

## برآورد پارامترهای فازی از طریق وزن‌های فازی و برنامه‌ریزی خطی

صدیقه دانش<sup>\*</sup>، رحمان فرنوش<sup>۱\*</sup> و طاهره رزاق‌نیا<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی

<sup>\*\*</sup>گروه ریاضی و آمار، دانشگاه علم و صنعت

<sup>\*\*\*</sup>گروه ریاضی و آمار، واحد رودهن، دانشگاه آزاد اسلامی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۷/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۵/۱۹

**چکیده:** تحلیل رگرسیون فازی یکی از پرکاربردترین تکنیک‌های آماری می‌باشد که رابطه بین متغیرها را نشان می‌دهد. در این بررسی رگرسیون فازی با ورودی غیر فازی و خروجی فازی در نظر گرفته می‌شود. برای پیش‌بینی مدل رگرسیون فازی، یک الگوریتم هیبریدی بر پایه برنامه‌ریزی خطی و وزن‌های فازی، در مواردی که تعداد داده‌ها کم بوده و یا با رگرسیون ناپارامتری فازی سروکار داشته و شکل تابعی آن مشخص نمی‌باشد، طراحی می‌شود. در این برنامه‌ریزی خطی، تابع هدف، پهنای خروجی‌ها را کمینه می‌کند. با استفاده از مثال‌های عددی، عملکرد این روش با روش‌های دیگر مانند برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی مربعی مقایسه می‌شود. در این مقاله، با استفاده از مثال‌ها نشان داده می‌شود که روش هیبریدی در مقایسه با روش‌های دیگر دقت پیش‌بینی بیشتری دارد.

**واژه‌های کلیدی:** رگرسیون فازی؛ برنامه‌ریزی خطی؛ برنامه‌ریزی مربعی؛ شبکه عصبی فازی تطبیقی.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲J۸۶ و ۹۲B۲۰

## ۱- مقدمه

نظریه مجموعه فازی، اولین بار توسط پروفیسور عسگر زاده [۱] در سال ۱۹۶۲ و رگرسیون خطی فازی اولین بار در سال ۱۹۸۲ توسط تاناکا و همکاران [۲] مطرح شد. آن‌ها مدل‌های رگرسیون خطی با پارامترهای فازی، ورودی غیر فازی و خروجی فازی را به صورت مسائل برنامه‌ریزی خطی

فرموله کردند. هدف آن‌ها مینیمم کردن ابهام مدل رگرسیون خطی فازی بود، به طوری که تکیه‌گاه مقادیر تخمین زده شده، تکیه‌گاه مقادیر مشاهده شده را در یک سطح معین بپوشاند. در سال ۱۹۸۸، دیاموند [۳] روش کمترین مربعات فازی را برای مدل‌های رگرسیون خطی فازی پیشنهاد کرد. به طور کلی چندین تکنیک رگرسیون فازی بر پایه روش کمترین مربعات فازی [۸-۴] و مسائل برنامه‌ریزی مانند برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی مربعی [۱۳-۹] معرفی شده‌اند. در مهر و موم‌های اخیر روش‌هایی بر پایه شبکه عصبی مصنوعی برای حل مسائل با رفتارهای پیچیده و برآورد پارامترهای رگرسیونی بکار گرفته شده است. تاناکا، ایشی بچی و کوان [۱۵، ۱۴] تحلیل رگرسیون فازی با استفاده از شبکه‌های عصبی فازی معرفی کردند که در الگوریتم پیشنهادی خود از شبکه عصبی پسرو، وزن‌های فازی مثلثی و برنامه‌ریزی خطی استفاده کردند. در سال ۱۹۹۳، جنگ [۱۶] شبکه عصبی تطبیقی بر پایه سیستم استنباط فازی پیشنهاد کرد. چنگ و لی [۱۷]، یک شبکه عصبی فازی معرفی کرده و دالکلیک و آپایدان [۱۸، ۱۹] از روش پیشنهادی توسط چنگ و لی استفاده کرده و یک الگوریتم بر پایه خوشه‌بندی برای پیش‌بینی رگرسیون فازی پیشنهاد دادند. همچنین دانش و همکاران [۲۰] یک الگوریتم بر پایه شبکه عصبی فازی تطبیقی و حداقل مربعات فازی برای پیش‌بینی رگرسیون فازی پیشنهاد کردند.

در این مقاله، یک الگوریتم هیبریدی به منظور پیش‌بینی مدل رگرسیونی فازی و کاهش خطا بر پایه وزن‌های فازی و برنامه‌ریزی خطی پیشنهاد می‌شود. در این الگوریتم، روش شیب کاهشی برای محاسبه پارامترهای اولیه (وزن‌های فازی) و برنامه‌ریزی خطی برای محاسبه پارامترهای نتیجه استفاده می‌شوند که تکیه‌گاه مقادیر تخمین زده شده، تکیه‌گاه مقادیر مشاهده شده را در یک سطح معین می‌پوشاند. همچنین، روش پیشنهادی با دو روش برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی مربعی به منظور بررسی عملکرد روش مقایسه می‌شود.

این مقاله شامل ۳ بخش می‌باشد. در ادامه این بخش به تعاریف اولیه درباره فازی و شبکه عصبی فازی تطبیقی پرداخته شده و در بخش دوم با استفاده از فنون شبکه عصبی فازی تطبیقی، یک الگوریتم هیبریدی بر پایه وزن‌های فازی و برنامه‌ریزی خطی معرفی می‌گردد. در بخش سوم دو مثال برای نشان دادن روش پیشنهادی و مقایسه آن با دو روش برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی مربعی بیان می‌شود.

## ۱-۱- مفاهیم و تعاریف مقدماتی

**تعریف ۱:** اگر  $M$  مجموعه‌ای ناتهی باشد، آنگاه مجموعه فازی  $X$  از  $M$  با مجموعه دوتایی زیر مشخص می‌گردد:

$$X = \{ (x, \mu_X(z)) | x \in X \}. \quad (1)$$

می‌دهد.  $\mu_X(z): X \rightarrow [0,1]$  برای هر  $x \in X$  میزان عضویت  $x$  را در مجموعه فازی  $X$  نشان

تعریف ۲: مجموعه در سطح  $h$  ( $-h$  برش): برای هر  $0 < h \leq 1$ ،  $-h$  برش  $X$  که با  $[X]^h$  نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[X]^h = X_h = \{z \in Z | \mu_X(z) \geq h\}, \quad (2)$$

ضمناً مجموعه

$$[X]^h = X_h = \{z \in Z | \mu_X(z) > h\}, \quad (3)$$

را مجموعه قوی در سطح  $h$  (برش قوی) می‌نامیم.

تعریف ۳: عدد فازی مثلثی: فرض کنید  $X = (l_X, a_X, r_X)$  یک عدد فازی مثلثی باشد که  $l_X, a_X$  و  $r_X$  به ترتیب مرکز کرانه‌های چپ، و راست عدد فازی مثلثی می‌باشند و تابع عضویت  $X = (l_X, a_X, r_X)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_X(z) = \begin{cases} L\left(\frac{a_X - z}{a_X - l_X}\right), & l_X < z < a_X, \\ R\left(\frac{z - a_X}{r_X - a_X}\right), & a_X < z < r_X, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

همچنین عدد فازی مثلثی را می‌توان با نماد  $TR$  بدین صورت نمایش داد:

$$T(R) = \{Y_j : Y_j = (a_j, \alpha_j, \beta_j)\}, \quad (5)$$

که  $a_j$  مرکز،  $\alpha_j$  و  $\beta_j$  پهنای چپ و راست عدد فازی مثلثی  $Y_j$  می‌باشد و عدد فازی مثلثی متقارن که در آن پهنای چپ و راست باهم برابر هستند، به صورت زیر نمایش داده شود:

$$T(R) = \{Y_j : Y_j = (a_j, \alpha_j)\}. \quad (6)$$

تعریف ۴: رگرسیون فازی: مدل رگرسیون فازی به صورت زیر را در نظر بگیرید [۱۱]:

$$\begin{aligned} Y &= f(x) \{+\} \varepsilon = (a(x) - \alpha(x), a(x), a(x) + \beta(x))_{LR} \{+\} \varepsilon \\ &= (l(x), a(x), r(x))_{LR} \{+\} \varepsilon, \end{aligned} \quad (7)$$

در این مدل،  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  یک بردار متغیرهای مستقل  $p$ -بعدی از ورودی‌ها که متعلق به فضای  $D \subseteq R^p$  است،  $Y$  متغیر پاسخ و دارای ساختار فازی است. همچنین  $\mathcal{E}$  جمله خطا است که یک متغیر تصادفی با میانگین صفر در نظر گرفته می‌شود.  $\{+\}$  یک عملگر است که تعریف آن وابسته به اعداد فازی است.

در بحث بالا، رابطه بین متغیر ورودی و خروجی معلوم فرض شده و با معادله خطی (۷) نمایش داده می‌شود. در بسیاری موقعیت‌های عملی این رابطه نامعلوم می‌باشد. بنابراین رگرسیون ناپارامتریک که شکل تابعی آن مشخص نمی‌باشد، لازم به نظر می‌رسد.

**تعریف ۵: فاصله دیاموند:** فرض کنید  $A = (l_a, a_a, r_a)$  و  $B = (l_B, a_B, r_B)$  ( $a_a, r_a, l_B, r_B \geq 0$ ) دو عدد فازی مثلثی باشند. فاصله بین دو عدد فازی  $A$  و  $B$  به صورت زیر بیان می‌شود [۳]:

$$d^\nabla(A, B) = (l_B - l_A)^\nabla + (a_B - a_A)^\nabla + (r_B - r_A)^\nabla. \quad (8)$$

فاصله تعریف شده، نزدیکی بین دو تابع عضویت دو عدد فازی مثلثی را اندازه می‌گیرد.

**نتیجه ۱:** توابع عضویت دو عدد فازی  $A$  و  $B$  را مساوی گویند اگر داشته باشیم:

$$d^\nabla(A, B) = 0. \quad (9)$$

**تعریف ۶: برنامه‌ریزی خطی:** مدل رگرسیون فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_j = p_0 + p_1 x_{j1} + p_2 x_{j2} + \dots + p_p x_{jp} = PX_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

$n$  تعداد نقاط مشاهده شده،  $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp})$  یک بردار  $p$ -بعدی از متغیرهای مستقل در  $j$  امین مشاهده،  $P = (p_0, p_1, \dots, p_p)$  یک بردار  $p$ -بعدی از پارامترهای نامعلوم و  $Y_j$   $j$  امین مقدار مشاهده شده متغیرهای وابسته می‌باشد.  $P$  را می‌توان به صورت بردار  $P = \{b, \alpha\}$  نمایش داد که،  $b = (b_0, b_1, \dots, b_p)$ ،  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ ،  $j = 1, \dots, n$  و  $b_i$  و  $\alpha_i$  به ترتیب مقادیر مرکز و پهنای مقدار  $p_i$  به ازای  $i = 0, \dots, p$  می‌باشند. همچنین  $Y_j = (a_j, \beta_j)$  عدد فازی مثلثی متقارن با مرکز  $a_j$  و پهنای  $\beta_j$  می‌باشد. بنابر روش پیشنهادی توسط تاناکا [۳]، پارامترهای رگرسیون فازی با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی، به صورت تابع هدف زیر به دست می‌آیند:

$$\min L = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^p \alpha_i |x_{ji}|, \quad (11)$$

به طوری که باید دو قید زیر برقرار باشند:

$$\sum_{i=0}^p b_i |x_{ji}| - (1-h) \sum_{i=0}^p \alpha_i |x_{ji}| \leq a_j - (1-h) \beta_j, \quad (12)$$

$$\sum_{i=0}^p b_i |x_{ji}| + (1-h) \sum_{i=0}^p \alpha_i |x_{ji}| \geq a_j + (1-h) \beta_j, j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

که در آن باید  $\alpha_i \geq 0$  باشند. در این مدل، قیود سبب می‌شوند  $-h$  برش مقادیر تخمین زده شده،  $-h$  برش مقادیر مشاهده شده را بپوشاند، به طوری که  $0 < h \leq 1$  است.

تعریف ۷: برنامه‌ریزی مربعی: فرض کنید  $Y_j = (l_{y_j}, a_{y_j}, r_{y_j})$   $j$  امین مقدار مشاهده شده و  $\hat{Y}_j = (\hat{l}_{y_j}, \hat{a}_{y_j}, \hat{r}_{y_j})$   $j$  امین مقدار برآورد شده باشد. در این مقاله، تابع هدف پیشنهادی توسط دانوس [۱۲] بکار گرفته می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{j=1}^n k_1 (l_{y_j} - \hat{l}_{y_j})^2 + [k_2 (a_{y_j} - \hat{a}_{y_j})^2 + (r_{y_j} - \hat{r}_{y_j})^2]. \quad (14)$$

اگر  $k_1 > k_2$  یعنی اینکه برای مراکز و اگر  $k_1 < k_2$  یعنی اینکه برای پهناها ارزش بیشتری قائل می‌شویم. فرض کنید  $Y_j = (a_{y_j}, \beta_{y_j})$  و  $\hat{Y}_j = (\hat{a}_{y_j}, \hat{\beta}_{y_j})$  دو عدد فازی مثلثی متقارن باشند. بنابراین، روابط زیر برقرار هستند:

$$l_{y_j} = a_{y_j} - \beta_{y_j}, r_{y_j} = a_{y_j} + \beta_{y_j}, \hat{l}_{y_j} = \hat{a}_{y_j} - \hat{\beta}_{y_j}, \hat{r}_{y_j} = \hat{a}_{y_j} + \hat{\beta}_{y_j}. \quad (15)$$

با در نظر گرفتن  $k_1 = k_2$  و با جایگذاری روابط (۱۵) در رابطه (۱۴)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left[ (a_{y_j} - \beta_{y_j}) - (\hat{a}_{y_j} - \hat{\beta}_{y_j}) \right]^2 + (a_{y_j} - \hat{a}_{y_j})^2 \right. \\ \left. + \left[ (a_{y_j} + \beta_{y_j}) - (\hat{a}_{y_j} + \hat{\beta}_{y_j}) \right]^2 \right\} = \sum_{j=1}^n \left[ 2(a_{y_j} - \hat{a}_{y_j})^2 + 2(\beta_{y_j} - \hat{\beta}_{y_j})^2 \right]. \quad (16)$$

رابطه (۱۶) به عنوان تابع هدف بکار گرفته می‌شود. بنابراین در این برنامه‌ریزی مربعی، تابع هدف زیر را مینیمم می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^n \left[ 2(a_{y_j} - \hat{a}_{y_j})^2 + 2(\beta_{y_j} - \hat{\beta}_{y_j})^2 \right],$$

به طوری که دو قید ذکر شده در (۱۲) و (۱۳) باید برقرار باشند.

**تعریف ۸:** سیستم استنتاج عصبی فازی تطبیقی: سیستم استنتاج عصبی فازی تطبیقی، شبکه‌ای تطبیق‌پذیر و قابل آموزش است که به لحاظ عملکرد کاملاً شبیه سیستم استنتاج فازی می‌باشد. این سیستم از قابلیت‌های شبکه عصبی و استنتاج فازی به صورت یکجا استفاده می‌کند و ضعف‌های هر یک توسط دیگری پوشش داده می‌شود. به دلیل اینکه این سیستم آموزش‌پذیر است، جزء شبکه عصبی و به جهت اینکه برای کاهش خطا از داده‌های مسئله استفاده می‌شود، به آن شبکه عصبی تطبیقی می‌گویند. از مزیت‌های این روش این است که نیاز به محاسبات پیچیده ندارد و برای سیستم‌های پیچیده و غیردقیق به خوبی جواب می‌دهد. این شبکه، یک شبکه چند لایه‌ای است که در آن هر یک از گره‌ها عملیات خاصی روی سیگنال‌های ورودی خود انجام می‌دهند. سیستم استنتاج عصبی فازی تطبیقی مبتنی بر قواعد منطقی " شرط و نتیجه " می‌باشد که به صورت شکل (۱) نشان داده می‌شود. در این شکل برای سادگی، سیستم با یک ورودی، سه تابع عضویت و یک خروجی در نظر گرفته شده است. در این سیستم مجموعه سه قانون به صورت زیر تعریف می‌شود (برای اطلاعات بیشتر مراجع [۱۶،۲۱] را ببینید):

$$\text{قاعده ۱: اگر } x, A_1 \text{ باشد آنگاه } f_1 = p_1^0 + p_1^1 x$$

$$\text{قاعده ۲: اگر } x, A_2 \text{ باشد آنگاه } f_2 = p_2^0 + p_2^1 x$$

$$\text{قاعده ۳: اگر } x, A_3 \text{ باشد آنگاه } f_3 = p_3^0 + p_3^1 x$$

$A_k$  مجموعه‌های فازی و  $f_k$  خروجی نتیجه قانون  $k$  ام می‌باشد که  $k = 1, 2, 3$  است. مطابق شکل (۱)، ساختار مدل انفیس از پنج لایه تشکیل گردیده است که عبارتند از:

لایه اول؛ گره‌های ورودی (با مربع نشان داده شده که داخل آن پارامترهایی است که باید برآورد شوند): در این لایه، عمل فازی کردن صورت گرفته و درجه عضویت گره‌های ورودی به صورت بازه‌های مختلف فازی با استفاده از تابع عضویت آن‌ها مشخص می‌شود. در این لایه برای فازی کردن ورودی می‌توان از توابع عضویت مختلف مانند مثلثی، دوزنقه‌ای، نرمال و ... استفاده کرد و تابع عضویتی که کمترین خطا در خروجی را ایجاد کند، به عنوان تابع عضویت انتخابی برای ورودی‌ها در نظر گرفته می‌شود. خروجی هر لایه را با نماد  $o_{\square k}$  نمایش می‌دهیم ( $k, k$  امین گره هر لایه  $l$  می‌باشد) که در آن خروجی لایه اول به صورت زیر بیان می‌شود:

$$o_{\square k} = \mu_{A_k}(x), k = 1, 2, 3. \quad (17)$$

در این مقاله، به دلیل اینکه تابع عضویت نرمال کمترین خطا را در خروجی ایجاد کرده، از این تابع عضویت استفاده کرده‌ایم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{A_k}(x) = \exp\left[-\left(\frac{x - \tau_k}{2\sigma_k}\right)^2\right], k = 1, 2, 3, \quad (18)$$

که  $\tau_k$  و  $\sigma_k$  پارامترهای تابع عضویت مجموعه فازی  $A_k$  هستند و پارامترهای هر کدام از گره‌ها تعیین‌کننده شکل تابع عضویت مجموعه فازی آن گره می‌باشد.

لایه دوم؛ گره‌های قاعده: هر گره در این لایه درجه فعالیت یک قانون را محاسبه می‌کند که در این لایه پارامتر مجهول وجود ندارد. بنابراین گره‌های این لایه، گره ثابت می‌باشند و با دایره نشان داده شده‌اند. در این لایه با توجه به مقدار ورودی، وزن هر قانون یا میزان اهمیت آن مشخص می‌شود.

$$o_{\tau,k} = w_k = \mu_{A_k}(x), k = 1, 2, 3. \quad (19)$$

لایه سوم؛ گره‌های متوسط: در این لایه  $k$  امین گره، نسبت درجه فعالیت قانون  $k$  ام را به درجه فعالیت کلیه قوانین به صورت زیر نرمال‌سازی می‌کند که گره‌های این لایه نیز گره‌های ثابت می‌باشند.

$$o_{\tau,k} = \bar{w}_k = \frac{w_k}{w_1 + w_2 + w_3}, k = 1, 2, 3. \quad (20)$$

$\bar{w}_k$ ، درجه فعالیت نرمال شده قانون  $k$  ام است.

لایه چهارم؛ گره‌های نتیجه: در این لایه، خروجی هر گره برابر است با:

$$o_{\tau,k} = \bar{w}_k f_k = \bar{w}_k (p_0^k + p_1^k x), k = 1, 2, 3. \quad (21)$$

وزن‌های نرمال شده لایه سوم ( $\bar{w}_k$ ) در رابطه خطی  $p_0^k + p_1^k x$  ضرب می‌شوند. در این لایه ضرایب  $p_0^k$  و  $p_1^k$  پارامترهای مجهول بوده که با روش حداقل مربعات به دست آورده می‌شوند. به دلیل اینکه در این لایه پارامتر مجهول وجود دارد، در شکل (۱) با مربع نشان داده شده‌اند. (در این لایه تعداد گره‌ها برابر تعداد خروجی‌ها است).

لایه پنجم؛ گره‌های خروجی: در این لایه، پارامترهای اولیه که از لایه اول به دست آورده و پارامترهای نتیجه که از لایه چهارم به دست آورده شده‌اند را در رابطه (۲۱) قرار داده و خروجی‌های به دست آمده از سه گره را باهم جمع می‌کنیم، یا به عبارتی مقدار خروجی نهایی را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

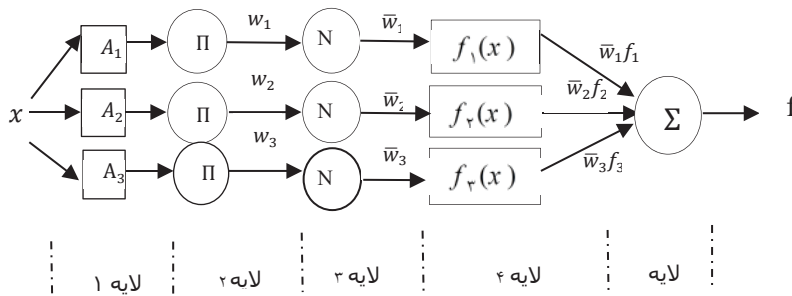
$$o_{\Delta,k} = \sum_{k=1}^n \bar{w}_k f_k = \bar{w}_1 f_1 + \bar{w}_r f_r + \bar{w}_r f_r. \quad (22)$$

با جایگزین کردن (۲۱) در رابطه (۲۲) خروجی نهایی برابر است با:

$$\begin{aligned} o_{\Delta,k} = \hat{Y} &= \bar{w}_1 (p_o + p_1 x) + \bar{w}_r (p_o + p_1 x) + \bar{w}_r (p_o + p_1 x) \\ &= \sum_{k=1}^r \sum_{i=0}^1 p_i^k \bar{w}_k x. \end{aligned} \quad (23)$$

رابطه (۲۳) می تواند به صورت رابطه خطی زیر نوشته شود:

$$Y = p_o + p_1 x. \quad (24)$$



شکل (۱): ساختار سیستم استنتاج عصبی فازی تطبیقی.

به طور کلی در روش انفیس ورودی و خروجی غیر فازی می باشند. در این مقاله نشان می دهیم که پارامترهای (۱, ۰)  $p_i$  می توانند اعداد فازی باشند که در این صورت خروجی الگوریتم هیبریدی (انفیس) فازی خواهد بود. همچنین نشان می دهیم مقادیر پارامترهای اولیه و ثانویه را می توانیم با استفاده از دو گام زیر به دست آوریم: گام اول، ورودی ها و مرکز خروجی ها را بدون در نظر گرفتن پهناها با روش انفیس آموزش داده، پارامترهای اولیه را به دست می آوریم. گام دوم، مجموعه پارامترهای اولیه به دست آمده ثابت فرض شده و مجموعه پارامترهای ثانویه (نتیجه) با استفاده از برنامه ریزی خطی محاسبه می شوند. در ادامه روش پیشنهادی توضیح داده می شود.



## ۲- رگرسیون فازی و روش استنباط فازی عصبی تطبیقی

فرض کنید پارامترهای نتیجه  $Y_j$ ،  $p_i^k$  و  $\hat{Y}_j$  در معادله (۲۴) اعداد فازی مثلثی بوده و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

$$p_i^k = (b_i^k, \alpha_i^k), \quad i = 0, \dots, p, k = 1, \dots, m, \quad (25)$$

$n$ ، تعداد جفت داده‌های مشاهده شده می‌باشند. با استفاده از تعاریف بالا، عملگرهای فازی و جایگزین کردن  $p_i^k$  در معادله (۲۴)، خروجی  $\hat{Y}_j$  برای یک ورودی  $x$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= (b_0^1, \alpha_0^1) \bar{w}_1 + (b_1^1, \alpha_1^1) \bar{w}_1 x + (b_0^2, \alpha_0^2) \bar{w}_2 + (b_1^2, \alpha_1^2) \bar{w}_2 x + (b_0^r, \alpha_0^r) \bar{w}_r + (b_1^r, \alpha_1^r) \bar{w}_r x \\ &+ (b_1^r, \alpha_1^r) \bar{w}_r x = \sum_{k=1}^r \sum_{i=0}^1 b_i^k \bar{w}_k x_i + \sum_{k=1}^r \sum_{i=0}^1 \alpha_i^k \bar{w}_k x_i, \end{aligned} \quad (26)$$

که  $\bar{w}_k$  معلوم می‌باشد.

مدل رگرسیون فازی (۱۰) را در نظر بگیرید. فرض کنید  $x_j = (1, x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jp})$  یک بردار  $p$ -بعدی از متغیرهای مستقل در  $j$  امین مشاهده،  $P = (p_0, p_1, \dots, p_p)$  یک بردار  $p$ -بعدی از پارامترهای نامعلوم فازی و  $Y_j$ ،  $j$  امین مقدار مشاهده شده متغیرهای وابسته باشد.  $P$  را می‌توان به صورت بردار  $P = \{b, \alpha\}$  نمایش داد به طوری که،  $b = (b_0^k, b_1^k, \dots, b_p^k)$ ،  $\alpha = (\alpha_0^k, \alpha_1^k, \dots, \alpha_p^k)$ ،  $k = 1, \dots, m$  و  $b_i^k$  و  $\alpha_i^k$  به ترتیب مقادیر مرکز و پهنای مقدار  $p_i$  برای  $i = 0, \dots, p$  می‌باشند. با استفاده از تعاریف بالا، عملگرهای فازی و جایگزین کردن  $p_i^k$  در معادله (۱۹)، خروجی  $\hat{Y}_j$  برابر است با:

$$\hat{Y}_j = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p b_i^k \bar{w}_k x_{ji} + \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p \alpha_i^k \bar{w}_k x_{ji}. \quad (27)$$

بنابراین، روابط زیر برقرارند:

$$\hat{a}_{y_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p b_i^k \bar{w}_k x_{ji}, \quad \hat{\beta}_{y_j} = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p \alpha_i^k \bar{w}_k x_{ji}. \quad (28)$$

در الگوریتم هیبرید پیشنهادی، روش پیش انتشار و پس انتشار باهم ترکیب شده و پارامترهای اولیه به دست می‌آیند و پارامترهای ثانویه با روش برنامه‌ریزی خطی به دست آورده می‌شوند. در این مقاله، با استفاده از روش بکار گرفته شده، در جعبه‌ابزار (انفیس) نرم‌افزار متلب و روش جنگ

[۱۶]،  $\bar{w}_k$  (وزن‌های فازی) فقط برای مراکز خروجی بهینه می‌شوند بنابراین، تأثیر پهنای نادیده گرفته‌شده و تأثیر آن‌ها در بخش برآورد پارامترهای ثانویه در نظر گرفته می‌شود. که در ادامه به بحث در مورد آن می‌پردازیم. به‌منظور بهینه کردن پارامترهای اولیه، مقدار خطای لایه آخر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e = \sum_{j=1}^n e_j^2 = \sum_{j=1}^n (a_{y_j} - \hat{a}_{y_j})^2, \quad (29)$$

بنابراین مقدار خطای پس انتشار برای هر لایه با استفاده از فرمول زیر به دست آورده می‌شود: [۱۶، ۱۷]:

$$e_{l,k} = \sum_{r=1}^{M_{l+1}} e_{l+1,r} \frac{\partial A_{l+1,r}}{\partial o_{l,k}}, \quad (30)$$

$e_{l,k}$  مقدار خطای پس انتشار  $k$  امین گره لایه  $l$  می‌باشد.  $A_{l+1,r}$  تابع گره  $r$  امین گره  $l+1$  امین لایه می‌باشد،  $o_{l,k}$  خروجی  $k$  امین گره لایه  $l$  و  $M_{l+1}$  تعداد کل گره‌ها در  $(l+1)$  امین لایه می‌باشد،  $o_{l,k}$  خروجی  $k$  امین گره لایه  $l$  و  $M_{l+1}$  تعداد کل گره‌ها در  $(l+1)$  امین لایه می‌باشد.

بنابراین بردار گرادیانت به‌صورت اندازه خطا مشتقات نسبت به هر پارامتر تعریف می‌شود. مشتق اندازه خطای  $e$  نسبت به پارامتر  $\delta$  برابر است با:

$$\frac{\partial e}{\partial \delta} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial e_j^2}{\partial \delta} = \sum_{j=1}^n e_{l,k} \frac{\partial o_{l,k}}{\partial \delta}. \quad (31)$$

بنابراین، فرمول بهینه کردن وزن‌های فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta \delta = -g \frac{\partial e}{\partial \delta}, \quad (32)$$

به‌طوری‌که  $g$  نرخ یادگیری می‌باشد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$g = \frac{rk}{\sum_{\delta} \left( \frac{\partial e}{\partial \delta} \right)^2}, \quad (33)$$

$r$  اندازه گام‌ها می‌باشد. برای جزئیات بیشتر [۱۶] را ببینید.

در الگوریتم پیشنهادی، پارامترهای ثانویه، با حل کردن مدل برنامه‌ریزی خطی زیر به دست می‌آیند:

$$\min \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p b_i^k \bar{w}_{kj} x_{ji}, \quad (34)$$

به طوری که دو قید زیر برقرار باشند:

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p b_i^k \bar{w}_{kj} x_{ji} - (1-h) \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p \alpha_i^k \bar{w}_{kj} x_{ji} \leq a_{y_j} - (1-h) \beta_{y_j}, \quad (35)$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p b_i^k \bar{w}_{kj} x_{ji} + (1-h) \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p \alpha_i^k \bar{w}_{kj} x_{ji} \geq a_{y_j} + (1-h) \beta_{y_j}, \quad (36)$$

$$\alpha_i^k \bar{w}_{kj} \geq 0, \quad i = 0, \dots, p, \quad k = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

به دلیل اینکه فقط مرکز خروجی ها برای به دست آوردن پارامترهای اولیه استفاده می شوند، بنابراین می توان از جعبه ابزار نرم افزار متلب برای به دست آوردن پارامترهای اولیه استفاده کرد. ولی به دست آوردن پارامترهای ثانویه نیازمند برنامه نویسی می باشند که در این مقاله، پیاده سازی الگوریتم پیشنهادی شامل به دست آوردن پارامترهای اولیه و ثانویه، با برنامه نویسی در محیط متلب صورت پذیرفته است.

## ۲-۱- ارزیابی مدل انفیس

فرض کنید  $Y_j = (l_j, a_j, r_j)$  مقدار مشاهده شده و  $\hat{Y}_j = (\hat{l}_j, \hat{a}_j, \hat{r}_j)$  مقدار برآورد شده و  $l_k$ ،  $a_k$  و  $r_k$  به ترتیب پهناهای چپ، مرکز، پهناهای راست مقدار مشاهده شده باشد. همچنین با توجه به فرمول (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} ERROR &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (Y_j - \hat{Y}_j)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ \left( a_{y_j} - \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p b_i^k \bar{w}_{jk} x_{ji} \right)^2 + \left( \beta_{y_j} - \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^p \alpha_i^k \bar{w}_{jk} x_{ji} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (37)$$

رابطه (۳۷) را به عنوان یک کمیت برای اندازه گیری خطا، به منظور ارزیابی مدل مورد استفاده قرار می دهیم. مقادیر بزرگ این کمیت نشان دهنده فقدان برازش و مقدار خیلی کوچک آن بیش برازش مقادیر خروجی را نشان می دهد. همچنین برای ارزیابی مدل از روش کیم و بیشو [۲۲] استفاده می شود که به صورت زیر تعریف می شود.

$$E_k = \int_{s(Y_k) \cup s(\hat{Y}_k)} |Y_k - \hat{Y}_k| dy, \quad (38)$$

به طوری که  $s(Y_k)$  و  $s(\hat{Y}_k)$  به ترتیب تکیه‌گاه مقادیر مشاهده شده و مقادیر برآورد شده می‌باشند هر چه مقدار  $E_k$  به صفر نزدیک‌تر باشد مقدار برازش بهتر می‌باشد.

## ۲-۲- الگوریتم یادگیری مدل هیبریدی

برای برآورد پارامترهای مدل، الگوریتم یادگیری زیر را استفاده می‌کنیم.

- ۱- مقدار  $h$  وارد کنید.
- ۲- مقادیر پارامترهای اولیه بهینه را به دست آورید.
- الف- زوج  $(x_j, a_j)$  را به روش انفیس آموزش دهید.
- ب- زمانی که مقدار میانگین خطای  $e$  رابطه (۳۰) کمتر از مقدار از قبل تعیین شده یا به یک مقدار ثابت رسید آموزش پایان پذیرد در غیر این صورت به مرحله الف رفته و وزن‌های فازی بهینه شود.
- ۳- مقادیر پارامترهای اولیه به دست آمده را در رابطه (۲۷) قرار دهید.
- ۴- پارامترهای ثانویه را با حل کردن برنامه‌ریزی خطی (۳۴) به دست آورید.
- ۵- مرکز و پهنای خروجی‌ها را با توجه به روابط (۲۸) تعیین کنید.
- ۶- برای ارزیابی روش پیشنهادی مقادیر خطای  $E_j$  و  $ERROR$  محاسبه را کنید.

## ۳- مثال‌های عددی

برای نشان دادن روش پیشنهادی مثال‌های زیر تجزیه و تحلیل می‌شوند.

**مثال ۱:** جدول ۱ مقادیر مشاهده شده  $(x_j, (a_j, \beta_j), j = 1, \dots, 5)$  که از [۲۳] گرفته شده‌اند را نشان می‌دهد.  $x_j$  یک متغیر مستقل و  $Y_j = (a_{y_j}, \beta_{y_j})$  یک متغیر فازی مثلثی وابسته با مرکز  $a_{y_j}$  و پهنای  $\beta_{y_j}$  می‌باشد. ساختار مدل پیشنهادی برای یک ورودی و یک خروجی با برنامه‌نویسی در نرم‌افزار متلب طراحی می‌شود. توابع عضویت مختلف را امتحان کرده و به دلیل اینکه تابع عضویت نرمال کمترین خطا در برآورد را ایجاد می‌کند، برای ایجاد وزن‌های فازی انتخاب می‌شود. مقادیر  $(x_j, a_j)$  را با روش انفیس آموزش داده و زمانی که خطا به یک مقدار ثابت رسید (شکل ۳ را مشاهده کنید). پارامترهای اولیه به دست آمده را در رابطه (۲۶) قرار می‌دهیم و پارامترهای ثانویه را با استفاده از روش برنامه‌ریزی خطی محاسبه نموده و سپس با قرار دادن پارامترهای اولیه و ثانویه به دست آمده در روابط (۲۸) مرکز و پهنای خروجی‌ها را محاسبه می‌کنیم. جدول ۱، مقادیر پارامترهای اولیه و ثانویه به دست آمده را نشان می‌دهد.

همچنین دو روش برنامه‌ریزی خطی و مربعی برای برازش مدل رگرسیونی بکار گرفته می‌شوند. برای ارزیابی روش‌ها، مقادیر خطای  $E_j$  و  $ERROR$  محاسبه می‌گردند. در برآورد دارد.

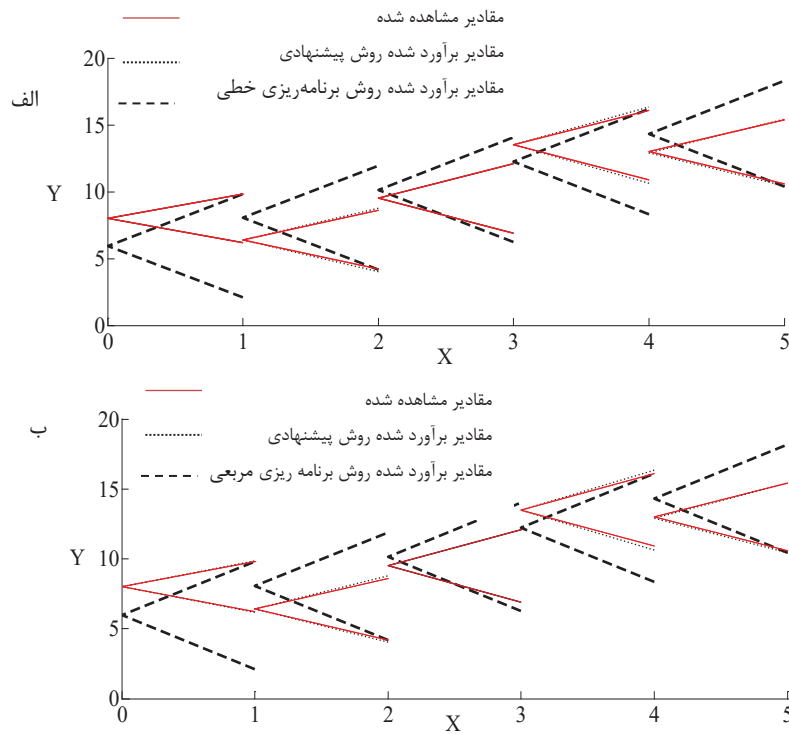
**جدول (۱):** مقادیر پارامترهای اولیه و ثانویه به‌دست‌آمده در روش پیشنهادی برای مثال ۱.

شماره گره	پارامترهای اولیه	پارامترهای ثانویه
$k$	$(\tau_k, \sigma_k)$	$(b_o^k, \alpha_o^k)$
۱	$(0/18006, 0/5167)$	$(4/6526, 0/9917)$
۲	$(3/0824, 0/7944)$	$(-2/5611, 1/7770)$
۳	$(5/2558, 0/3846)$	$(3/8357, 1/0650)$

**جدول (۲):** نتایج رگرسیونی به‌دست‌آمده با استفاده از روش پیشنهادی و روش‌های برنامه‌ریزی خطی و مربعی برای مثال ۱.

$x_j$	$(a_j, \beta_j)$	روش پیشنهادی	روش برنامه‌ریزی خطی	روش برنامه‌ریزی مربعی
۱	$(8/0, 1/8)$	$(7/1, 9997/8368)$	$(5/9582, 3/8620)$	$(5/9587, 3/8413)$
۲	$(6/4, 2/2)$	$(6/4020, 2/3759)$	$(8/0539, 3/8838)$	$(8/0500, 3/8500)$
۳	$(9/5, 2/6)$	$(9/4999, 2/6003)$	$(10/1496, 3/9055)$	$(10/1413, 3/8587)$
۴	$(13/5, 2/6)$	$(13/4946, 2/8681)$	$(12/2453, 3/9273)$	$(12/2327, 3/8673)$
۵	$(13/0, 2/4)$	$(12/9210, 2/4962)$	$(14/3410, 3/9490)$	$(14/3240, 3/8760)$
	$ERROR$	$0/0491$	$11/6004$	$11/2994$

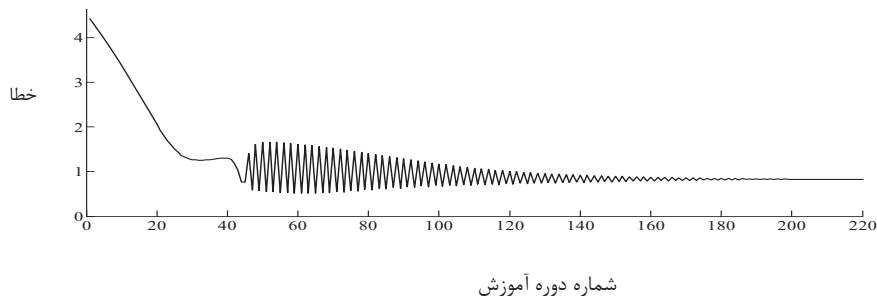
جداول ۲ و ۳ و شکل ۲، نتایج رگرسیونی به‌دست‌آمده از روش‌های مختلف را نشان می‌دهند. همانطور که در جدول ۲ و شکل ۲ دیده می‌شود، تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین مقادیر برآورد شده و مقادیر مشاهده شده با روش پیشنهادی وجود ندارد. همچنین از نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۲ و ۳ دیده می‌شود مقادیر خطای  $E_j$  و  $ERROR$  روش پیشنهادی کم می‌باشد که نشان می‌دهد روش پیشنهادی تمایل به ایجاد مقادیر برآورد شده نزدیک به مقادیر مشاهده شده دارد. همچنین دقت قابل ملاحظه‌ای در برآورد دارد.



شکل (۲): نتایج رگرسیونی به دست آمده برای مثال یک با استفاده از روش های مختلف (الف) برنامه ریزی خطی و روش پیشنهادی (ب) برنامه ریزی مربعی و روش پیشنهادی.

جدول (۳): مقادیر خطای  $E_j$  برای مثال ۱.

$x_j$	روش پیشنهادی	روش برنامه ریزی خطی	روش برنامه ریزی مربعی
۱	۰/۰۳۶۸	۳/۳۴۷۵	۳/۳۴۴۰
۲	۰/۱۷۵۶	۲/۸۵۸۷	۲/۸۵۰۰
۳	۰/۰۰۰۳	۱/۵۶۳۹	۱/۵۲۱۸
۴	۰/۲۶۸۲	۲/۲۷۲۲	۲/۲۸۶۳
۵	۰/۱۵۹۸	۲/۴۲۶۷	۲/۳۸۴۳
Total error $E_j$	۰/۶۴۰۸	۱۲/۴۶۹۰	۱۲/۳۸۶۳



شکل (۳): رفتار همگرایی روش پیشنهادی برای مثال ۱.

**مثال ۲ (ناپارامتری):** مجموعه داده شده در جدول ۵ از [۹] گرفته شده است.  $x_j$  یک متغیر مستقل و  $Y_j = (a_{y_j}, \beta_{y_j})$ ، یک متغیر فازی مثلثی وابسته با مرکز  $a_{y_j}$  و پهنای  $\beta_{y_j}$  می‌باشد. تابع عضویت نرمال برای ایجاد وزن‌های فازی انتخاب می‌شود. روش‌های مختلف برای برازش مدل رگرسیونی بکار گرفته می‌شوند. برای ارزیابی روش‌ها، مقادیر خطای  $E_j$  و  $ERROR$  محاسبه می‌گردند. جدول ۴ مقادیر پارامترهای اولیه و متعاقب به دست آمده را نشان می‌دهد. جدول ۵ و ۶، نتایج رگرسیونی به دست آمده برای روش‌های مختلف را نشان می‌دهند. همانطور که در جدول ۵ دیده می‌شود تفاوت قابل ملاحظه‌ای بین مقادیر برآورد شده و مقادیر مشاهده شده با روش پیشنهادی وجود ندارد. همچنین از نتایج به دست آمده در جدول ۵ و ۶ مشاهده می‌شود همانند مثال قبل مقادیر  $E_j$  و  $ERROR$  روش پیشنهادی کم می‌باشد بنابراین، روش پیشنهادی دقت بیشتری در پیش‌بینی در مقایسه با دو روش دیگر دارد. همچنین شکل ۴ رفتار همگرایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

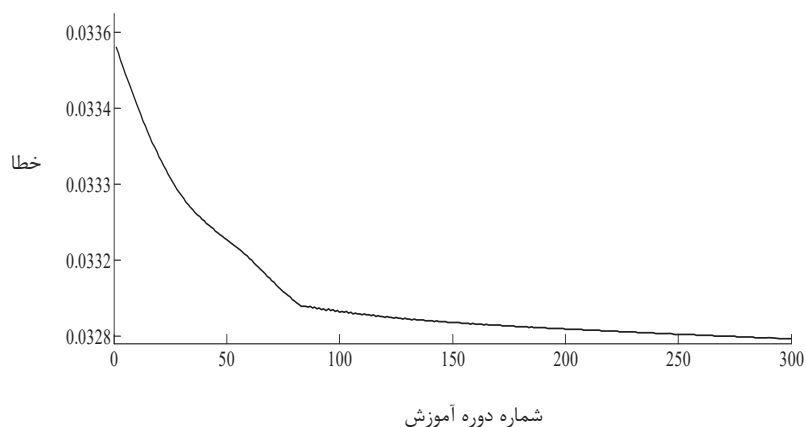
جدول (۴): مقادیر پارامترهای اولیه و متعاقب به دست آمده در روش پیشنهادی برای مثال ۲

شماره گره	پارامترهای اولیه	پارامترهای ثانویه	
$k$	$(\tau_k, \sigma_k)$	$(b_o^k, \alpha_o^k)$	$(b_1^k, \alpha_1^k)$
۱	(-۰/۵۳۸۹، ۱/۸۹۲۰)	(۰/۸۱۰۰، ۰/۰۰۵۷)	(-۰/۰۹۶۶، ۰/۰۱۶۹)
۲	(۲/۶۰۹۶، ۱/۲۸۸۰)	(۵/۱۷۵۷، ۰/۰۴۷۹)	(۳/۹۵۴۱، ۰/۰۳۸۹)
۳	(۳/۱۲۹۸، ۱/۲۴۷۷)	(-۲۰/۱۹۰۸، ۰/۰۸۱۱)	(۱/۵۰۰۳، ۰/۰۳۳۸)

جدول (۵): نتایج رگرسیونی بدست آمده با استفاده از روش پیشنهادی و روشهای برنامه‌ریزی خطی و مربعی برای مثال ۲.

$x_j$	$Y_j = (a_j, \beta_j)$	$\hat{f}(x_j) = (\hat{a}_j, \hat{\beta}_j)$	
		روش پیشنهادی	روش برنامه‌ریزی خطی
۰/۷۵	(۰/۲۹۰، ۰/۰۲۰)	(۰/۲۷۹۴، ۰/۰۴۶۷)	(۰/۲۲۸۵، ۰/۱۱۸۹)
۱/۰۰	(۰/۲۴۰، ۰/۰۰۵)	(۰/۲۴۰۴، ۰/۰۶۰۱)	(۰/۲۷۳۳، ۰/۱۴۲۰)
۱/۲۵	(۰/۲۴۰، ۰/۰۴۰)	(۰/۲۲۷۰، ۰/۰۷۴۱)	(۰/۲۹۵۷، ۰/۱۵۳۶)
۱/۵۰	(۰/۲۸۰، ۰/۰۳۵)	(۰/۲۳۳۱، ۰/۰۸۸۳)	(۰/۳۱۸۱، ۰/۱۶۵۲)
۱/۷۵	(۰/۰۲۸۰، ۰/۰۵۰)	(۰/۲۵۱۳، ۰/۱۰۲۳)	(۰/۳۴۰۵، ۰/۱۷۶۷)
۲/۰۰	(۰/۲۳۵، ۰/۰۳۵)	(۰/۲۷۴۸، ۰/۱۱۵۸)	(۰/۳۶۲۹، ۰/۱۸۸۳)
۲/۲۵	(۰/۲۳۰، ۰/۰۰۶)	(۰/۲۹۸۸، ۰/۱۲۸۷)	(۰/۴۳۰۲، ۰/۲۲۲۹)
۲/۵۰	(۰/۳۳۰، ۰/۱۳۰)	(۰/۳۲۰۸، ۰/۱۴۱۱)	(۰/۴۵۲۶، ۰/۲۳۴۵)
۲/۷۵	(۰/۲۷۵۰، ۰/۰۷۵)	(۰/۳۳۹۹، ۰/۱۵۲۹)	(۰/۴۷۵۰، ۰/۲۴۶۱)
۳/۰۰	(۰/۳۰۰، ۰/۰۸۰۰)	(۰/۳۵۷۱، ۰/۱۶۴۳)	(۰/۴۹۷۴، ۰/۲۵۷۶)
۳/۲۵	(۰/۳۳۵، ۰/۰۷۵)	(۰/۳۷۳۸، ۰/۱۷۵۲)	(۰/۵۱۹۸، ۰/۲۶۹۲)
۳/۵۰	(۰/۲۷۵، ۰/۰۵۵)	(۰/۳۹۲۱، ۰/۱۸۵۷)	(۰/۵۴۲۲، ۰/۲۸۰۷)
۳/۷۵	(۰/۴۰۰، ۰/۱۰۰)	(۰/۴۱۴۱، ۰/۱۹۵۹)	(۰/۵۶۴۶، ۰/۲۹۲۳)
۴/۰۰	(۰/۴۵۵، ۰/۱۰۵)	(۰/۴۴۲۱، ۰/۲۰۵۸)	(۰/۵۸۷۰، ۰/۳۰۳۸)
۴/۲۵	(۰/۴۲۰، ۰/۰۸۰)	(۰/۴۷۷۸، ۰/۲۱۵۵)	(۰/۶۰۹۴، ۰/۳۱۵۴)
۴/۵۰	(۰/۴۸۵۰، ۰/۱۱۵۰)	(۰/۵۲۳۱، ۰/۲۲۵۰)	(۰/۶۰۶۱، ۰/۳۰۷۴)
۴/۷۵	(۰/۵۰۰، ۰/۱۰۰)	(۰/۵۷۹۴، ۰/۲۳۴۳)	(۰/۶۵۰۹، ۰/۳۲۲۹)
۵/۰۰	(۰/۶۵۰، ۰/۲۴۰)	(۰/۶۴۷۸، ۰/۲۴۳۵)	(۰/۶۸۵۰، ۰/۳۰۵۰)
۵/۲۵	(۰/۶۴۰، ۰/۱۶۰)	(۰/۷۲۹۳، ۰/۲۵۲۵)	(۰/۴۰۷۷، ۰/۲۱۱۴)
	<i>ERROR</i>	۰/۰۲۲۵	۰/۰۵۴۷
			۰/۰۵۳۶





شکل (۴): رفتار همگرایی روش پیشنهادی برای مثال ۲.

#### مراجع

- [1]. Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, **8**, 338-353.
- [2]. Tanaka, H. Uejima, S. Asia, K. (1982). Linear regression analysis with fuzzy model, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **12**, 903-907.
- [3]. Diamond, P. (1988). Fuzzy least squares, *Information Sciences*, **46**, 141-157.
- [4]. Farnoosh, R. Ghasemian, J. and Solaymani fard, O. (2012). A modification on ridge estimation for fuzzy nonparametric regression, *Iranian Journal of Fuzzy System*, **9**, 75-88.
- [5]. Hong, D.H. Song, J.-K. Young, H. (2001). Fuzzy least-squares linear regression analysis using shape preserving operations, *Information Sciences*, **138**, 185-193.
- [6]. Razzaghnia, T. Danesh S. and Maleki, A. (2011). Hybrid fuzzy regression with trapezoidal fuzzy data, *Proc. SPIE 8349*, 834921.
- [7]. Razzaghnia, T. Danesh, S. (2015). Nonparametric Regression with Trapezoidal Fuzzy Data, *International Journal on Recent and Innovation Trends in Computing and Communication (IJRITCC)*, 3826 – 3831.

- [8]. Wang, N. Zhang, W. X. Mei, C. L. (2007). Fuzzy nonparametric regression based on local linear smoothing technique, *Information Sciences*, **177**, 3882-3900.
- [9]. Tanaka, H. Ishibushi, H. (1991). Identification of possibilistic linear systems by quadratic membership functions of fuzzy parameters, *Fuzzy Sets and Systems*, **41**, 145-160.
- [10]. Tanaka, H. Lee, H. (1998). Interval regression analysis by quadratic programming approach, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **6**, 473-481.
- [11]. Cheng, C.-B. Lee, E. S. (1999). Nonparametric fuzzy regression k-NN and kernel smoothing techniques, *Computers and Mathematics with Applications*, **38**, 239-251.
- [12]. Donoso, S. Marin, N. and Amparo, V. (2006). M. Quadratic programming models for fuzzy regression, International Conference on Mathematical and Statistical Modeling in Honor of Enrique Castillo.
- [13]. Razzaghnia, T. Pasha, E. (2009). A new mathematical programming approach in fuzzy linear regression models, *J. Sci. A. U*, **18**, 50-59.
- [14]. Ishibuchi, H. Kwon, K. Tanaka, H. (1995). A learning algorithm of fuzzy neural networks with triangular fuzzy weights, *Fuzzy Sets and Systems*, **71**, 277-293.
- [15]. Ishibuchi, H. Tanaka, H. (1992). Fuzzy regression analysis using neural networks, *Fuzzy Sets and Systems*, **50**, 257-265.
- [16]. Jang, J.S.R. (1993). ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system. *IEEE Trans Syst Man Cyber*, **23**, 665-685.
- [17]. Cheng, C.-B. Lee, E. S. (1999). Applying Fuzzy Adoptive Network to Fuzzy Regression Analysis, *Computers and Mathematics with Applications*, **38**, 123-140.
- [18]. Dalkilic, T. E. Apaydin, T. (2009). A fuzzy adaptive network approach to parameter estimation in cases where independent variables come from an exponential distribution, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **233**, 36-45.
- [19]. Dalkilic, T. E. Apaydin, T. (2014). Parameter Estimation by ANFIS in Cases Where Outputs are Non-Symmetric Fuzzy Numbers, *International Journal of Applied Science and Technology*, 92-103.

- [20].Danesh, S. Farnoosh, R. Razzaghnia, T. (2016). Fuzzy nonparametric regression based on adaptive neuro fuzzy inference system, *Neurocomputing*, **173**, 1450-1460.
- [21].Jang, J.S.R. (1992). Self-learning fuzzy controllers based on temporal back-propagation, *IEEE Transactions on Neural Network*, **3**, 714-723.
- [22].Kim, B. and Bishu, R. R. (1998). Evaluation of fuzzy linear regression models by comparing membership functions, *Fuzzy Sets and Systems*, **100**, 343-351.
- [23].Tanaka, H., Hayashi, I., Watada, J. (1989). Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data. *European Journal of Operational Research*, **40**, 389-396.

## Fuzzy Parameter Estimation via Fuzzy Weights and Linear Programming

Sedigheh Danesh \*, Rahman Farnoosh \*\*, Tahereh Razzaghnia \*\*\*

\*Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

\*\*School of Mathematics, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

\*\*\*Department of Statistics, Roudehen Branch, Islamic Azad University, Roudehen, Iran

### Abstract

Fuzzy regression represents the relation between variables. Fuzzy regression analysis is one of the most widely used statistical techniques. In this study, fuzzy regression is considered with the crisp input and the fuzzy output. A hybrid algorithm based on fuzzy weights and linear programming is designed for the fuzzy nonparametric regression model prediction that function form is assumed unknown and in cases low data. In proposed method, the objective function minimizes the spread of outputs. Finally, the performance of the suggested method is compared with linear programming (LP) and quadratic programming (QP) methods using the numerical examples. The results demonstrate that the proposed method has more accurate than the LP and QP methods. Also, it is verified in cases of low data.

**Keywords:** Fuzzy regression; Linear programming; Quadratic programming; Adaptive neuro fuzzy inference system

**Mathematics Subject Classification (2010):** 92B20, 62J86

---