

ارائه فرمول‌بندی جدید جهت برون‌یابی پاسخ میدان موج لرزه‌ای و مشتق آن

فرزاد مرادپوری^{۱*}، علی مرادزاده^{**}، ری‌نام کروزی پستانا^{***} و مهرداد
سلیمانی منفرد^{*}

^{*} دانشکده مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
^{**} دانشکده مهندسی معدن، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران؛ استاد همکار دانشکده
مهندسی معدن، نفت و ژئوفیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود
^{***} گروه ژئوفیزیک و زمین‌شناسی، دانشگاه فدرال باهیا، برزیل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۴/۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۲/۲۸

چکیده: در این مطالعه، امکان ارائه یک انتگرال‌گیر ترکیبی منتج شده از روش لیپفراگ (L) و روش بسط سریع (REM) برای تغییرات سرعت با مکان، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در ابتدا امکان تقریب میدان موج در هر گام زمانی با استفاده از روش بسط سریع مورد بحث قرار گرفته و سپس معادله موج بر اساس سیستم همیلتونی بازنویسی شده است. این امر حل دقیق معادله موج صوتی با سرعت متغیر را برای شبیه‌سازی پاسخ فشار میدان موج در هر زمان فراهم می‌آورد. در ادامه برای برون‌یابی میدان موج و مشتقات آن، امکان انتگرال‌گیری ترکیبی بر اساس روش بسط سریع و لیپفراگ مورد بررسی قرار گرفته و چگونگی فرمول‌نویسی آن ارائه شده است. در نهایت برای اولین بار فرمول جدیدی برای برون‌یابی میدان موج و مشتق آن در گام‌های مختلف ارائه شده است. نتایج حاصل روی مثال عددی نشان می‌دهد که استفاده از این فرمول برای برآورد میدان موج و مشتق آن دارای سطح دقت و پایداری بسیار بالایی می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: میدان موج لرزه‌ای، روش تفاضل محدود، روش لیپفراگ، روش بسط سریع.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۵E۹۹، ۱۵A۸۶.

۱- مقدمه

استفاده از تقریب‌های تفاضل محدود برای برآورد زمانی فشار میدان موج بسیار رایج می‌باشد [۱،۲،۳]. تقریب مشتق زمان به این طریق می‌تواند منجر به خطاهای عددی و بنابراین انحراف شکل پالس و ایجاد پراکندگی شبکه^۱ گردد.

اگرچه توسعه کار برای مشتق زمان، خیلی هم راه‌حل ساده و روشنی ندارد. کارهای زیادی در جهت توسعه عملگر مشتق زمان، با استفاده از توسعه روش‌های تفاضل محدود مراتب بالاتر ارائه شده است [۳،۴،۵،۶،۷]. به‌طور جایگزین، روش بسط سریع^۲ ارائه شده توسط کوزلوف و همکاران [۸] می‌تواند برای به دست آوردن انتگرال زمانی معادله موج با دقت بیشتر مورد استفاده گیرد. بر اساس حل معادله موج درجه دو و با استفاده از مفاهیم مشابه همانند کارهای ارائه شده توسط تال-اِذر^۳ و همکاران [۹] و چند جمله‌ای‌های چبیشف^۴ در روش REM عملگر کسینوس بسط داده می‌شود.

در این مطالعه برای مورد سرعت متغیر، حل تکاملی زمانی^۵ معادله موج صوتی مورد بحث قرار خواهد گرفت. با توجه به این راه‌حل برای یک محیط غیرهمگن^۶، استفاده از روش REM تک‌مرحله‌ای کوزلوف و همکاران [۸] توسعه داده خواهد شد. سپس یک انتگرال‌گیری ترکیبی بر اساس روش بسط سریع و روش لپی‌فراگ^۷ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در این راستا، همانند روش REM، از چندجمله‌ای چبیشف برای بسط عملگر کسینوس که در حل معادله موج ظاهر می‌شود، استفاده می‌شود، نتیجه این امر به دست آوردن یک انتگرال زمانی دقیق‌تر در راه‌حل مسئله می‌باشد. نتیجه بسط عملگر کسینوس با بسط سری تیلور، هنگامی که از یک عبارت تحلیلی خاص برای تابع بسط استفاده شود، یک شکل خواهد بود. به این ترتیب، اگر فقط دو عبارت در نتیجه بسط چبیشف در نظر گرفته شود، به معادلات یکسان مورد استفاده در تقریب زمانی تفاضل محدود درجه دو تقلیل خواهد یافت. عبارات بیشتر، منجر به یک روش عددی پایدار حتی برای گام‌های زمانی بزرگ خواهد شد. وقتی که روش ارائه شده با روش شبه طیفی برای مشتقات مکانی ترکیب می‌شود، یک نتیجه خیلی دقیق، از نظر عددی پایدار و با محاسبات پایین‌تر در مقایسه با روش تفاضل محدود متناهی معمول (در زمان) به دست می‌آید.

- 1- Grid dispersion
- 2- Rapid expansion method (REM)
- 3- Tal-Ezer
- 4- Chebyshev polynomials
- 5- Time-evolution solution
- 6- Heterogeneous
- 7- Leapfrog

به این طریق، می توان یک اجرای پایدار و با دقت نامحدود مکانی و زمانی را به دست آورد [۹]. اگرچه راه حل ارائه شده، دقیق تر از روش های تفاضل محدود مرسوم است، این روش، اساس راه حل بازگشتی برای گام های زمانی بزرگ، بدون خطای عددی و پایدار را فراهم می آورد.

۲- راه حل برای معادله موج با سرعت متغیر

جنبش موج صوتی در زمان و مکان، به طور کلی با معادله تفاضلی درجه دو زیر توصیف می گردد.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla^2 P(\mathbf{x}, t) = S(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

که در آن $P(\mathbf{x}, t)$ ، میدان موج در زمان t و مکان $\mathbf{x} = (x, y, z)$ است. همچنین $c = c(\mathbf{x})$ سرعت انتشار صوتی و $S(\mathbf{x}, t)$ ، مقدار موجک منبع (عبارت است از موج انتشار یافته اولیه در زمان صفر که از چشمه تولید کننده موج لرزه ای در زمین انتشار می یابد) می باشد. علاوه بر آن،

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

عملگر لاپلاسین در مختصات کارتزین^۱ می باشد.

اکنون معادله ۱، به صورت مناسب تر و به شکل زیر بازنویسی می شود.

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -L^2 P(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

به طوری که $-L^2 = c^2(\mathbf{x}) \nabla^2$ است. پاسخ معادله ۲، با شرایط مرزی $\frac{\partial P(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \dot{P}_0$ و $P(\mathbf{x}, t=0) = P_0$ به صورت زیر است.

$$P(x, t) = \cos(Lt)P_0 + L^{-1} \sin(Lt)\dot{P}_0 \quad (3)$$

در این مورد، وقتی که $P(t)$ تابعی از یک متغیر است (L ثابت است)، معادله ۳، پاسخ عمومی^۲ یک معادله دیفرانسیل معمولی درجه دو است؛ اما وقتی که $P(t, \mathbf{x})$ یک متغیر پیوسته از \mathbf{x} و t است، L یک عملگر دیفرانسیلی مکانی درجه دو^۳ می باشد. برای مورد گسسته، L ، یک ماتریس است. به طور نمادین، معادله ۳، هنوز پاسخ معادله ۲، است [۱۰].

1- Cartesian coordinates

2- General solution

3- Second order spatial differential operator

۲-۱- طرح انتگرال گیری ترکیبی بهبود یافته روش بسط سریع و روش لیپفراگ

برای حذف مشتق زمانی میدان موج، راه‌حلهایی به معادله ۳، برای زمان‌های t و $-t$ اضافه خواهد شد که در نتیجه:

$$P(\mathbf{x}, t) + P(\mathbf{x}, -t) = 2 \cos(Lt) P_0 \quad (۴)$$

برای محاسبه $\cos(L\Delta t)$ ، می‌بایست عملگر L^γ را به‌طور صریح محاسبه و سپس از بسط چیبیشف ارائه‌شده توسط کوزلوف و همکاران [۸] استفاده نمود؛ بنابراین معادله ۴ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$P(t + \Delta t) + P(t - \Delta t) = 2 \sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k}(\Delta t R) T_{\gamma k} \left(\frac{iL}{R} \right) P(t) \quad (۵)$$

که در آن $C_0 = 1$ و $C_k = 2$ برای $k \neq 0$ است، مقدار M بسته به نوع مسئله از صفر تا بی‌نهایت قابل تغییر است. J_k معرف توابع بسل مرتبه k و T_k چندجمله‌ای اصلاح‌شده‌ی چیبیشف و مقدار R برای انتشار دو بعدی موج به‌طور تقریبی از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$R = c_{\max} \pi \sqrt{(\sqrt{\Delta x})^2 + (\sqrt{\Delta z})^2} \quad (۶)$$

برای معرفی طرح ترکیبی، عبارت $-2P(t)$ به دو طرف معادله ۵، اضافه‌شده و عبارت $\sqrt{(\Delta t)^2}$ در هر دو طرف این معادله ضرب می‌گردد، نتیجه به‌صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} = W(P^{(n)}), \quad (۷)$$

به‌طوری که

$$\begin{aligned} \frac{P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}}{(\Delta t)^2} &= W(P^{(n)}) \\ &= \frac{2}{(\Delta t)^2} \left[\sum_{k=0}^M C_{\gamma k} J_{\gamma k}(\Delta t R) T_{\gamma k} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right] P^{(n)}. \end{aligned} \quad (۸)$$

باید توجه شود که عبارت سمت چپ معادله ۷، تقریب تفاضل محدود مرتبه دو برای $\partial^2 P / \partial t^2$ و برابر $W(P^{(n)})$ (تقریب مشتق دوم میدان موج با استفاده از تفاضلات محدود مرکزی^۱) می‌باشد، بنابراین معادله ۸ را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی نمود [۱۱، ۱۲].

$$\frac{\partial^{\nu} P}{\partial t^{\nu}} = c^{\nu} \nabla^{\nu} P = W(P^{(n)}). \quad (9)$$

با توجه به آنکه یک سیستم همیلتونی^۱، دستگاهی از معادلات به شکل زیر است [۱۲]:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = f \quad (10)$$

که در آن x ، p و f به ترتیب بردارهای n بعدی یک مختصات تعمیم یافته (مختصات لاگرانژی)، اندازه حرکت و نیرو هستند. t متغیر زمانی مستقل و $H = H(x, p)$ تابع همیلتونی می باشد. مجموعه مکان و مختصات اندازه حرکت (x, p) مختصات متعارف (استاندارد) نامیده می شود.

در این حالت، می توان فرمول نویسی همیلتونی برای معادله ۹ را به شکل زیر معرفی کرد [۱۳].

$$\frac{\partial P}{\partial t} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = c^{\nu} \nabla^{\nu} P = W(P^{(n)}). \quad (11)$$

بنابراین، همه روش های توسعه یافته برای حل معادله ۱۰ را می توان برای حل معادله ۱۱، نیز بکار گرفت، زیرا هر دو معادله دارای شکل ریاضیاتی یکسانی هستند. بونومی و همکاران [۱۴] برای حل معادله ۱۱، راه حلی بنام لیپفراگ به صورت زیر ارائه کردند.

$$\begin{aligned} Q^{(n+\frac{1}{\nu})} &= Q^{(n)} + \frac{1}{\epsilon} \Delta t c^{\nu} \nabla^{\nu} P^{(n)}, \\ P^{(n+\frac{1}{\nu})} &= P^{(n)} + \frac{1}{\nu} \Delta t Q^{(n+\frac{1}{\nu})}, \\ Q^{(n+\frac{2}{\nu})} &= Q^{(n+\frac{1}{\nu})} + \frac{2}{\nu} \Delta t c^{\nu} \nabla^{\nu} P^{(n+\frac{1}{\nu})}, \\ P^{(n+1)} &= P^{(n+\frac{1}{\nu})} + \frac{1}{\nu} \Delta t Q^{(n+\frac{2}{\nu})}, \\ Q^{(n+1)} &= Q^{(n+\frac{2}{\nu})} + \frac{1}{\epsilon} \Delta t c^{\nu} \nabla^{\nu} P^{(n+1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

در این طرح، برای پیمایش میدان موج به صورت پایدار، حداکثر زمان نمونه برداری^۲ می بایست شرط زیر را ارضاء نماید.

$$0 \leq D \leq \sqrt{\epsilon}, \quad (13)$$

1- Hamiltonian system

2- Time sampling

که در آن D عبارت است از:

$$D = c_{\max} \Delta t \pi \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2}, \quad (14)$$

طرح لیپفراگ به خودی خود امکان بهبود دقت به مرتبه چهار را بدون افزایش حافظه موردنیاز با استفاده از یک روش تفاوت محدود مرکزی فراهم آورده و برگشت پذیری زمانی^۱ معادله موج را حفظ می کند [۱۵، ۱۶]. این طرح همچنین به طور مستقیم مشتق زمانی میدان موج (Q) را به دست می دهد. تحلیل ها نشان می دهد که شرط پایداری طرح لیپفراگ اجازه انتخاب گام زمانی تا $1/22$ مرتبه بزرگ تر از روش تفاضلات مرکزی برای انتگرال زمانی را می دهد. برای مورد سرعت ثابت و به کمک تبدیل فوریه معادله ۱۲ را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\begin{bmatrix} P^{(n+1)} \\ Q^{(n+1)} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} P^{(n)} \\ Q^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

به طوری که ماتریس A به صورت زیر می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\alpha\Delta t)^2 + \frac{1}{36}(\alpha\Delta t)^4 & \Delta t - \frac{1}{6}(\alpha\Delta t)^2\Delta t \\ -\alpha^2\Delta t + \frac{5}{36}\alpha^4(\Delta t)^3 - \frac{1}{216}\alpha^6(\Delta t)^5 & 1 - \frac{1}{2}(\alpha\Delta t)^2 + \frac{1}{36}(\alpha\Delta t)^4 \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در آن α به صورت $\alpha = ck$ تعریف می شود.

با استفاده از طرح لیپفراگ ارائه شده در معادله ۱۲، عبارات معادل میدان موج $P^{(n+1)}$ ، در یک گام زمانی یکسان به صورت زیر خواهد بود:

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} + (\Delta t)Q^{(n)} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 c^2 \nabla^2 P^{(n)} \quad (17)$$

همچنین مشتق میدان موج $Q^{(n+1)}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$Q^{(n+1)} = Q^{(n)} + (\Delta t)c^2 \nabla^2 P^{(n)} + \frac{1}{6}(\Delta t)c^2 \nabla^2 P^{(n)} \left[\sum_{k=0}^M C_{\tau k} J_{\tau k} (\Delta t R) T_{\tau k} \left(\frac{iL}{R}\right) - 1 \right] \quad (18)$$

و با جایگزینی عبارت معادل $c^{\nu} \nabla^{\nu} P^{(n)}$ حاصل از روش بسط سریع و همچنین استفاده از عبارت معادله ۵، به شکل معادله ۱۹، می توان به معادله ۲۰، دست یافت.

$$\left[\sum_{k=0}^M C_{\nu k} J_{\nu k} (\Delta t R) T_{\nu k} \left(\frac{iL}{R} \right) \right] P^{(n)} = \left(\frac{P^{(n+1)} + P^{(n-1)}}{2} \right) \quad (19)$$

بنابراین با استفاده از راه حل ارائه شده توسط بونومی و همکاران [۱۴] و به کارگیری روش بسط سریع و روش لیپفراگ برای حل معادله ۱۱، برای اولین بار معادله ۲۰، توسط نگارندگان مقاله ارائه شده است. با توجه به موارد فوق روش جدید ارائه شده روش ترکیبی بسط سریع - لیپفراگ^۱ (L-REM) نامیده می شود.

$$\begin{aligned} P^{(n+1)} &= P^{(n)} + (\Delta t) Q^{(n)} + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^M C_{\nu k} J_{\nu k} (\Delta t R) T_{\nu k} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right] P^{(n)}, \\ Q^{(n+1)} &= Q^{(n)} + \frac{1}{(\Delta t)} \left(\sum_{k=0}^M C_{\nu k} J_{\nu k} (\Delta t R) T_{\nu k} \left(\frac{iL}{R} \right) - 1 \right) \times \\ &\quad \times \left(2P^{(n)} + \frac{1}{6} (P^{(n+1)} - 2P^{(n)} + P^{(n-1)}) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

طرح عددی معادله ۲۰، از لحاظ استفاده از بسط چیشیف، مشابه طرح معادله ۵، عمل می کند. فقط نیاز است تا بسط مرتبه دو برای اولین گام زمانی محاسبه شود. روش L-REM میدان موج $P^{(n+1)}$ و مشتق میدان موج نسبت به زمان یعنی $Q^{(n+1)}$ را به دست می دهد. همچنین این روش از میدان موج محاسبه شده $P^{(n+1)}$ برای محاسبه $Q^{(n+1)}$ در همان گام زمانی نیز استفاده می کند که خود نکته قابل توجه و جالبی است. این ویژگی، امکان استفاده از مکانیسمی را خواهد داد که جهت انتشار میدان موج را معکوس می کند.

برای حل عددی دستگاه همیلتونی (معادله ۲۰)، محاسبه عملگر لاپلاسیان نیاز می باشد که برای این منظور از تبدیل های فوریه گسسته^۲ پیشرو و معکوس همانند معادله ۲۱، استفاده می گردد.

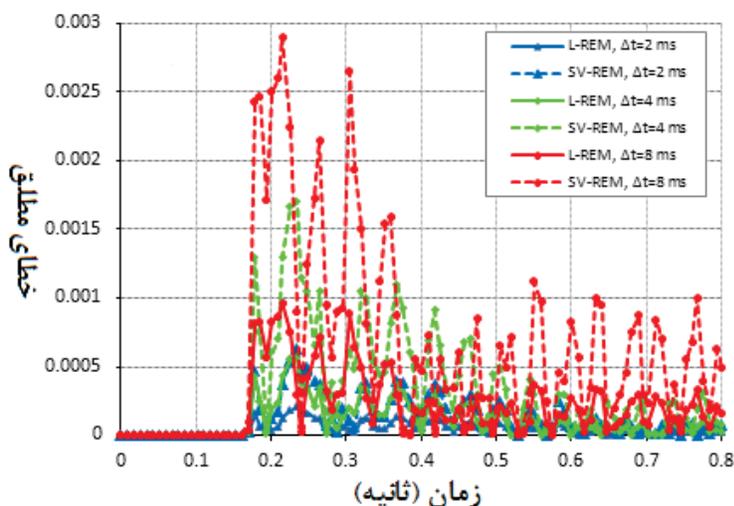
$$\nabla^{\nu} P = \text{DFT}^{-1} \left[-\|\mathbf{k}\|^{\nu} \text{DFT}(P) \right], \quad (21)$$

که در آن $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ بردار دو بعدی عدد موج است.

1- Leapfrog-Rapid Expansion Method (L-REM)

2- Discrete Fourier Transforms (DFTs)

با ترکیب روش بسط سریع با روش طیفی (روش فوریه) برای مشتقات مکانی و همچنین با روش ترکیبی برای انتگرال زمانی، دقیق‌ترین اجرای ممکن در زمان و مکان برای شبکه داده‌شده به دست می‌آید؛ اما در هر حال، در هنگام اجرای عددی نه‌تنها دقت که زمان پردازش و حافظه موردنیاز نیز موضوعات مهمی تلقی می‌شوند. طرح ارائه‌شده معادله ۲۰، برای برونمایی میدان موج دارای دقت بسیار بالاتری نسبت به جدیدترین روش‌های ارائه‌شده از این دست می‌باشد. یکی از این روش‌ها روش بسط سریع استورمر-فرلت^۱ می‌باشد که توسط آروجو و همکاران ارائه‌شده است [۱۲،۱۱]. در شکل ۱، دقت نتایج برونمایی میدان موج برای طرح ارائه‌شده روش بسط سریع-لیپفراگ و مقایسه آن با روش بسط سریع استورمر-فرلت برای یک محیط با سرعت ثابت و موجک ریکر^۲ با ماکزیمم فرکانس ۲۵ هرتز، تزریق‌شده در وسط مدل نشان داده‌شده است. همچنین طرح ارائه‌شده زمان و حافظه لازم برای پردازش را نسبت به این روش‌ها افزایش نمی‌دهد.



شکل (۱): مقایسه خطای مطلق دامنه نرمال شده ردهای لرزه‌ای برای روش بسط سریع استورمر-فرلت (SV-REM) و طرح ارائه‌شده روش بسط سریع-لیپفراگ (L-REM) برای گام‌های زمانی $\Delta t = 2 \text{ ms}$ ، $\Delta t = 4 \text{ ms}$ و $\Delta t = 8 \text{ ms}$.

1- Störmer-Verlet-rapid expansion method (SV-REM)

2- Ricker wavelet

با توجه به اینکه برای کاهش خطای عددی، پراکندگی و تغییر شکل پالس می‌بایست زمان نمونه‌برداری را (Δt) کوچک‌تر کرد، در روش بسط سریع استورمر- فرلت با کاهش زمان نمونه‌برداری خطا افزایش می‌یابد، درحالی‌که با استفاده از روش بسط سریع- لپی‌فراگ معرفی شده خطا برای نمونه‌برداری‌های کوچک به مقدار بسیار زیادی کاهش داده شده است. با توجه شکل ۱، ملاحظه می‌شود که حداکثر خطای به دست آمده برای روش بسط سریع- لپی‌فراگ در $\Delta t = 8 \text{ ms}$ اتفاق می‌افتد که از نظر بزرگی $1/7$ مرتبه کمتر از خطای اتفاق افتاده برای روش بسط سریع استورمر- فرلت با $\Delta t = 4 \text{ ms}$ است. همچنین این خطا تقریباً برابر خطای اتفاق افتاده برای روش بسط سریع استورمر- فرلت با $\Delta t = 2 \text{ ms}$ در فواصل زمانی بزرگ‌تر از $0/4$ ثانیه می‌باشد این نتایج نشان می‌دهد که طرح روش بسط سریع- لپی‌فراگ ارائه شده دارای یک دقت بسیار بالا، حتی برای نمونه‌برداری‌های زمانی بزرگ است.

۳- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر به ارائه روشی برای حل دقیق معادله موج صوتی پرداخت شده و همچنین نشان داده شده است که می‌توان از ترکیب روش بسط سریع (REM) و روش لپی‌فراگ به‌طور پیشرو یا بازگشتی برای انتشار میدان موج در زمان استفاده نمود. تنها انتگرال‌گیری از چند جمله‌ای‌های چبیشف پیش‌بینی شده با استفاده از معیار همگرایی سری‌های REM منجر به محاسبه نتایج دقیق و پایدار خواهد شد. تعداد عبارات مورد استفاده در انتگرال‌گیری را می‌توان با مشخص کردن عبارات ابتدایی و انتهایی مورد استفاده بر اساس بزرگی توابع بسل برای زمان دلخواه محدود کرد. همچنین در مدل‌سازی می‌توان میزان ذخیره‌سازی را به‌طور قابل‌توجهی با ذخیره نمودن چند جمله‌ای‌های چبیشف، تنها برای موقعیت‌های مکانی دلخواه کاهش داد. این امر به میزان بسیار زیادی نیاز به ذخیره‌سازی را کاهش می‌دهد. روش ارائه شده به‌طور بازگشتی برای گام‌های زمانی دلخواه و حتی متغیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. میدان موج در هر زمان، شرط شروع اولیه برای گام بعدی خواهد بود. همچنین REM برای توسعه زمانی میدان‌های موج، به‌صورت ترکیب با انتگرال‌گیرهای ترکیبی برای مشتقات مکانی در جهت نیل به نتایج پایدار و کاهش هزینه محاسباتی در مقایسه با روش تفاضل محدود مرسوم با سطح دقت یکسان مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتایج مطالعه نشان می‌دهد که ترکیب روش بسط سریع و انتگرال‌گیر ترکیبی لپی‌فراگ منجر به نتایج با خطای بسیار پایین و پایداری بالا می‌شود و این مسئله برای استفاده در مدل‌سازی لرزه‌ای و روش مهاجرت زمانی معکوس (RTM) بسیار مفید خواهد بود. لذا در این مطالعه امکان استفاده از تلفیق هر دو روش بسط سریع و انتگرال‌گیر ترکیبی لپی‌فراگ مورد بحث و بررسی قرار گرفته و فرمول نهایی ارائه شده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران محترم که با پیشنهادهای سازنده خویش موجبات ارتقای کیفی مقاله را فراهم آوردند و همچنین از زحمات سردبیر محترم و دیگر اعضای هیئت تحریریه و اجرایی مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

- [1] Alford, R.M., Kelly, K.R. and Boore, D.M. (1974). Accuracy of finite-difference modelling of the acoustic equation, *Geophysics*, **39**, 834–842.
- [2] Kelly, K.R., Ward, R.W. and Treitel, S. (1976). Synthetic seismograms: A finite-difference approach, *Geophysics*, **41**, 2–27.
- [3] Dablain, M.A. (1986). The application of high-order differencing to the scalar wave equation, *Geophysics*, **51**, 54–66.
- [4] Etgen, J. (1986). High-order finite-difference reverse time migration with the 2-way non-reflecting wave equation, *Stanford Exploration Project*, **48**, 133–146.
- [5] Chen, J. (2007). High-order time discretization in seismic modelling, *Geophysics*, **72**, SM115–SM122.
- [6] Soubaras, R. and Zhang, Y. (2008). Two-step explicit marching method for reverse time migration, 70th Conference & Technical Exhibition, EAGE, Extended Abstracts, F041.
- [7] Zhang, Y. and Zhang, G. (2009). One-step extrapolation method for reverse time migration, *Geophysics*, **74**, A29–A33.
- [8] Kosloff, D., Filho, A.Q., Tessmer, E. and Behle, A. (1989). Numerical solution of the acoustic and elastic wave equations by a new rapid expansion method, *Geophysical Prospecting*, **37**, 383–394.
- [9] Tal-Ezer, H., Kosloff, D. and Koren, Z. (1987). An accurate scheme for forward seismic modelling, *Geophysical Prospecting*, **35**, 479–490.
- [10] Etgen, J. (1988). Accurate wave equation modelling, *Stanford Exploration Project*, **60**, 131–147.

- [11] Araujo, E.S., Pestana, C.R. and dos Santos, A.W.G. (2013). Symplectic scheme and Poyting vector in the reverse time migration. 83rd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts.
- [12] Araujo, E.S., Pestana, C.R. and dos Santos, A.W.G. (2013). Symplectic scheme and Poyting vector in the reverse time migration. *Geophysics* **79**, 1–10.
- [13] Arnold, V.I. (1989). *Mathematical methods of classical mechanics* (2nd ed). 60, Springer.
- [14] Bonomi, E., Brieger L., Nardone, C., and Pieroni, E. (1998). 3D spectral reverse time migration with no-wraparound absorbing conditions. 78th Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1925–1928.
- [15] Sexton, J.C., and Weingarten D.H. (1992). Hamiltonian evolution for the hybrid Monte Carlo algorithm. *Nuclear Physics B*, **380**, 665.
- [16] Skell, R.H., Zhang G., and Schlick, T. (1997). A family of symplectic integrators: Stability, accuracy, and molecular dynamics applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **18**, 203–222.

A New Formulation for Extrapolation of Seismic Wave-field Response and Its Derivative

Farzad Moradpouri^{*}, Ali Moradzadeh^{**}, Reynam C. Pestana^{***} and Mehrdad Soleimani Monfared^{*}

^{*} Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

^{**} Department of Mining Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran; Attendant Professor, Faculty of Mining, Petroleum and Geophysics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

^{***} Center for Research in Geophysics and Geology (CPGG), Federal University of Bahia (UFBA), Salvador, Brazil

Abstract

The aim of this study is to present a new symplectic integrator for the case of spatially varying velocity based on Leapfrog (L) and Rapid Expansion Methods (REM). First, approximation of the wave field at each time step has been considered using rapid expansion method. Then the wave equation is rewrite as Hamiltonian system. It can provide an accurate solution for the acoustic wave equation to simulate the wave field response at each time. After that, for much more accurate and stable solution to extrapolate the wave field and its derivative, a new formulation based on leapfrog and rapid expansion methods has been presented. The obtained results of simple model indicate that this new formulation provides a very high level of accuracy and stability for estimation of wave field response and its derivatives.

Keywords: Seismic wave field, finite deference method (FDM), Leapfrog method, Rapid Expansion Method, Integrated L-REM.

Mathematics Subject classification (2010):65E99, 15A86.