

## روش شبه خطی کردن موجک هار برای حل مسائل غیرخطی تراسچ و براتو

محمد ضارب نیا<sup>۱</sup> و حسین برندک ایمچه

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۵/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۸/۲۰

**چکیده:** در این مقاله یک روش عددی برای حل مسائل غیرخطی تراسچ و براتو ارائه می‌کنیم. در این روش از فرآیند شبه خطی کردن و تابع پایه‌ای موجک هار برای تبدیل مسائل غیرخطی به دستگاه معادلات جبری خطی استفاده خواهیم کرد. چند مثال عددی آورده شده است و نتایج عددی به دست آمده از روش ارائه شده را با نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی موجود در منابع مختلف مقایسه خواهیم کرد. همچنین نتایج به دست آمده را در قالب جداول و نمودارهایی ارائه کرده و نشان خواهیم داد که حل مسائل غیرخطی تراسچ و براتو به روش شبه خطی کردن موجک هار (HWQ) بسیار کارا، مناسب و مؤثر است.

**واژه‌های کلیدی:** موجک هار، ماتریس عملیاتی، شبه خطی کردن، مسئله‌ی تراسچ، مسئله‌ی براتو.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۳۴A۳۴، ۳۴B۱۵.

### ۱- مقدمه

در چند دهه‌ی گذشته، مطالعه‌ی مسائل غیرخطی به دلیل وجود آن‌ها در سطح وسیعی از کاربردهایشان در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، مهندسی و بسیاری دیگر از شاخه‌های علوم و فناوری و مسائل پایه‌ای، مورد توجه بسیاری محققان از جمله مهندسان و ریاضیدانان قرار گرفته است [۱]. در این مقاله به حل دو نوع از مسائل غیرخطی مهم و معروف به نام‌های تراسچ و براتو با استفاده از تکنیک شبه خطی کردن موجک هار خواهیم پرداخت. روش کار به این صورت است که ابتدا معادله‌ی غیرخطی را با استفاده از فرآیند شبه خطی کردن، خطی سازی می‌کنیم، سپس بالاترین مرتبه‌ی مشتق موجود در معادله را با استفاده از سری موجک هار یکنواخت بسط می‌دهیم و سایر مراتب مشتق را نیز با استفاده از مفهوم انتگرال موجک هار به دست می‌آوریم.

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: zarebnia@uma.ac.ir

یکی از مهم‌ترین و کارآمدترین روش‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل، روش موجک هار است. موجک‌های هار به دلیل داشتن ویژگی‌های تعامد، تقارن و محمل فشردگی یکی از کاربردی‌ترین روش‌ها برای حل معادلات، علی‌الخصوص سیستم‌های دینامیکی هستند. علاوه بر این، مزیت دیگر استفاده از تقریب موجک هار، کاهش تعداد عملیات محاسباتی به دلیل استفاده از تابع پایه‌ای هار می‌باشد. استفاده از موجک‌های هار برای حل معادلات دیفرانسیل اولین بار توسط چن و هاسیو [۲] مطرح شد. فرآیند شبه خطی کردن که کاربرد روش نیوتن رفسون کانتروویچ در فضای تابعی است [۳]، برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی یا معمولی غیرخطی از هر مرتبه‌ای مناسب می‌باشد.

### ۱-۱- مسئله تراسچ

مسئله‌ی مقدار مرزی غیرخطی تراسچ را به صورت زیر در نظر بگیرید [۴-۶]:

$$u''(t) - \gamma \sinh(\gamma u(t)) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad (2)$$

که  $\gamma$  ثابت مثبت است. این مسئله مربوط به تحدید یک ستون پلاسمای توسط فشار تابش است که در [۷] مورد بحث قرار گرفته است. جواب این مسئله بر حسب تابع ضمنی ژاکوبین [۶] به صورت زیر است:

$$u(t) = \frac{\gamma}{\gamma} \sinh^{-1} \left[ \frac{u'(0)}{\gamma} sc \left( \gamma t \mid 1 - \frac{1}{4} (u'(0))^2 \right) \right],$$

که  $u'(0)$  به صورت زیر می‌باشد:

$$u'(0) = \gamma(1-k)^{\frac{1}{2}},$$

در رابطه‌ی بالا ثابت  $k$  جواب معادله‌ی زیر است:

$$\frac{\sinh\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{(1-k)^{\frac{1}{2}}} = sc(\gamma|k).$$

$sc(\gamma|k)$  تابع ضمنی ژاکوبین به صورت  $sc(\gamma|k) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$  می‌باشد که  $\varphi$  و  $\gamma$  به وسیله‌ی

انتگرال زیر باهم رابطه دارند:

$$\gamma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k \sin^2 \theta}} d\theta,$$

و همچنین از [۶] داریم:

$$t \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \left( \frac{16}{1-k} \right) = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{8}{u'(\cdot)} \right),$$

حل عددی مسئلهی تراسچ توسط محققان به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته و به وسیله برخی روش‌ها در [۸-۱۲] حل شده است.

### ۱-۲- مسئله براتو

معادله‌ی غیرخطی معروف دیگر، مسئله‌ی براتو می‌باشد که فرم کلی آن به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u''(t) - \lambda e^{u(t)} = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1,$$

جواب تحلیلی مسئله‌ی براتو به صورت زیر است [۱۳-۱۴]:

$$u(t) = 2 - \ln \left[ \frac{\cosh \left( \frac{\eta}{2} \left( t - \frac{1}{2} \right) \right)}{\cosh \left( \frac{\eta}{4} \right)} \right],$$

که  $\eta$  در  $\eta = \sqrt{2\lambda} \cosh \left( \frac{\theta}{4} \right)$  صدق می‌کند.

مسئله‌ی براتو به ازای  $\lambda = \lambda_c$  دارای جواب یکتا، به ازای  $\lambda > \lambda_c$  فاقد جواب و به ازای  $\lambda < \lambda_c$  دو جواب دارد که نقطه عطف بحرانی  $\lambda_c$  در معادله  $\sinh \left( \frac{\eta_c}{4} \right) = \left( \frac{1}{4} \right) \sqrt{2\lambda_c}$  صدق می‌کند. در [۱۴] نشان داده شده است که نقطه بحرانی  $\lambda_c$  برابر  $\lambda_c = 513840.719/3$  است.

مسئله‌ی براتو به کمک بسیاری از روش‌های عددی و تحلیلی حل و مورد مطالعه قرار گرفته است. روش تجزیه آدومیان توسط وزواز [۱۵] برای به دست آوردن جواب دقیق ارائه شده است. در [۱۶] روش B-اسپلین برای حل این مسئله ارائه شده است. در [۱۷] روش تبدیل لاپلاس برای

حل مسئله‌ی براتو مطرح گردیده است. در مقاله‌ی دیگری [۱۸] روش موجک برای به دست آوردن جواب‌های مسئله به کار گرفته شده است.

در این مقاله در بخش دوم تعاریف مقدماتی از موجک هار ارائه می‌کنیم. در بخش سوم فرآیند شبه خطی کردن و کاربرد موجک هار را برای تقریب مسائل غیرخطی تراسچ و براتو توضیح می‌دهیم. در بخش چهارم همگرایی روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم. کاربرد روش ارائه شده بر روی مسائل تراسچ و براتو را در بخش پنجم مطرح خواهیم کرد. در بخش ششم دقت و کارایی روش با بررسی چندین مثال عددی نشان داده خواهد شد.

## ۲- موجک‌های هار

موجک هار  $h_i(t)$  روی بازه  $[a, b]$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$h_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\gamma_1(i), \gamma_2(i)], \\ -1, & t \in [\gamma_2(i), \gamma_3(i)], \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (3)$$

که در آن

$$\gamma_1(i) = a + 2^k \sigma \Delta \xi, \quad \gamma_2(i) = a + (2^k + 1) \sigma \Delta \xi,$$

$$\gamma_3(i) = a + (2^k + 1) \sigma \Delta \xi, \quad \sigma = \frac{M}{m},$$

عدد صحیح  $J, 0, 1, \dots, J, m = 2^j, j = 0, 1, \dots, J$  نشان دهنده‌ی سطح موجک است. عدد  $J$  تعیین کننده‌ی ماکزیمم سطح تجزیه است. عدد پارامتر انتقال است. فرض می‌کنیم  $M = 2^l$  و

$\Delta \xi = \frac{(b-a)}{(2M)}$  اندیس  $i$  از فرمول  $i = m + k + 1$  محاسبه می‌شود و نشان دهنده‌ی عدد

موجک است. برای موجک هار یکنواخت، روش هم‌محلی موجک کارآمد است. نقاط هم‌محلی

برای موجک‌های هار را به صورت  $t_l = \frac{l-5/0}{2m}$  برای  $l = 1, 2, \dots, 2m$  در نظر می‌گیریم.

در این مقاله انتگرال موجک‌های هار را به عنوان ماتریس عملیاتی در نظر می‌گیریم [۲۰]. بنابراین

ماتریس‌های عملیاتی مرتبه  $2m \times 2m$  را با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۳) به دست می‌آوریم. دو انتگرال اول موجک هار به صورت زیر خواهند بود:

$$\rho_{i,1}(t) = \begin{cases} t - \gamma_1(i), & t \in [\gamma_1(i), \gamma_\tau(i)], \\ \gamma_\tau(i) - t, & t \in [\gamma_\tau(i), \gamma_\tau(i)], \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$\rho_{i,\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \gamma_1(i)], \\ \frac{1}{\tau}(t - \gamma_1(i))^\tau, & t \in [\gamma_1(i), \gamma_\tau(i)], \\ \frac{1}{\tau m^\tau} - \frac{1}{\tau}(\gamma_\tau(i) - t)^\tau, & t \in [\gamma_\tau(i), \gamma_\tau(i)], \\ \frac{1}{\tau m^\tau}, & t \in [\gamma_\tau(i), 1]. \end{cases}$$

در حالت کلی ماتریس‌های عملیاتی  $\rho_{i,\nu}(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho_{i,\nu}(t) = \begin{cases} 0, & t < \gamma_1(i), \\ \frac{1}{\nu!} [t - \gamma_1(i)]^\nu, & t \in [\gamma_1(i), \gamma_\tau(i)], \\ \frac{1}{\nu!} [(t - \gamma_1(i))^\nu - \nu(t - \gamma_\tau(i))^\nu], & t \in [\gamma_\tau(i), \gamma_\tau(i)], \\ \frac{1}{\nu!} [(t - \gamma_1(i))^\nu - \nu(t - \gamma_\tau(i))^\nu + (t - \gamma_\tau(i))^\nu], & t \in [\gamma_\tau(i), 1]. \end{cases}$$

دنباله‌ی توصیف شده  $\{h_i\}_{i=0}^\infty$  در  $L^\tau[a, b]$  یک سیستم متعامد یکه است. ویژگی متعامد بودن به ما اجازه می‌دهد که هر تابع  $\varphi \in L^\tau[a, b]$  را بر حسب سری هار به صورت زیر بسط دهیم:

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i h_i(t) = \alpha_0 h_0(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \alpha_{\tau^j + \kappa} h_{\tau^j + \kappa}(t), \quad t \in [a, b],$$

که

$$\alpha_0 = \int_0^1 h_0(t) \varphi(t) dt, \quad \alpha_{\tau^j + \kappa} = \tau^j \int_0^1 h_{\tau^j + \kappa}(t) \varphi(t) dt.$$

به طور مشابه بالاترین مرتبه مشق را نیز می‌توان بر حسب سری موجک  $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i h_i(t)$  بسط داد. در اینجا برای هدفمان، قطع شده‌ی سری موجک هار را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(t) \approx \sum_{i=0}^m a_i h_i(t), \quad t \in [a, b].$$

### ۳- توصیف روش شبه خطی کردن موجک هار (HWQ)

#### ۳-۱- فرآیند شبه خطی کردن

معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم زیر را

$$u^{(2)}(t) = g(u(t), t), \quad t \in [a, b] \quad (۴)$$

با شرایط مرزی

$$u(a) = \alpha, u(b) = \beta,$$

در نظر بگیرید.  $g$  یک تابع معلوم بر حسب توابع  $u(t)$  است. فرض کنید  $u_0(t)$  تقریب اولیه‌ی تابع  $u(t)$  باشد، به عنوان مثال  $u_0(t) = a$ . با استفاده از سری تیلور، تابع  $g$  را حول تابع  $u_0(t) = a$  به صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$g(u(t), t) = g(u_0(t), t) + (u(t) - u_0(t)) g_{u_0}(u_0(t)(t), t),$$

معادله‌ی فوق یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی است که با حل آن به جواب تقریبی  $u_1(t)$  می‌رسیم. با بسط معادله‌ی (۴) حول تابع  $u_1(t)$  به صورت زیر

$$u^{(2)}(t) = g(u_1(t), t) + (u(t) - u_1(t)) g_{u_1}(u_1(t)(t), t),$$

به یک تقریب سوم برای  $u(t)$  دست می‌یابیم که آن را  $u_2(t)$  می‌نامیم. با ادامه‌ی این فرآیند، به رابطه‌ی تکراری زیر

$$u^{(r+1)}(t) = g(u_r(t), t) + (u(t) - u_r(t)) g_{u_r}(u_r(t)(t), t),$$

با شرایط مرزی  $u_{r+1}(a) = \alpha, u_{r+1}(b) = \beta$  می‌رسیم.

#### ۳-۲- روش HWQ

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه  $n$  زیر را

$$D^{(n)}u(t) = g(u(t), u^{(1)}(t), u^{(2)}(t), u^{(3)}(t), \dots, u^{(n-1)}(t), t), \quad t \in [a, b], \quad (۵)$$

با شرایط مرزی

$$u(a) = a, u^{(1)}(a) = a_1, u^{(2)}(a) = a_2, \dots, u^{(n-1)}(a) = a_{n-1},$$

$$u(b) = \beta_0, u^{(1)}(b) = \beta_1, u^{(2)}(b) = \beta_2, \dots, u^{(n-1)}(b) = \beta_{n-1}$$

در نظر بگیرید که  $D^{(n)}$  عملگر دیفرانسیل معمولی مرتبه  $n$  ام خطی،  $g$  تابع غیرخطی برحسب  $u(t)$  و  $(n-1)$  مشتقات آن  $u^{(s)}(t)$  برای  $s = 0, 1, 2, \dots, n-1$  می باشد.

با استفاده از روش شبه خطی کردن،  $(r+1)$  امین تکرار تقریب برای حل معادله (۵) را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$D^{(n)}u_{r+1}(t) = g(u_r(t), u_r^{(1)}(t), u_r^{(2)}(t), u_r^{(3)}(t), \dots, u_r^{(n-1)}(t), t) + g_u^{(s)}(u_r(t), u_r^{(1)}(t), u_r^{(2)}(t), u_r^{(3)}(t), \dots, u_r^{(n-1)}(t), t) \times \sum_{s=0}^{n-1} (u_{r+1}^{(s)}(t) - u_r^{(s)}(t)), \quad (6)$$

که  $u_r^{(i)} = u_r^{(i)}(t)$  توابع  $g_u^{(s)} = \frac{\partial^s g}{\partial u^s}$  مشتقات تابعی توابع هستند. هر تابع مربع انتگرال پذیر را می توانیم برحسب سری قطع شده موجک هار به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$\varphi(t) \approx \sum_{i=0}^m \alpha_i h_i(t), \quad t \in [a, b]. \quad (7)$$

با انتگرال گرفتن از (۷) و استفاده از شرایط مرزی، می توانیم توابع  $u_{r+1}^{(k)}(t), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  را از معادله ی زیر به دست آوریم:

$$u_{r+1}^{(n-k)}(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i p_{i,k}(t) + \sum_{i=0}^{k-1} \left( u_{r+1}^{(n-k+i)}(\cdot) \times \left( \frac{t^i}{i!} \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

با جایگذاری معادلات (۷) و (۸) در معادله (۶) به دستگاه معادلات جبری خطی زیر می رسیم:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i h_i(t_l) = g(u_r(t_l), u_r^{(1)}(t_l), u_r^{(2)}(t_l), u_r^{(3)}(t_l), \dots, u_r^{(n-1)}(t_l), t_l) + g_u^{(s)}(u_r(t_l), u_r^{(1)}(t_l), u_r^{(2)}(t_l), u_r^{(3)}(t_l), \dots, u_r^{(n-1)}(t_l), t_l) \times \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \left( u_{r+1}^{(n-k+i)}(\cdot) \times \left( \frac{t_l^i}{i!} \right) \right) - \sum_{s=0}^{n-1} u_r^{(s)}(t_l) \right].$$

با حل دستگاه معادلات جبری خطی فوق، ضرایب مجهول  $a_i$  به دست می‌آیند. پس ما می‌توانیم جواب روش شبه خطی کردن موجک هار (HWQ) معادله (۵) را با استفاده از (۸) به دست آوریم.

#### ۴- همگرایی روش موجک هار

تعریف: فرض می‌کنیم  $\varphi(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$  و  $\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i h_i(\xi)$ . خطای متناظر با  $J$  امین سطح ممکن به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰ و ۲۲]:

$$\begin{aligned} e_J(\xi) &= \left| \varphi(\xi) - \varphi_J(\xi) \right| = \left| \varphi(\xi) - \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{\nu^j-1} a_{\nu^j+k} h_{\nu^j+k}(\xi) \right| \\ &= \left| \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu^j-1} a_{\nu^j+k} h_{\nu^j+k}(\xi) \right|. \end{aligned}$$

حال، با استفاده از قضیه زیر می‌توانیم در مورد همگرایی بحث کنیم.

قضیه ۱: فرض کنید  $\varphi(\xi)$  در بازه  $[0, 1]$  در شرط لیپ شیتز صدق کند، یا به عبارتی

$$\exists M > 0, \forall \xi, \zeta \in [0, 1]: |\varphi(\xi) - \varphi(\zeta)| \leq M |\xi - \zeta|,$$

که  $M$  ثابت لیپ شیتز می‌باشد. آنگاه روش موجک هار همگرا است یا به عبارتی اگر  $J \rightarrow \infty$  آنگاه  $e_J(\xi) \rightarrow 0$  و برای  $M = 1$  داریم:

$$e_J(\xi) = O\left(\frac{1}{\nu^{J+1}}\right).$$

همچنین کران خطا برای  $\|e_J(\xi)\|$  را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\|e_J(\xi)\| \leq \frac{M}{\nu^{J+1} \sqrt{3}}.$$

اثبات: برای اثبات به [۲۲] مراجعه شود.

با در نظر گرفتن قضیه ذکر شده می‌توانیم بگوییم که در تقریب سری موجک هار، هرگاه سطح تجزیه  $J$  افزایش یابد آنگاه خطا کاهش می‌یابد. همچنین پیدا کردن تقریب اولیه خوب در روش شبه خطی کردن، مستلزم به دست آوردن همگرایی است. بنابراین با افزایش سطح تجزیه  $J$  و



انتخاب تابع اولیه مناسب به عنوان جواب تقریبی، می توان به همگرایی روش شبه خطی کردن موجک هار دست یافت.

### ۵- کاربرد روش HWQ

مسئله تراسچ: مسئله غیرخطی تراسچ (۱) را با شرایط مرزی (۲) در نظر بگیرید، با استفاده از فرآیند شبه خطی کردن داریم:

$$u_{r+1}^{(\gamma)}(t) - \gamma \sinh(\gamma u_r(t)) - [\gamma^\gamma \cosh(\gamma u_r(t)) \times (u_{r+1}(t) - u_r(t))] = 0, \quad (9)$$

$$u_{r+1}^{(0)}(\cdot) = 0, \quad u_{r+1}^{(1)} = 1.$$

با در نظر گرفتن معادله (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} u_{r+1}^{(\gamma)}(t) = \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i h_i(t), \\ u_{r+1}^{(1)}(t) = \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i p_{i,1}(t) + u_{r+1}^{(1)}(\cdot), \\ u_{r+1}^{(\gamma)}(t) = \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i p_{i,\gamma}(t) + t u_{r+1}^{(1)}(\cdot) + u_{r+1}^{(1)}(\cdot), \end{cases} \quad (10)$$

که

$$u_{r+1}^{(1)}(\cdot) = 1 - \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i C_{i,1}, \quad (11)$$

و

$$C_{i,\gamma} = \int_0^1 p_{i,\gamma}(t') dt'.$$

با جایگذاری معادلات (۱۰) و (۱۱) در معادله (۹)، دستگاه معادلات جبری خطی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i h_i(t_l) - \gamma \sinh(\gamma u_r(t_l)) - \gamma^\gamma \cosh(\gamma u_r(t_l)) \times \left( \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i p_{i,\gamma}(t_l) \right. \\ & \left. + t_l \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i C_{i,\gamma} - u_r(t_l) \right) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

با حل دستگاه معادلات جبری خطی (۱۲) و معلوم شدن ضرایب مجهول  $a_i$  جواب مسئله تراسچ را به دست می‌آوریم.

**مسئله براتو:** مسئله غیر خطی براتو را به صورت زیر

$$u''(t) + \lambda e^{u(t)} = 0, \quad t \in [0, 1],$$

با شرایط اولیه  $u(0) = 0$  و  $u'(0) = 0$  یا با شرایط مرزی زیر:

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad (13)$$

در نظر گیرید. برای این مسئله، فرمول نهایی بعد از اعمال روش شبه خطی کردن موجک هار به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i h_i(t_l) + \lambda e^{u_r(t_l)} + \lambda e^{u_{r+1}(t_l)} \left( \sum_{i=0}^{\gamma m} \alpha_i p_{i,r}(t_l) + t_l u_{r+1}^{(i)}(\cdot) + u_{r+1}(\cdot) - u_r(t_l) \right) = 0,$$

$$u_{r+1}^{(i)}(\cdot) = 0, \quad u_{r+1}(\cdot) = 0,$$

و برای شرایط مرزی (۱۳)،  $u_{r+1}^{(i)}(\cdot) = 0$  طبق فرمول (۱۱) خواهد بود.

## ۶- مثال عددی

در این بخش، به منظور نشان دادن کارایی و دقت روش HWQ، مثال‌های زیر را بررسی خواهیم کرد. نتایج عددی به دست آمده به وسیله روش شبه خطی کردن موجک هار را با نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی و عددی موجود در منابع مختلف، مقایسه و در قالب نمودار و جدول ارائه خواهیم کرد. مثال‌ها به ازای مقادیر مختلف سطح تجزیه  $J$  حل شده‌اند. توجه کنید که نتایج حاصله به وسیله برنامه‌نویسی Mathematica-10 به دست آمده‌اند.

**مثال ۱:** مسئله تراسچ (۱) را به ازای  $\gamma = 0/5$ ،  $1$  و  $5$  در نظر بگیرید.

در جدول ۱ و ۲ نتایج عددی به دست آمده در نقاط  $t = 0/1, 0/2, \dots, 0/9$  به ترتیب برای  $\gamma = 0/5$  و  $\gamma = 1$ ، با جواب‌های دقیق و روش‌های عددی دیگر مقایسه شده‌اند. در جدول ۳ نتایج عددی به دست آمده به وسیله روش HWQ در نقاط  $t = 0/0, 0/2, 0/4, 0/8, 0/9, 1$  با نتایج عددی روش اسپلین [۱۲] و جواب کد فورترن [۲۴] که TWPBVP نامیده می‌شود مقایسه شده است. همچنین در جدول ۴ آنالیز خطا با در نظر گرفتن ماکزیمم خطای مطلق و خطای مجانبی به صورت عددی به ازای  $J$ ‌ها و  $\gamma$ ‌های مختلف نشان داده شده است.

جدول (۱): نتایج عددی مسئله تراسچ به ازای  $\gamma = 0.5$  و  $J = 4$ .

t	Exact	Laplace	Error	Spline	Error	HWQ	Error
0/1	0/095176	0/09594	$7/7 \times 10^{-4}$	0/09594	$7/7 \times 10^{-4}$	0/09529	$1/2 \times 10^{-4}$
0/2	0/190633	0/19213	$1/5 \times 10^{-3}$	0/19212	$1/5 \times 10^{-3}$	0/19001	$6/2 \times 10^{-4}$
0/3	0/286653	0/28879	$2/1 \times 10^{-3}$	0/28879	$2/1 \times 10^{-3}$	0/28517	$1/5 \times 10^{-3}$
0/4	0/382522	0/38618	$2/7 \times 10^{-3}$	0/38618	$2/7 \times 10^{-3}$	0/38167	$1/9 \times 10^{-3}$
0/5	0/481537	0/48455	$3/0 \times 10^{-3}$	0/48454	$3/0 \times 10^{-3}$	0/46730	$1/4 \times 10^{-2}$
0/6	0/581002	0/58413	$3/1 \times 10^{-3}$	0/58413	$3/1 \times 10^{-3}$	0/58183	$8/2 \times 10^{-4}$
0/7	0/682235	0/68520	$3/0 \times 10^{-3}$	0/68520	$3/0 \times 10^{-3}$	0/68558	$3/3 \times 10^{-3}$
0/8	0/785571	0/78802	$2/4 \times 10^{-3}$	0/78801	$2/4 \times 10^{-3}$	0/79110	$5/5 \times 10^{-3}$
0/9	0/891367	0/89285	$1/5 \times 10^{-3}$	0/89285	$1/5 \times 10^{-3}$	0/89677	$5/4 \times 10^{-3}$

جدول (۲): نتایج عددی مسئله تراسچ به ازای  $\gamma = 1$  و  $J = 4$ .

t	Exact	Laplace	Error	Spline	Error	HWQ	Error
0/1	0/081797	0/084663	$2/9 \times 10^{-3}$	0/08465	$2/8 \times 10^{-3}$	0/08465	$2/9 \times 10^{-4}$
0/2	0/164530	0/170175	$5/9 \times 10^{-3}$	0/17016	$5/6 \times 10^{-3}$	0/16736	$2/8 \times 10^{-3}$
0/3	0/249167	0/257399	$8/2 \times 10^{-3}$	0/25737	$8/2 \times 10^{-3}$	0/25151	$2/3 \times 10^{-3}$
0/4	0/336732	0/347230	$1/0 \times 10^{-2}$	0/34720	$1/0 \times 10^{-2}$	0/33962	$2/9 \times 10^{-3}$
0/5	0/428347	0/440609	$1/2 \times 10^{-2}$	0/44057	$1/2 \times 10^{-2}$	0/43492	$6/6 \times 10^{-3}$
0/6	0/525274	0/538546	$1/3 \times 10^{-2}$	0/53850	$1/3 \times 10^{-2}$	0/53599	$1/1 \times 10^{-2}$
0/7	0/628971	0/642142	$1/3 \times 10^{-2}$	0/64210	$1/3 \times 10^{-2}$	0/64417	$1/5 \times 10^{-2}$
0/8	0/741168	0/752622	$1/1 \times 10^{-2}$	0/75258	$1/1 \times 10^{-2}$	0/75887	$1/8 \times 10^{-2}$
0/9	0/863970	0/871374	$7/4 \times 10^{-3}$	0/87134	$7/4 \times 10^{-3}$	0/87837	$1/4 \times 10^{-2}$

جدول (۳): نتایج عددی مسئله ترانج به ازای  $\gamma = 1$  و  $J = 4$ .

[Error]	HWQ	[Error]	B-Splin	Fortran cod	t
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰
۰/۰۰۰۴۲	۰/۰۱۵۰۱۸۶۳	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۱۰۰۲۰۲۷	۰/۰۱۰۷۵۳۴۲	۰/۲
۰/۰۰۰۱۷	۰/۰۳۱۴۵۲۹۲	۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۳۰۹۹۷۹۳	۰/۰۳۳۲۰۰۵۱	۰/۴
۰/۰۰۲۶	۰/۲۸۴۲۷۹۰۲	۰/۰۱۴	۰/۲۴۱۷۰۴۹۶	۰/۲۵۸۲۱۶۶۴	۰/۸
۰/۰۰۲۶	۰/۴۲۸۷۵۴۶۹	۰/۰۳	۰/۴۲۴۶۱۸۳۰	۰/۴۵۵۰۶۰۳۴	۰/۹
۰/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰

جدول (۴): نتایج عددی مسئله ترانج.

Max.  Error  $\gamma = 5$	Max.  Error  $\gamma = 1$	Max.  Error  $\gamma = 0.5$	Asymptotic error	J
۰/۱۴	۰/۰۲	۰/۰۱۳	۰/۱۲	۲
۰/۰۵۳	۰/۰۱۷	۰/۰۱۳	۰/۰۶۲	۳
۰/۰۲۶	۰/۰۱۷	۰/۰۱۴	۰/۰۳۱	۴
۰/۰۴۴	۰/۰۱۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۶	۵
۰/۰۵۲	۰/۰۱۸	۰/۰۱۴	۰/۰۰۷۸	۶

مثال ۲: مسئله مقدار مرزی براتو زیر را

$$u''(t) - \pi^2 e^{u(t)} = 0,$$

با شرایط مرزی  $u(0) = u(1) = 0$ , در نظر بگیرید که  $u(t) = -\ln(1 - \sin \pi t)$  جواب دقیق است [۱۵].

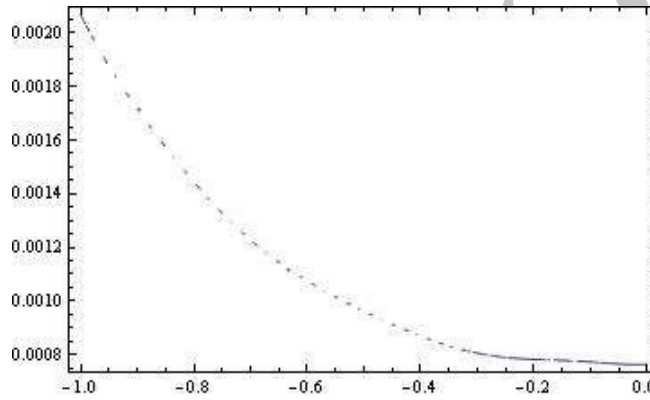
جدول (۵): نتایج عددی برای مثال ۲ به ازای  $J = 4$ .

[Error]	HWQ	[Error]	OHAM[۲۳]	Exact	t
۰/۰۰۰۰۸	-۰/۵۹۱۹۷۸	۰/۰۰۰۲۳	-۰/۵۹۰۵۰۵۸۹	-۰/۵۹۲۷۸۳۶۰	-۰/۳
۰/۰۰۰۰۷۸	-۰/۴۶۱۵۵۸	۰/۰۰۰۰۳۹	-۰/۴۶۱۹۵۰۹۲	-۰/۴۶۲۳۴۰۱۲	-۰/۲
۰/۰۰۰۰۷۷	-۰/۲۶۸۵۰۴	۰/۰۰۰۰۱۱	-۰/۲۶۹۲۶۵۸۵	-۰/۲۶۹۲۷۶۴۷	-۰/۱
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	-۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰
۰/۰۰۰۰۰۵	۰/۳۶۹۵۸۹	۰/۰۰۰۰۰۴۷	۰/۳۶۹۵۹۳۲۳	۰/۳۶۹۶۴۰۰۵	۰/۱
۰/۰۰۰۰۱	۰/۸۸۵۱۲۳	۰/۰۰۰۰۲	۰/۸۸۴۲۷۲۱۸	۰/۸۸۶۲۱۰۸۳	۰/۲
۰/۰۰۰۰۳۷	۱/۶۵۱۸۸۰	۰/۰۰۰۰۲۵	۱/۶۳۰۲۲۸۹۵	۱/۶۵۵۵۷۰۸۳	۰/۳

جواب محاسبه شده با روش شبه خطی کردن موجک هار (HWQ) با نتایج حاصل از روش [۲۳] OHAM و جواب دقیق در جدول ۵ مقایسه شده‌اند. همچنین نمودار خطای مطلق روش HWQ در شکل ۱ آورده شده است. همچنین در جدول ۶ آنالیز خطا به صورت عددی به ازای  $J$  های مختلف نشان داده شده است.

جدول (۶): نتایج عددی مسئله براتو.

Max.  Error  Exa. 4	Max.  Error  Exa. 3	Max.  Error  Exa. 2	Asymptotic error	$J$
۰/۰۰۴۵	۰/۰۶۲	۰/۰۳۶	۰/۱۲	۲
۰/۰۰۰۷	۰/۰۲۷	۰/۰۰۶	۰/۰۶۲	۳
۰/۰۰۰۷۶	۰/۰۱۸	۰/۰۰۱۸	۰/۰۳۱	۴
۰/۰۰۰۷۸	۰/۰۱۶	۰/۰۰۳۷	۰/۰۱۶	۵
۰/۰۰۰۷۸	۰/۰۱۵	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۷۸	۶



شکل (۱): نمودار خطای مطلق برای مثال ۲ به ازای  $J = ۴$ .

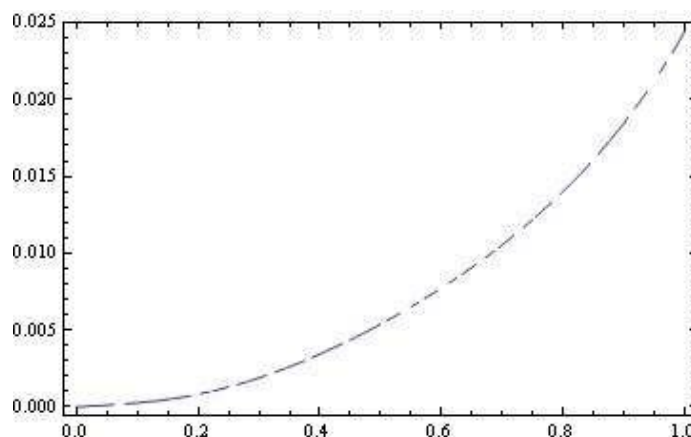
مثال ۳: معادله‌ی براتو زیر را

$$u''(t) + \pi^2 e^{-u(t)} = 0, \quad 0 < t < 1,$$

با شرایط مرزی  $u(0) = u(1) = 0$  در نظر بگیرید که  $u(t) = \ln(1 + \sin(1 + \pi t))$  جواب دقیق است [۱۵].

خطای مطلق محاسبه شده با روش HWQ در شکل ۲ نشان داده شده است. همچنین در جدول ۶ آنالیز خطا با در نظر گرفتن ماکزیمم خطای مطلق و خطای مجانبی به صورت عددی به ازای  $J$  های مختلف نشان داده شده است.

نتایج عددی حاصل از روش HWQ، روش [۲۳] OHAM و جواب دقیق مسئله در جدول ۷ مقایسه شده‌اند. همچنین، جواب معادله‌ی (۱۴) با استفاده از روش شبه خطی کردن موجک هار به ازای  $\lambda = 0/5, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5$  در شکل ۳ نشان داده شده است. همچنین در جدول ۶ آنالیز خطا با در نظر گرفتن ماکزیمم خطای مطلق و خطای مجانبی به صورت عددی به ازای  $J$  های مختلف نشان داده شده است.

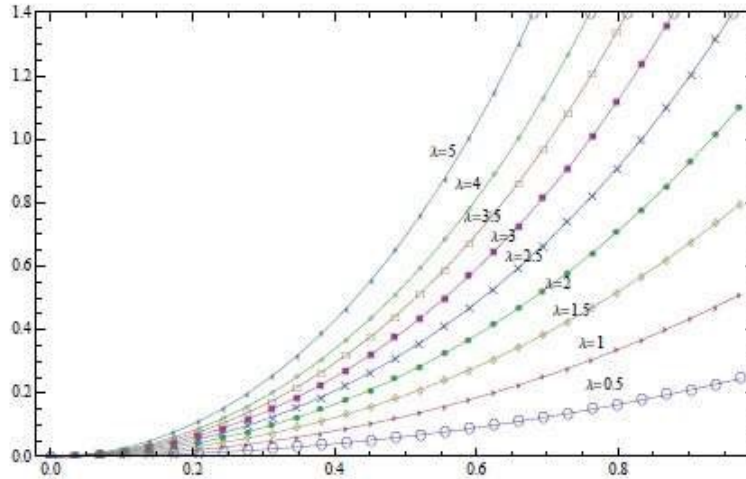


شکل (۲): نمودار خطای مطلق برای مثال ۳ به ازای  $J = 4$ .

مثال ۴: مسئله براتو را به صورت زیر

$$u''(t) - 2e^{-u(t)} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (14)$$

با شرایط اولیه  $u(0) = u'(0) = 0$  در نظر می‌گیریم که  $u(t) = -\ln \cos(t)$  جواب دقیق است [۱۵].



شکل (۳): نمودار نتایج عددی برای مثال ۴ به ازای  $J = 6$ .

جدول (۷): نتایج عددی برای مثال ۴ به ازای  $J = 6$ .

Error	HWQ	Error	OHAM[۲۳]	Exact	t
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰
$5/3 \times 10^{-8}$	۰/۰۱۰۰۱۶۸	$6/4 \times 10^{-7}$	۰/۰۱۰۰۱۶۰	۰/۰۱۰۰۱۶۷	۰/۱
$1/7 \times 10^{-7}$	۰/۰۴۰۲۶۹۷	$9/7 \times 10^{-6}$	۰/۰۴۰۲۵۹۸	۰/۰۴۰۲۶۹۵	۰/۲
$3/9 \times 10^{-7}$	۰/۰۹۱۳۸۲۹	$4/5 \times 10^{-5}$	۰/۰۹۱۳۳۸۰	۰/۰۹۱۳۸۳۳	۰/۳
$7/4 \times 10^{-6}$	۰/۱۶۴۴۵۱۰	$1/3 \times 10^{-4}$	۰/۱۶۴۳۳۰۹	۰/۱۶۴۴۵۸۰	۰/۴
$4/5 \times 10^{-5}$	۰/۲۶۱۱۲۳۰	$2/7 \times 10^{-4}$	۰/۲۶۰۸۹۹۸	۰/۲۶۱۱۶۸۴	۰/۵
$1/9 \times 10^{-4}$	۰/۳۸۳۷۳۹۰	$4/8 \times 10^{-4}$	۰/۳۸۳۴۴۶۶	۰/۳۸۳۹۳۰۳	۰/۶
$6/2 \times 10^{-4}$	۰/۵۳۵۵۴۹۰	$8/4 \times 10^{-4}$	۰/۵۳۵۳۳۴۷	۰/۵۳۶۱۷۱۵	۰/۷
$1/6 \times 10^{-3}$	۰/۷۲۱۰۹۸۰	$1/6 \times 10^{-3}$	۰/۷۲۱۱۸۰۹	۰/۷۲۲۷۸۱۴	۰/۸
$3/9 \times 10^{-3}$	۰/۹۴۶۹۸۱۰	$3/6 \times 10^{-3}$	۰/۹۴۷۲۳۵۱	۰/۹۵۰۸۸۴۸	۰/۹
$7/8 \times 10^{-3}$	۱/۲۲۳۴۰۰	$9/4 \times 10^{-3}$	۱/۲۲۱۸۶۱۴	۱/۲۳۱۲۵۲۹	۱/۰

## ۷- نتیجه گیری

روش ارائه شده برای حل مسائل تراسچ و براتو مورد استفاده قرار گرفت. نتایج به دست آمده با جواب دقیق و دیگر روش‌های عددی مقایسه شدند. همچنین کارایی و مؤثر بودن روش با آوردن مثال‌هایی نشان داده شد.

## منابع

- [1] Scott, A. (2005), *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, New York.
- [2] Chen, C. and Hsiao, C. (1997), Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems. *IEEE Proc. Control Theory Appl.*, **144**, 87-94.
- [3] Bellman, R.E. and Kalaba, R.E. (1965), *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*, American Elsevier Pub.Co. New York.
- [4] Abramowitz, M. and Stegun, I. (1972), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- [5] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G. (1953), *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, NY, USA.
- [6] Roberts, S.M. and Shipman, J.S., (1976), On the closed form solution of Troesch's problem, *Journal of Computational Physics*, **21**, 291-304.
- [7] Weibel, E.S. (1959), On the confinement of a plasma by magnetostatic fields. *Phys. Fluids.*, **2**, 52-56.
- [8] Mirmoradi, S.H., Hosseinpour, I., Ghanbarpour, S. and Barari, A. (2009), Application of an approximate analytical method to nonlinear Troesch's problem, *Appl. Math. Sci.*, **3**, 1579-1585.
- [9] Feng, X., Mei, L. and He, G. (2007), An efficient algorithm for solving Troesch's problem. *Appl. Math. Comput.*, **189**, 500-507.
- [10] Chang, S.H. (2010). Numerical solution of Troesch's problem by simple shooting Method, *Appl. Math. Comput.*, **216**, 3303-3306.
- [11] Zarebnia, M. and Sajjadian, M. (2012), The sinc-Galerkin method for solving Troesch's problem, *Math. Comput. Model.*, **56**, 218-228.
- [12] Kouibia, A., Pasadas, M., Belhaj, Z. and Hananel, A. (2015), The variational spline method for solving Troesch's problem, *Neural Comput. Applic.*, **53**, 868-879.
- [13] Bratu, G. (1914), Sur les equation integrals non-lineaires, *Bull. Math. Soc. France.*, **42**, 113-142.



- [14] Ascher, U.M., Matheij, R.M. and Russel, R.D. (1995), *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*, SIAM, Philadelphia, PA.
- [15] Wazwaz, A.M. (2005), Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, *Appl. Math. Comput.*, **166**, 652-663.
- [16] Caglar, H., Caglar, N., Ozer, M., Valaristos, A. and Anagnostopoulos, A.N. (2010), B-spline method for solving Bratu's problem, *Inter. J. Comput. Mathem.*, **87**, 1885-1891.
- [17] Khuri, S.A. (2004), A new approach to Bratu's problem, *Appl. Math. Comput.*, **147**, 131-136.
- [18] Liu, X., Zhou, Y., Wang, X. and Wang, J. (2013), A wavelet method for solving a class of nonlinear boundary value problems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **18**, 1939-1948.
- [19] Lepik, U. (2011), Solving PDEs with the aid of two-dimensional Haar wavelets, *Compu. Math. Appl.*, **61**, 1873-1879.
- [20] Kaur, H., Mittal, R.C. and Mishra, V. (2014), Haar wavelet solutions of nonlinear oscillator equations, *Appl. Math. Model.*, **38**, 4958-4971.
- [21] Kaur, H., Mittal, R.C. and Mishra, V. (2011), Haar wavelet quasilinearization approach for solving nonlinear boundary value problems, *Am. J. Comput. Math.*, **3**, 176-182.
- [22] Saeedi, H., Mollahasani, N., Moghadam, M.M. and Chuev, G.N. (2011), An operational Haar wavelet method for solving fractional Volterra integral equations, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **21**, 535-547.
- [23] Darwish, M.A. and Kashkari, B.S. (2014), Numerical Solutions of Second Order Initial Value Problems of Bratu-Type via Optimal Homotopy Asymptotic Method, *Am. J. Comput. Math.*, **4**, 47-54.
- [24] Khuri, S.A. and Sayfy, A. (2011), Troesch's problem: a B-spline collocation approach, *Math. Comput. Model.*, **54**, 1907-1918.

## Haar Wavelet Quasilinearization Method for Solving Nonlinear Troesch's and Bratu's Problems

Mohammad Zarebnia and Hosein Barandak Imchek

Department of Mathematics and Applications, University of Mohaghegh  
Ardabili, Ardabil, Iran.

### Abstract

In this paper, we present a numerical method for solving nonlinear Troesch's and Bratu's problems. In this method, we will use the quasi-linearization process and the Haar wavelet basis function to convert nonlinear problems into a set of linear algebraic equations. Several examples are given and we will compare the obtained numerical results with the results of analytical and numerical methods in the literature. Also numerical results are given in tables and figures and it is shown that the Haar wavelet quasi linearization (HWQ) approach is very attractive, convenient and effective.

**Keywords:** Haar wavelet; Operational matrix; Quasi linearization; Troesch's problem; Bratu's problem.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 34A34, 34B15.

Archive of SID