

یک نگرش جدید برای آزمون فرضیه های فازی بر اساس p -مقدار

محسن عارفی^۱

گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۶/۱ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۱/۱۹

چکیده: در این مقاله، یک شیوه جدید برای آزمون فرضیه های فازی بر اساس رویکرد p -مقدار مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در این روش، ابتدا فرضیه های مورد نظر بر اساس مجموعه های فازی معرفی می گردند، و آنگاه، p -مقدار بر اساس انتگرال گیری روی δ -برش های فرضیه صفر فازی محاسبه می گردد. با مقایسه p -مقدار ارائه شده با سطح معناداری آزمون، تصمیم گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی انجام می گیرد. در نهایت، با ارائه برخی مثال های عددی، روش مورد نظر تشریح گردیده است.

واژه های کلیدی: آزمون فرضیه آماری، آماره آزمون، فرضیه فازی، p -مقدار.

رده بندی ریاضی (۲۰۱۰): $62F03, 03E72$

۱- مقدمه

موضوع آزمون فرضیه های آماری، یک موضوع مهم در مبحث استنباط آماری محسوب می شود. رویکردهای کلاسیک، بر این اصل استوار است که پارامترهای مورد نظر به صورت دقیق هستند. ولی در برخی موارد، با انواع مختلفی از عدم اطمینان، خصوصاً در مواردی با پارامترهای نادقیق، مواجه می شویم. در چنین مواقعی، رویکردهای معمولی قادر به آزمون چنین پارامترهایی نیستند و ما باید از روش های دیگری استفاده نماییم. یک روش مناسب، فرمول بندی پارامترهای نادقیق بر اساس نظریه مجموعه های فازی و استفاده از رویکردهای ارائه شده برای آزمون چنین پارامترهای است.

برای مثال، فرض کنید در خط تولید یک کارخانه، پیچ های با استاندارد قطر ۲ اینچ تولید شوند. یک نمونه تصادفی استخراج و می خواهیم آزمون نماییم که آیا پیچ ها از استاندارد مورد نظر

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: Arefi@Birjand.ac.ir

پیروی می‌کنند یا خیر؟ در روش کلاس-یک، می‌خواهیم فرضیه $H_0: \mu = 2$ را در برابر $H_1: \mu \neq 2$ آزمون نماییم. ولی در عمل، کلیه پیچ‌هایی که قطر آن‌ها بین $1/8$ اینچ تا $2/2$ اینچ است قابل استفاده و استاندارد می‌باشد. با این تفاوت که، هر چه قطر به 2 اینچ نزدیک‌تر گردد، استانداردتر و هر چه به $1/8$ و $2/2$ نزدیک شوند، استاندارد آن کمتر است. بنابراین، صورت‌بندی آن با فرضیه‌های کلاسیک، جالب به نظر نمی‌رسد. ولی می‌توان آن را با یک فرضیه نادقیق به فرم " μ تقریباً 2 اینچ است: H_0 " در برابر " μ دور از 2 اینچ است: H_1 " صورت‌بندی و برای هر فرضیه یک مجموعه فازی در نظر گرفت (بخش 2 را ببینید). بعد از صورت‌بندی یک فرضیه با مجموعه‌های فازی، می‌توان از روش‌های موجود برای آزمون فرضیه‌های فازی استفاده نمود.

در این راستا، در این مقاله، یک شیوه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس روش p -مقدار معرفی و تشریح گردیده است. در شیوه ارائه شده، p -مقدار مبتنی بر سطوح تراز فرض صفر فازی است و با مقایسه آن با سطح معناداری آزمون، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه موردنظر انجام می‌گیرد.

لازم به ذکر است که آزمون فرضیه‌های آماری در محیط نادقیق (فازی) توسط نویسندگان مختلفی مورد آزمون قرار گرفته است. در زیر به برخی کارهای انجام شده در این زمینه اشاره می‌گردد. آزمون فرضیه بر اساس داده‌های فازی توسط کاسالز و گیل [۱]، کاسالز و همکاران [۲]، گرزگورزویسکی [۳]، قهرمان و همکاران [۴]، وو [۵] و عارفی [۳۶] مورد تحقیق قرار گرفته است. آزمون فرضیه میانگین‌های دو جامعه بر اساس متغیرهای تصادفی فازی توسط مونتنگرو و همکاران [۶] مطالعه شده است. آرنولد [۷، ۸]، طاهری و عارفی [۹] و طاهری و بهبودیان [۱۱، ۱۰]، عارفی [۳۷] و عارفی و طاهری [۳۸] مسئله آزمون فرضیه‌های فازی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. عارفی و طاهری [۳۹، ۱۳، ۱۲]، گرزگورزویسکی [۱۴]، طاهری و بهبودیان [۱۵] و ترابی و همکاران [۱۶] موضوع آزمون فرضیه را زمانی که هم فرضیه‌ها موردنظر و هم داده‌ها فازی باشند، مورد بررسی و مطالعه قرار داده‌اند. رویکرد p -مقدار برای آزمون فرضیه‌های آماری در محیط فازی توسط فلزوموز و فیتل [۱۷] و پرچی و همکاران [۱۹، ۱۸] و پرچی و ماشین‌چی [۴۰] مورد تحقیق قرار گرفته است. اکبری و رضایی [۲۰] و طاهری و حسامیان [۲۲، ۲۱] و زینلی و همکاران [۴۲، ۴۱] برخی آزمون‌های پارامتری در محیط فازی را تعمیم داده‌اند. برای بررسی برخی رویکردهای دیگر در محیط‌های نادقیق (فازی یا مبهم)، به عارفی و طاهری [۲۳]، باکلی [۲۴]، چاچی و همکاران [۲۵]، سعیدی و همکاران [۲۶]، ترابی [۲۷] و یوسفی و همکاران [۲۸] مراجعه نمایید. همچنین، برای بررسی برخی روش‌های آماری در محیط فازی به فیتل [۲۹]، طاهری [۴۳، ۳۰] و طاهری و ماشین‌چی [۴۴] مراجعه نمایید.

بخش‌های مختلف مقاله به صورت زیر مرتب شده‌اند: در بخش ۲، برخی مفاهیم اولیه در مورد مجموعه‌های فازی و تعاریف فرضیه‌های فازی ارائه شده است. در بخش ۳، رویکرد اساسی مقاله که آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس روش p -مقدار است، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در بخش ۴ با ارائه برخی مثال‌های عددی، روش موردنظر تشریح گردیده است. برخی نتایج روی روش بیان شده در بخش ۵ آورده شده است.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا برخی مفاهیم اولیه روی مجموعه‌های فازی بیان و در ادامه فرضیه‌های فازی معرفی می‌گردد (برای بررسی بیشتر به کلایر و یوان [۳۱]، کراس و مایر [۳۲] و زاده [۳۳] مراجعه نمایید).

تعریف ۱: یک مجموعه فازی \tilde{A} روی مجموعه مرجع X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\},$$

که $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$ درجه عضویت x در مجموعه فازی \tilde{A} است. δ -برش مجموعه فازی \tilde{A} به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\tilde{A}[\delta] = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \delta\}, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

تعریف ۲: در مسئله آزمون فرضیه، هر فرضیه به فرم " θ به صورت $\tilde{H}(\theta)$ است: H " را یک فرضیه فازی گویند، که در آن $\tilde{H}(\theta) : \Theta \rightarrow [0, 1]$ یک تابع عضویت مناسب روی فضای پارامتر $\theta \in \Theta$ است (مراجعه کنید به طاهری و بهبودیان [۱۰]).

تعریف ۳: فرضیه فازی $H : \theta \text{ is } \tilde{H}(\theta)$ را تحت شرایط زیر یک فرضیه فازی یک‌طرفه گویند (مراجعه کنید به پرچمی و همکاران [۱۸]):

الف) تابع $\tilde{H}(\theta)$ یک تابع یکنوا بر حسب θ باشد،

ب) مقدار $\theta_1 \in \Theta$ موجود باشد، به طوری که برای $\theta \geq \theta_1$ (یا برای $\theta \leq \theta_1$) $\tilde{H}(\theta) = 1$ ،

ج) دامنه تغییرات $\tilde{H}(\theta)$ در بازه $[0, 1]$ تغییر کند.

تعریف ۴: فرضیه فازی $H : \theta \text{ is } \tilde{H}(\theta)$ را تحت شرایط زیر یک فرضیه فازی دوطرفه گویند (مراجعه کنید به پرچمی و همکاران [۱۸]):

الف) بازه $[\theta_1, \theta_2] \subset \Theta$ موجود باشد، به طوری که $\tilde{H}(\theta) = 1$ برای $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ ،

ب) تابع $\tilde{H}(\theta)$ به ازای $\theta \leq \theta_1$ یک تابع صعودی و به ازای $\theta \geq \theta_2$ یک تابع نزولی باشد،

ج) دامنه تغییرات $\tilde{H}(\theta)$ در بازه $(0,1)$ تغییر کند.

مثال ۱: (مراجعه کنید به عارفی و طاهری [۱۲] و پرچمی و همکاران [۱۸]) فرضیه فازی $H: \theta \text{ is } \tilde{H}(\theta)$ را با تابع عضویت‌های زیر در نظر بگیرید:

الف) اگر $\tilde{H}_1 = (a_1, a_2, a_3)_T$ یک عدد مثلثی با تابع عضویت زیر باشد، آنگاه آن یک فرضیه فازی ساده است:

$$\tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq \theta < a_2, \\ \frac{a_3 - \theta}{a_3 - a_2} & a_2 \leq \theta < a_3. \end{cases}$$

ب) اگر تابع عضویت فرضیه فازی عکس یک عدد مثلثی به صورت زیر باشد، آنگاه آن یک فرضیه فازی دوطرفه است:

$$\tilde{H}_2(\theta) = 1 - \tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < a_1, \\ \frac{a_3 - \theta}{a_3 - a_1} & a_1 \leq \theta < a_2, \\ \frac{\theta - a_2}{a_3 - a_2} & a_2 \leq \theta < a_3, \\ 1 & a_3 \leq \theta. \end{cases}$$

ج) اگر $\tilde{H}(\theta)$ به صورت یکی از توابع عضویت زیر باشد، آنگاه آن یک فرضیه فازی یک‌طرفه است:

$$\tilde{H}_3(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq \theta < a_2, \\ 1 & a_2 \leq \theta, \end{cases} \quad \tilde{H}_4(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta < a_2, \\ \frac{a_3 - \theta}{a_3 - a_2} & a_2 \leq \theta < a_3. \end{cases}$$

تذکر ۱: توجه کنید که فرضیه‌های فازی محدود به توابع عضویت ارائه شده در مثال ۱ نمی‌باشد. هر فرضیه‌ای که در تعریف ۲ صدق نماید، یک فرضیه فازی است.

تذکر ۲: قابل توجه است که اگر تابع عضویت در یک فرضیه فازی به صورت یکی از توابع زیر باشد، آنگاه به یک فرضیه معمولی تبدیل می‌شود:

$$\tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_0, \\ 0 & \theta \in \Theta_1, \end{cases} \quad \tilde{H}(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_1, \\ 0 & \theta \in \Theta_0, \end{cases}$$

که در آن $\Theta_0, \Theta_1 \subset \Theta$ و $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \{\}$.

اکنون فرض کنید یک نمونه تصادفی $X = (X_1, \dots, X_n)$ از جامعه‌ای با تابع چگالی (جرم) احتمال $f_\theta(x)$ استخراج و مقادیر $x = (x_1, \dots, x_n)$ مشاهده شوند. در ادامه می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_0: \theta \text{ is } \tilde{H}_0(\theta), \\ H_1: \theta \text{ is } \tilde{H}_1(\theta), \end{cases}$$

که $\tilde{H}_0(\theta)$ و $\tilde{H}_1(\theta)$ دو تابع عضویت مناسب روی فضای پارامتر هستند.

۳- آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p -مقدار

در این بخش، یک شیوه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس روش p -مقدار مورد مطالعه قرار می‌گیرد. برای انجام این هدف، ابتدا بر اساس شیوه‌های موجود یک آماره آزمون برای فرضیه‌های فازی ارائه می‌گردد، و در ادامه، p -مقدار برای آزمون چنین فرضیه‌هایی، بر اساس انتگرال‌گیری روی δ -برش فرضیه صفر فازی به صورت زیر محاسبه می‌گردد. در نهایت، با مقایسه p -مقدار با سطح معناداری آزمون، تصمیم‌گیری در مورد رد یا پذیرش فرضیه صفر فازی انجام می‌گیرد.

p -مقدار کمترین خطای نوع اول است که به ازای داده‌های مشاهده شده، منجر به رد فرضیه صفر می‌گردد. به عبارتی دیگر، p -مقدار، یک آماره آزمون به صورت $p(X)$ است که به ازای داده‌های مشاهده شده، مقادیر آن به صورت $0 \leq p(x) \leq 1$ تغییر می‌کند. اگر مقادیر این آماره کوچک باشد، ما تصمیم به رد فرضیه صفر می‌گیریم. ما می‌توانیم با مقایسه p -مقدار با سطح معناداری آزمون، نسبت به رد یا پذیرش فرضیه صفر تصمیم‌گیری نماییم. یعنی اگر $p(x) \leq \alpha$ باشد، فرضیه صفر را رد می‌کنیم. خصوصیت استفاده از روش p -مقدار در این است که با ازای یک سطح معناداری مشخص، بدون استفاده از جداول آماری (جداول مربوط به چندک‌های آماره آزمون)، تصمیم‌گیری در مورد فرضیه صفر انجام می‌گیرد. همچنین، در آزمون فرضیه‌هایی که توابع آزمون آن‌ها به صورت تصادفی شده هستند، تصمیم‌گیری قطعی با مشکل مواجه می‌شود، در صورتی که با استفاده از روش p -مقدار این مشکل مرتفع می‌گردد (به کسلا و برگر [۳۴] مراجعه نمایید). در ادامه، روش p -مقدار را به حالتی که فرضیه‌های مورد آزمون به صورت فازی صورت‌بندی شده باشند، مورد بسط قرار می‌دهیم.

تعریف ۵: فرض کنید $T(X)$ ، یک آماره آزمون برای آزمون فرضیه فازی $H_0: \theta \in \tilde{H}_0(\theta)$ در مقابل فرضیه فازی دیگری بر اساس یک نمونه تصادفی $X = (X_1, \dots, X_n)$ با مقادیر $x = (x_1, \dots, x_n)$ باشد که به ازای مقادیر بزرگی از آن بتوان فرضیه H_0 را رد نمود. آنگاه، p -مقدار به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$p(x) = \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(T(X) \geq T(x)) d\delta,$$

که $\tilde{H}_0[\delta]$ برابر δ -برش فرضیه صفر فازی است.

تذکر ۳: توجه کنید برای آزمون فرضیه‌های معمولی در حالت کلاسیک، p -مقدار به صورت $p_{\theta \in \Theta}(x) = \sup_{\theta \in \Theta} P_\theta(T(X) \geq T(x))$ تعریف می‌شود (مراجعه کنید به کسلا و برگر [۳۴]، بخش ۳، ۴، ۸). بنابراین، p -مقدار ارائه شده در تعریف ۵ تعمیمی از روش p -مقدار معمولی تحت فرضیه‌های فازی است که با انتگرال‌گیری روی تمام δ -برش‌های فرضیه صفر فازی تعریف شده است. به عبارتی می‌توان آن را به صورت زیر نیز بازنویسی نمود:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(T(X) \geq T(x)) d\delta \\ &= \int_0^1 p_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]}(x) d\delta, \end{aligned}$$

که $p_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]}(x)$ برابر p -مقدار معمولی روی مقادیر پارامتری است که δ -برش فرضیه صفر فازی تغییر می‌کنند.

تذکر ۴: در روش‌های کلاسیک برای محاسبه یک آماره آزمون می‌توان از دو روش متداول استفاده نمود. روش اول مبتنی بر محاسبه آماره آزمون و مقایسه آن با چندک موردنظر (یا محاسبه تابع آزمون) است. روش دوم مبتنی بر محاسبه p -مقدار است. معمولاً نتیجه به دست آمده در دو روش برای رد یا پذیرش فرضیه صفر یکسان است. قابل توجه است که در محیط فازی، روش‌های متعددی برای آزمون فرضیه‌های فازی پیشنهاد شده است که شامل دو روش فوق نیز می‌گردد. نکته قابل توجه در این است که روشی که بتواند هم‌زمان هم آماره آزمون را و هم p -مقدار را محاسبه نماید و نتایج آن نیز باهم یکی باشد، ارائه نشده است. دلیل آن این است که ممکن است برخی آماره‌های آزمون و یا p -مقدارهای محاسبه شده به جواب‌های فازی منجر گردد که تصمیم‌گیری برای رد یا پذیرش فرضیه صفر را منعطف نماید (برای مثال به پرچمی و همکاران [۱۸] و باکلی [۲۴] مراجعه نمایید). به طور مسلم نمی‌توان اظهار داشت که نتایج مبتنی بر آماره‌های آزمون فازی و نتایج مبتنی بر p -مقدار فازی بر یکدیگر منطبق

هستند. در این راستا، دیدگاه مطرح شده در این مقاله، یک روش p -مقدار برای فرضیه‌های فازی تعریف می‌کند که می‌تواند نسبت به رد یا پذیرش فرضیه صفر تصمیم‌گیری نماید. قابل توجه است که از آنجایی که در این روش از آماره آزمون‌های فازی موجود برای محاسبه p -مقدار استفاده شده است، نتایج آن با حالت معمولی تطابق بیشتری دارد.

تذکر ۵: با توجه به نکات بیان شده در تذکر ۴، برای محاسبه p -مقدار در تعریف ۵، نیاز به محاسبه یک آماره آزمون $T(X) = T(X_1, \dots, X_n)$ (یا ناحیه بحرانی) برای فرضیه‌های فازی وجود دارد. نویسندگان مختلفی برخی آماره‌های آزمون برای فرضیه‌های فازی ارائه نموده‌اند. برای مثال، در زیر به چهار دیدگاه در این زمینه اشاره شده است و بر اساس آماره آزمون آن‌ها، روش ارائه شده در این مقاله تشریح شده است.

تذکر ۶: فرض کنید در مسئله آزمون فرضیه، بجای فرضیه‌های فازی با فرضیه‌های معمولی $H_0: \theta \in \Theta_0$ در مقابل $H_1: \theta \in \Theta_1$ مواجه گردیم. در این صورت، بر اساس تذکر ۲، می‌توانیم فرضیه‌ها را به صورت فازی با تابع عضویت زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{H}_0(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta \in \Theta_0, \\ 0 & \theta \in \Theta_1, \end{cases} \quad \tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \in \Theta_0, \\ 1 & \theta \in \Theta_1, \end{cases}$$

در این صورت، p -مقدار $p(x)$ در تعریف ۵ به p -مقدار در حالت معمولی $p_{\theta \in \Theta_0}(x)$ به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_{\theta \in \Theta} \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(T(X) \geq T(x)) d\delta \\ &= \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(T(X) \geq T(x)) \int d\delta \\ &= \sup_{\theta \in \Theta} P_{\theta}(T(X) \geq T(x)) \\ &= p_{\theta \in \Theta_0}(x). \end{aligned}$$

۳-۱- محاسبه p -مقدار برای آزمون فرضیه‌های یک‌طرفه و دوطرفه فازی

پرچمی و همکاران [۱۸] یک رویکرد برای آزمون فرضیه‌های فازی یک‌طرفه و دوطرفه بر اساس یک p -مقدار فازی ارائه کرده‌اند. بر اساس تعریف‌های ۳ و ۴ از فرضیه‌های فازی یک‌طرفه و دوطرفه، پرچمی و همکاران سه ناحیه بحرانی زیر را پیشنهاد کرده‌اند:

$$T_1 \leq t_l, \quad T_r \geq t_r, \quad T_r \notin (t_l, t_r).$$

بنابراین، p -مقدار بر اساس این آماره‌های آزمون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p(\mathbf{x}) = \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_\cdot[\delta]} P_\theta(T_\downarrow(X) \leq T_\downarrow(\mathbf{x})) d\delta,$$

$$p(\mathbf{x}) = \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_\cdot[\delta]} P_\theta(T_\uparrow(X) \geq T_\uparrow(\mathbf{x})) d\delta,$$

$$p(\mathbf{x}) = \nu \min \left[\int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_\cdot[\delta]} P_\theta(T_\uparrow(X) \leq T_\uparrow(\mathbf{x})) d\delta, \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_\cdot[\delta]} P_\theta(T_\uparrow(X) \geq T_\uparrow(\mathbf{x})) d\delta \right].$$

۳-۲- محاسبه p -مقدار بر اساس آماره آزمون طاهری و بهبودیان

طاهری و بهبودیان [۱۰]، یک نگرش برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس لم نیمین-پیرسن تعمیم یافته را مورد بررسی و مطالعه قرار داده‌اند. در این نگرش، آماره آزمون به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\lambda'(X) = \frac{\int_0^1 f_\theta(X) \tilde{H}_\downarrow(\theta) d\theta}{\int_0^1 f_\theta(X) \tilde{H}_\uparrow(\theta) d\theta}.$$

همچنین، تابع آزمون به صورت زیر است:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \lambda'(X) > c, \\ \gamma & \lambda'(X) = c, \\ 0 & \lambda'(X) < c. \end{cases}$$

بر اساس تابع آزمون فوق، به ازای مقادیر بزرگی از $\lambda'(X)$ ، فرضیه صفر فازی رد می‌شود. بنابراین، p -مقدار بر اساس این آماره آزمون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$p(\mathbf{x}) = \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_\cdot[\delta]} P_\theta(\lambda'(X) \geq \lambda'(\mathbf{x})) d\delta \\ = \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_\cdot[\delta]} P_\theta \left(\frac{\int_0^1 f_\theta(X) \tilde{H}_\downarrow(\theta) d\theta}{\int_0^1 f_\theta(X) \tilde{H}_\uparrow(\theta) d\theta} \geq \frac{\int_0^1 f_\theta(\mathbf{x}) \tilde{H}_\downarrow(\theta) d\theta}{\int_0^1 f_\theta(\mathbf{x}) \tilde{H}_\uparrow(\theta) d\theta} \right) d\delta.$$

۳-۳- محاسبه p -مقدار بر اساس آماره آزمون ترابی و بهبودیان

ترابی و بهبودیان [۳۵]، یک نگرش برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس آماره آزمون نسبت درستی‌نمایی را مورد تحقیق قرار داده‌اند. در این نگرش، آماره آزمون نسبت درستی‌نمایی به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\lambda(X) = \begin{cases} \frac{\sup_{\theta \in \Theta} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta; X)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; X)} & \text{if } \tilde{H}_1(\theta) = 1 - \tilde{H}_0(\theta), \\ \frac{\sup_{\theta \in \Theta} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta; X)}{\max\{\sup_{\theta \in \Theta} \tilde{H}_0(\theta)L(\theta; X), \sup_{\theta \in \Theta} \tilde{H}_1(\theta)L(\theta; X)\}} & \text{if } \tilde{H}_1(\theta) \neq 1 - \tilde{H}_0(\theta). \end{cases}$$

همچنین، تابع آزمون به صورت زیر است:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \lambda(X) < c, \\ \gamma & \lambda(X) = c, \\ 0 & \lambda(X) > c. \end{cases}$$

بنابراین، به ازای مقادیر بزرگی از $-\lambda(X)$ ، فرضیه صفر فازی رد می‌شود. در نتیجه، p -مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_1[\delta]} P_\theta(-\lambda(X) \geq -\lambda(x)) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(\lambda(X) \leq \lambda(x)) d\delta. \end{aligned}$$

۳-۴- محاسبه p -مقدار بر اساس آماره آزمون یوسفی و همکاران

یوسفی و همکاران [۲۸]، مسئله آزمون فرضیه‌های فازی را بر اساس آماره آزمون نسبت درستی‌نمایی مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این نگرش، آماره آزمون نسبت درستی‌نمایی به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\lambda(X) = \int_0^1 f_X(\delta) d\delta,$$

که $f_X(\delta)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f_X(\delta) = \begin{cases} \frac{\sup_{\theta \in \tilde{H}_1[\delta]} L(\theta; X)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\theta; X)} & \text{if } \tilde{H}_1(\theta) = 1 - \tilde{H}_0(\theta), \\ \frac{\sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} L(\theta; X)}{\max\{\sup_{\theta \in \tilde{H}_1[\delta]} L(\theta; X), \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} L(\theta; X)\}} & \text{if } \tilde{H}_1(\theta) \neq 1 - \tilde{H}_0(\theta), \end{cases}$$

که در آن $L(\theta; X) = f_\theta(X)$ تابع در ستمیابی است. همچنین، بر اساس این آماره آزمون، تابع آزمون به صورت زیر است:

$$\phi(X) = \begin{cases} 1 & \lambda(X) < c, \\ \gamma & \lambda(X) = c, \\ 0 & \lambda(X) > c, \end{cases}$$

بر اساس تابع آزمون فوق، p -مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_1[\delta]} P_\theta(-\lambda(X) \geq -\lambda(x)) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\theta \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\theta(\lambda(X) \leq \lambda(x)) d\delta. \end{aligned}$$

۴- مثال‌های عددی

در این بخش، برخی مثال‌های عددی برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p -مقدار معرفی شده، ارائه خواهد شد.

۴-۱- آزمون فرضیه‌های فازی برای میانگین یک جامعه با واریانس معلوم

۴-۱-۱- فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه مرکب فازی

فرض کنید یک نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ با σ^2 معلوم استخراج کرده‌ایم و بخواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم (ببینید همچنین یوسفی و همکاران [۲۸] و ترابی و بهبودیان [۳۵]):

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0 : \mu \text{ is } \tilde{H}_0(\mu), \\ H_1 : \mu \text{ is } \tilde{H}_1(\mu), \end{cases}$$

که در آن داریم:

$$\tilde{H}_0(\mu) = e^{-a(\mu-\mu_0)^r}, \quad \tilde{H}_1(\mu) = 1 - \tilde{H}_0(\mu), \quad a > 0.$$

اکنون بر اساس آماره‌های آزمون معرفی شده در بخش قبل، p -مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

الف) بر اساس دیدگاه طاهری و بهبودیان، آماره آزمون به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \lambda'(X) &= \frac{\int_0^1 \tilde{H}_1(\mu) f_\mu(X) d\mu}{\int_0^1 \tilde{H}_0(\mu) f_\mu(X) d\mu} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{-a(\mu-\mu_0)^r}) e^{-\frac{n}{r}(\bar{X}-\mu)^r} d\mu}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(\mu-\mu_0)^r} e^{-\frac{n}{r}(\bar{X}-\mu)^r} d\mu} \\ &= \sqrt{1 + \frac{ra}{n}} e^{\frac{na(\bar{X}-\mu_0)^r}{n+ra}} - 1 \end{aligned}$$

بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p -مقدار به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_1[\delta]} P_\mu(\lambda'(X) \geq \lambda'(x)) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_1[\delta]} P_\mu \left(\sqrt{1 + \frac{ra}{n}} e^{\frac{na(\bar{X}-\mu_0)^r}{n+ra}} - 1 \geq \sqrt{1 + \frac{ra}{n}} e^{\frac{na(\bar{x}-\mu)^r}{n+ra}} - 1 \right) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_1[\delta]} P_\mu(|\bar{X} - \mu_0| \geq |\bar{x} - \mu|) d\delta \tag{۱} \\ &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_1[\delta]} \left[1 - P_\mu \left(\frac{|\mu_0 - \mu| + |\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu + |\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] d\delta \\ &= \int_0^1 \left[1 - P_{H_0^L} \left(\frac{|\mu_0 - \mu| + |\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{\mu_0 - \mu + |\bar{x} - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right] d\delta \\ &= \int_0^1 \left[1 - P \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}} - |\bar{x} - \mu_0| \right) \leq Z \leq \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \left(\sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}} + |\bar{x} - \mu_0| \right) \right) \right] d\delta, \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_\delta[\delta] = [H_\delta^L, H_\delta^U] = [\mu_* - \sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}, \mu_* + \sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}] \text{ که}$$

ب) بر اساس دیدگاه ترابی و بهبودیان، آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت زیر است:

$$\lambda(X) = \exp \left\{ \frac{(n\bar{X} + ra\mu_*\sigma^r)^r}{(r\sigma^r)(n + ra\sigma^r)} - \frac{(n\bar{X}^r + ra\mu_*^r\sigma^r)}{(r\sigma^r)} \right\}.$$

بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p -مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_\delta[\delta]} P_\mu(\lambda(X) \leq \lambda(x)) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_\delta[\delta]} P_\mu \left(\frac{(n\bar{X} + ra\mu_*\sigma^r)^r}{(r\sigma^r)(n + ra\sigma^r)} \geq \frac{(n\bar{x} + ra\mu_*\sigma^r)^r}{(r\sigma^r)(n + ra\sigma^r)} \right) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_\delta[\delta]} P_\mu(|\bar{X} - \mu_*| \geq |\bar{x} - \mu_*|) d\delta, \end{aligned}$$

که مشابه حالت الف می‌باشد.

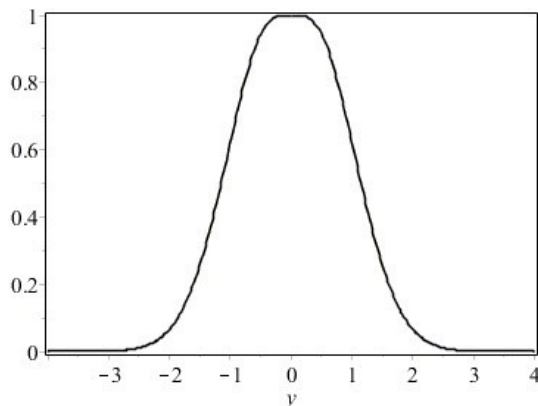
ج) بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران، آماره آزمون نسبت درستنمایی به صورت زیر است:

$$\lambda(X) = \lambda_1(X)I(\bar{X} \leq \mu_*) + \lambda_2(X)I(\bar{X} > \mu_*),$$

که $I(\cdot)$ تابع نشانگر و $\lambda_1(X)$ و $\lambda_2(X)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\begin{aligned} \lambda_1(X) &= e^{-a(\bar{X} - \mu_*)^r} + \int_0^1 e^{-a(\bar{X} - \mu_*)^r} e^{\frac{-n}{r\sigma^r}(\bar{X} - \mu_* + \sqrt{-\frac{\ln \delta}{a}})^r} d\delta, \\ \lambda_2(X) &= e^{-a(\bar{X} - \mu_*)^r} + \int_0^1 e^{-a(\bar{X} - \mu_*)^r} e^{\frac{-n}{r\sigma^r}(\bar{X} - \mu_* - \sqrt{-\frac{\ln \delta}{a}})^r} d\delta. \end{aligned}$$

از آنجایی که $\lambda(X)$ یک تابع مقعر متقارن حول μ_* است، مقدار p -مقدار مشابه فرمول (۱) محاسبه می‌گردد (شکل ۱ را برای $y = \bar{x} - \mu_*$ ، $n = 16$ ، $a = 1$ و $\sigma = 1$ ببینید).



شکل (۱): آماره آزمون نسبت درست‌نمایی بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران

مثال ۲: فرض کنید یک نمونه تصادفی به حجم $n = ۱۶$ از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2 = ۱)$ استخراج کرده‌ایم. می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری $\alpha = ۰/۱۰$ آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 0, \\ H_1: \mu \neq 0, \end{cases}$$

که در آن $\tilde{H}_0(\mu) = e^{-a\mu^2}$ و $\tilde{H}_1(\mu) = 1 - e^{-a\mu^2}$ بر اساس فرمول (۱)، p -مقدار به ازای مقادیر مختلف \bar{x} و a و نتیجه آزمون در جدول ۱ خلاصه شده است.

جدول (۱): p -مقدار و نتیجه آزمون در مثال ۲

± 3	$\pm 2/5$	± 2	$\pm 1/5$	± 1	$\pm 0/5$	\bar{x}	
۰/۱۸۶۲۸	۰/۱۶۰۶۰	۰/۳۳۶۵	۰/۱۴۷۷	۰/۰۵۱۲	۰/۰۱۴۰	مقدار p	$a = 0/5$
AH_0	AH_0	AH_0	AH_0	RH_0	RH_0	نتیجه	
۰/۷۵۵۵۶	۰/۳۸۷۶	۰/۱۲۷۶	۰/۰۲۶۹	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۰۳	مقدار p	$a = 1$
AH_0	AH_0	AH_0	RH_0	RH_0	RH_0	نتیجه	
۰/۶۷۰۲	۰/۲۵۹۵	۰/۰۵۳۵	۰/۰۰۵۹	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰	مقدار p	$a = 1/5$
AH_0	AH_0	RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	نتیجه	
۰/۰۶۳۲	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	مقدار p	$a = 100$
RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	نتیجه	
۰/۰۴۷۲	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	مقدار p	$a = 1000$
RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	RH_0	نتیجه	

۴-۱-۲: فرضیه ساده فازی در برابر فرضیه ساده فازی

مثال ۴,۱ در مقاله ترابی و بهبودیان [۱۰] را ملاحظه نمایید. می‌خواهیم این مثال را بر اساس رویکرد p -مقدار ارائه شده در این مقاله مورد بررسی قرار دهیم. در این مثال فرض می‌شود که یک نمونه تصادفی از یک توزیع نرمال $N(\mu, \sigma^2)$ (با σ^2 معلوم) استخراج شده و می‌خواهیم فرضیه‌های ساده فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu = \mu_1 \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0: \mu \text{ is } \tilde{H}_0(\mu), \\ H_1: \mu \text{ is } \tilde{H}_1(\mu), \end{cases}$$

که در آن داریم:

$$\tilde{H}_0(\mu) = e^{-a\mu^2}, \quad \tilde{H}_1(\mu) = e^{-a(\mu-\gamma)^2}, \quad a > 0.$$

بر اساس این دیدگاه، آماره آزمون نسبت درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \lambda(X) &= \begin{cases} 1 & L_0(X) \geq L_1(X) \\ \frac{L_0(X)}{L_1(X)} & L_0(X) < L_1(X) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & L_0(X) \geq L_1(X), \\ m\bar{X}(\mu_0 - \mu_1) & L_0(X) < L_1(X), \end{cases} \end{aligned}$$

که $L_0(X) = \sup_{\mu \in R} H_0(\mu)L(\mu; X)$ ، $L_1(X) = \sup_{\mu \in R} H_1(\mu)L(\mu; X)$ و $m > 0$ یک مقدار مثبت ثابت است. ناحیه بحرانی بر اساس این آماره آزمون، به ازای $\mu_1 > \mu_0$ به صورت $CR = \{X \mid \bar{X} > k\}$ و به ازای $\mu_1 < \mu_0$ به صورت $CR = \{X \mid \bar{X} < k\}$ است. بنابراین p -مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_0[\delta]} P_\mu(\lambda(X) \leq \lambda(x)) d\delta \\ &= \begin{cases} \int_0^1 \sup_{\mu \in H_0[\delta]} P_\mu(\bar{X} > \bar{x}) d\delta & \text{if } \mu_1 > \mu_0 \\ \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}_1[\delta]} P_\mu(\bar{X} < \bar{x}) d\delta & \text{if } \mu_1 < \mu_0 \end{cases} \quad (2) \\ &= \begin{cases} \int_0^1 P_{\mu=H_0^i}(\bar{X} > \bar{x}) d\delta & \text{if } \mu_1 > \mu_0 \\ \int_0^1 P_{\mu=H_1^i}(\bar{X} < \bar{x}) d\delta & \text{if } \mu_1 < \mu_0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\tilde{H}_\delta[\delta] = [H_\delta^L, H_\delta^U] = \left[\mu_\delta - \sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}}, \mu_\delta + \sqrt{-\frac{\ln(\delta)}{a}} \right] \text{ که}$$

مثال ۳: فرض کنید بر اساس حجم نمونه‌های تصادفی $n = 16$ ، $n = 25$ و $n = 36$ از یک جامعه نرمال $N(\mu, \sigma^2 = 16)$ بخواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری $\alpha = 0.10$ آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_0: \mu = 0, \\ H_1: \mu = 2, \end{cases}$$

که در آن $\tilde{H}_0(\mu) = e^{-2\mu^2}$ و $\tilde{H}_1(\mu) = e^{-2(\mu-2)^2}$ بر اساس فرمول (۲)، p -مقدار به ازای حجم نمونه‌های و مقادیر مختلف \bar{x} محاسبه و نتایج در جدول ۲ خلاصه شده است.

جدول (۲): p -مقدار برای فرضیه‌های ساده فازی و نتیجه آزمون در مثال ۳

	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	\bar{x}	
p -مقدار	۰/۰۱۲۵	۰/۰۹۶۳	۰/۳۶۰۳	۰/۷۲۳۶	۰/۹۳۹۵	۰/۹۹۴۰	۰/۹۹۹۷		$n = 16$
نتیجه	RH_0	RH_0	AH_0	AH_0	AH_0	AH_0	AH_0		
p -مقدار	۰/۰۰۳۴	۰/۰۵۷۰	۰/۳۳۱۱	۰/۷۶۵۰	۰/۹۷۱۱	۰/۹۹۹۰	۰/۹۹۹۹		$n = 25$
نتیجه	RH_0	RH_0	AH_0	AH_0	AH_0	AH_0	AH_0		
p -مقدار	۰/۰۰۰۹	۰/۰۳۳۸	۰/۳۰۵۱	۰/۸۰۰۰	۰/۹۸۶۹	۰/۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹		$n = 36$
نتیجه	RH_0	RH_0	AH_0	AH_0	AH_0	AH_0	AH_0		

تذکر: لازم به ذکر است که بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران [۲۸] نیز ناحیه بحرانی برای فرضیه‌های ساده فازی، مشابه حالت قبل است (هر چند آماره آزمون متفاوت است) و بنابراین p -مقدار مشابه فرمول (۲) به دست می‌آید.

مثال ۴: فرض کنید X یک متغیر تصادفی از جامعه‌ای با تابع چگالی زیر باشد (به یوسفی و همکاران [۲۸] و ترابی و بهبودیان [۳۵] مراجعه نمایید):

$$f_\theta(x) = 2\theta x + 2(1-\theta)(1-x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \theta < 1.$$

اکنون می‌خواهیم فرضیه‌های فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_0: \theta = 1, \\ H_1: \theta \neq 1, \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0: \theta \text{ is } \tilde{H}_0(\theta), \\ H_1: \theta \text{ is } \tilde{H}_1(\theta), \end{cases}$$

که $\tilde{H}_0(\theta) = \theta$ و $\tilde{H}_1(\theta) = 1 - \tilde{H}_0(\theta)$ به ازای هر $0 < \theta < 1$.

الف) بر اساس رویکرد طاهری و بهبودیان، آماره آزمون به صورت زیر به دست می آید:

$$\lambda'(X) = \frac{2-X}{X+1}.$$

ب) بر اساس رویکرد ترابی و بهبودیان، آماره آزمون نسبت در ستمیابی به صورت زیر داده شده است:

$$\lambda(X) = \begin{cases} \frac{X-1}{2(2X-1)} & 0 < X \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{X}{(1-X)} & \frac{1}{2} < X \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & \frac{1}{3} < X \leq 1. \end{cases}$$

ج) بر اساس رویکرد یوسفی و همکاران، آماره آزمون نسبت در ستمیابی به صورت زیر داده شده است:

$$\lambda(X) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-X)} & 0 < X \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \frac{1}{2} < X \leq 1. \end{cases}$$

بر اساس سه دیدگاه فوق، ناحیه بحرانی به صورت $CR = \{X \mid X < k\}$ است، بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p -مقدار به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} p(\underline{x}) &= \int_0^1 \sup_{\mu \in H, [\delta]} P_{\mu}(X < x) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\delta \leq \theta < 1} [2\theta x(x-1) + x(2-x)] d\delta \\ &= \int_0^1 [2\delta x(x-1) + x(2-x)] d\delta \\ &= x(x-1) + x(2-x) \\ &= x. \end{aligned}$$

بنابراین، به ازای مقادیر مشاهده $x \in [0, \alpha]$ فرضیه صفر فازی رد و در غیر این صورت پذیرفته می شود.

مثال ۵: مفروضات مثال ۴ را در نظر بگیرید. فرض کنید بخواهیم فرضیه‌های ساده فازی زیر را در سطح معناداری α آزمون نماییم:

$$\begin{cases} H_0: \theta = \frac{1}{3}, \\ H_1: \theta = \frac{1}{4}, \end{cases} \equiv \begin{cases} H_0: \theta \text{ is } \tilde{H}_0(\theta), \\ H_1: \theta \text{ is } \tilde{H}_1(\theta), \end{cases}$$

که در آن داریم:

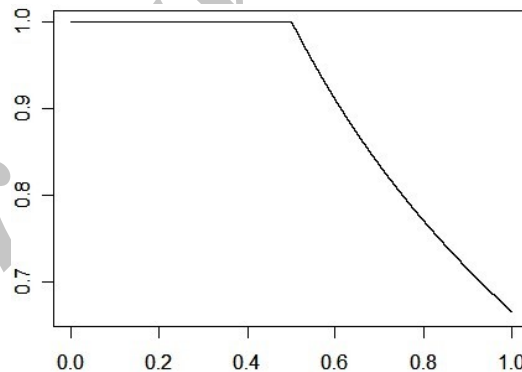
$$\tilde{H}_0(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{3}, \\ 2-2\theta & \frac{1}{3} \leq \theta < \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \tilde{H}_1(\theta) = \begin{cases} 2\theta & 0 \leq \theta < \frac{1}{4}, \\ 2-2\theta & \frac{1}{4} \leq \theta < 1. \end{cases}$$

الف) بر اساس رویکرد طاهری و بهبودیان، آماره آزمون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\lambda'(X) = \frac{9}{2(2-X)}.$$

ب) بر اساس رویکرد یوسفی و همکاران، آماره آزمون نسبت درست‌نمایی به صورت زیر داده شده است (شکل ۲):

$$\lambda(X) = \begin{cases} 1 & 0 < X \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{2}{3} \left[1 - \frac{1-X}{1-2X} \ln(2X) \right] & \frac{1}{3} < X \leq 1. \end{cases}$$



شکل (۲): آماره آزمون نسبت درست‌نمایی بر اساس دیدگاه یوسفی و همکاران در مثال ۲

بنابراین، ناحیه بحرانی بر اساس آماره‌های آزمون فوق، به صورت $CR = \{X \mid X \geq k\}$ است، بنابراین، بر اساس تعریف ۵، p -مقدار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_0^1 \sup_{\mu \in \tilde{H}, [\delta]} P_\mu(X \geq x) d\delta \\ &= \int_0^1 \sup_{\delta \leq \theta < 1} [(x - \delta)^\alpha - \alpha \theta x (x - \delta)] d\delta \\ &= \int_0^1 [(x - \delta)^\alpha - \alpha x (x - \delta)] d\delta \\ &= (x - \delta)^\alpha - \alpha x (x - \delta) \\ &= 1 - x^\alpha. \end{aligned}$$

بنابراین، به ازای مقادیر مشاهده $x \in [\sqrt{1-\alpha}, 1]$ فرضیه صفر فازی رد و در غیر این صورت پذیرفته می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک دیدگاه جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی بر اساس p -مقدار معرفی گردید. این شیوه، مبتنی بر سطوح تراز فرضیه فازی صفر استوار است. خصوصیت این روش نسبت به بقیه روش‌های ارائه شده بر اساس p -مقدار در این است که اولاً برای هر نوع فرضیه فازی کاربرد دارد و معطوف به حالت خاصی از فرضیه‌های فازی نیست و ثانیاً بر اساس مقدار محاسبه شده، می‌توانیم به‌طور قطعی در مورد رد یا پذیرش فرضیه‌های فازی تصمیم‌گیری نمود. بسط و توسعه روش ارائه شده برای آزمون فرضیه‌های آماری در حالتی که داده‌ها مورد دسترس نادقیق (فازی) باشند، در آینده تحقیق مورد بررسی و مطالعه قرار خواهد گرفت.

منابع

- [1] Casals, M.R. and Gil, M.A. (1989). A note on the operativeness of Neyman-Pearson tests with fuzzy information, *Fuzzy Sets and Systems*, **30**, 215-220.
- [2] Casals, M.R., Gil, M.A., and Gil, P. (1986). The fuzzy decision problem: an approach to the problem of testing statistical hypotheses with fuzzy information, *European Journal of Operation Research*, **27**, 371-382.
- [3] Grzegorzewski, P. (2000). Testing statistical hypotheses with vague data, *Fuzzy Sets and Systems*, **112**, 501-510.

- [4] Kahraman, C., Bozdog, C.E., Ruan, D., and Ozok, A.F. (2004). Fuzzy sets approaches to statistical parametric and nonparametric tests, *International Journal of Intelligent Systems*, **19**, 1-19.
- [5] Wu, H.Ch. (2005). Statistical hypotheses testing for fuzzy data, *Information Sciences*, **175**, 30-56.
- [6] Montenegro, M., Casals, M.R., Lubiano, M.A., and Gil, M.A. (2001). Two sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable, *Information Sciences*, **133**, 89-100.
- [7] Arnold, B.F. (1996). An approach to fuzzy hypothesis testing, *Metrika*, **44**, 119-126.
- [8] Arnold, B.F. (1998). Testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Fuzzy Sets and Systems*, **94**, 323-333.
- [9] Taheri, S.M. and Arefi, M. (2009). Testing fuzzy hypotheses based on fuzzy test statistic, *Soft Computing*, **13**, 617-625.
- [10] Taheri, S.M. and Behboodan, J. (1999). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypothesis testing, *Metrika*, **49**, 3-17.
- [11] Taheri, S.M. and Behboodan, J. (2001). A Bayesian approach to fuzzy hypotheses testing, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**, 39-48.
- [12] Arefi, M. and Taheri, S.M. (2011). Testing fuzzy hypotheses using fuzzy data based on fuzzy test statistic, *Journal of Uncertain Systems*, **5**(1), 45-61.
- [13] Arefi, M. and Taheri, S.M. (2013). A new approach for testing fuzzy hypotheses based on fuzzy data, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, **6**(2), 318-327.
- [14] Grzegorzewski, P. (2002). Testing fuzzy hypotheses with vague data, In: *Statistical Modeling, Analysis and Management of Fuzzy Data*, C. Bertoluzza et al. (Eds.), Springer, Heidelberg, pp. 213-225.
- [15] Taheri, S.M. and Behboodan, J. (2006). On Bayesian approach to fuzzy testing hypothesis with fuzzy data, *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **19**, 139-154.
- [16] Torabi, H., Behboodan, J., and Taheri, S.M. (2006). Neyman-Pearson Lemma for fuzzy hypotheses testing with vague data, *Metrika*, **64**, 289-304.

- [17] Filzmoser, P. and Viertl, R. (2004). Testing hypotheses with fuzzy data: the fuzzy p-value, *Metrika*, **59**, 21-29.
- [18] Parchami, A., Taheri, S.M., and Mashinchi, M. (2010). Fuzzy p-value in testing fuzzy hypotheses with crisp data, *Statistical Papers*, **51**, 209-226.
- [19] Parchami, A., Taheri, S.M., and Mashinchi, M. (2012). Testing fuzzy hypotheses based on vague observations: a p-value approach, *Statistical Papers*, **53**(2), 469-484.
- [20] Akbari, M.Gh. and Rezaei, A. (2010). Bootstrap testing fuzzy hypotheses and observations on fuzzy statistic, *Expert Systems with Applications*, **37**, 5782-5787.
- [21] Taheri, S.M. and Hesamian, G. (2013). A generalization of the Wilcoxon signed-rank test and its applications, *Statistical Papers*, **54**(2), 457-470.
- [22] Taheri, S.M. and Hesamian, G. (2011). Goodman-Kruskal measure of association for fuzzy-categorized variables, *Kybernetika*, **47**(1), 110-122.
- [23] Arefi, M. and Taheri, S.M. (2011). A fuzzy-based approach to testing statistical hypotheses, *International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics*, **4**(1), 109-132.
- [24] Buckley, J.J. (2005). Fuzzy statistics: hypothesis testing, *Soft Computing*, **9**, 512-518.
- [25] Chachi, J., Taheri, S.M., and Viertl, R. (2012). Testing statistical hypotheses based on fuzzy confidence intervals, *Austrian Journal of Statistics*, **41**(4), 267-286.
- [26] Saeidi, A.R., Akbari, M.Gh., and Doostparast, M. (2014). Hypotheses testing with the two-parameter pareto distribution on the basis of records in fuzzy environment, *Kybernetika*, **50**(5), 744-757.
- [27] Torabi, H. (2012). A generalized version of Neyman-Pearson Lemma for testing fuzzy hypotheses based on r-level sets, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **41**(24), 4379-4390.
- [28] Yosefi, Sh., Arefi, M., and Akbari, M.Gh. (2016). A new approach for testing fuzzy hypotheses based on likelihood ratio statistic, *Statistical Papers*, **57**, 665-688.
- [29] Viertl, R. (2011). *Statistical Methods for Fuzzy Data*. J. Wiley, Chichester.
- [30] Taheri, S.M. (2003). Trends in fuzzy statistics, *Austrian Journal of Statistics*, **32**, 239-257.

- [31] Klir, G.J. and Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*, Prentic-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [32] Kruse, R. and Meyer, K.D. (1987). *Statistics with Vague Data*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston.
- [33] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control*, 8, 338-353.
- [34] Casella, G. and Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference* (Second Edition), Duxbury, Thomson Learning, Pacific Grove, CA.
- [35] Torabi, H. and Behboodan, J. (2007). Likelihood ratio tests for fuzzy hypotheses testing, *Statistical Papers*, 48, 509-522.
- [۳۶] عارفی، محسن (۱۳۹۲). آزمون فرضیه‌های آماری بر اساس یک متر علامت‌دار جدید و تحت داده‌های فازی. گزارش سیزدهمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، ص. ۱-۵.
- [۳۷] عارفی، محسن (۱۳۹۰). روشی جدید برای آزمون فرضیه‌های فازی. سری سیستم‌های فازی محاسبات نرم، جلد ۲ (مباحثی در آمار و احتمال فازی)، ص. ۱۵۳-۱۶۹.
- [۳۸] عارفی، محسن؛ طاهری، سعید محمود (۱۳۸۶). آزمون فرض فازی بر پایه آماره آزمون فازی. گزارش هفتمین کنفرانس سیستم‌های فازی و هو شمند، دانشگاه فردوسی مشهد، ص. ۵۷۵-۵۷۹.
- [۳۹] عارفی، محسن؛ طاهری، سعید محمود (۱۳۸۹). آماره آزمون فازی بر پایه فرضیه‌ها و داده‌های فازی. گزارش دهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه تبریز، ص. ۲۶۴-۲۷۵.
- [۴۰] پرچمی، عباس؛ ماشین‌چی، ماشالله (۱۳۹۰). آزمون فرضیه در محیط فازی بر پایه p -مقدار. سری سیستم‌های فازی محاسبات نرم، جلد ۲ (مباحثی در آمار و احتمال فازی)، ص. ۱۱-۱۸.
- [۴۱] زینلی، زهرا؛ اکبری، محمد قاسم؛ عارفی، محسن (۱۳۹۱). آزمون فرضیه بر اساس داده‌های فازی شهودی و به روش بوت‌استرپ. گزارش یازدهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه علم و صنعت، ص. ۲۵۶-۲۶۶.

- [۴۲] زینلی، زهرا؛ اکبری، محمد قاسم؛ عارفی، محسن (۱۳۹۱). آزمون فرضیه میانگین فازی شهودی بر اساس متر L_p و با استفاده از روش بوتاسترپ. گزارش دوازدهمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران، دانشگاه مازندران، ص. ۸-۱.
- [۴۳] طاهری، سید محمود (۱۳۷۵). آشنایی با نظریه مجموعههای فازی. انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۴۴] طاهری، سید محمود؛ ماشینچی، ماشالله (۱۳۸۷). مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

Archive of SID

A New Approach for Testing Fuzzy Hypotheses Based on p -value

Mohsen Arefi

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran

Abstract

In this paper, a new approach is presented for testing fuzzy hypotheses based on p -value method. In this method, we first formulate the hypotheses of interest by fuzzy sets, and then, the p -value is defined to integrate under the δ -cuts of null fuzzy hypothesis. To compare the proposed p -value with the test significance level, we decide to accept or reject the null fuzzy hypothesis. Finally, the proposed method is employed by some numerical examples.

Keywords: Testing statistical hypothesis, Test statistic, Fuzzy hypothesis, p -value

Mathematics Subject Classification (2010): 03E72, 62F03.

Archive of SID