}{d_i x+\beta_i}=\frac{N_i(x)}{D_i(x)}\ ,\ i=1,\dots,k] \qquad (۶)$$

گپتی و همکارش با بهره‌گیری از چند تغییر متغیر مناسب، مسئله چندهدفه کسری خطی (۶) را به یک مسئله چندهدفه خطی هم‌ارز تبدیل کردند [۲۱]. ما این روش تغییر متغیر را برای مسائل دوسطحی خطی با توابع هدف کسری در سطح بالا، توسعه می‌دهیم.

لم ۲ [۲۱]. در مسئله (۶) اگر برای همه نقاط مجموعه Δ، داشته باشیم $N_i(x)<0,\ D_i(x)>0$ آنگاه روی مجموعه Δ داریم:

$$\operatorname{Max}\ \frac{N_i(x)}{D_i(x)}=\min\ \frac{-N_i(x)}{D_i(x)}=\operatorname{Max}\ \frac{D_i(x)}{-N_i(x)}.$$

فرم کلی مسئله دوسطحی خطی با توابع هدف کسری در سطح بالا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\max_x \left\{F_i(x,y)=\frac{c_i^1x+d_i^1y+\alpha_i}{e_i^1x+f_i^1y+\beta_i}=\frac{N_i(x,y)}{D_i(x,y)}\quad ,\ i=1,\dots,k_1\right\}\\
&\text{s.t.}\ \ A^1x\le b^1\\
&\qquad \max_y\left\{f_i(y)=c_i^2x+d_i^2y\ \ ,\ i=1,\dots,k_2\right\}\\
&\qquad \text{s.t.}\ \ A^2x+B^2y\le b^2\\
&\qquad\qquad x,y\ge 0
\end{aligned} \qquad (۷)$$

با فرض همواره مثبت بودن مخرج کسر توابع هدف سطح اول، الگوریتم ۳ را برای تبدیل مسئله (۷) به فرم یک مسئله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی صحیح-آمیخته پیشنهاد می‌دهیم.

الگوریتم ۳

گام ۱. مطابق گام یک و دو از الگوریتم ۱، در بخش ۲ عمل می‌کنیم.

گام ۲. با فرض

$$I=\{i:\exists(x,y)\in S \mid N_i(x,y)\geq 0\},\ I^c=\{i:\forall(x,y)\in S \mid N_i(x,y)<0\}$$

و استفاده از تغییر متغیرهای

$$\nabla=\left\{\frac{1}{D_i(x,y)}\geq t\ ;i\in I,\ \frac{-1}{N_i(x,y)}\geq t\ ;i\in I^c\right\}$$

و $x'=tx$, $y'=ty$ توابع هدف کسری خطی را به توابع هدف خطی تبدیل می‌کنیم، لذا مسئله (۷) با مسئله زیر معادل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\begin{Bmatrix} z_i'=tN_i\left(\dfrac{x'}{t},\dfrac{y'}{t}\right),\ i\in I \\ z_i'=tD_i\left(\dfrac{x'}{t},\dfrac{y'}{t}\right),\ i\in I^c \end{Bmatrix}\\
&\text{s.t.}\quad tD_i\left(\frac{x'}{t},\frac{y'}{t}\right)\leq 1,\ i\in I\\
&\qquad tN_i\left(\frac{x'}{t},\frac{y'}{t}\right)\leq 1,\ i\in I^c\\
&\qquad A^1x'\leq tb^1\ ,\ A^2x'+B^2y'\leq tb^2\\
&\qquad y'(\lambda B^2-d^2)=0,\ \lambda(tb^2-A^2x'-tB^2)=0\\
&\qquad \lambda B^2\geq d^2\\
&\qquad y',x',\lambda\geq 0,\ t>0\ ,\ \lambda\in R^{m_2}
\end{aligned}\tag{۸}$$

تذکر: بنا به لم ۱ در [۲۰]، برای هر جواب شدنی مسئله (۸)، $t>0$ می‌باشد؛ بنابراین می‌توان محدودیت $t\geq 0$ را بجای، محدودیت $t>0$ قرار داد.

گام ۳: مطابق گام سه الگوریتم ۱، در بخش ۲ عمل می‌کنیم.

برای مشخص کردن مجموعه‌های I و I^c، مقدار بهینه صورت کسر هر تابع هدف مسئله (۶) یعنی $N_i(x,y)$ برای $i=1,...,k$ را، به‌تنهایی با توجه به فضای شدنی به دست می‌آوریم، اگر مقدار بهینه آن نامنفی باشد آنگاه $i\in I$ و اگر مقدار بهینه آن منفی باشد، $i\in I^c$ می‌باشد.

حال مرز کارای مثال زیر را به روش پیشنهادی به دست می‌آوریم.

مثال ۳. مسئله دوسطحی کسری خطی زیر که دارای دو تابع هدف کسری در سطح بالا و دو تابع هدف خطی در سطح پایین می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&\max_x \ F_1(x,y)=\frac{2x-y}{x+y+1}\\
&\max_x F_2(x,y)=\frac{-x-2y-3}{x+2y+2}\\
&\text{s.t.}\ \ \max_y \ \ f_1(x,y)=-2x+y\\
&\qquad \max_y f_2(x,y)=x+y\\
&\qquad \text{s.t.}\ -x+y\le 4 \quad , \ x+y\le 10\ , \ x+\frac{1}{2}y\le 8\\
&\qquad\qquad x,y\ge \circ
\end{aligned} \tag{۹}$$

مرحله ۱. با انتخاب وزن‌های $w_1=\frac{1}{3}$ و $w_2=\frac{2}{3}$، برای توابع هدف سطح دوم تابع هدف مجموع وزنی به‌صورت $\max_y f(y)=y$ به دست می‌آید.

مرحله ۲. شرایط K.K.T متناظر با مسئله مجموع وزنی سطح دوم به‌صورت محدودیت به قیود مسئله سطح اول اضافه می‌شود.

مرحله ۳. $I=\{1:2x-y\ge \circ\}$ و $I^c=\{2:-x-y-3<\circ\}$، اکنون با استفاده از تغییر متغیرهای $x'=tx,\ y'=ty$ و $\nabla=\left\{\frac{1}{x+y+1}\ge t\ ,\ \frac{-1}{-x-y-3}\ge t\right\}$ مسئله مرحله قبل را به یک مسئله چندهدفه تبدیل می‌کنیم.

مرحله ۴. با تبدیل محدودیت‌های غیرخطی مسئله، در مرحله قبلی، به محدودیت‌های خطی، مسئله زیر را به دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&\max_x \; F_1'(x',y',t) = 2x' - y' \\
&\max_x \; F_2'(x',y',t) = x' + 2y' + 2t \\
&\text{s.t.} \quad -x' + y' \le 4t \quad , \quad -x' + y' - 4t + Mu_1 \ge \circ \\
&\qquad x' + y' \le 10t \quad , \quad x' + y' - 10t + Mu_2 \ge \circ \\
&\qquad x' + \frac{1}{2}y' \le 8t \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 - Mv_1 \le 1 \\
&\qquad \lambda_1 + Mu_1 \le M \quad , \quad \lambda_2 + Mu_2 \le M \\
&\qquad \lambda_3 + Mu_3 \le M \quad , \quad y' + Mv_1 \le M \\
&\qquad x' + y' + t \le 1 \quad , \quad x' + 2y' + 3t \le 1 \\
&\qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_3 \ge 1 \\
&\qquad x', y', \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge \circ \, , \; t \ge \circ, \quad u_1, u_2, u_3, v_1 \in \{\circ, 1\}
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

مرحله ۵. جدول بازدهی مسئله (۱۰) را به دست می‌آوریم.

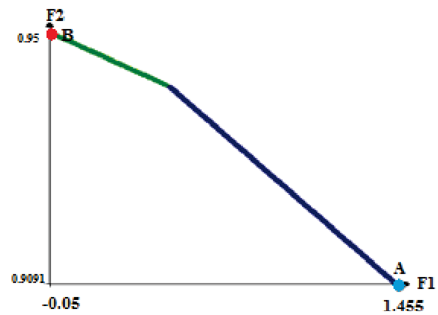
جدول (۳): جدول بازدهی مسئله (۱۰)

F_1'	F_2'	x'	y'	t	λ_1	λ_2	λ_3	u_1	u_2	u_3	v_1
$1/\overline{45}$	$0/\overline{90}$	$0/\overline{72}$	۰	$0/0\overline{90}$	۰	۰	۲	۱	۱	۱	۱
$-0/05$	$0/95$	$0/15$	$0/35$	$0/05$	۱	۰	۰	۰	۰	۱	۰

نقاط نامغلوب A و B که تصویر نقاط کارای به‌دست‌آمده از جدول بازدهی (۳) هستند، در شکل ۵ در فضای توابع هدف نشان داده‌شده‌اند.

شکل (۵): نقاط نامغلوب به‌دست‌آمده از جدول بازدهی مسئله (۱۰).

مرحله ۶. با در نظر گرفتن $q^1=(1/\overline{45},0/\overline{90})$ به‌عنوان اولین نقطه مرجع و در نظر گرفتن $\rho=10^{-3}$ و حل مسئله مین– ماکس افزوده (۵)، نقطه کارایی به دست می‌آید که تابع هدف اول به ازای آن بهینه است. تصویر این نقطه در فضای توابع هدف نقطه A می‌باشد که در شکل ۵ نشان داده‌شده است. با در نظر گرفتن $q^{1,2,r}=\left(1/\overline{45}\,,0/\overline{90}+\theta_r^2\right)$ به‌عنوان نقاط مرجع جدید و افزایش متوالی $\theta_r^2>0$، نقاط کارایی به دست می‌آید که مقدار تابع هدف دوم آن‌ها در حال افزایش است.



شکل (۶): مرز نقاط نامغلوب مسئله (۱۰).

هنگامی‌که به نقطه مرجع $q^{1,2,358}=(1/\overline{45},2/55\overline{45})$ می‌رسیم تابع هدف دوم به مقدار بهینه‌اش می‌رسد. لذا محاسبه نقاط کارا به پایان رسیده است. مرز نقاط نامغلوب در شکل ۶، نشان داده‌شده است. متناظر با هر جواب کارای مسئله (۱۰)، با تغییر متغیرهای $x=\frac{x'}{t},\ y=\frac{y'}{t}$ جواب کارای مسئله (۹) را می‌توان به دست آورد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله برای محاسبه مرز کارای مسائل دوسطحی خطی چندهدفه و مسائل دوسطحی خطی با توابع هدف کسری در سطح بالا از رویکرد برنامه‌ریزی چندهدفه صحیح-آمیخته استفاده کرده‌ایم. در مسائل چندهدفه مجموعه نقاط کارا مجموعه‌ای نامتناهی است که با روش پیشنهادی و استفاده از نرم‌افزار (MOMILP)، کل مرز نقاط کارا به دست می‌آید. به علت نامحدب بودن فضای جواب مسئله چندهدفه صحیح-آمیخته، برای به دست آوردن نقاط کارای آن از روش نقطه مرجع استفاده‌شده زیرا این کارایی را دارد که در مسائل نامحدب تمام نقاط کارا اعم از نقاط کارای پشتیبان شده و پشتیبان نشده را به دست آورد.

مراجع

[1] Alves, M.J., Dempe, S. and Júdice, J.J. (2012). Computing the Pareto frontier of a bi-objective bi-level linear problem using a multi-objective mixed-integer programming algorithm. *Optimization*, **61**, 335-358.

[2] Dempe, S. (2002). Foundations of bi-level programming. Non-convex optimization and its applications, Dordrecht, Kluwer.

[3] Candler, W., and Norton, R. (1977). Multi-level programming and development policy, Washington, D.C, The World Bank.

[4] Candler, W., and Townsley, R. (1982). A linear two-level programming problem. *Computers and Operations Research*, **9**, 59-76.

[5] Bialas, W.F. and Karwan, M.H. (1984). Two-level linear programming. *Management science*, **30**, 1004-1020.

[6] Edmunds, T. A., and Bard, J. F. (1991). Algorithms for nonlinear bi-level mathematical programs. Systems, Man and Cybernetics, *IEEE Transactions on Systems*, **21**, 83-89.

[7] Lai, Y.J. (1996). Hierarchical optimization: a satisfactory solution. *Fuzzy Sets and Systems*, **77**, 321-335.

[8] Calvete, H.I. and Galé, C. (2011). On linear bi-level problems with multiple objectives at the lower level. *Omega*, **39**, 33-40.

[9] Shi, X., and Xia, H. (1997). Interactive bi-level multi-objective decision-making. *Journal of the operational research society*, **48**, 943-949.

[10] Abo-Sinna, M. A. and Baky, I.A. (2007). Interactive balance space approach for solving multi-level multi-objective programming problems. *Information Sciences*, **177**, 3397-3410.

[11] Farahi, M. H. (2010). A new approach to solve multi-objective linear bi-level programming problems. *Journal of Mathematics and Computer Sciences*, **1**, 313-320.

[12] Pieume, C.O., Marcotte, P., Fotso, L.P. and Siarry, P. (2011). Solving bi-level linear multi-objective programming problems. *American Journal of Operations Research*, **1**, 214-219.

[13] Lachhwani, K. and Poonia, M.P. (2012). Mathematical solution of multilevel fractional programming problem with fuzzy goal

programming approach. *Journal of Industrial Engineering International*, **8**, 1-11.

[14] Alves, M.J. and Clımaco, J. (2004). A note on a decision support system for multi-objective integer and mixed-integer programming problems. *European Journal of Operational Resea*rch, **155**, 258-265.

[15] Mersha, A. G. and Dempe, S. (2006). Linear bi-level programming with upper level constraints depending on the lower level solution. *Applied Mathematics and Computatio*n, **180**, 247-254.

[16] Ehrgott, M. (2006). *Multi-criteria optimization*. Berlin, Springer.

[17] Alves, M.J. and Clı́maco, J. (2000). An interactive reference point approach for multi-objective mixed-integer programming using branch-and-bound. *European Journal of Operational Research*, **124**, 478-494.

[18] Bard, J. F. (1999). *Practical Bi-level Optimization*: Algorithms and Applications, Berlin, Springer.

[19] Wierzbicki, A.P. (1980). The use of reference objectives in multi-objective optimization. In Multiple criteria decision making theory and application (pp. 468-486). Springer Berlin Heidelberg.

[20] Charnes, A. and Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functional. *Naval Research logistics quart*erly, **9**, 181-186.

[21] Chakraborty, M. and Gupta, S. (2002). Fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem. *Fuzzy sets and systems*, **125**, 335-342.

Computing the Pareto Frontier of a Linear Multi-objective Bi-level Model

Abbas Mehrabani and Habibe Sadeghi

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

Bi-level programming is a model for hierarchical optimization problems in which there are two decision makers with different objective functions, variables and constraints. Alves et. Al. [1], proposed a method for computing the Pareto frontier of bi-level linear problem with bi-objective at the upper level and a single objective function at the lower level. In this paper, we extend their method for the situation in which there exists more than two objective functions at both levels, and then by using a suitable exchange variable, we propose a new method for computing the Pareto frontier of bi-level linear problem with fractional multi-objective at the upper level. Finally, we will show the efficiency of the proposed approaches by solving a few numerical examples and comparing the results with other methods.

Keywords: Bi-level programming, Multi-objective programming, Pareto frontier, Mixed- integer programming, Fractional programming.

Mathematics Subject Classification (2010): 91A65, 90C29.