

## ارائه یک مدل ریاضی و بررسی تأثیر استفاده از سرنگ‌های مشترک آلوده در شیوع بیماری اچ آی وی/ایدز

افشین بابائی<sup>۱</sup>، حسین جعفری و معصومه احمدی

گروه ریاضی، دانشگاه مازندران

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۱۲/۶

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۶/۶

**چکیده:** در این مقاله، یک مدل ریاضی برای بررسی دینامیک بیماری اچ آی وی/ایدز ارائه می‌شود. در این مدل تأثیر استفاده از سرنگ‌های مشترک در جمعیت معتاد، در شیوع بیماری اچ آی وی/ایدز مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور ابتدا عدد شیوع با استفاده از روش ماتریس نسل دوم به دست آورده شده و سپس عدد شیوع در دو حالت استفاده از سرنگ مشترک و عدم استفاده از سرنگ مشترک بررسی می‌شود. با اعمال کنترل‌های، استفاده از سرنگ استریل و غیرمشترک، استفاده از وسایل پیشگیری در روابط جنسی، شناسایی افراد بیمار ناآگاه و درمان افراد بیمار، بر مدل بیماری، مسئله کنترل بهینه فرمول‌بندی می‌شود. با استفاده از اصل حداقل‌بایی پونتریاگین شرایط لازم برای کنترل بهینه تعیین شده و در نهایت نتایج عددی با استفاده از روش رانگه-کوتا مرتبه چهار به دست می‌آید. نتایج نشان می‌دهد که تفاوت معناداری در کنترل شیوع بیماری، بین حالتی که کنترلی بر بیماری صورت نمی‌گیرد با حالتی که کنترل اعمال می‌شود، وجود دارد.

**واژه‌های کلیدی:** بیماری اچ آی وی/ایدز، عدد شیوع، کنترل بهینه، ماتریس نسل دوم.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۲D۳۰، ۴۹J۱۵.

### ۱- مقدمه

اچ آی وی، ویروس نقص ایمنی بدن، اگر دیر درمان و کنترل شود منجر به بیماری خطرناک و کشنده‌ی ایدز می‌شود. بیماری ایدز برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ شناسایی شد. این بیماری بالاترین درصد شیوع و مرگ‌ومیر را در بین سایر بیماری‌های مسری در سراسر جهان دارد [۱].

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: babaei@umz.ac.ir

با اینکه حدود ۳۵ سال از کشف ویروس اچ آی وی/ایدز می‌گذرد اما کنترل شیوع این بیماری به دلیل نبود واکسن و درمان قطعی بسیار دشوار است. یکی از چالش‌های اساسی در کنترل شیوع این بیماری در اکثر مناطق مستعد مثل آفریقا، اروپا و آسیا عدم آگاهی تعداد زیادی از افراد مبتلا به اچ آی وی/ایدز از بیمار بودن خود می‌باشد. علاوه بر این تعدادی از افراد که از بیماری خود آگاه هستند به دلیل ناآگاهی از عوارض این بیماری، احتیاط لازم را در انجام کارهایی که باعث شیوع این بیماری می‌شود به کار نمی‌بندند [۲ و ۳].

از راه‌های انتقال ویروس اچ آی وی می‌توان به خون آلوده، سرنگ آلوده مشترک و روابط جنسی محافظت نشده اشاره کرد. معتادان تزریقی که از سرنگ و سوزن مشترک استفاده می‌کنند و همچنین بیمارانی که از بیماری خود آگاه نیستند، از گروه‌های پرخطر ابتلا به ایدز هستند [۴]. از آنجایی که درمان قطعی برای این بیماری وجود ندارد، لذا تلاش برای غلبه بر این بیماری باید روی پیشگیری از شیوع این ویروس متمرکز شود. در این مقاله به بررسی تأثیر استفاده از وسایل پیشگیری در روابط جنسی، استفاده از سرنگ استریل به جای سرنگ آلوده، شناسایی افراد بیمار ناآگاه و درمان آن‌ها می‌پردازیم.

مدل‌های ریاضی در تحلیل دینامیک بیماری‌های زیادی مانند اچ آی وی/ایدز، مالاریا، هپاتیت و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. مدل‌های ریاضی نقش مهمی در درک بهتر از الگوهای اپیدمی جهت کنترل بیماری دارند. اولین مدل‌های ریاضی برای بیماری اچ آی وی/ایدز توسط اندرسون در سال ۱۹۸۶ طراحی شد [۵]. از جمله اولین کسانی که به تحلیل ریاضی جزئیات مدل دینامیکی اچ آی وی/ایدز پرداختند، نیکولائوس و همکارانش می‌باشد [۶]. تریپاسی و همکاران در [۱] یک مدل ریاضی را برای درمان اچ آی وی/ایدز با شناسایی افراد بیمار ناآگاه، مورد بررسی قرار دادند. اکوسان و همکاران در [۷] با در نظر گرفتن کنترل‌های مورد نظر، مقدار بهینه کنترل‌ها را برای مدل بیماری اچ آی وی/ایدز محاسبه کردند.

تکثیر ویروس اچ آی وی در بدن باعث تضعیف دستگاه ایمنی و در نتیجه زمینه‌ساز عفونت‌های سمی در آن می‌شود. هرچند بدن یک فرد سالم معمولاً قادر به مبارزه با این عفونت‌ها است، ولی در بدن شخص مبتلا به اچ آی وی، پیشرفت همین عفونت‌ها باعث بیماری‌هایی مانند سل، هپاتیت، مالاریا و غیره می‌شود [۸]. در [۸-۱۱] مدل ریاضی هپاتیت- اچ آی وی/ایدز برای بررسی تأثیر ویروس اچ آی وی بر دینامیک بیماری هپاتیت و کنترل بهینه بیماری مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی‌هایی در مورد مدل‌های ریاضی کنترل بهینه این بیماری نیز در مراجع [۱۲-۱۵] صورت گرفته است. از جمله راه‌های مهم پیشگیری بیماری اچ آی وی/ایدز، برنامه‌های آگاهی‌بخش عمومی نسبت به این بیماری می‌باشد که در این مورد مطالعاتی در [۱۶] صورت گرفته است.

مدل ارائه‌شده در این مقاله در واقع مدل بهبودیافته‌ی [۱] است. مزیت این مدل در نظر گرفتن کنترل‌های وابسته به زمان مانند؛ استفاده از وسایل پیشگیری در روابط جنسی ( $u_1$ )، شناسایی افراد بیمار ناآگاه ( $u_2$ )، درمان افراد مبتلا به اچ آی وی/ایدز ( $u_3$ ) و استفاده از سرنگ استریل به جای سرنگ آلوده ( $u_4$ )، در مدل بیماری اچ آی وی/ایدز است. همچنین تأثیر این کنترل‌ها در شیوع این بیماری مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این به تعیین عدد شیوع بیماری و تعیین شرایط لازم برای کنترل بهینه بیماری با استفاده از اصل حداقل‌یابی پونتریاگین پرداخته شده است. مباحث ارائه‌شده در این مقاله شامل موارد زیر است:

مطالب مربوط به مدل‌سازی ریاضی شامل تعیین متغیرها و پارامترها، فرمول‌بندی معادلات و تشکیل دستگاه معادلات متناظر با آن که در اینجا یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است، در بخش دوم ارائه می‌شود. در بخش سوم به تعیین نقاط تعادل دستگاه، به دست آوردن عدد شیوع بیماری با استفاده از روش ماتریس نسل دوم و مقایسه عدد شیوع در دو حالت استفاده از سرنگ مشترک و عدم استفاده از سرنگ مشترک، پرداخته می‌شود. در بخش چهارم، شرایط لازم برای کنترل بهینه را با استفاده از اصل حداقل‌یابی پونتریاگین پیدا کرده و سیستم بهینگی را تشکیل می‌دهیم. در بخش پنجم سیستم بهینگی را با استفاده از روش رانگه-کوتا مرتبه چهار حل کرده و در بخش ششم نتیجه‌گیری کلی ارائه می‌شود.

## ۲- مدل‌سازی ریاضی

جمعیت جامعه موردنظر را با فرض مهاجرت ثابت، در زمان  $t$ ،  $N(t)$  در نظر می‌گیریم. این جامعه را به دو گروه اصلی تقسیم می‌کنیم. گروه  $N_n$ ، افرادی که اعتیاد به مواد مخدر ندارند و اگر اعتیاد به مواد مخدر دارند مصرف مواد در آن‌ها از طریق تزریق مواد نیست. گروه  $N_d$ ، افراد معتادی که مصرف مواد مخدر در آن‌ها از طریق تزریق می‌باشد. هر یک از این گروه‌ها را به دسته‌های زیر تقسیم می‌کنیم:

$S_n(t)$ : افراد مستعد بیماری که اعتیاد به مواد مخدر ندارند و یا اگر مواد مخدر استفاده می‌کنند مصرفشان از طریق تزریق نیست،  $I_{1n}(t)$ : افراد غیر معتاد مبتلا به اچ آی وی که از بیماری خودآگاه نیستند،  $I_{2n}(t)$ : افراد غیر معتاد مبتلا به اچ آی وی که از بیماری خودآگاه هستند،  $H_n(t)$ : افراد غیر معتادی تحت درمان و  $A_n(t)$ : افراد غیر معتاد مبتلا به ایدز.

$S_d(t)$ : افراد مستعد بیماری که معتاد هستند و مصرف آن‌ها از طریق تزریق است،  $I_{1d}(t)$ : افراد معتاد مبتلا به اچ آی وی که از بیماری خودآگاه نیستند،  $I_{2d}(t)$ : افراد معتاد مبتلا به اچ آی وی که از بیماری خودآگاه هستند،  $H_d(t)$ : افراد معتادی که بیماری آن‌ها تحت درمان است و  $A_d(t)$ : افراد معتاد مبتلا به ایدز است. به عبارت دیگر

$$N_n = S_n + I_{1n} + I_{2n} + H_n + A_n,$$

$$N_d = S_d + I_{1d} + I_{2d} + H_d + A_d,$$

$$N = N_n + N_d.$$

این دسته‌ها متغیرهای مدل هستند. علاوه بر این، پارامترهای مؤثر در مدل عبارتند از:

$\beta_1$  و  $\beta_2$ ، به ترتیب احتمال تماس فرد مستعد بیماری معتاد و غیر معتاد، با فردی که مبتلا به اچ آی وی بوده ولی از بیماری خودآگاه نیست،  $\beta_1$  و  $\beta_2$  به ترتیب احتمال تماس فرد مبتلا به اچ آی وی که از بیماری خودآگاه است با فرد بیمار تحت درمان و فرد مبتلا به ایدز. همچنین  $\alpha_1$ ،  $\alpha_2$ ،  $\alpha_3$  و  $\alpha_4$ ، به ترتیب احتمال استفاده‌ی فرد معتاد مستعد بیماری، از سرنگ آلوده‌ی فرد معتاد بیماری که از بیماری خودآگاه نیست، فرد معتاد بیماری که از بیماری خودآگاه است، فرد معتاد بیمار که تحت درمان است و فرد معتاد مبتلا به ایدز در نظر گرفته می‌شوند.  $\theta$  نرخ شناسایی افراد بیماری که از بیماری خودآگاه نیستند،  $\pi$  نرخ افراد بیماری که تحت درمان قرار می‌گیرند،  $\mu$  نرخ مرگ میر طبیعی،  $\alpha_n$  نرخ مرگ‌ومیر ناشی از ایدز در افراد غیر معتاد و سرانجام  $\alpha_d$  نرخ مرگ ناشی از ایدز در افراد معتاد است. کنترل  $u_1 \in [0,1]$ ، استفاده از وسایل پیشگیری در روابط جنسی و کنترل  $u_2 \in [0,1]$ ، استفاده از سرنگ غیر آلوده به‌جای سرنگ آلوده تعریف می‌شود.

**تذکر:** در اینجا منظور از اعتیاد به مواد مخدر، مصرف مواد مخدر از طریق تزریق است، لذا در دسته  $S_n(t)$  ممکن است افراد معتاد غیر تزریقی وجود داشته باشد.

حال با توجه به متغیرها و پارامترهای تعریف‌شده در بالا، به فرمول‌بندی ریاضی مدل بیماری اچ آی وی/ایدز می‌پردازیم که منجر به دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی زیر می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_n}{dt} = Q_0 - \lambda_d S_n - \lambda_h S_n - \mu S_n, \\ \frac{dI_{1n}}{dt} = \lambda_h S_n - (u_v \theta + \delta + \lambda_d + \mu) I_{1n}, \\ \frac{dI_{vn}}{dt} = u_v \theta I_{1n} - (\delta + u_v \pi + \lambda_d + \mu) I_{vn}, \\ \frac{dH_n}{dt} = u_v \pi I_{vn} - (\sigma_n + \lambda_d + \mu) H_n, \\ \frac{dA_n}{dt} = \delta I_{1n} + \delta I_{vn} + \sigma_n H_n - (\mu + \alpha_n) A_n, \\ \frac{dS_d}{dt} = \lambda_d S_n - (\lambda_n + \lambda_{hn} + \mu) S_d, \\ \frac{dI_{1d}}{dt} = \lambda_d I_{1n} + (\lambda_n + \lambda_{hn}) S_d - (u_v \theta + \delta + \mu) I_{1d}, \\ \frac{dI_{vd}}{dt} = u_v \theta I_{1d} + \lambda_d I_{vn} - (\delta + u_v \pi + \mu) I_{vd}, \\ \frac{dH_d}{dt} = u_v \pi I_{vd} + \lambda_d H_n - (\sigma_d + \mu) H_d, \\ \frac{dA_d}{dt} = \delta I_{1d} + \delta I_{vd} + \sigma_d H_d - (\alpha_d + \mu) A_d. \end{array} \right. \quad (1)$$

در دستگاه (۱)،  $\lambda_d$  نرخ معتاد شدن افرادی است که معتاد نیستند، یعنی

$$\lambda_d = \frac{\beta_d c_d (S_d + I_{1d} + I_{vd} + H_d + A_d)}{N}$$

و  $\beta_d$  احتمال معتاد شدن افراد است. همچنین  $\lambda_h$  احتمال بیمار شدن فرد مستعد بیماری و در اثر تماس جنسی محافظت نشده با افراد بیمار غیر معتاد است:

$$\lambda_h = \frac{(1 - u_1)(\beta_1 c_1 I_{1n} + \beta_2 c_2 I_{vn} + \beta_3 c_3 H_n + \beta_4 c_4 A_n)}{N_n}$$

که  $c_i$ ،  $i = 1, 2, 3, 4$ ، تعداد تماس‌ها را نشان می‌دهد.  $\lambda_n$  احتمال بیمار شدن فرد معتاد مستعد بیماری در اثر تماس جنسی محافظت نشده با افراد معتاد بیمار است:

$$\lambda_n = \frac{(1 - u_1)(\beta_1 c_1 I_{1d} + \beta_2 c_2 I_{vd} + \beta_3 c_3 H_d + \beta_4 c_4 A_d)}{N_d}$$

$\lambda_{hn}$  احتمال بیمار شدن فرد معتاد مستعد بیماری بر اثر استفاده از سرنگ آلوده

$$\lambda_{hn} = \frac{(1 - u_f)(\alpha_1 a_1 I_{1d} + \alpha_2 a_2 I_{vd} + \alpha_3 a_3 H_d + \alpha_4 a_4 A_d)}{N_d}$$

که  $a_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) تعداد دفعات استفاده از سرنگ مشترک است.

قضیه زیر مثبت و کران دار بودن جوابهای دستگاه (۱) را نشان می‌دهد [۱۷].

**قضیه ۱:** اگر مقادیر  $(\circ)$   $A_d$ ،  $H_d$ ،  $I_{1d}$ ،  $I_{2d}$ ،  $I_{3d}$ ،  $I_{4d}$ ،  $H_n$ ،  $A_n$ ،  $I_{1n}$ ،  $I_{2n}$ ،  $I_{3n}$ ،  $I_{4n}$  نامنفی باشند آنگاه برای  $t > \circ$  مقادیر  $A_d(t)$ ،  $H_d(t)$ ،  $A_n(t)$ ،  $H_n(t)$ ،  $I_{1n}(t)$ ،  $I_{2n}(t)$ ،  $I_{3n}(t)$ ،  $I_{4n}(t)$  نامنفی هستند. علاوه بر این  $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{Q_0}{\mu}$

### ۳- نقاط تعادل و نقطه شیوع

#### ۳-۱- نقطه تعادل رهایی از بیماری

در نقطه تعادل رهایی از بیماری، دسته‌های بیماری صفر هستند. لذا داریم:

$$\varepsilon^\circ = (S_n^\circ, I_{1n}^\circ, I_{2n}^\circ, I_{3n}^\circ, I_{4n}^\circ, H_n^\circ, A_n^\circ, S_d^\circ, I_{1d}^\circ, I_{2d}^\circ, I_{3d}^\circ, I_{4d}^\circ, H_d^\circ, A_d^\circ) = \left( \frac{Q_0}{\beta_d c_d}, \circ, \circ, \circ, \circ, \frac{Q_0}{\mu} - \frac{Q_0}{\beta_d c_d}, \circ, \circ, \circ, \circ \right)$$

برای بررسی وجود این نقطه، طبق قضیه (۱)، باید نشان دهیم که این نقطه نامنفی است، لذا

$$\frac{\beta_d c_d}{\mu} \geq 1, \quad \frac{Q_0}{\mu} - \frac{Q_0}{\beta_d c_d} \geq 0$$

در نتیجه باید داشته باشیم؛

#### ۳-۲- نقطه تعادل شیوع بیماری

این نقطه نیز از برابر صفر قرار دادن معادلات دستگاه (۱) به دست می‌آید، ولی در نقطه تعادل شیوع بیماری دسته‌های بیماری صفر نیستند:

$$S_n^* = \frac{Q_0}{\mu + \lambda_d + \lambda_h}, \quad S_d^* = \frac{Q_0 \lambda_d}{(\mu + \lambda_d + \lambda_h)(\mu + \lambda_{hn} + \lambda_n)},$$

$$I_{1n}^* = \frac{Q_0 \lambda_h}{(\delta + \theta + \mu + \lambda_d)(\mu + \lambda_d + \lambda_h)}, \quad I_{2n}^* = \frac{\theta I_{1n}^*}{\pi + \delta + \mu + \lambda_d},$$

$$H_n^* = \frac{\pi I_{2n}^*}{\mu + \lambda_d + \sigma_n}, \quad A_n^* = \frac{(\delta I_{1n}^* + \delta I_{2n}^*)(\mu + \lambda_d + \sigma_n) + \pi I_{2n}^* \sigma_n}{(\mu + \alpha_n)(\mu + \lambda_d + \sigma_n)},$$

$$I_{vd}^* = \frac{Q_o((\mu + \lambda_{hn} + \lambda_n)\lambda_d\lambda_h + (\delta + \theta + \mu + \lambda_d)(\lambda_{hn} + \lambda_n)\lambda_d)}{(\delta + \theta + \mu)(\delta + \theta + \mu + \lambda_d)(\mu + \lambda_{hn} + \lambda_n)\lambda_d\lambda_h(\mu + \lambda_d + \lambda_h)},$$

$$I_{rd}^* = \frac{Q_o((\mu + \lambda_{hn} + \lambda_n)\theta\lambda_d\lambda_h + (\delta + \theta + \mu + \lambda_d)(\lambda_{hn} + \lambda_n)\theta\lambda_d)}{(\pi + \delta + \mu)(\delta + \theta + \mu)(\mu + \lambda_d + \lambda_h)(\delta + \theta + \mu + \lambda_d)(\mu + \lambda_{hn} + \lambda_n)}$$

$$+ \frac{\theta I_n \lambda_d}{(\pi + \delta + \mu)(\pi + \delta + \mu + \lambda_d)},$$

$$H_d^* = \frac{(\mu + \lambda_d + \sigma_n)\pi I_{rd} + \lambda_d \pi I_{rn}}{(\mu + \sigma_d)(\mu + \lambda_d + \sigma_n)},$$

$$A_d^* = \frac{(\mu + \sigma_d)(\delta I_d + \delta I_{rd}) + \pi I_{rd} \sigma_d}{(\mu + \alpha_d)(\mu + \sigma_d)} + \frac{\lambda_d \pi I_{rn} \sigma_d}{(\mu + \alpha_d)(\mu + \sigma_d)(\mu + \lambda_d + \sigma_n)}.$$

### ۳-۳- عدد شیوع بیماری

عدد شیوع بیماری، تعداد افرادی است که یک فرد بیمار در طول دوره بیماری خود مبتلا می‌کند. این عدد را با استفاده از روش ماتریس نسل دوم به دست می‌آوریم. ماتریس  $FV^{-1}$ ، ماتریس نسل دوم نام دارد و عدد شیوع  $R_o$  در واقع شعاع طیفی ماتریس نسل دوم است [۱۸]. ماتریس‌های  $F$  و  $V$  به صورت زیر از دستگاه (۱) استخراج می‌شوند:

$$F = \begin{pmatrix} c_r a \beta_i & \cdot & c_r a \beta_r & \cdot & c_r a \beta_r & \cdot & c_r a \beta_f & \cdot \\ \cdot & a_r b \alpha_i + c_r a \beta_i & \cdot & a_r b \alpha_r + c_r a \beta_r & \cdot & a_r b \alpha_r + c_r a \beta_r & \cdot & a_r b \alpha_f + c_r a \beta_f \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

9

$$V = \begin{pmatrix} \delta + \theta + c_d \beta_d & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu - c_d \beta_d & \delta + \theta + \mu & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\theta & \cdot & \delta + c_d \beta_d + \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\theta & \mu - c_d \beta_d & \delta + \mu + \pi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -\pi & \cdot & c_d \beta_d + \sigma_n & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\pi & \mu - c_d \beta_d & \mu + \sigma_d & \cdot & \cdot \\ -\delta & \cdot & -\delta & \cdot & -\sigma_n & \cdot & \mu + \alpha_n & \cdot \\ \cdot & -\delta & \cdot & -\delta & \cdot & -\sigma_d & \cdot & \mu + \alpha_d \end{pmatrix},$$

که  $a = (1 - u_1)$  و  $b = (1 - u_f)$  است. شعاع طیفی ماتریس  $FV^{-1}$  به صورت زیر خواهد بود:

$$R_o = \frac{(a_f \alpha_f h_f + \beta_f c_f h_f)(\delta(h_f + \pi)(\sigma_d + \mu) + \pi\theta\sigma_d)}{h_1 h_f (\alpha_d + \mu)(\sigma_d + \mu)} + \frac{\pi\theta(a_r \alpha_r h_r + \beta_r c_r h_r)}{h_1 h_r (\sigma_d + \mu)} + \frac{a_1 \alpha_1 h_1 + \beta_1 c_1 h_1}{h_r} + \frac{\theta(a_r \alpha_r h_r + \beta_r c_r h_r)}{h_1 h_r},$$

که  $h_f = (1 - u_1)$  و  $h_r = (1 - u_f)$ ،  $h_1 = (\delta + \theta + \mu)$ ،  $h_2 = (\delta + \mu + \pi)$  است.

**قضیه ۲:** نقطه تعادل رهایی از بیماری به طور مجانبی پایدار است اگر  $R_o < 1$  و ناپایدار است اگر  $R_o > 1$ .

**اثبات:** با توجه به [۱۸] معادلات دستگاه مدل را دسته بندی می کنیم و ماتریس ژاکوبی حاصل را به دست می آوریم. سپس مقادیر ویژه ی ماتریس ژاکوبی را محاسبه می کنیم. مدل بیماری در نقطه تعادل رهایی از بیماری در صورتی پایدار است که همه ی مقادیر ویژه ی ماتریس ژاکوبی دارای قسمت حقیقی منفی باشد و این در حالتی برقرار است که  $R_o < 1$ . در ادامه عدد شیوع را در دو حالت بررسی می کنیم:

**حالت اول.** هیچ فردی از سرنگ مشترک استفاده نکند.

در این حالت تعداد تماس هایی که منجر به انتقال بیماری اچ آی وی/ایدز می شود، صفر است لذا  $a_1$ ،  $a_r$  و  $a_f$  صفر هستند. در نتیجه عدد شیوع به صورت زیر خواهد بود:

$$R_{o_1} = \lim_{(a_1, a_r, a_f, a_r) \rightarrow (0, 0, 0, 0)} R_o = \frac{(\beta_f c_f (1 - u_1))(\delta(\delta + \theta + \mu + \pi)(\sigma_d + \mu) + \pi\theta\sigma_d)}{h_1 h_r (\alpha_d + \mu)(\sigma_d + \mu)} + \frac{\pi\theta(\beta_r c_r (1 - u_1))}{h_1 h_r (\sigma_d + \mu)} + \frac{\beta_1 c_1 (1 - u_1)}{h_r} + \frac{\theta(\beta_r c_r (1 - u_1))}{h_1 h_r}.$$

**حالت دوم.** استفاده از سرنگ مشترک.

در این حالت تعداد تماس ها از طریق سرنگ آلوده مشترک افزایش می یابد. در این حالت عدد شیوع برابر

$$R_{o_2} = R_{o_1} + \frac{(\alpha_f a_f (1 - u_f))(\delta(\delta + \theta + \mu + \pi)(\sigma_d + \mu) + \pi\theta\sigma_d)}{h_1 h_r (\alpha_d + \mu)(\sigma_d + \mu)} + \frac{\pi\theta(\alpha_r a_r (1 - u_f))}{h_1 h_r (\sigma_d + \mu)} + \frac{\alpha_1 a_1 (1 - u_f)}{h_r} + \frac{\theta(\alpha_r a_r (1 - u_f))}{h_1 h_r},$$



خواهد بود. با مقایسه عدد شیوع در دو حالت اول و دوم داریم

$$\Delta = R_{o_r} - R_{o_1} = \frac{(\alpha_f a_f (1 - u_f)) (\delta (\delta + \theta + \mu + \pi) (\sigma_d + \mu) + \pi \theta \sigma_d)}{h_1 h_r (\alpha_d + \mu) (\sigma_d + \mu)} + \frac{\pi \theta (\alpha_r a_r (1 - u_r))}{h_1 h_r (\sigma_d + \mu)} + \frac{\alpha_1 a_1 (1 - u_1)}{h_r} + \frac{\theta (\alpha_r a_r (1 - u_r))}{h_1 h_r} > 0.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود  $\Delta > 0$  نشان می‌دهد که در حالت دوم استفاده از سرنگ مشترک باعث افزایش شیوع بیماری شده است. همچنین نشان می‌دهد که با افزایش تعداد دفعات استفاده از سرنگ مشترک مقدار  $\Delta$  افزایش می‌یابد.

#### ۴- بررسی شرایط لازم برای کنترل بهینه

کنترل‌های  $u_1, u_r, u_f$  و  $u_f$  را بر دستگاه (۱) اعمال می‌کنیم. توجه می‌کنیم که همه کنترل‌ها در بازه  $[0, 1]$  قرار دارند. ابتدا تابع متناسب با هدف را فرمول‌بندی می‌کنیم. هدف ما کاهش تعداد افراد بیمار ناآگاه از بیماری (هم معتاد و هم غیر معتاد) به نحوی است که هزینه‌های مربوط به کنترل‌ها کمترین مقدار شود؛ بنابراین تابع به صورت زیر است:

$$J = \min_{u_1, u_r, u_f, u_f} \int_0^{t_f} (aI_{1n} + bI_{1d} + b_1u_1 + b_r u_r + b_f u_f + b_f u_f) dt.$$

هامیلتونی این مسئله به صورت

$$\begin{aligned} H = & aI_{1n} + bI_{1d} + b_1u_1 + b_r u_r + b_f u_f + b_f u_f + \lambda_{S_n} (Q_0 - \lambda_d S_n - \lambda_h S_n - \mu S_n) \\ & + \lambda_{I_{1n}} (\lambda_h S_n - u_r \theta I_{1n} - (\delta + \lambda_d + \mu) I_{1n}) + \lambda_{I_{rn}} (u_r \theta I_{1n} - u_r \pi I_{rn} - (\delta + \lambda_d + \mu) I_{rn}) \\ & + \lambda_{H_n} (u_r \pi I_{rn} - (\sigma_n + \lambda_d + \mu) H_n) + \lambda_{A_n} (\delta I_{1n} + \delta I_{rn} + \sigma_n H_n - (\mu + \alpha_n) A_n) \\ & + \lambda_{S_d} (\lambda_d S_n - (\lambda_n + \lambda_{h_n} + \mu) S_d) + \lambda_{I_{1d}} (\lambda_d I_{1n} + (\lambda_n + \lambda_{h_n}) S_d - u_r \theta I_{1d} - \delta I_{1d} - \mu I_{1d}) \\ & + \lambda_{I_{rd}} (u_r \theta I_{1d} + \lambda_d I_{rn} - (\delta + u_r \pi + \mu) I_{rd}) + \lambda_{A_d} (\delta I_{1d} + \delta I_{rd} + \sigma_d H_d - (\alpha_d + \mu) A_d) \\ & + \lambda_{H_d} (u_r \pi I_{rd} + \lambda_d H_n - (\sigma_d + \mu) H_d) \end{aligned}$$

است که در آن  $\lambda_{A_d}, \lambda_{A_n}, \lambda_{H_d}, \lambda_{H_n}, \lambda_{I_{rd}}, \lambda_{I_{rn}}, \lambda_{I_{1d}}, \lambda_{I_{1n}}, \lambda_{S_d}, \lambda_{S_n}$  الحاقی یا کمک وضعیت هستند.

**قضیه ۳:** برای کنترل‌های بهینه  $u_1^*, u_r^*, u_f^*$  و  $u_f^*$  متغیرهای الحاقی  $\lambda_{I_{1n}}, \lambda_{S_d}, \lambda_{S_n}$  وجود دارد که در معادلات زیر (معادلات کمک وضعیت) صدق می‌کنند:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda'_{S_n} &= \mu\lambda_{S_n} - (\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) \left( \lambda_d - \frac{\lambda_d S_n}{N} \right) - (\lambda_{I_n} - \lambda_{S_n}) \left( \lambda_h - \frac{\lambda_h S_n}{N} \right) + \frac{\lambda_d}{N} ((\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} \\ &\quad + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n), \\ \lambda'_{I_n} &= \frac{\lambda_d}{N} ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) - u_r \theta (\lambda_{I_n} - \lambda_{I_n}) \\ &\quad - (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) \left( \lambda_d - \frac{\lambda_d I_{In}}{N} \right) + (\mu + \delta) \lambda_{I_n} - (\lambda_{I_n} - \lambda_{S_n}) S_n \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1}{N_n} - \frac{\lambda_h}{N_n} \right) - a, \\ \lambda'_{I_{In}} &= \frac{\lambda_d}{N} ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) - (\lambda_{I_n} - \lambda_{S_n}) S_n \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1}{N_n} - \frac{\lambda_h}{N_n} \right) \\ &\quad - (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) \left( \lambda_d - \frac{\lambda_d I_{In}}{N} \right) + (\mu + \delta) \lambda_{I_n} - u_r \pi (\lambda_{H_n} - \lambda_{I_n}), \\ \lambda'_{H_n} &= \frac{\lambda_d}{N} ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In}) - (\lambda_{I_n} - \lambda_{S_n}) S_n \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1}{N_n} - \frac{\lambda_h}{N_n} \right) \\ &\quad - (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) \left( \lambda_d - \frac{\lambda_d I_{In}}{N} \right) + \mu \lambda_{H_n} - \sigma_n (\lambda_{A_n} - \lambda_{H_n}), \\ \lambda'_{A_n} &= \frac{\lambda_d}{N} ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) \\ &\quad - (\lambda_{I_n} - \lambda_{S_n}) S_n \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1}{N_n} - \frac{\lambda_h}{N_n} \right) + (\mu + \alpha_n) \lambda_{A_n}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda'_{S_d} &= \mu\lambda_{S_d} - (\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d}) \left( +\lambda_{hn} \right) - \left( \frac{\lambda_n}{N_d} + \frac{\lambda_{hn}}{N_d} \right) S_d - \left( \frac{\beta_d c_d}{N} - \frac{\lambda_d}{N} \right) ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In}) \\ &\quad + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n, \\ \lambda'_{I_d} &= -(\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d}) \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_n}{N_d} + \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_{hn}}{N_d} \right) S_d - \left( \frac{\beta_d c_d}{N} - \frac{\lambda_d}{N} \right) ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} \\ &\quad + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} - b + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) + (\delta + \mu) \lambda_{I_d} - u_r \theta (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_d}), \quad (Y) \\ \lambda'_{I_{In}} &= -(\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d}) \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_n}{N_d} + \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_{hn}}{N_d} \right) S_d - \left( \frac{\beta_d c_d}{N} - \frac{\lambda_d}{N} \right) ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} \\ &\quad + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) + (\delta + \mu) \lambda_{I_d} - u_r \pi (\lambda_{H_d} - \lambda_{I_d}), \\ \lambda'_{H_d} &= -(\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d}) \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_n}{N_d} + \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_{hn}}{N_d} \right) S_d - \left( \frac{\beta_d c_d}{N} - \frac{\lambda_d}{N} \right) ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} \\ &\quad + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) + \mu \lambda_{H_d} - \sigma_d (\lambda_{A_d} - \lambda_{H_d}), \\ \lambda'_{A_d} &= -(\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d}) \left( \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_n}{N_d} + \frac{(1-u_r) \beta_1 c_1 - \lambda_{hn}}{N_d} \right) S_d - \left( \frac{\beta_d c_d}{N} - \frac{\lambda_d}{N} \right) ((\lambda_{S_d} - \lambda_{S_n}) S_{In} \\ &\quad + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{I_d} - \lambda_{I_n}) I_{In} + (\lambda_{H_d} - \lambda_{H_n}) H_n) + (\alpha_d + \mu) \lambda_{A_d}. \end{aligned} \right.$$

با توجه به شرایط اولیه

$$\begin{aligned} \lambda_{I_{rd}}(t_f) &= \lambda_{S_n}(t_f) = \lambda_{I_n}(t_f) = \lambda_{I_{In}}(t_f) \\ &= \lambda_{H_n}(t_f) = \lambda_{A_n}(t_f) = \lambda_{H_d}(t_f) = \lambda_{A_d}(t_f) = 0, \end{aligned}$$

کنترل‌های بهینه به صورت زیر هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^* = \max\{0, \min\{1, \frac{(\lambda_{I_n} - \lambda_{S_n})}{\gamma b_1 N_n} (\beta_1 c_1 I_n + \beta_r c_r I_{r_n} + \beta_r c_r H_n + \beta_f c_f A_n) S_n \\ + \frac{(\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d})}{\gamma b_1 N_d} ((\beta_1 c_1 I_d + \beta_r c_r I_{r_d} + \beta_r c_r H_d + \beta_f c_f A_d) S_d)\}\}, \\ u_r^* = \max\{0, \min\{1, \frac{\theta(\lambda_{I_n} - \lambda_{I_r}) I_n}{\gamma b_r} + \frac{\theta(\lambda_{I_d} - \lambda_{I_r}) I_d}{\gamma b_r}\}\}, \\ u_f^* = \max\{0, \min\{1, \frac{\pi(\lambda_{H_n} - \lambda_{I_r}) I_{r_n}}{\gamma b_f} + \frac{\pi(\lambda_{H_d} - \lambda_{I_r}) I_{r_d}}{\gamma b_f}\}\}, \\ u_s^* = \max\{0, \min\{1, \frac{1}{\gamma b_f N_d} (\beta_1 c_1 I_d + \beta_r c_r I_{r_d} + \beta_r c_r H_d + \beta_f c_f A_d) (\lambda_{I_d} - \lambda_{S_d})\}\}. \end{array} \right. \quad (3)$$

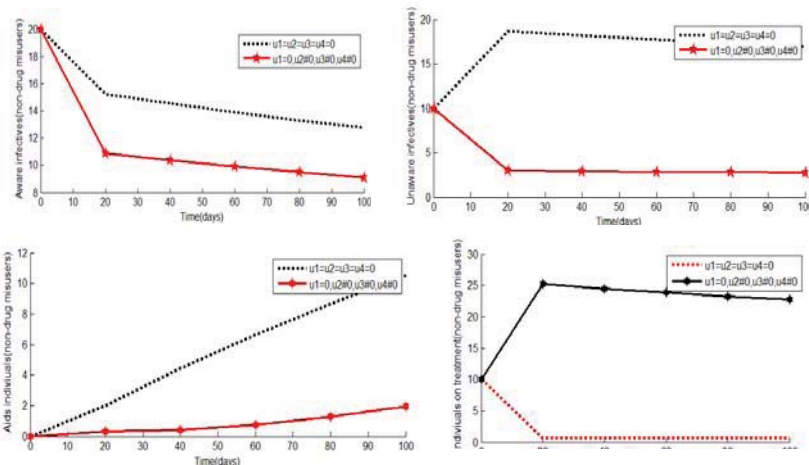
برای بررسی وجود جواب در سیستم بهینگی که شامل معادلات وضعیت و معادلات الحاقی است، اگر مقادیر سمت راست سیستم بهینگی پیوسته و کران‌دار باشد آنگاه سیستم بهینگی دارای جواب است [۱۴]. برای نشان دادن یکتایی جواب، مقادیر سمت راست معادلات سیستم بهینگی باید در شرط لیپ‌شیتس صدق کند. دستگاه (۲) نیز با مشتق‌گیری از هامیلتونی نسبت به متغیرهای الحاقی به دست می‌آید. کنترل‌های بهینه (۳) با توجه به شرط بهینگی پونتریاگین معلوم می‌شود [۱۹]. با قرار دادن کنترل‌های بهینه (۳) در معادله‌های (۱) و (۲)، سیستم بهینگی حاصل می‌شود.

## ۵- نتایج عددی

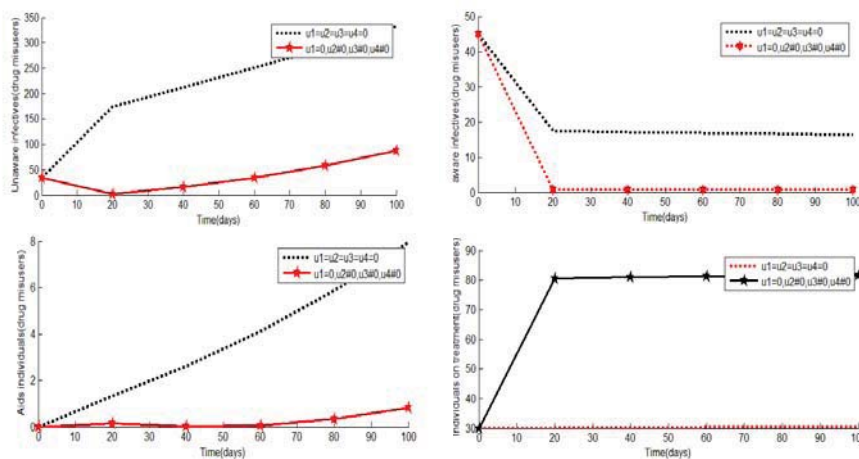
مقادیر بهینه کنترل‌ها و متغیرهای مدل با حل سیستم بهینگی به دست می‌آید. در این قسمت سیستم بهینگی را استفاده از روش رانگه-کوتا مرتبه چهار به دست می‌آوریم. به کمک نرم‌افزار متلب نتایج عددی را برای چهار حالت مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**حالت ۱.** شناسایی افراد بیمار ناآگاه ( $u_p$ )، درمان افراد بیمار ( $u_r$ ) و استفاده از سرنگ غیر آلوده ( $u_f$ ) به صورت بهینه انجام شود ولی روابط جنسی محافظت نشده باشد، به عبارت دیگر  $u_1 = 0$  باشد. شکل (۱) این نتایج را در جمعیت غیر معتاد و شکل (۲) در جمعیت معتاد نشان می‌دهد.

همان‌طور که در شکل‌های (۱) و (۲) مشاهده می‌شود تعداد افراد مبتلا به ایدز، بعد از اعمال کنترل‌ها به طور معناداری کاهش پیدا کرده است. همچنین تعداد افراد تحت درمان و افرادی که از بیماری خودآگاه شده‌اند، به طور قابل توجهی افزایش پیدا کرده است.



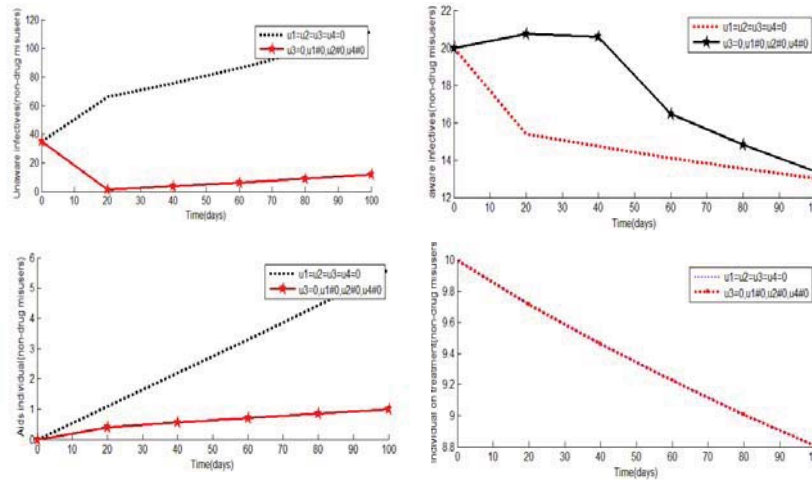
شکل (۱): کنترل بهینه  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  در افراد غیر معتاد.



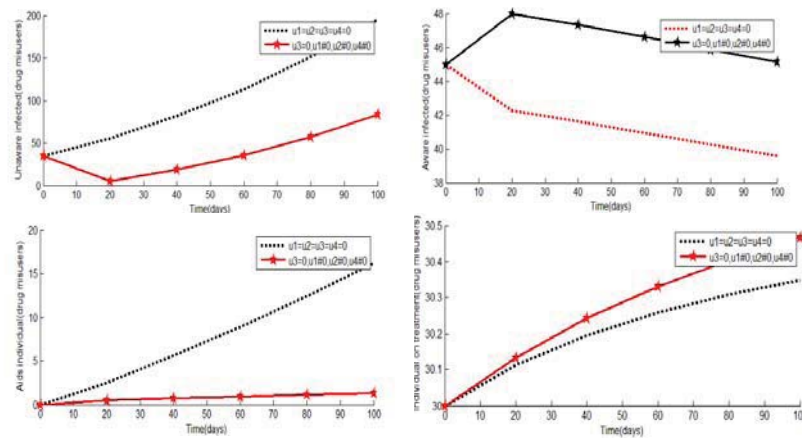
شکل (۲): کنترل بهینه  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  در افراد معتاد.

**حالت ۲.** کنترل‌های مربوط به استفاده از وسایل پیشگیری در روابط جنسی ( $u_1$ )، شناسایی افراد بیمار ناآگاه ( $u_2$ ) و استفاده از سرنگ استریل به‌جای سرنگ آلوده ( $u_3$ ) در حالت بهینه باشند ولی نسبت به درمان بیماران اقدامی صورت نگیرد، یعنی  $u_4$  صفر باشد. نتایج عددی در شکل‌های (۳) و (۴) آمده است.

در شکل‌های (۳) و (۴) تعداد افراد مبتلا به ایدز و تعداد افراد بیمار ناآگاه کاهش چشمگیری دارد و تعداد افراد تحت درمان نیز در این حالت کاهش یافته است.

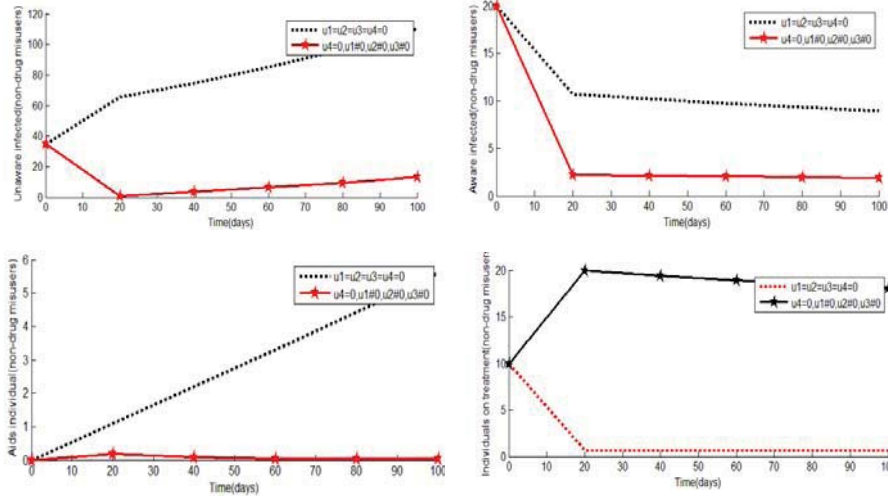


شکل (۳): کنترل بهینه در حالت  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  در افراد غیر معتاد.

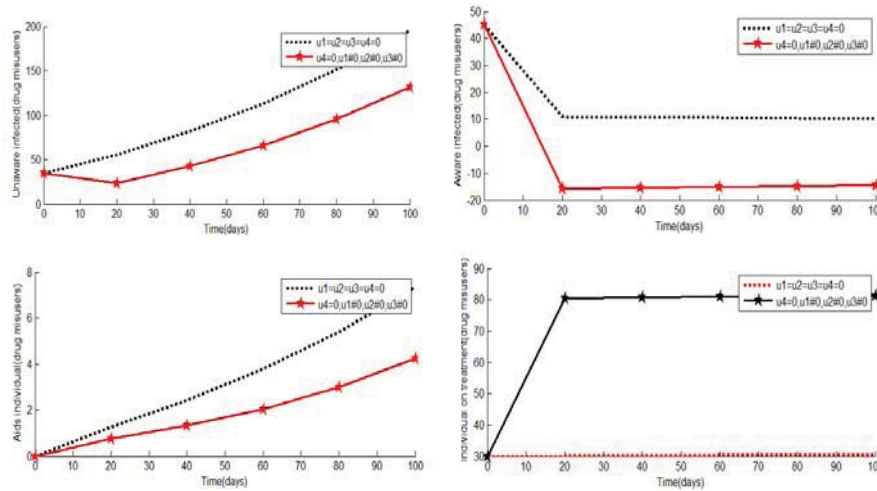


شکل (۴): کنترل بهینه در حالت  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  در افراد معتاد.

**حالت ۳.** در این حالت کنترل‌های  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  بهینه هستند و کنترل  $u_4$  صفر است، یعنی کنترلی روی استفاده نکردن از سرنگ آلوده در جمعیت معتاد صورت نمی‌گیرد. شکل‌های (۵) و (۶) نتایج حاصل را نشان می‌دهند.

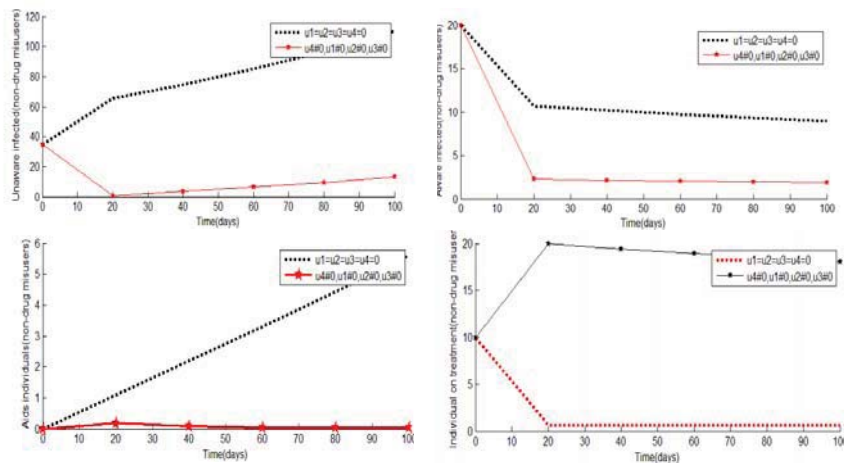


شکل (۵): کنترل‌های  $u_1, u_2$  و  $u_3$  در حالت بهینه هستند (در جمعیت غیر معتاد).



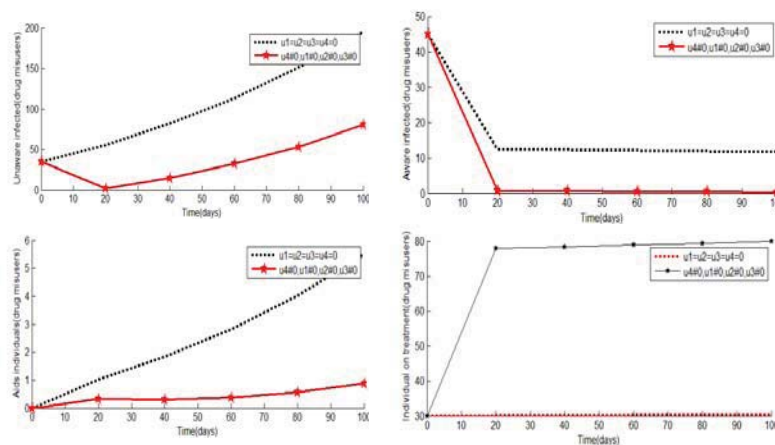
شکل (۶): کنترل‌های  $u_1, u_2$  و  $u_3$  در حالت بهینه هستند (در جمعیت معتاد).

در این حالت چون کنترل مربوط به سرنگ‌های استریل صفر است، لذا در شکل (۶) نسبت به شکل (۷) کاهش تعداد افراد مبتلا به ایدز کمتر است.



شکل (۷): همگی کنترل‌های  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  در حالت بهینه هستند. (در افراد غیر معتاد).

حالت ۴. همگی کنترل‌ها در حالت بهینه هستند.



شکل (۸): همگی کنترل‌های  $u_1, u_2, u_3$  و  $u_4$  در حالت بهینه هستند (در افراد معتاد).

در این حالت که همه کنترل‌ها بهینه هستند، بهترین حالت است و بیشترین کاهش در بیماری ایدز در این حالت اتفاق می‌افتد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نمودارهای (۵) و (۷) مشابه هستند زیرا در جمعیت غیر معتاد، وجود یا نبود کنترل  $u_4$  تأثیری ندارد.

## ۶- نتیجه‌گیری کلی

در این مقاله یک مدل ریاضی برای بیماری اچ آی وی/ایدز ارائه شده است. با استفاده از این مدل، تأثیر سرنگ‌های آلوده در شیوع بیماری اچ آی وی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین تأثیر هرکدام از کنترل‌های شناسایی افراد بیمار ناآگاه، استفاده از وسایل پیشگیری در روابط جنسی، درمان بیماران مبتلا به اچ آی وی و استفاده از سرنگ‌های استریل به‌جای سرنگ‌های آلوده در کاهش شیوع بیماری و پیشگیری از بیماری مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست‌آمده از مدل ارائه‌شده نشان می‌دهد که با افزایش استفاده از سرنگ‌های مشترک و آلوده، تعداد افرادی که توسط یک شخص بیمار، به اچ آی وی/ایدز مبتلا می‌شوند افزایش یافته و در نتیجه بیماری در جامعه شیوع پیدا می‌کند. همچنین تفاوت معنادار در کنترل شیوع بیماری، بین حالت عدم کنترل بر بیماری و کنترل بر بیماری، وجود دارد. از طرفی با توجه به این که کنترل‌ها را در حالت بهینه بر مسئله اعمال کردیم، لذا با مدلی که ارائه شد، می‌توان با کمترین هزینه بیشترین کنترل را در شیوع بیماری اچ آی وی/ایدز داشت.

## مراجع

- [1] Tripathi, A., Naresh, R. and Sharma, D. (2007). Modeling the effect of screening of unaware infectives on the spread of HIV infection, *Science Direct, Applied Mathematics and Computation*, **184**, 1053-1068.
- [2] Brannstrom, J., Akerlund, B., Arneborn M., Blaxhult, A. and Giesecke, J. (2005). Unaware infection in HIV cases, *Int. J. ZSTD AIDS*, **16**, 702–706.
- [3] Centers for Disease Control and Prevention, Prevalence and awareness of HIV infection among men who have sex with men –21 cities, United States 2008, (2010). *Morbidity and Mortality weekly report*, **59**, No. 37.
- [4] Roy, P.K. (2015). *Mathematical models for therapeutic approaches to control HIV disease transmission*, Singapore, Springer.
- [5] Anderson, R.M., Medly, G.F., May, R.M. and Johnson, A.M. (1986). A preliminary study of the transmission dynamics of the Human Immunodeficiency Virus (HIV), the causative agent of AIDS, *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology*, **3**, 229–263.
- [6] Nikolaos, I.S., Dietz, K. and Schenzle, D. (1997). Analysis of a model for the pathogenesis of AIDS, *Mathematical Biosciences*, **145**, 27–46.



- [7] Okosun, K.O., Makinde, O.D. and Takaidza, I. (2013). Impact of optimal control on the treatment of HIV/AIDS and screening of unaware infectives, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 3802–3820.
- [8] Naresh, R. and Tripathi, A. (2005). Modeling and analysis of HIV-TB co-infection in a variable size population, *Mathematical Modelling and Analysis*, **10**, 275–286.
- [9] Bhunu, C.P. and Mushayabasa, S. (2013). Modelling the transmission dynamics of HIV/AIDS and hepatitis C virus co-infection, *HIV & AIDS Review*, **12**, 37-42.
- [10] Shah, N. H. and Gupta., J. (2014). Modelling of HIV-TB Co-infection Transmission Dynamics, *American Journal of Epidemiology and Infectious Disease*, **2**, 1-7.
- [11] Silva, C.J., and Torres, D.F.M. (2015). A TB-HIV/AIDS coinfection model and optimal control treatment, *Discrete and continuous dynamical systems*, **35**, 4639 -4663.
- [12] Joshi, H. R. (2002). Optimal control of an HIV immunology model, *Optimal Control Applications and Methods*, **23**, 199–213.
- [13] Yusuf, T.T. and Benya, F. (2012). Optimal strategy for controlling the spread of HIV/AIDS disease: a case study of South Africa, *Journal of Biological Dynamics*, **6**, 475–494.
- [14] Akinboro, F.S., Alao, S., Akinpelu, F.O. and Gbodamosi, B. (2014). Optimal Control of Drug in an HIV Immunological Model, *IOSR Journal of Mathematics*, **19**, 98-105.
- [15] Basak, U.S., Datta, B.K., and Ghose, P.K. (2015). Mathematical Analysis of an HIV/AIDS Epidemic Model, *American Journal of Mathematics and Statistics*, **5**, 253-258.
- [16] Roy, P.K., Saha, S., and Al Basir, F. (2015), Effect of awareness programs in controlling the disease HIV/AIDS: An optimal control theoretic approach, *Difference Equations*, **1**, 1-18.
- [17] Shabani, I., Massawe, E.S. and Makinde, O.D. (2011), Modelling the effect of screening on the spread of HIV infection in a population with variable inflow of infective immigrants, *Scientific Research and Essay*, **6**, 4397-4405.
- [18] Driessche, V.P. and Watmough, J. (2002), Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission, *Mathematical Biosciences*, **180**, 29–48.

- [19] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York: Wiley.

## Presenting a Mathematical Model and Investigating Effects of Contaminated Needle Sharing on Prevalence of HIV/AIDS Disease

Afshin Babaei, Hossein Jafari and Masumeh Ahmadi

Department of Mathematics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

### Abstract

In this paper, a Mathematical model for studying HIV/AIDS dynamics is presented. Based on this model, the effects of contaminated needle sharing in addicted population on spread of HIV/AIDS are investigated. For this purpose, first, the effective reproduction number is obtained by using the next generation operator method. Then, the reproduction number is examined in two cases, one with sharing needles and the other one with not sharing needles. The optimal control problem is formulated by applying some controls on the disease model including use of non-shared and sterile needles, use of prevention methods, screening of unaware infectives and treating patients. Necessary conditions for optimal control are determined by using Pontryagin's minimum principle. Finally, numerical results are obtained by the Runge-Kutta fourth-order method. The results show a significant difference in control of prevalence of disease between the cases applying and not applying control on the disease.

**Keywords:** HIV/AIDS disease, Mathematical model, Reproduction number, Optimal control, Next generation matrix.

**Mathematics Subject classification (2010):** 92D30, 49J15.