مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره ۶، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۵

روشی جدید در تعیین ورشکستگی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و تئوری مجموعه‌های راف فازی

آیدا باتمیز [۱]، فرانک حسین زاده سلجوقی و علی‌اکبر ثانوی

دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۶/۱۴

چکیده: در شرایط متغیر اقتصادی و نوسانات شدید مالی در محیط‌های تجاری، وجود الگوهایی برای پیش‌بینی عملکرد مالی شرکت‌ها از اهمیت بسزایی برخوردار است. یکی از این موارد پیش‌بینی وقوع بحران مالی و به‌عبارت‌دیگر ورشکستگی است. تحلیل پوششی داده‌ها (*DEA*) یک ابزار قدرتمند در اختیار مدیران است که عملکرد شرکت خود را در فعالیت‌های تجاری محک بزنند. مدل‌های مرسوم تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری (*DMU*) را در بهترین حالت انجام می‌دهند و درواقع در حالت خوش‌بینانه ارزیابی صورت می‌گیرد، ولی مدل‌های دیگری در *DEA* معرفی‌شده‌اند که قابلیت اندازه‌گیری کارایی با دیدگاه بدبینانه را نیز دارند که دارای کاربردهای ویژه خود مانند ارزیابی ورشکستگی می‌باشند. این مقاله با استفاده از نظریه بازی‌های *DEA* و تخصیص، یک مدل جدید *DEA* در زمینه ورشکستگی را معرفی می‌کند و با تشکیل یک سیستم اطلاعاتی و استفاده از شاخص‌ها، ورشکستگی و کارایی را با استفاده از مفاهیم *DEA* راف و راف فازی محاسبه می‌کند. نتایج حاصل از مدل در تعیین ورشکستگی بین چند شرکت بررسی و محاسبه‌شده است.

واژه‌های کلیدی: ورشکستگی، نظریه بازی‌ها، تئوری مجموعه راف، مدل فاصله جهت‌دار، راف فازی، DEA راف.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۸۶C۶۲.

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین مفاهیم در اقتصاد، پیش‌بینی و ارزیابی ورشکستگی است که باعث وقوع بحران‌های شدید مالی می‌شود. درواقع یکی از فنون و ابزارهای پیش‌بینی وضعیت آینده

۱ -آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: aida.batamiz@yahoo.com

سازمان‌ها، مدل‌های پیش‌بینی و ارزیابی ورشکستگی است. مدل‌های اولیه DEA برای ارزیابی کارایی نسبی در واحدهای تصمیم‌گیرنده در حالت خوش‌بینانه به‌کاربرده می‌شود، اما مدل‌هایی هم هستند که تحت عنوان ارزیابی کارایی در حالت بدبینانه در DEA موردبحث قرار می‌گیرند. از جمله مدل‌های DEA جمعی که در ارزیابی ورشکستگی برای یک مجموعه از نسبت‌های مالی به‌عنوان متغیرهای ورودی و مجموعه‌ی دیگر به‌عنوان متغیرهای خروجی در نظر گرفته می‌شوند. [۱] ایده ارزیابی ورشکستگی با استفاده از نظریه‌ی اقتصادی ورشکستگی و در راستای این نظریه است. نظریه اقتصادی پیشنهاد می‌کند که ورشکستگی باید به‌عنوان یک‌روند آزمایش طراحی‌شده برای حذف فقط شرکت‌هایی صورت بگیرد که به‌طور اقتصادی ناکارا هستند و به عبارتی دیگر ورشکستگی بدترین موقعیت یک DMU است که آن را تحت عنوان DMU نامطلوب بررسی می‌کنیم. در مدل‌های پیش‌بینی ورشکستگی شرکت‌ها، احتمال وقوع ورشکستگی به‌وسیله گروهی از نسبت‌های مالی که از سوی صاحب‌نظران باهم ترکیب‌شده‌اند تخمین زده می‌شود. آلتمن [۲] نخستین فردی است که مدل‌های پیش‌بینی ورشکستگی را عرضه کرد در تحقیقات بعدی پریما کاندرا از مدل جمعی چارنز برای پیشگویی ورشکستگی استفاده کرد و بر اساس مثبت بودن و یا نبودن تابع هدف آن‌ها را به‌عنوان ورشکسته و غیر ورشکسته معرفی کرد [۱]. تئوری مجموعه‌های راف توسط پروفسور پاولاک برای تحلیل داده‌ها پایه‌گذاری شد [۳]. این تئوری با تحلیل جدول‌های داده در ارتباط است و یک ابزار قدرتمند ریاضی برای استدلال در موارد اطلاعات مبهم و نادقیق است. تئوری مجموعه‌های راف نقاط اشتراک زیادی با تئوری مجموعه‌های فازی دارد. در بیشتر موارد اطلاعات به‌صورت جدول‌های داده‌ها تحت عنوان سیستم‌های اطلاعاتی، جدول‌های ویژگی-مقدار و یا جدول‌های اطلاعات، در اختیار است. ستون‌های جدول‌های اطلاعاتی با ویژگی‌ها و سطرهای آن با شیء نام‌گذاری شده و اعداد درون جدول با مقادیر ویژگی‌ها مربوط به هر شیء تکمیل می‌شوند. در هر سیستم اطلاعاتی ویژگی‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:۱-ویژگی‌های تصمیم ۲- ویژگی‌های موقعیت که در هر سطر از یک جدول تصمیم می‌توان قواعد تصمیم را به‌صورت اگر- آنگاه به دست آورد.

پس از معرفی مجموعه فازی توسط زاده، کاربردهای آن با سرعت زیادی گسترش یافت [۴]. کافمن متغیرهای فازی را معرفی نمود [۵] و سپس زاده و نهمیاس به توسعه و تکمیل مجموعه‌ی فازی پرداختند [۶ و ۷]. این نظریه به علت استفاده از مفاهیم نادقیق و مبهم موردتوجه بسیاری از محققان از جمله دوبویس و پراد قرار گرفت [۸].

متغیرهای راف فازی از آنجا که در عمل با مقادیر و مفاهیم ابهام و راف روبرو می‌شویم به‌عنوان یک متغیر کارامل مورداستفاده قرار گرفته و در حل بسیاری از مسائل نادقیق به کار برده می‌شود. مجموعه راف فازی اولین بار توسط دوبویس و پراد معرفی شد [۹]. بعدها با تعریف تخمین‌های بالای و پایینی مجموعه‌ی فازی توسط مورسی و یاکوت موردبررسی و مطالعه‌ی بیشتر قرار گرفت

[۱۰]. اخیراً دانشمندان زیادی با استفاده از مفاهیم مجموعه‌ی راف فازی در زمینه‌های اقتصادی، تحقیقات بسیاری را انجام دادند از جمله ونگ که در سال ۲۰۰۳ بر روی مینیمم ارزش سهام با استفاده از مجموعه‌ی راف فازی مطالعاتی را انجام داد [۱۱].

در این مقاله به ارائه مدلی جدید برای ارزیابی و پیش‌بینی ورشکستگی با استفاده از داده‌های راف فازی می‌پردازیم. در این مدل از تلفیق DEA و قواعد تصمیم‌گیری تئوری مجموعه‌های راف استفاده و کاربرد مجموعه‌های راف فازی را در زمینه‌های اقتصادی موردبررسی قرار می‌دهیم. سپس نحوه محاسبه و عملکرد مدل پیشنهادی را در یک مثال عددی تشریح می‌کنیم. کارایی و ورشکستگی سازمان‌ها با استفاده از مدل‌های گفته‌شده در مبحث راف فازی و DEA راف موردمحاسبه قرار می‌گیرد. برای حل مدل‌های DEA فازی چهار روش ارائه می‌شود: ۱- روش رتبه‌بندی فازی ۲- روش امکان ۳- روش دامنه تغییرات ۴- روش بر اساس α سطح [۱۲]. درواقع مثال عددی موردبحث در این مقاله با استفاده از روش‌های راف فازی و DEA راف که بر اساس مقدار αسطح (که آن را راف بازه‌ای می‌نامیم) و مقدار امید ریاضی در مدل ورشکستگی جدید موردمطالعه و بررسی قرار می‌گیرد و کارایی سازمان‌ها هم‌زمان با بررسی ورشکستگی محاسبه می‌شوند و ارزیابی نهایی سازمان‌ها نسبت به مقدار ورشکستگی و غیر ورشکستگی بیان می‌شود. در حالت راف بازه‌ای، ارزیابی از دو نقطه‌نظر خوش‌بینانه و بدبینانه بررسی می‌شود. استفاده از این مدل‌ها، در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها در محیط‌های تجاری که به‌نوعی در آن‌ها از مفاهیم و مقادیر نادقیق استفاده می‌شود، دیدگاه بهتری را در اختیار دولت، سرمایه‌گذاران و اقتصاددانان قرار خواهد داد. در مثال به‌کاررفته در این مقاله، سازمان‌ها (که در اینجا شرکت‌های دارویی در نظر گرفته‌شده‌اند) تحت عنوان اشیاء در سیستم اطلاعاتی و ویژگی تصمیم به‌عنوان عامل کیفی و موردبررسی در مبحث راف فازی استفاده می‌شود. لذا در این مقاله به بررسی مدل ورشکستگی با مفاهیم نظریه بازی‌ها و تخصیص در بخش دوم می‌پردازیم، بخش سوم به مروری بر مدل فاصله جهت‌دار در تحلیل پوششی داده‌ها و مدل ارزیابی ورشکستگی با استفاده از مدل فاصله جهت‌دار اصلاح‌شده و همچنین مدل جدید ارزیابی ورشکستگی اختصاص یافته است. در بخش چهارم مروری بر مفاهیم تئوری مجموعه‌های راف و راف فازی انجام‌شده است، در بخش پنجم تحلیل پوششی داده‌های راف به همراه یک مثال عددی با استفاده از مدل جدید ورشکستگی در حالت بازه‌ای بیان می‌شود و تحلیل نتایج عددی با استفاده از این مدل بررسی می‌شود. در بخش ۶ نتایج حاصل از این مدل جدید و تئوری راف فازی را موردبحث قرار می‌دهیم.

۲- مدل ورشکستگی با مفاهیم نظریه‌ی بازی‌ها و تخصیص

موقعیت یک مسئله ورشکستگی را به‌صورت زیر تعبیر می‌کنیم. مقدار دارایی را با $E \in R$ نشان داده شده است. اگر d_i بیان کننده مقدار تقاضا طلبکار iام باشد، می‌توان تمامی تقاضاها با

بردار تقاضا $d \in R^n$ نمایش داد به‌طوری‌که $d_i \geq 0$ برای هر $0 \leq i \leq n$. $N = \{1,...,n\}$ تعداد کل طلبکارها بوده و $0 \leq E \leq \sum_{j \in N} d_j$ فرض می‌شود. در این حالت مسئله ورشکستگی‌ها را می‌توان با اختصار به‌صورت (E,d) بیان نمود. اگر x_j مقدار تخصیص‌یافته برای طلبکار j ام باشد، یک جواب مسئله ورشکستگی (E,d)، یک تخصیص n تایی است، به‌طوری‌که $E = \sum_{j \in N} x_j$؛ که قابل محاسبه با روش‌های مقدار شپلی[1] و... می‌باشد. برای انتخاب حالتی که به بیشترین بازده ختم شود از تخصیص استفاده می‌کنیم که در تمام جهات قابل‌محاسبه و در بهینه‌ساز یاز پرکاربردترین مباحث می‌باشد. استفاده از مدل‌های بهینه‌سازی این امکان را می‌دهد که همه حالت‌های مختلف تخصیص، با توجه به تابع هدف بررسی شود. در این حالت، قانون تخصیص، تابعی است که یک تخصیص منحصربه‌فرد را به هر مسئله ورشکستگی اختصاص می‌دهد [۴]. در یک بازی تعاونی n نفره در تشکیل تابع تخصیص، دوتایی (N,c) را معرفی می‌کنیم به‌طوری $N = \{1,...,n\}$ مجموعه‌ای متناهی از بازیکنان است. $c: 2^n \to R$ تابع تخصیص و 2^n تعداد زیرمجموعه‌های N را نشان می‌دهد، $c(\varnothing) = 0$ فرض می‌شود. درواقع در این مسائل زیر مجموعه‌های S از N را به‌عنوان تخصیص ارجاع می‌دهیم و مقدار $c(S)$ را به‌عنوان ارزش (دارایی) S معرفی می‌کنیم [۱۳].

در تخصیص، دارایی هر بازیکن، به‌عنوان ماکزیمم سود یا هزینه بازیکن تفسیر می‌شود. حال یک مجموعه ثابت از بازیکنان را به‌وسیله یک بازی (N,c) که c یک تابع تخصیص است را در نظر می‌گیریم [۱۴]. بنابراین بازی ورشکستگی را مطابق با مسئله ورشکستگی (E,D) به‌وسیله $c_{E,d}(S) = \max\left\{E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j, 0\right\}$ تعریف می‌کنند.

مقدار بهینه صفر نشان‌دهنده ورشکستگی خواهد بود. اگر مقدار دارایی بازیکن، کمتر یا مساوی میزان مطالبات طلبکاران از وی باشد مقدار به‌دست‌آمده در عبارت $E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j$ منفی بوده و تمام دارایی‌ها به‌عنوان مطالبات به طلبکاران پرداخت‌شده است؛ که این نشان می‌دهد که بازیکن ورشکسته شده است و مقدار غیر صفر نشان‌دهنده غیر ورشکستگی خواهد بود؛ یعنی اگر مقدار به‌دست‌آمده در عبارت $E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j$ مثبت باشد، مقدار دارایی خالص باقیمانده‌ای بعد از پرداخت مطالبات می‌تواند به‌عنوان ابزار تولید استفاده گردد که به‌عنوان عدم ورشکستگی بازیکن موردنظر تفسیر شود.

۱-Shapely value

۳- مدل فاصله‌ی جهت‌دار در تحلیل پوششی داده‌ها

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی مبتنی بر مدل برنامه‌ریزی خطی است که کارایی واحدهای تصمیم‌گیری (DMU ها) را اندازه‌گیری می‌کند. فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری که هریک با m ورودی، s خروجی تولید می‌کنند را در نظر بگیرید. بطوریکه y_{rj} مقدار خروجی r ام و x_{ij} مقدار ورودی i ام از DMU_j می‌باشد. تمام داده‌ها نامنفی فرض می‌شوند اما حداقل یک جزء از هر بردار ورودی و خروجی مثبت است بدین‌صورت که: $x_{ij} \geq 0, x_j \neq 0$ و $y_{rj} \geq 0, y_j \neq 0$ برای هر $j = 1,\dots,n$ [۱۵].

$$\begin{aligned} \theta^* = \min \ & \theta \\ s.t. \ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}, \quad i = 1,\dots,m \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}, \quad r = 1,\dots,s \\ & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n \end{aligned} \tag{1}$$

در مدل فوق x_{io} و y_{ro} نشان‌دهنده ورودی و خروجی DMU تحت بررسی است. این مدل دارای یک جواب شدنی $\theta = 1, \ \lambda_o = 1, \ \lambda_j = 0 \left(j \neq 0 \right)$ است؛ بنابراین θ بهینه، بزرگ‌تر از یک نیست. حال مدل DEA می‌تواند به‌عنوان یک تابع فاصله جهت‌دار برای اندازه‌گیری کارایی در نظر گرفته شود. مدل DEA می‌تواند به‌عنوان یک تابع فاصله جهت‌دار برای اندازه‌گیری کارایی در نظر گرفته شود. از این تابع فاصله جهت‌دار برای محاسبه ورشکستگی استفاده می‌شود. چمبرز [۱۶] مدل DEA در حالت بازده به مقیاس ثابت را برای تابع فاصله جهت‌دار به‌صورت زیر ارائه نمود. در این روش، تابع فاصله جهت‌دار هر دسته از ورودی و خروجی‌های وابسته به بردارهای جهت و مجموعه امکان تولید محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro} + \beta g_{y_{ro}} \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_{io} - \beta g_{x_{io}} \\ & \lambda_j \geq 0, \ j = 1,2,\dots,n \\ & g_{y_{ro}}, g_{x_{io}} \geq 0 \\ & g_x = \max_j \left\{ x_{ij} \right\} - x_{io} \quad i = 1,\dots,m \\ & g_y = y_{ro} - \min \left\{ y_{rj} \right\} \quad r = 1,\dots,s \end{aligned} \tag{2}$$

در مدل فوق β نامقیداست و درواقع β ناکارایی تکنیکی در واحدها را اندازه می‌گیرد همچنین $1-\beta$ نشان‌دهنده کارایی بوده و افزایش خروجی‌ها و کاهش ورودی‌ها به‌طوری‌که به‌وسیله متغیر β انجام می‌شود. در مدل (۲)، g_x و g_y بردارهای جهت می‌باشند.

۳-۱-ارزیابی ورشکستگی با استفاده از مدل فاصله جهت‌دار اصلاح‌شده

برای غلبه بر نامحدود بودن β در ارزیابی ورشکستگی، یک مدل اصلاح‌شده در DEA با دیدگاه بدترین کارایی نسبی به‌صورت مدل (۳) ارائه‌شده است [۱۷]. این مدل را در ماهیت خروجی بررسی می‌کنیم. ابتدا بدترین موقعیت یک DMU ، تحت عنوان DMU نامطلوب را معرفی نموده که ورودی و خروجی‌های این DMU به‌صورت زیر است:

$$x_i^{\max} = \max_j (x_{ij}) \quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

$$y_r^{\min} = \min_j (y_{rj}) \quad r = 1,2,\dots,s;\ j = 1,2,\dots,n$$

واحد تحت ارزیابی را $DMU_o = (x_o, y_o)$ می‌نامیم. برای ارزیابی ورشکستگی خروجی DMU_0 را در جهت بردار خروجی g_y تغییر می‌دهیم. با توجه به موارد فوق، مدل ورشکستگی در ماهیت خروجی به‌صورت مدل (۳) ارائه‌شده است:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \beta^{BR} \\
s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{BR} y_{rj} \le y_{ro} - \beta^{BR} g_y; \quad r = 1,2,\dots,s \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{BR} x_{ij} \ge x_{io}; \qquad i = 1,2,\dots,m \\
& g_y, \beta^{BR} \ge 0 \\
& g_y = y_{ro} - \min_j \{y_{rj}\} \quad r = 1,2,\dots,s
\end{aligned} \tag{۳}$$

بدترین کارایی نسبی می‌تواند به‌وسیله مدل فوق در جهت DMU نامطلوب محاسبه شود و مقدار ورشکستگی $1-\beta$ برای شرکت‌ها نشان‌دهنده اندازه‌ی فاصله بین نقطه مشاهده‌شده با ارجاع به نقطه نامطلوب یعنی بدترین نقطه ممکن است.

۳-۲- تعیین ورشکستگی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

اکنون با استفاده از مفاهیم ذکرشده در بخش‌های قبل، مدل جدید ورشکستگی (۴) را بیان کرده و ترکیب این مدل جدید را با تئوری راف بررسی می‌کنیم و آن را در یک مثال کاربردی در بخش‌های بعد با استفاده از راف فازه_ای و راف فازی بررسی می‌کنیم.

۳-۲-۱ مدل جدید در بررسی ورشکستگی

فرض کنید E_j مقدار دارایی کل اولیه برای سازمان j ام و $N=\{1,...,n\}$ نشان‌دهنده تعداد کل سازمان‌ها، x_{ij} و y_{rj} نشان‌دهنده ورودی و خروجی سازمان j ام است و x_{io} و y_{ro} ورودی و خروجی‌های سازمان موردنظر را نشان می‌دهد و d_j مقدار مطالبات برای سازمان j ام می‌باشد و g_y نشان‌دهنده جهت تولید است.

$$\begin{aligned}
&\max\ E_j-\sum_{j\in N} d_j\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{rj}\le y_{ro}-(E_j-\sum_{j\in N} d_j)g_y\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\ge x_{io}\qquad i=1,...,m\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\\
&E_j-\sum_{j\in N} d_j\ge 0\\
&g_y=y_{ro}-\min\{y_{rj}\}\qquad r=1,...,s
\end{aligned}\tag{۴}$$

مدل (۴) تعیین ورشکستگی را با استفاده از نظریه بازی‌ها بیان نموده و تعبیری متفاوت را ارائه می‌دهد که جنبه اقتصادی ورشکستگی را بیشتر مدنظر قرار می‌دهد. تابع هدف این مدل بیانگر دارایی خالص یا همان دارایی باقیمانده پس از پرداخت مطالبات است. مدل ارائه‌شده فوق، مدل یک بازی تحت کنترل خواهد بود. در این مدل سازمان‌ها را به‌عنوان مجموعه‌ای از بازیکنان در نظر می‌گیریم. مسلم است که هر بازیکن، یا سازمان موردبررسی، دارای یک مقدار دارایی اولیه‌ای می‌باشد. از طرفی در بررسی عوامل مؤثر بر ورشکستگی یک سازمان، مقدار مطالبات آن سازمان بسیار چشمگیر می‌باشد. به‌طوری‌که یک سازمان با دارایی نسبتاً قابل‌قبول را ممکن است با مطالبات زیاد به سمت ورشکسته شدن سوق دهد. در این راستا مدل (۴)، تشخیص هر چه بهتر ورشکستگی با استفاده از دارایی کل و مطالبات را امکان‌پذیر می‌کند. مقدار به‌دست‌آمده از حل این مدل، به‌عنوان دارایی خالص و به عبارت دیگر مقدار دارایی باقیمانده پس از پرداخت مطالبات برای بازیکن j ام تفسیر می‌شود. به‌طوری‌که مقدار مثبت به‌دست‌آمده از این مدل را تحت عنوان غیر ورشکستگی بیان می‌کنیم. تفسیر این مدل به این صورت است که بازیکن موردنظر پس از پرداخت بدهی‌ها و باقیمانده‌ای که تحت عنوان دارایی خالص تفسیر می‌شود اگر این مقدار برابر با مقداری غیر صفر باشد به این منظور است که مقدار دارایی خالصی برای بازیکن، باقیمانده است، پس فاصله خود را تا ورشکستگی تا حدودی حفظ می‌کند و به این طریق می‌تواند با دارایی باقیمانده‌ی خود که همان دارایی خالص است مقداری را در جهت تولید یا مصارف دیگر استفاده

کند. حال مقدار صفر را به‌عنوان ورشکستگی در نظر می‌گیریم. بدین‌صورت که این مقدار به این معناست که مقدار دارایی کل با مقدار مطالبات برابر بوده و تمام دارایی‌های بازیکن j ام به‌عنوان مطالبات پرداخت‌شده است و مقداری باقی نمانده است پس فاصله‌ای با ورشکسته شدن ندارد؛ بنابراین این بازیکن یا سازمان را به‌عنوان ورشکسته اعلام می‌کنیم.

۴- تئوری مجموعه‌های راف

تئوری مجموعه‌های راف، برای بیان مسائلی است که در آن‌ها عدم قطعیت و ابهام وجود دارد و معمولاً برای پیدا کردن ناهمگونی‌ها و ارتباطات در اطلاعات به کار می‌رود. مهم‌ترین ویژگی این تئوری، امکان استفاده‌ی هم‌زمان از اطلاعات کیفی و کمی و همچنین امکان ارزیابی اهمیت داده‌ها و تولید قوانین تصمیم‌گیری از روی اطلاعات است. حال از دیدگاه مجموعه‌های راف، یافتن رابطه بین ویژگی‌های شرطی و ویژگی‌های تصمیم‌گیری (وضعیت سوددهی) اهمیت زیادی دارد و با استفاده از این وابستگی بین ویژگی‌ها می‌توان ویژگی‌هایی که اهمیت ندارند را حذف کرد و آن‌هایی که از اهمیت ضعیف و یا قوی برخوردار باشند را به‌راحتی تشخیص داد و درواقع به‌عنوان ابزاری برای تحلیل در جدول تصمیم‌گیری به کار گرفته می‌شود. فلسفه مجموعه‌های راف بر این فرض که هر شیء از جهان را می‌توان به‌عنوان اطلاعات در نظر گرفت، بنا شده است [۱۸]. اشیاء توصیف شده به‌وسیله اطلاعات یکسان از نقطه‌نظر اطلاعات در دسترس درباره آن‌ها غیرقابل تشخیص هستند. رابطه غیرقابل تشخیص بودن (رابطه علی-معلولی) به‌دست‌آمده در این روش اساس ریاضیات تئوری مجموعه‌های راف می‌باشد لذا روشی مبتنی بر مفهوم دسته‌بندی (کلاسه سازی) است. لذا با استفاده از این مفهوم تئوری راف و تشکیل جدول داده‌ها و قوانین اگر-آنگاه به دسته‌بندی و تفکیک اطلاعات می‌پردازیم [۱۹].

۴-۱-تئوری راف به زبان ریاضی

نظریه مجموعه‌های راف بر اساس مفاهیم نادقیق در یک فضای تخمین گسترش یافته است. تخمین‌های بالایی و پایینی یک مفهوم نادقیق می‌تواند به‌طور ساده به‌صورت دو بازه بسته روی دامنه شاخص ساده شود. فرض کنید (Λ,Δ,A,π) یک فضای راف باشد آنگاه حد بالایی درستی پیشامد k به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$T\overline{r}\{K\}=\frac{\pi\{K\}}{\pi\{\Lambda\}}$$

و به همین ترتیب حد پایینی پیشامد k به‌صورت زیر است:

$$Tr\underline{r}\{K\}=\frac{\pi\{K\cap\Delta\}}{\pi\{\Delta\}}.$$

در این صورت درستی پیشامد k به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Tr\{K\}=\frac{۱}{۲}\left(T\overline{r}\{K\}+T\underline{r}\{K\}\right).$$

حال روش را بر اساس مقدار امید ریاضی موردبحث قرار می‌دهیم. فرض کنید $\Lambda=\{\lambda:c\le\lambda\le d\}$ و $\Delta=\{\lambda:a\le\lambda\le b\}$ جایی که $c\le a<b\le d$ و A یک جبر برل روی Λ و π اندازه لبگ است.

لم ۱: متغیر راف $\xi=([a,b],[c,d])$ با $c\le a<b\le d$ تابع همانی $\xi(\lambda)=\lambda$ از فضای راف (Λ,Δ,A,π) به مجموعه اعداد واقعی، جایی که $\Lambda=\{\lambda:c\le\lambda\le d\}$ و $\Delta=\{\lambda:a\le\lambda\le b\}$ جایی که $c\le a<b\le d$ و A یک جبر برل روی Λ و π اندازه لبگ است. آنگاه مقدار مورد انتظار ξ (مقدار امید ریاضی)، $E[\xi]$ به‌صورت زیر است [۱۲]:

$$E[\xi]=\frac{۱}{۴}(a+b+c+d).$$

لم ۲: فرض کنید ξ یک متغیر راف فازی LR با تابع عضویت متغیر فازی باشد آنگاه ξ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mu_\xi(x)=\begin{cases}L\left(\frac{\overline{m}_۱-x}{\alpha}\right), & for\ \ \overline{m}_۱-\alpha\le x\le\overline{m}_۲;\\ ۱, & for\ \ \overline{m}_۱\le x\le\overline{m}_۲;\\ R\left(\frac{x-\overline{m}_۲}{\beta}\right), & for\ \ \overline{m}_۲\le x\le\overline{m}_۲+\beta;\end{cases}$$

به‌طوری‌که $\overline{m}_۱$ و $\overline{m}_۲$ متغیرهای راف به‌صورت زیر هستند:

$$\overline{m}_۲=[[p_۲,p_۳],[p_۱,p_۴]];\ \circ<p_۱\le p_۲\le p_۳\le p_۴;$$

$$\overline{m}_۱=[[q_۲,q_۳],[q_۱,q_۴]];\ \circ<q_۱\le q_۲\le q_۳\le q_۴;$$

آنگاه مقدار امید ریاضی ξ به‌صورت زیر است:

$$E[\xi]=\frac{۱}{۸}\sum_{i=۱}^{۴}(p_i+q_i)-\frac{\alpha}{۲}\int_\circ^۱ L(t)+\frac{\beta}{۲}\int_\circ^۱ R(t).$$

متغیر راف فازی ذوزنقه‌ای:

لم ۳: فرض کنید ξ یک متغیر راف فازی ذوزنقه‌ای $\xi=\left(\overline{r}_1,\overline{r}_2,\overline{r}_3,\overline{r}_4\right)$ به‌طوری‌که $\overline{r}_1,\overline{r}_2,\overline{r}_3,\overline{r}_4$ متغیرهای راف تعریف‌شده روی $\left(\Lambda,\Theta,A,\pi\right)$ هستند و

$$\overline{r}_1=\left[\left[p_2,p_3\right],\left[p_1,p_4\right]\right];\ 0<p_1\le p_2\le p_3\le p_4;$$

$$\overline{r}_2=\left[\left[q_2,q_3\right],\left[q_1,q_4\right]\right];\ 0<q_1\le q_2\le q_3\le q_4;$$

$$\overline{r}_3=\left[\left[s_2,s_3\right],\left[s_1,s_4\right]\right];\ 0<s_1\le s_2\le s_3\le s_4;$$

$$\overline{r}_4=\left[\left[t_2,t_3\right],\left[t_1,t_4\right]\right];\ 0<t_1\le t_2\le t_3\le t_4;$$

آنگاه مقدار امید ریاضی ξ:

$$E\left[\xi\right]=\frac{1}{16}\sum_{i=1}^{4}\left(p_i+q_i+s_i+t_i\right).$$

۴-۲- مدل کلی با استفاده از مقدار امید ریاضی راف (EVM)

یکی از روش‌های حل متداول مسائل نادقیق، تبدیل آن‌ها به مدل‌های قطعی است. استفاده از مقدار امید ریاضی متغیرهای نادقیق به‌عنوان یک ابزار برای قطعی سازی، کاربردهای متنوع و زیادی دارد. در این مدل نیز می‌توان از امید ریاضی تابع هدف و قیود استفاده نمود. مسئله یک هدفه با پارامترهای راف فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\max\ f\left(x,\xi\right),\\&s.t.\begin{cases}g_j\left(x,\xi\right)\le 0,\ j=1,\dots,n;\\x\in X,\end{cases}\end{aligned}\tag{5}$$

جایی که $f\left(x,\xi\right),g_j\left(x,\xi\right),j=1,\dots,n$ توابع پیوسته در x هستند و $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\right)$ یک بردار فازی روی فضای امکان $\left(\Theta,P\left(\Theta\right),Pos\right)$. آنگاه با پیروی از عملگر مقدار امید ریاضی:

$$\begin{aligned}&\max\ E\left[f\left(x,\xi\right)\right],\\&s.t.\begin{cases}E\left[g_j\left(x,\xi\right)\right]\le 0,\ j=1,\dots,n;\\x\in X,\end{cases}\end{aligned}\tag{6}$$

جایی که E عملگر مقدار امید ریاضی متغیر راف فازی را نشان می‌دهد. با استفاده از عملگر امید ریاضی مدل ۶ به یک مدل قطعی تبدیل می‌شود [۱۲].

۴-۳- مدل راف فازی قطعی با عملگر مقدار امید ریاضی

در این بخش درباره مسئله محاسبه کارایی DMU های با ورودی راف فازی و خروجی راف فازی بحث می‌کنیم. n تا DMU را در نظر می‌گیریم که هر کدام m تا ورودی راف فازی مختلف را برای به دست آوردن s تا خروجی راف فازی مختلف مصرف می‌کنند. به‌علاوه فرض می‌کنیم که ورودی راف فازی $\tilde{\tilde{x}}_{ij}$ و خروجی راف فازی $\tilde{\tilde{y}}_{rj}$ که به ترتیب به‌وسیله دو تابع عضویت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\mu_{\tilde{\tilde{x}}}(t)=\begin{cases} L\left(\dfrac{x_{ij}^{m_1}-t}{x_{ij}^{\beta}}\right), & t\le x_{ij}^{m_1};\\[2ex] R\left(\dfrac{t-x_{ij}^{m_2}}{x_{ij}^{\beta}}\right), & t\ge x_{ij}^{m_2};\end{cases} \tag{۷}$$

$$\mu_{\tilde{\tilde{x}}}(t)=\begin{cases} L\left(\dfrac{y_{rj}^{m_1}-t}{x_{ij}^{\beta}}\right), & t\le y_{rj}^{m_1};\\[2ex] R\left(\dfrac{t-y_{rj}^{m_2}}{y_{rj}^{\beta}}\right), & t\ge y_{rj}^{m_2};\end{cases} \tag{۸}$$

جایی که:

$$x_{ij}^{m_1}=\left(\left[x_{ij}^{m_1\_\alpha},x_{ij}^{m_1\_b}\right],\left[x_{ij}^{m_1\_c},x_{ij}^{m_1\_d}\right]\right);\ 0<x_{ij}^{m_1-c}\le x_{ij}^{m_1-a}\le x_{ij}^{m_1-b}\le x_{ij}^{m_1-d};$$

$$x_{ij}^{m_2}=\left(\left[x_{ij}^{m_2\_\alpha},x_{ij}^{m_2\_b}\right],\left[x_{ij}^{m_2\_c},x_{ij}^{m_2\_d}\right]\right);\ 0<x_{ij}^{m_2-c}\le x_{ij}^{m_2-a}\le x_{ij}^{m_2-b}\le x_{ij}^{m_2-d};$$

$$y_{rj}^{m_1}=\left(\left[y_{rj}^{a-m_1},y_{rj}^{b-m_1}\right],\left[y_{rj}^{c-m_1},y_{rj}^{d-m_1}\right]\right);\ 0<y_{rj}^{c-m_1}\le y_{rj}^{a-m_1}\le y_{rj}^{b-m_1}\le y_{rj}^{d-m_1};$$

$$y_{rj}^{m_2}=\left(\left[y_{rj}^{a-m_2},y_{rj}^{b-m_2}\right],\left[y_{rj}^{c-m_2},y_{rj}^{d-m_2}\right]\right);\ 0<y_{rj}^{c-m_2}\le y_{rj}^{a-m}\le y_{rj}^{b-m_2}\le y_{rj}^{d-m_2};$$

حال مدل CCR با داده‌های راف فازی به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &Max \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\tilde{y}}_{rp}, \\ &s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} v_i \tilde{\tilde{x}}_{ip} = 1; \\ \sum_{j=1}^{n} u_r \tilde{\tilde{y}}_{rj} - \sum_{j=1}^{n} v_i \tilde{\tilde{x}}_{ip} \le 0; \ j = 1,\dots,n; \\ u_r, v_i \ge 0; \ r = 1,\dots,s; \ i = 1,\dots,m \end{cases} \end{aligned} \tag{۹}$$

مدل (۹) پارامترهای راف فازی را وارد می‌کند بنابراین نمی‌تواند به‌طور مستقیم بهینه‌سازی را انجام دهد. در این صورت مقدار امید ریاضی را برای تبدیل مدل راف فازی به EVM راف فازی به کار می‌بریم. $\sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{\tilde{y}}_{rj}$ و $\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\tilde{x}}_{ij}$ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{m} u_r \tilde{\tilde{y}}_{rj} = \left(\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{\alpha}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{\beta} \right), \tag{۱۰}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{\tilde{x}}_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{\alpha}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_\beta} \right), \tag{۱۱}$$

جایی که

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1} = \left(\left[\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-\alpha}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-b} \right], \left[\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-c}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_1-d} \right] \right);$$

$$0 < x_{ij}^{m_1-c} \le x_{ij}^{m_1-a} \le x_{ij}^{m_1-b} \le x_{ij}^{m_1-d};$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2} = \left(\left[\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-\alpha}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-b} \right], \left[\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-c}, \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{m_2-d} \right] \right);$$

$$0 < x_{ij}^{m_2-c} \le x_{ij}^{m_2-a} \le x_{ij}^{m_2-b} \le x_{ij}^{m_2-d};$$

$$\sum_{r=1}^{m} u_r y_{rj}^{m_1} = \left(\left[\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{a-m_1}, \sum_{r=1}^{s} u_i y_{rj}^{b-m_1} \right], \left[\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{c-m_1}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{d-m_1} \right] \right);$$

$$0 < y_{rj}^{c-m_1} \le y_{rj}^{a-m_1} \le y_{rj}^{b-m_1} \le y_{rj}^{d-m_1};$$

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{m_2} = \left(\left[\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ij}^{a-m_2}, \sum_{r=1}^{s} v_i x_{ij}^{b-m_2} \right], \left[\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{c-m_2}, \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}^{d-m_2} \right] \right);$$

$$0 < y_{rj}^{c-m_2} \le y_{rj}^{a-m_2} \le y_{rj}^{b-m_2} \le y_{rj}^{d-m_2};$$

حال مدل CCR قطعی بر اساس روش مقدار امید ریاضی به‌صورت زیر ارائه‌شده است:

$$\begin{aligned}
&\max \frac{1}{8}\Bigg\{\sum_{r=1}^{s} u_r\Big[\Big(y_{rp}^{a-m_1}+y_{rp}^{b-m_1}+y_{rp}^{c-m_1}+y_{rp}^{d-m_1}\Big)+\Big(y_{rp}^{a-m_2}+y_{rp}^{b-m_2}+y_{rp}^{c-m_2}+y_{rp}^{d-m_2}\Big)\Big]\\
&\quad +4\sum_{r=1}^{s} u_r\Big(-y_{rp}^{\alpha}\int_0^1 L(t)dt+y_{rp}^{\beta}\int_0^1 R(t)dt\Big)\Bigg\},\\
&s.t.\Bigg\{\sum_{r=1}^{s} v_i\Big[\Big(x_{ij}^{m_1-a}+x_{ij}^{m_1-b}+x_{ij}^{m_1-c}+x_{ij}^{m_1-d}\Big)+\Big(x_{ij}^{m_2-a}+x_{ij}^{m_2-b}+x_{ij}^{m_2-c}+x_{ij}^{m_2-d}\Big)\Big]\\
&\quad +4\sum_{r=1}^{s} v_i\Big(-x_{ip}^{\alpha}\int_0^1 L(t)dt+x_{ip}^{\beta}\int_0^1 R(t)dt\Big)\Bigg\}=8\\
&\sum_{r=1}^{s} u_r\Big[\Big(y_{rp}^{a-m_1}+y_{rp}^{b-m_1}+y_{rp}^{c-m_1}+y_{rp}^{d-m_1}\Big)+\Big(y_{rp}^{a-m_2}+y_{rp}^{b-m_2}+y_{rp}^{c-m_2}+y_{rp}^{d-m_2}\Big)\Big]\\
&\quad +4\sum_{r=1}^{s} u_r\Big(-y_{rp}^{\alpha}\int_0^1 L(t)dt+y_{rp}^{\beta}\int_0^1 R(t)dt\Big)-\\
&\Bigg\{\sum_{r=1}^{s} v_i\Big[\Big(x_{ij}^{m_1-a}+x_{ij}^{m_1-b}+x_{ij}^{m_1-c}+x_{ij}^{m_1-d}\Big)+\Big(x_{ij}^{m_2-a}+x_{ij}^{m_2-b}+x_{ij}^{m_2-c}+x_{ij}^{m_2-d}\Big)\Big]\\
&\quad +4\sum_{r=1}^{s} v_i\Big(-x_{ip}^{\alpha}\int_0^1 L(t)dt+x_{ip}^{\beta}\int_0^1 R(t)dt\Big)\Bigg\}\le 0;\ j=1,\dots,n;\ u_r,v_i\ge 0;\ r=1,\dots,s;\ i=1,\dots,m
\end{aligned} \tag{12}$$

۵- تحلیل پوششی داده‌های راف

فرض کنید فرض کنید n واحد تصمیم‌گیری که هریک با m ورودی، s خروجی تولید می‌کنند را در نظر بگیرید. بردارهای ورودی و خروجی واحد تصمیم گیرنده‌ی j ام بردارهای راف به‌صورت زیر هستند [۲۰].

$$\hat{X}_j=\left(\hat{x}_{1j},\dots,\hat{x}_{mj}\right)^T>0 \ and\ \hat{Y}_j=\left(\hat{Y}_{1j},\dots,\hat{Y}_{sj}\right)^T>0\ \ j=1,\dots,n$$

جایی که $\hat{x}_{ij}$ نشان دهنده‌ی مقدار ورودی iام از DMU_jام و $\hat{y}_{rj}$ نشان دهنده‌ی مقدار خروجی rام از DMU_jام است. فرض کنید DMU_o، واحد تصمیم‌گیری موردبررسی باشد. $\hat{X}_o$ و $\hat{Y}_o$ بردارهای ورودی و خروجی هستند. بدون از دست دادن عمومیت فرض کنید که تمام داده‌های ورودی و خروجی $\hat{x}_{ij}$ و $\hat{y}_{rj}$ بیانگر مقادیر نادقیق و مبهم می‌باشند. بر طبق مدل CCR در DEA، می‌توان یک مدل DEA را با بردارهای راف به‌صورت مدل (۱۳) بیان کرد:

$$Min\ \theta$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{X}_j \le \theta\hat{X}_o \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\hat{Y}_j \ge \hat{Y}_o \\ \lambda_j \ge 0,\ j=1,\dots,n\end{cases} \qquad (۱۳)$$

به‌طورکلی وقتی با مقادیر نادقیق سروکار داریم، می‌توانیم متغیرهای راف را به مقادیر قطعی تبدیل و انتقال دهیم. در نظریه‌ی برنامه‌ریزی راف، روش‌های زیادی برای انتقال مقادیر راف به مقادیر قطعی وجود دارد. یکی از این روش‌ها، بر اساس روش مقدار امید ریاضی است که در بخش‌های قبل به آن اشاره شد. روش دیگر بر اساس مقدارهای α خوش‌بینانه و α بدبینانه متغیر راف است که از حالت نادقیق به حالت قطعی تبدیل می‌شود. در این روش مقدارهای α خوش‌بینانه و α بدبینانه با پارامترهای متغیر راف در مدل DEA سروکار دارد؛ بنابراین مدل (۱۳) می‌تواند به برنامه‌ریزی ماکزیمم و برنامه‌ریزی مینیمم نسبت به سطح α و متغیر راف تبدیل می‌شود. مقدارهای α خوش‌بینانه و α بدبینانه متغیر راف به‌صورت زیر می‌باشد.

تعریف: فرض کنید ξ یک متغیر راف و $\alpha\in[0,1]$ باشد، آنگاه:

$$\xi_{\sup}(\alpha)=\sup\left\{r\,\middle|Tr\{\xi\ge r\}\ge\alpha\right\}$$

که مقدار α خوش‌بینانه ξ نامیده می‌شود و

$$\xi_{\inf}(\alpha)=\inf\left\{r\,\middle|Tr\{\xi\le r\}\ge\alpha\right\}$$

مقدار α بدبینانه ξ تعریف می‌شود.

۵-۱- حل مدل تحلیل پوششی داده‌های راف

بر اساس روش‌های گفته‌شده، واضح است که متغیرهای راف در مدل $RDEA$ (۱۳) می‌تواند به یک مدل برنامه‌ریزی بازه‌ای نسبت به سطح درستی α تبدیل می‌شود. متغیرهای راف $\hat{X}_j=\left(\hat{x}_{1j},\dots,\hat{x}_{mj}\right)^T>0$ می‌تواند به بازه‌ی $\left[X_j^{\sup(\alpha)},X_j^{\inf(\alpha)}\right]$ و $\hat{Y}_j=\left(\hat{Y}_{1j},\dots,\hat{Y}_{sj}\right)^T>0$ به بازه‌ی $\left[Y_j^{\sup(\alpha)},Y_j^{\inf(\alpha)}\right]$ نسبت به $\xi_{\inf(\alpha)}\ge\xi_{\sup(\alpha)}$ و $0/5<\alpha\le 1$ منتقل می‌شود. به‌منظور سروکار داشتن با متغیرهای راف نادقیق، مدل $RDEA$ (۱۳) به مدل برنامه‌ریزی زیر تبدیل می‌شود [۲۰]:

$$\begin{aligned} & Min \quad \theta \\ & s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[X_j^{\sup(\alpha)}, X_j^{\inf(\alpha)} \right] \le \theta \left[X_o^{\sup(\alpha)}, X_o^{\inf(\alpha)} \right] \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[Y_j^{\sup(\alpha)}, Y_j^{\inf(\alpha)} \right] \ge \left[Y_o^{\sup(\alpha)}, Y_o^{\inf(\alpha)} \right] \\ \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \tag{۱۴}$$

به‌طوری $\left[X_j^{\sup(\alpha)}, X_j^{\inf(\alpha)} \right]$ و $\left[Y_j^{\sup(\alpha)}, Y_j^{\inf(\alpha)} \right]$ بازه‌های انتقال‌یافته از متغیرهای راف $\hat{X}_j = \left(\hat{x}_{1j}, \dots, \hat{x}_{mj} \right)^T > 0$ و $\hat{Y}_j = \left(\hat{y}_{1j}, \dots, \hat{y}_{sj} \right)^T > 0$ به ترتیب تحت سطح درستی $1 \le \alpha < 0/5$ است. واضح است که تحت سطح درستی α اگر ورودی‌های DMU_o مینیمم مقدار هستند و خروجی‌های DMU_o ماکزیمم مقدار هستند، درحالی‌که ورودی‌های بقیه‌ی $n-1$ تا DMU ماکزیمم مقدار هستند و خروجی‌های بقیه‌ی $n-1$ تا DMU مینیمم مقدار هستند، آنگاه ماکزیمم مقدار کارایی برای DMU_o به‌دست‌آمده است؛ بنابراین مدل بازه‌ای برنامه‌ریزی (۱۴) به‌صورت زیر قابل‌تبدیل است [۲۱].

$$\begin{aligned} & Min \quad \theta \\ & \begin{cases} \sum_{\substack{j=1, \\ j \ne j_o}}^{n} \lambda_j X_j^{\inf(\alpha)} + \lambda_{jo} X_o^{\sup(\alpha)} \le \theta X_o^{\sup(\alpha)} \\ \sum_{\substack{j=1, \\ j \ne j_o}}^{n} \lambda_j Y_j^{\sup(\alpha)} + \lambda_{jo} Y_o^{\inf(\alpha)} \ge Y_o^{\inf(\alpha)} \\ \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

مدل برنامه‌ریزی خطی (۱۵) یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی با پارامتر α است و ضمانت می‌کند که ماکزیمم مقدار برای DMU_o به‌دست‌آمده است که آن را با $\theta^{\inf(\alpha)}$ نشان می‌دهیم. مطابقاً اگر ورودی‌های DMU_o ماکزیمم مقدار هستند و خروجی‌های DMU_o مینیمم مقدار هستند، درحالی‌که ورودی‌های بقیه‌ی $n-1$ تا DMU مینیمم مقدار هستند و خروجی‌های بقیه‌ی $n-1$ تا DMU ماکزیمم مقدار هستند، آنگاه مینیمم مقدار کارایی برای DMU_o به‌دست‌آمده است؛ بنابراین مدل بازه‌ای برنامه‌ریزی (۱۵) به‌صورت زیر قابل‌تبدیل است.

$$Min\ \theta$$
$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq j_0}}^{n} \lambda_j X_j^{\sup(\alpha)} + \lambda_{jo} X_o^{\inf(\alpha)} \le \theta X_o^{\inf(\alpha)} \\ \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq j_0}}^{n} \lambda_j Y_j^{\inf(\alpha)} + \lambda_{jo} Y_o^{\sup(\alpha)} \ge Y_o^{\sup(\alpha)} \\ \lambda_j \ge 0, \quad j=1,\dots,n \end{cases} \qquad (16)$$

مدل برنامه‌ریزی خطی (۱۶) یک مدل برنامه‌ریزی خطی قطعی با پارامتر α است و ضمانت می‌کند که مینیمم مقدار برای DMU_o به‌دست‌آمده است که آن را با $\theta^{\sup(\alpha)}$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $\left(\theta^*\right)^{\inf(\alpha)}$ و $\left(\theta^*\right)^{\sup(\alpha)}$ جواب‌های بهینه ماکزیمم مقدار (۱۵) و مینیمم مقدار (۱۶) باشد آنگاه واضح است که $\left(\theta^*\right)^{\sup(\alpha)} \ge \left(\theta^*\right)^{\inf(\alpha)}$.

تعریف: DMU_o کارای DEA راف است اگر بهترین کارایی ممکن در کران بالای آن یعنی $\left(\theta^*\right)^{\inf(\alpha)} = 1$ داشته باشد.

حال با استفاده از مفاهیم گفته‌شده و تعاریف راف فازی در DEA به بررسی یک مثال عددی از چند شرکت می‌پردازیم و کارایی را با استفاده از مدل‌های راف فازی (۱۲) و مدل جدید ورشکستگی را با استفاده از مدل‌های (۱۵) و (۱۶) گفته‌شده در این مقاله موردبحث قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \max\ & E_j - \sum_j d_j \\ s.t.\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left[y_j^{\sup(\alpha)}, y_j^{\inf(\alpha)} \right] \le \left[y_o^{\sup(\alpha)}, y_o^{\inf(\alpha)} \right] - \left(E_j - \sum_j d_j \right) g_y \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge x_{io} \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\ & E_j - \sum_j d_j \ge 0 \\ & \lambda_j \ge 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

این مدل تبدیل‌شده‌ی مدل (۴) با استفاده از مفاهیم DEA راف، می‌باشد در این مدل خروجی‌ها به‌عنوان یک مقدار در مجموعه راف فازی در نظر گرفته می‌شوند و ورودی‌ها همچنان در حالت قطعیت بررسی می‌شوند. بدین‌صورت یک سیستم اطلاعاتی متشکل از اشیاء تحت عنوان سازمان

(شرکت، تشکیلات و...) و شاخص‌های بدهی، سرمایه، فروش و ارزیابی عملکرد و... که به‌صورت یک مقدار کیفی و در مجموعه راف فازی است را در نظر می‌گیریم. قابل‌ذکر است که مجموعه فوق را به‌صورت مقداری در بازه $(۰,۱۰۰)$ در نظر می‌گیریم و با استفاده از مفاهیم راف فازی در DEA، مدل‌های کارایی و ورشکستگی را برای این مثال عددی موردبررسی قرار می‌دهیم. می‌توان گفت که شاخص‌های انتخاب‌شده در این بحث به دلیل اهمیت آن‌ها در فعالیت‌های اقتصاد انتخاب‌شده‌اند. قابل ذکر است که برای حل مدل (۱۷)، باید آن را در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه مطابق با مدل‌های (۱۵) و (۱۶) تفکیک و حل نمود.

۵-۲-مثال عددی

سیستم اطلاعاتی متشکل از ۸ شرکت دارویی به‌عنوان اشیا و شاخص‌های سرمایه، بدهی، فروش شرکت دارویی، شاخص‌های قطعی و کمی بوده و شاخص ارزیابی عملکرد داده‌ی راف فازی می‌باشد که در جدول ۱ داده شده‌اند را بررسی می‌کنیم.

جدول (۱): مقادیر مربوط به شاخص‌ها و شرکت‌ها (ویژگی‌ها یا اشیاء)

شرکت‌ها	شاخص‌ها			
	سرمایه (X_1)	بدهی (X_2)	فروش (X_3)	ارزیابی عملکرد (X_4)
DMU 1	۱۲۳	۴۶	۱۱	ضعیف
DMU 2	۲۳۴	۷۸	۳	خیلی ضعیف
DMU 3	۱۷۶	۶۸	۱۶۴	خوب
DMU 4	۲۸	۱۷	۱۶۵	خیلی خوب
DMU 5	۵۳۰	۷۱	۱۷۱	متوسط
DMU 6	۶۹	۶۹	۷۶	ضعیف
DMU 7	۱۰۹	۸۵	۳۷	خوب
DMU 8	۱۳۵	۷۲	۶۰	خوب

حال با استفاده از مدل (۱۲)، کارایی شرکت‌ها را محاسبه می‌کنیم که در جدول ۲، ستون دوم، مقادیر آن ذکر شده است. سپس مدل ورشکستگی جدید را با استفاده از مدل α سطح (راف بازه‌ای) مطرح شده در بخش DEA راف حل کرده و آن را به دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه، (طبق مدل‌های (۱۵) و (۱۶)) تبدیل و محاسبه می‌کنیم که در ستون‌های سوم و چهارم قابل مشاهده است و این‌گونه ورشکستگی شرکت‌ها را ارزیابی و موردبحث قرار می‌دهیم. همان‌گونه که مشاهده می‌شود میزان ورشکستگی در مدل بدبینانه همواره بیشتر از میزان ورشکستگی در مدل خوش‌بینانه است.

جدول (۲): شرکت‌ها و نتایج محاسبه ورشکستگی

شرکت‌ها	شاخص‌ها		
	کارایی	ورشکستگی در حالت بدبینانه (inf)	ورشکستگی در حالت خوش‌بینانه (sup)
DMU 1	۰/۰۵	۰/۱۷	۰/۰۶
DMU 2	۰/۱۸	۰/۱۷	جواب ندارد
DMU 3	۰/۸۳	۰/۰۷	جواب ندارد
DMU 4	۰/۸۶	۰/۱	۰/۰۲
DMU 5	۰/۷۹	جواب ندارد	جواب ندارد
DMU 6	۰/۰۲	۰/۱۷	۰/۰۴
DMU 7	۰/۹۶	جواب ندارد	جواب ندارد
DMU 8	۰/۹۶	۰/۱۷	۰/۰۳

۵-۳-تحلیل نتایج عددی

نتایج و تحقیقات استفاده از مدل‌های تبدیل مقادیر راف فازی در DEA نشان دادند که شرکت‌هایی با داشتن کارایی نسبتاً بالا و وضعیتی که با توجه به شرایط و حالت خوش‌بینانه بررسی و حل می‌شوند ممکن است در آن‌ها مدل ورشکستگی جواب نداشته باشد و این حالت بیان کننده‌ی حالتی است که در آن شرکت در وضعیتی رو به خوش‌بین بررسی شده و بالطبع در وضعیت ورشکستگی قرار نمی‌گیرد. قابل ذکر است که کارایی شرکت‌ها با استفاده از مدل (۱۲) و ورشکستگی بازه‌ای با استفاده از مدل (۱۷) محاسبه می‌شود (درواقع مدل (۱۷) در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه بر اساس مدل‌های (۱۵) و (۱۶) بررسی و حل شده‌اند). به همین علت است که DMU_5 با داشتن وضعیت کیفی متوسط در مجموعه راف فازی و کارایی ۰/۷۹ درصد با توجه به شاخص‌های موردبررسی در جدول (۱) نه در حالت خوش‌بینانه و نه در حالت بدبینانه جواب ندارد و این نشان‌دهنده‌ی این مطلب است که شاخص‌های موردبررسی با اثر متقابل و خاصیت جبرانی شاخص‌ها، با توجه به مدل‌های فوق و مقادیر موردنظر، شرکت را کارا معرفی کرده است و ورشکستگی آن با توجه به تبدیل مدل ورشکستگی جدید راف فازی در حالتی است که جواب ندارد. درواقع DMU_5 با داشتن سرمایه‌ی نسبتاً بالا و مطالبات کمتر و فروش نسبتاً خوب تحت تأثیر سرمایه خود توانسته است که وضعیت خود را بهینه نگه دارد و مدل فوق این موضوع را تائید می‌کند. به همین ترتیب به‌عنوان مثال DMU_1 با داشتن کارایی ۰/۰۵، با سرمایه‌ی نسبتاً قابل‌توجه و با داشتن تقریباً ۱/۳ بدهی نسبت به سرمایه، مقدار ورشکستگی آن در بازه‌ای کوچک قرار می‌گیرد و این نشان می‌دهد که ورشکستگی با استفاده از مدل فوق با در

نظر گرفتن تمام شاخص‌ها و تأثیر شاخص‌ها بر یکدیگر و بهبود در شاخص‌های دیگر، مقدار ورشکستگی را کوچک در نظر گرفته است اما امکان ورشکستگی در این شرکت توسط این مدل اعلام شده است هر چند که کوچک است اما باید توجه شود که می‌توان با بهبود در بخش‌های دیگر باعث کنترل هرچه بهتر ورشکستگی خواهد شد و دارایی‌های خالص پس از پرداخت مطالبات را در جهت بهتر و حتی تولید در بخش‌های پربازده قرار داد. قابل ذکر است با توجه به مباحث راف بازه‌ای می‌توان گفت که نامساوی $(\theta^*)^{\inf(\alpha)} \geq \left(\theta^*\right)^{\sup(\alpha)}$ در حالت‌های عددی برقرار می‌باشد. به همین ترتیب شرکت‌های دیگر بررسی می‌شوند.

۶- نتیجه‌گیری

هدف از این مقاله مطالعه بر روی مدل‌های ورشکستگی، به‌خصوص مدل ورشکستگی جدید با استفاده از نظریه‌ی بازی‌ها و تئوری مجموعه‌های راف بود که روشی جدید از استفاده از این دو روش ارائه شد و این مدل را در یک مثال کاربردی با استفاده از مدل‌های موجود در راف فازی و DEA راف موردبحث و بررسی قرار دادیم. تلفیق این دو روش باعث درک بیشتر و طبقه‌بندی بهتری از سازمان‌های موردبررسی در دو حالت ورشکستگی و غیر ورشکستگی را ارائه کرد. بدین منظور، ورشکستگی و عدم ورشکستگی شرکت‌ها با استفاده از شاخص‌ها و ارزیابی عملکرد به‌صورت مقدار کیفی در مجموعه‌های راف فازی بررسی بهتری از طبقه‌بندی شرکت‌ها را در پیش داشت که علت آن استفاده از شاخص‌ها و تشکیل سیستم اطلاعاتی منظم و دقیق‌تری می‌باشد. از طرفی با استفاده از مدل ورشکستگی جدید ارائه‌شده و تبدیل مدل فوق در حالت راف فازی و راف بازه‌ای این مدل را موردمطالعه قرار دادیم و کارایی آن با استفاده از مدل‌های فوق نیز در DEA موردبررسی قرار گرفت. نتایج، شرکت‌ها را به دو دسته ورشکسته و غیر ورشکسته تقسیم کرد. برای توضیح بیشتر می‌توان بیان کرد که درواقع بازه‌ی به‌دست‌آمده به‌وسیله مدل‌های فوق بیان کننده مقداری است که بیان می‌کند که شرکت می‌تواند با توجه به شاخص‌های دیگر ورشکستگی را بهبود دهد. درواقع ورشکستگی در دو حالت خوش‌بینانه و بدبینانه تحت یک بازه با مقادیر inf و sup ارائه شد که قابل‌بهبود تحت شرایط کنترل‌شده خواهد بود و قدرت تشخیص DEA و مجموعه‌های راف با استفاده از شرایط فوق موردبحث قرار گرفت. خصوصیات مدل پیشنهادی با استفاده از یک مثال عددی بررسی شده است که نشان می‌دهد که شرکت‌های با سرمایه‌ی نسبتاً بالا یا حتی بسیار زیاد ممکن است دارای اندکی ورشکستگی باشند که نشان‌دهنده این مطلب است که فروش و داشتن بدهی و بررسی شاخص‌های دیگر سهم بسیار عظیمی در تشخیص ورشکستگی و غیر ورشکستگی را دارا می‌باشد و بازه‌ای تحت عنوان بازه‌ی ورشکستگی ارائه می‌شود که قابل بهبود از حالت ورشکستگی به حالت غیر ورشکستگی با بررسی شاخص‌ها خواهد بود. به‌خصوص که تابع هدف این مدل، دارایی خالص و مطالبات را مدنظر قرار

می‌دهد. همچنین ارزیابی‌های فوق نشان داد محاسبات در قالب یک سیستم اطلاعاتی در راف همراه با مدل‌های *DEA* و مفاهیم راف فازی و *DEA* راف به دلیل درنظرگرفتن تمامی شاخص‌ها و همچنین اشیای دسته‌بندی شده و به دست آوردن بازه‌ای تحت عنوان بازه‌ی ورشکستگی، بهتر و راحت‌تر می‌تواند به ما در ارزیابی ورشکستگی کمک کند و یک سیستم جامع از اطلاعات را چنان در اختیار ما قرار می‌دهد که کار با مفاهیم، اشیا (سازمان‌ها و یا شرکت‌ها) و شاخص‌های موجود در مسائل را برای ما راحت‌تر می‌کند و بازه‌ای از ورشکستگی را چنان در اختیار ما قرار می‌دهد که با استفاده از این بازه می‌توان در پی رفع نواقص موجود در پیشرفت سازمان‌ها برآمد. لازم به ذکر است که نتایج با شاخص‌های دیگر و شرایط مسئله می‌تواند تغییر کند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم به خاطر پیشنهادهای سازنده‌شان که موجب ارتقای کیفی مقاله گردید، کمال تشکر را دارند.

مراجع

[1] Premachandra, I.M., Gurmeeet, S.B. and Toshiyuki S. (2009). DEA as a tool for bankruptcy assessment: A comparative study with logistic regression technique. *European Journal of Operational Research*, **193**, 412-424.

[2] Altman, E.I. (1968). Financial ratios, discriminated analysis and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*, **23**, 589-609.

[3] Dimitras A.I., Susmag R. and Zopounidis C. (1999). Business failure prediction using rough sets. *European Journal of Operational Research*, **114**, 263-280.

[4] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338–353.

[5] Kaufmann, A. (1975). *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. New York, Academic Press.

[6] Zadeh, L.A. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3–28.

[7] Nahmias, S. (1978). Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 97–110.

[8] Dubois, D., and Prade, H. (1988a). Fuzzy numbers: An overview, *Analysis of Fuzzy Information*, **2**, 3–39.

[9] Dubois, D., and Prade, H. (1990). Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets, *International Journal of General Systems*, **17**, 191–208.

[10] Morsi, N.N., and Yakout, M.M. (1998). Axiomatics for fuzzy rough sets, *Fuzzy Sets and Systems*, **100**, 327–342.

[11] Wang, Y. (2003). Mining stock price using fuzzy rough set system. *Expert Systems with Applications*, **24**, 13–23.

[12] Khanjani Shiraz, R., Vincent, C. and Jalalzadeh, L. (2014). Fuzzy Rough DEA model: A possibility and expected value approaches, *Expert Systems with Applications*, **41**, 434-444.

[13] Leobardo Plata-Pérez and Joss Sánchez-Pérez. (2011). Convexity and marginal contributions in bankruptcy games. *EconoQuantum*, **8**, 61-72.

[14] Dagan, N., and Voliji, O. (1993). the bankruptcy problem: A cooperative bargaining approach. *Mathematical Social Sciences*, **26**, 287-297.

[15] Charnes, A. Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, **2**, 429-444.

[16] Chambers, R.G., Chung, Y. and Fare, R. (1998). Profit directional distance function and Nerlovian efficiency. *Journal of Optimization and Theory and Application*, **12**, 233-247

[17] Udaya, S., Pakala T.P.M. and Mallikarjunappa T. (2012). A modified directional distance formulation of DEA to assess bankruptcy: An application to IT/ITES companies in India. *Expert Lists with Applications*, **39**, 1988-1997.

[18] Francis E.H. and Tay, L.S. (2002). Economic and Financial prediction using rough sets model. *European journal of Operational Research*, **141**, 641-659.

[19] Malcolm J., Beynon. M. and Peel, J. (2001). Variable precision rough set theory and data discretisation: an application to corporate failure prediction. *Omega*, **29**, 561-576.

[20] Jiuping Xu, Bin Li and Desheng Wu. (2009). Rough data envelopment analysis and its application to supply chain performance *International Journal of Production Economics*. **122**, 628-638.

[21] Entani, T., Maeda, Y. and Hideo, T. (2002). Dual models of interval DEA and it's extension to interval data. *European Journal of Operational Research*, **136**, 32-45.

A New Method for Determining Bankruptcy Using DEA and Rough Set Theory

Aida Batamiz, Faranak Hossein Zadeh Saljooghi and Ali Akbar Sanavi

Faculty of Mathematics, Sistan and Baluchestan University, Zahedan, Iran.

Abstract

In the changing economic conditions and volatility in financial environments in commercial is very important for predict financial performance, One of these is predict financial crisis and bankruptcy assessment. Data envelopment analysis (*DEA*) is a powerful tool available to managers that Benchmark your company's performance in their business activities. The conventional data envelopment *DEA* models are to evaluate each *DMU* optimistically. *DEA* is evaluation model from the optimistic viewpoint. In fact it will be evaluated in optimistic state. However, other models have been introduced in the DEA to measure the efficiency with which the pessimistic viewpoint of their specific applications such as assessing the failures and bankruptcy. In this paper combine Rough set theory and a new model in *DEA* about bankruptcy and it measure the efficiency and bankruptcy with establishment of an information system and the use of indicators calculates bankruptcy and efficiency using *DEA* Rough concepts and Fuzzy Rough. The results of the model in determining bankruptcies reviewed the number of organization.

Keywords: Bankruptcy, Game theory, Rough set theory, Fuzzy Rough, *DEA* Rough.

Mathematics Subject Classification (2010): 62C86.