تعمیمی از مدل دلتا شوک

محمد حسین پورسعید[۱]

گروه آمار، دانشگاه لرستان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۵/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۲۵

چکیده: در مدل دلتا شوک، یک سیستم از کار می‌افتد هرگاه فاصله زمانی بین دو شوک متوالی کمتر از مقدار از پیش تعیین شده‌ای مانند δ باشد که این سطح بحرانی می‌تواند به زمان بازیابی سیستم تعبیر شود. در این مقاله، با فرض آن‌که سیستم در معرض شوک‌هایی قرار دارد که در طول زمان به‌طور تصادفی رخ می‌دهند، تعمیمی از مدل دلتا معرفی می‌شود. در مدل جدید، مقادیر δ_1 و δ_2 دو سطح بحرانی هستند به‌طوری‌که هرگاه فاصله زمانی بین دو شوک متوالی بیشتر از δ_2 است، به سیستم هیچ‌گونه آسیبی نمی‌رسد و *به‌محض* آن‌که فاصله زمانی کمتر از δ_1 شود، سیستم از کار می‌افتد. همچنین سیستم با احتمالی مانند θ *خراب می‌شود هرگاه* فاصله زمانی بین دو شوک متوالی بین δ_1 و δ_2 قرار گیرد. ازاین‌رو، سیستم در مواجهه با بعضی از فواصل، رفتاری غیرقطعی را از خود نشان می‌دهد. در این مقاله، توزیع فواصل زمانی بین شوک ها به‌صورت دلخواه در نظر گرفته شده و تابع بقاء، تبدیل لاپلاس و گشتاورهای مرتبه اول و دوم طول عمر سیستم تحت این مدل، محاسبه و به تعمیمی از مسئله نیز اشاره می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تابع بقاء، دلتا شوک مدل، توزیع بین ورودی‌ها.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰): ۹۰B۲۵، ۶۲N۰۵.

۱- مقدمه

بسیاری از سیستم‌ها (و یا مؤلفه‌های آن‌ها) در معرض شوک‌هایی قرار دارند که در محیط پیرامون رخ می‌دهند. اگر شوک‌ها در طول زمان به‌طور تصادفی رخ دهند، محاسبه احتمال سالم بودن سیستم در زمانی مانند t و یا متوسط طول عمر آن، اهمیتی اساسی دارند که در نظریه شوک

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: poursaeed.m@lu.ac.ir

مدل بررسی می‌شوند. شوک مدل‌ها در بیمه، تحلیل بقا و تجارت، کاربرد گسترده‌ای دارند و در نظریه قابلیت اعتماد نیز دارای جایگاه ویژه‌ای هستند.

در این مدل‌ها، فرض می‌شود که سیستم در معرض شوک‌هایی قرار دارد که مقدار و زمان وقوع آن‌ها تصادفی است و خرابی سیستم به میزان آسیب حاصله از شوک‌ها و یا فاصله زمانی بین آن‌ها بستگی دارد. بنابراین، مدل بندی شوک‌ها با توجه به معیار خرابی سیستم و همچنین ارتباط بین عوامل مؤثر بر آن، صورت می‌گیرد.

اگر Y_n مقدار n-امین شوک، X_n زمان بین $(n-۱)$-امین و n-امین شوک، $N(t)$ تعداد شوک‌های رخ داده تا زمان t و T را نیز طول عمر سیستم بدانیم، آنگاه در مدل شوک غایی[۱]، سیستم از کار می‌افتد هرگاه مقدار یک شوک از سطح داده شده z بگذرد. بدین معنی که

$$T \le t \Leftrightarrow Max\{Y_n : ۱ \le n \le N(t)\} > z.$$

در مدل شوک تجمعی[۲]، به‌محض این‌که مجموع شوک‌ها از سطح داده شده z بگذرد، سیستم خراب می‌شود.

$$T \le t \Leftrightarrow \sum_{n=۱}^{N(t)} Y_n > z$$

و در مدل شوک گردشی[۳]، اگر تعداد شوک‌های متوالی بحرانی، از سطح داده شده k بگذرد، سیستم از کار می‌افتد،

$$T \le t \Leftrightarrow Min\{ n : Y_{n-j} > s, j = ۰,...,k-۱\} \le N(t)$$

که در آن $s \ge ۰$، مقداری تعیین شده برای بحرانی شدن یک شوک است.

در مدل دلتا شوک[۴]، هرگاه فاصله[۵] بین دو شوک متوالی کمتر از سطح از پیش تعیین شده δ باشد، سیستم خراب می‌شود،

$$T \le t \Leftrightarrow Min\{X_n : ۱ \le n \le N(t)\} < \delta .$$

1- Extreme shock model
2- Cumulative shock model
3- Run shock model
4- δ -Shock model
5- Inter arrival

این مدل در انبارداری، بیمه و قابلیت اعتماد سیستم‌ها کاربرد دارد. برای مثال، در بیمه و یا مدل‌بندی یک سیستم صف‌بندی، متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots$ نشان‌دهنده زمان‌های بازپرداخت و یا مدت زمان انتظار بین ورود مشتریان متوالی است.

در معرفی و یا تعمیم مدل‌های فوق‌الذکر، مطالعات بسیاری توسط افرادی مانند لی [۱]، سومیتا و شانتی کومار [۲]، آون و گاردر [۳]، گات [۴]، مالور و امی [۵]، وانگ و ژانگ [۶]، لی و کونگ [۷]، لی و ژائو [۸] و نیز، چا و فینکلشتاین [۹] صورت گرفته است. اخیراً اریلماز و بایروموگلو [۱۰] با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت برای فاصله بین شوک‌ها در مدل دلتا شوک و همچنین پرورده و بالاکریشنان [۱۱]، با در نظر گرفتن مدلی ترکیبی، تحقیقاتی انجام داده‌اند.

در این مقاله با در نظر گرفتن مدل دلتاشوک و توزیع دلخواه برای فواصل بین شوک‌ها و همچنین لحاظ کردن رفتاری غیرقطعی برای سیستم تحت شوک، تعمیمی از مدل معمولی ارائه می‌شود. تابع بقاء، تبدیل لاپلاس و گشتاورهای مرتبه اول و دوم طول عمر سیستم، محاسبه شده و نشان داده می‌شود که مدل دلتاشوک معمولی را می‌توان حالتی خاص از مدل معرفی شده دانست.

بنابراین، در بخش دوم مقاله به تشریح سیستم پرداخته می‌شود و بعضی از ویژگی‌های آن نیز، در بخش سوم بررسی می‌گردند.

۲- تشریح سیستم

طرح مسئله در قالب یک مثال می‌تواند بیان شود. فرض کنید که جهت انجام امور مشتریان در یک باجه بانکی، ۲۰ دقیقه زمان کافی است اما در ۱۰ درصد موارد، به دلایل مختلفی نظیر بالا بودن حجم کار مشتری یا کوتاهی متصدی باجه و غیره، ۲۰ تا ۲۵ دقیقه زمان مورد نیاز است؛ بنابراین، اگر فاصله زمانی بین ورود مشتریان کمتر از ۲۰ دقیقه باشد، سرویس‌دهی مشتریان با مشکل روبرو می‌شود، اما اگر این فاصله بیش از ۲۵ دقیقه شود، مشکلی وجود نخواهدداشت. همچنین اگر فاصله زمانی بین ورودهای متوالی بین ۲۰ تا ۲۵ دقیقه باشد، در ۱۰ درصد موارد، سرویس‌دهی و انجام امور با اخلال مواجه خواهد شد.

اگر ورود مشتری را شوک بدانیم آنگاه اخلال در سرویس‌دهی را نیز می‌توان خرابی در سیستم تعبیر کرد که جهت مدل‌بندی مسئله بایستی از مدل دلتا شوک استفاده نمود. ولی نظر به این‌که در مدل دلتا شوک معمولی، عملکرد سیستم در مواجهه با شرایط بینابینی لحاظ نشده، ضرورت معرفی مدلی تعمیم یافته، منطقی به‌نظر می‌رسد.

در حالت کلی فرض کنید که سیستم در معرض دنباله‌ای از شوک‌ها قرار دارد که در طول زمان به‌طور تصادفی رخ می‌دهند و δ_1 و δ_2 نیز دو سطح بحرانی هستند به‌طوری‌که $0 < \delta_1 < \delta_2$. اگر

فاصله زمانی بین شوک‌های متوالی بیشتر از δ_2 باشد، سیستم توان و امکان بازیابی خود را داشته و به آن آسیبی نمی‌رسد و هرگاه فاصله زمانی بین دو شوک متوالی کمتر از δ_1 شود، سیستم از کار می‌افتد. ازاین‌رو، فواصل زمانی کمتر از δ_1 و یا بیشتر از δ_2 را به ترتیب فواصل "بحرانی" و "غیر بحرانی" نامیم. همچنین فرض می‌شود که اگر فاصله زمانی بین دو شوک متوالی بین $[\delta_1,\delta_2]$ قرار گیرد، سیستم مستقل از فواصل زمانی بین شوک‌ها با احتمالی مانند θ خراب شود. لذا فواصل زمانی بین $[\delta_1,\delta_2]$ را نیز می‌توان فواصل "محتملا بحرانی" دانست.

جهت مدل‌بندی سیستم، زمان انتظار تا اولین شوک را نیز به‌طور قراردادی، به‌عنوان فاصله زمانی بین دو شوک متوالی در نظر می‌گیریم. فواصل زمانی بین شوک‌های متوالی را با متغیرهای تصادفی مستقل $X_1,X_2,...$ نشان داده که دارای توزیع مشترک و دلخواه F $(F(0)=0)$ هستند. از طرفی، سیستم در مواجهه با یک فاصله محتملا بحرانی، با احتمال θ خراب می‌شود. ازاین‌رو، متناظر با هر فاصله محتملا بحرانی، یک آزمایش برنولی و یا یک متغیر تصادفی برنولی با احتمال موفقیت θ، در نظر می‌گیریم. بنابراین، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع برنولی با احتمال موفقیت θ را نیز به‌صورت $Y_1,Y_2,...$ در نظر گرفته، به‌طوری‌که مستقل از $X_1,X_2,...$ هستند.

تعداد فواصل زمانی غیربحرانی و تعداد فواصل زمانی محتملا بحرانی که سیستم، قبل از آخرین فاصله زمانی منجر به خرابی، با آن‌ها مواجه می‌شود را به ترتیب با N_1 و N_2 نشان می‌دهیم که در این‌صورت، تعداد فواصل زمانی بین شوک‌های متوالی تا خرابی سیستم برابر با $N=N_1+N_2+1$ خواهد بود. بنابراین، اگر طول عمر سیستم را با T_θ نشان دهیم آنگاه $T_\theta=\sum_{i=1}^{N_1+N_2+1}X_i$. در این‌صورت، N_1، تعداد مواردی از X_i ها که بزرگ‌تر از δ_2 هستند و N_2 نیز، تعداد مواردی از X_i ها هستند که بین δ_1 و δ_2 قرار دارند (یادآوری می‌شود که تعداد مواردی از Y_i ها که برابر با صفر هستند، نیز برابر با N_2 خواهد بود). با توجه به این‌که، $X_{N_1+N_2+1}$ ، آخرین فاصله زمانی است که سیستم در مواجهه با آن خراب می‌شود، لذا بایستی داشته باشیم، $X_{N_1+N_2+1}<\delta_1$ یا $\left(\delta_1\le X_{N_1+N_2+1}\le\delta_2,Y_{N_1+N_2+1}=1\right)$.

در بخش بعد، برخی از ویژگی‌های سیستم تحت این مدل بررسی می‌شود.

۳- ویژگی‌های سیستم

درستی روابط معرفی شده در لم زیر را می‌توان با توجه به مطالب بخش پیشین، نشان داد.

لم ۱:

$$P\left(N_{1}=n_{1},N_{2}=n_{2}\right)=\binom{n_{1}+n_{2}}{n_{1}}\left(\bar{F}\left(\delta_{2}\right)\right)^{n_{1}}\left[\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\left(1-\theta\right)\right]^{n_{2}} \times\left[\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)\right],\quad n_{1},n_{2}=0,1,2,\ldots \tag{1}$$

$$P\left(N_{1}=n_{1}\right)=\left(\frac{\bar{F}\left(\delta_{2}\right)}{\bar{F}\left(\delta_{2}\right)+\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)}\right)^{n_{1}} \times\left[\frac{\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)}{\bar{F}\left(\delta_{2}\right)+\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)}\right],\quad n_{1}=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

$$P\left(N_{2}=n_{2}\right)=\left(\frac{\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\left(1-\theta\right)}{F\left(\delta_{2}\right)}\right)^{n_{2}} \times\left[\frac{\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)}{F\left(\delta_{2}\right)}\right],\quad n_{2}=0,1,2,\ldots \tag{3}$$

$$P\left(N=n\right)=\left\{1-\left[\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)\right]\right\}^{n-1} \times\left[\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)\right],\quad n=1,2,\ldots \tag{4}$$

نتیجه ۱: با توجه به (۱) تا (۴)، متغیرهای تصادفی N_1 ، N_2 و N ، دارای توزیع هندسی هستند و متوسط تعداد شوک‌های وارده بر سیستم تا زمان خرابی نیز برابر است با:

$$E\left(N\right)=\frac{1}{\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\theta+F\left(\delta_{1}\right)}. \tag{5}$$

قضیه ۱: اگر فواصل زمانی بین شوک‌های متوالی مستقل از هم و دارای توزیع مشترک F باشند، آنگاه تابع بقاء سیستم برابر است با:

$$P\left(T_{\theta}>t\right)=\sum_{n_{1}=0}^{\infty}\sum_{n_{2}=0}^{\infty}\binom{n_{1}+n_{2}}{n_{1}}\left(\bar{F}\left(\delta_{2}\right)\right)^{n_{1}}\left[\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)\left(1-\theta\right)\right]^{n_{2}} \times\left\{\int_{0}^{\delta_{1}}P\left(S_{n_{1}}^{*}+S_{n_{2}}^{**}>t-x\right)dF\left(x\right)+\theta\left(F\left(\delta_{2}\right)-F\left(\delta_{1}\right)\right)P\left(S_{n_{1}}^{*}+S_{n_{2}+1}^{**}>t\right)\right\}. \tag{6}$$

که در آن $\sum_{i=1}^{0} X_i \equiv 0$ و همچنین، S_m^* و S_m^{**} ، به ترتیب، مجموع m متغیر تصادفی مستقل با توزیع‌های زیر هستند.

$$F_{\delta_2}^*(x)=\frac{P(\delta_2<X_1<x)}{P(\delta_2<X_1)}, \qquad \delta_2<x$$

و

$$F_{\delta_1,\delta_2}^{**}(x)=\frac{P(\delta_1<X_1<x)}{P(\delta_1<X_1<\delta_2)}, \qquad \delta_1<x<\delta_2$$

اثبات: با توجه به طول عمر سیستم که برحسب فواصل زمانی بحرانی و غیر بحرانی تعریف شده، داریم:

$$P(T_\theta>t)=P\left(\sum_{i=1}^{N_1+N_2+1} X_i>t\right)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{N_1+N_2+1} X_i>t,N_1=n_1,N_2=n_2\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{N_1+N_2+1} X_i>t,N_1=n_1,N_2=n_2\right)$$

$$=\binom{n_1+n_2}{n_1}P\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+1} X_i>t,X_1>\delta_2,\ldots,X_{n_1}>\delta_2,\left(\delta_1\le X_{n_1+1}\le\delta_2,Y_{n_1+1}=0\right)\right.$$

$$\left.,\ldots,\left(\delta_1\le X_{n_1+n_2}\le\delta_2,Y_{n_1+n_2}=0\right),\left(\left(X_{n_1+n_2+1}<\delta_1\right)or\left(\delta_1\le X_{n_1+n_2+1}\le\delta_2,Y_{n_1+n_2+1}=1\right)\right)\right)$$

$$=\binom{n_1+n_2}{n_1}\left(\bar{F}(\delta_2)\right)^{n_1}\left[\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)(1-\theta)\right]^{n_2}\int_0^{\delta_1}P\left(S_{n_1}^*+S_{n_2}^{**}>t-x\right)dF(x)$$

$$+\binom{n_1+n_2}{n_1}\left(\bar{F}(\delta_2)\right)^{n_1}\left[\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)(1-\theta)\right]^{n_2}\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)\theta P\left(S_{n_1}^*+S_{n_2+1}^{**}>t\right)$$

که با جایگذاری، نتیجه مطلوب به دست خواهد آمد.

تابع بقاء سیستم در (۶)، به‌صورت یک سری نامتناهی از جملاتِ شامل انتگرال معرفی شده است که بررسی رفتار آن میسر نیست. ازاین‌رو، با استفاده از نرم‌افزارهای آماری و انجام شبیه‌سازی، مقادیر تابعی به‌طور تقریبی محاسبه می‌شوند. در نمودارهای (۱) تا (۶)، تابع بقاء سیستم به ازای بعضی از پارامترهای مربوطه رسم شده است به‌طوری‌که در نمودارهای (۱) تا (۳)، توزیع فواصل زمانی بین شوک‌های متوالی به‌صورت یکنواخت در فاصله $(0,\alpha)$، و در سایر موارد به‌صورت نمایی با میانگین λ در نظر گرفته شده‌اند.

قضیه ۲: اگر فواصل زمانی بین شوک‌های متوالی مستقل از هم و دارای توزیع مشترک F باشند آنگاه تبدیل لاپلاس طول عمر سیستم برابر است با:

$$E\left(e^{-tT_\theta}\right)= \frac{F(\delta_1)E\left(e^{-tX_1} \mid X_1<\delta_1\right)+\theta\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_1\le X_1\le\delta_2\right)}{1-\left\{\bar F(\delta_2)E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_2<X_1\right)+(1-\theta)\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_1\le X_1\le\delta_2\right)\right\}} \tag{7}$$

اثبات: با به‌کارگیری امیدریاضی مکرر، داریم:

$$E\left(e^{-tT_\theta}\right)=E\left[E\left(e^{-t\sum_{i=1}^{N_1+N_2+1}X_i} \mid N_1,N_2\right)\right]$$
$$=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}E\left(e^{-t\sum_{i=1}^{N_1+N_2+1}X_i} \mid N_1=n_1,N_2=n_2\right)P\left(N_1=n_1,N_2=n_2\right)$$

که با توجه به هم توزیعی و استقلال $X_1,X_2,\ldots$ و همچنین استقلال متغیر تصادفی (N_1,N_2) از متغیرهای تصادفی $X_1,X_2,\ldots$، خواهیم داشت:

$$E\left(e^{-tT_\theta}\right)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}E\left(e^{-t\left(\sum_{i=1}^{n_1+n_2+1}X_i\right)}I\left(N_1=n_1,N_2=n_2\right)\right)$$
$$=\theta\binom{n_1+n_2}{n_1}\left(\bar F(\delta_2)\right)^{n_1}\left(\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)(1-\theta)\right)^{n_2+1}$$
$$\times\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\left(E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_2<X_1\right)\right)^{n_1}\left(E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_1\le X_1\le\delta_2\right)\right)^{n_2+1}$$
$$=\frac{F(\delta_1)E\left(e^{-tX_1} \mid X_1<\delta_1\right)+\theta\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_1\le X_1\le\delta_2\right)}{1-\left\{\bar F(\delta_2)E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_2<X_1\right)+(1-\theta)\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)E\left(e^{-tX_1} \mid \delta_1\le X_1\le\delta_2\right)\right\}}$$

نتیجه۲:

$$E(T_\theta)=\frac{E(X_1)}{1-\left\{\bar F(\delta_2)+(1-\theta)\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)\right\}}=E(X_1)E(N) \tag{8}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مخرج کسر بالا را می‌توان به‌صورت ترکیبی محدب از $F(\delta_1)$ و $F(\delta_2)$ نوشت و همچنین، میانگین طول عمر سیستم، تابعی صعودی از $E(X_1)$ یا میانگین فاصله زمانی بین شوک‌ها و نیز تابعی نزولی از پارامترهای θ، δ_1 و δ_2 است.

در جدول (۱)، با در نظر گرفتن مقادیری مختلف برای $E(X_1)$ ، θ ، δ_1 و δ_2، میانگین طول عمر سیستم محاسبه شده است. در ستون پنجم جدول، توزیع فاصله زمانی بین شوک‌ها به‌صورت یکنواخت $(0,\alpha)$ و در ستون ششم آن، به‌صورت نمایی با میانگین λ در نظر گرفته شده است به‌طوری‌که در هر یک از سطرها، میانگین فواصل زمانی در هر دو توزیع برابر هستند.

نتیجه ۳:

$$E\left(T_\theta^2\right)=\frac{E\left(X_1^2\right)}{\theta F(\delta_2)+(1-\theta)F(\delta_1)}+2E(X_1) \times\frac{\bar{F}(\delta_2)E(X_1\mid\delta_2<X_1)+(1-\theta)\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)E(X_1\mid\delta_1<X_1<\delta_2)}{\left(\theta F(\delta_2)+(1-\theta)F(\delta_1)\right)^2} \quad (9)$$

نتیجه ۴:

$$\lim_{\theta\to 0}E(T_\theta)=\frac{E(X_1)}{1-\bar{F}(\delta_1)}\ ,\ \lim_{\theta\to 1}E(T_\theta)=\frac{E(X_1)}{1-\bar{F}(\delta_2)}$$

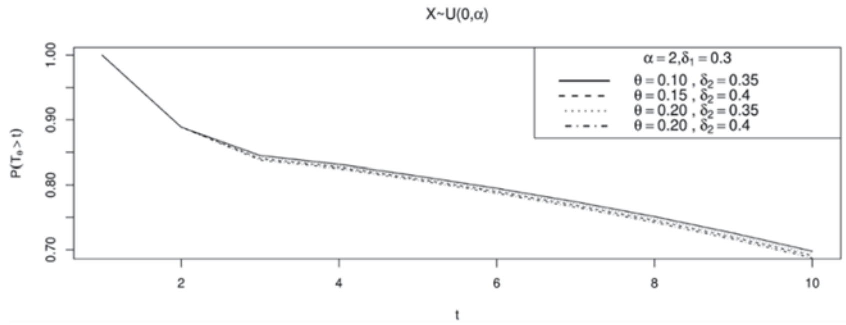
با توجه به نتایج فوق و همچنین مقاله اریلماز و بایروموگلو [۱۱]، ملاحظه می‌شود که مدل تعمیم یافته به ازای $\theta\to 0$ و یا $\theta\to 1$، معادل با مدل دلتا شوک معمولی خواهد بود.

نکته : به‌عنوان تعمیمی از مدل پیشنهادی، δ_1، δ_2 و δ_3 را به‌عنوان سه سطح بحرانی در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که هرگاه فاصله زمانی بین شوک‌های متوالی کمتر از δ_1 شود، سیستم از کار افتد و اگر فاصله بین شوک‌های متوالی بین $[\delta_1,\delta_2]$ و $[\delta_2,\delta_3]$ باشد سیستم نیز به ترتیب با احتمال‌های θ_1 و θ_2 $(\theta_1>\theta_2)$ خراب شود و همچنین سیستم آسیبی نبیند هرگاه فاصله زمانی بین شوک‌های متوالی بیشتر از δ_3 باشد. می‌توان نشان داد که متوسط طول عمر این سیستم نیز برابر است با

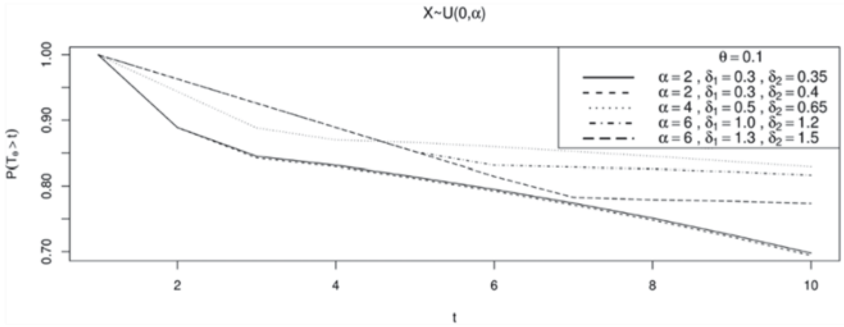
$$\frac{E(X_1)}{1-\left\{\bar{F}(\delta_3)+(1-\theta_1)\left(F(\delta_2)-F(\delta_1)\right)+(1-\theta_2)\left(F(\delta_3)-F(\delta_2)\right)\right\}} \quad (10)$$

جدول (۱): میانگین طول عمر سیستم به ازای مقادیر مختلف $E\left(X_{۱}\right)$، θ، $\delta_{۱}$ و $\delta_{۲}$، هرگاه فاصله بین شوک‌های متوالی دارای توزیع یکنواخت و یا نمایی باشد.

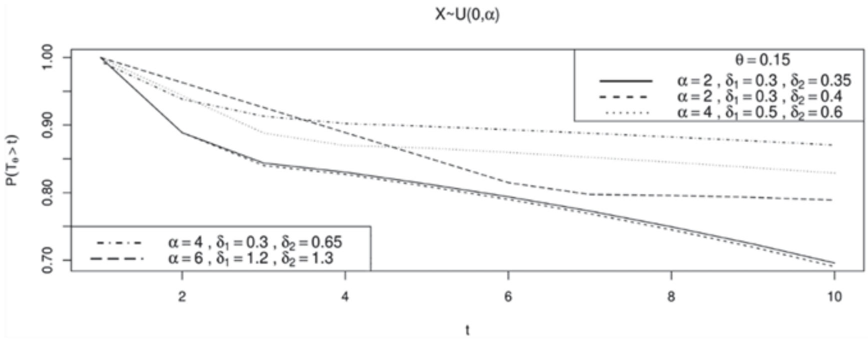
$E\left(X_{۱}\right)=\frac{\alpha}{۲}=\lambda$	θ	$\delta_{۱}$	$\delta_{۲}$	$E\left(T_{\theta}\right): X_{۱}\sim U(۰,\alpha)$	$E\left(T_{\theta}\right): X_{۱}\sim E(\lambda)$
۱	۰/۱	۰/۳	۰/۳۵	۶/۵۵۷	۳/۸۰۵
۱	۰/۱	۰/۳	۰/۴	۶/۴۵۱	۳/۷۵۶
۱	۰/۱۵	۰/۳	۰/۳۵	۶/۵۰۴	۳/۷۷۹
۱	۰/۱۵	۰/۳	۰/۴	۶/۳۴۹	۳/۷۰۷
۱	۰/۲	۰/۳	۰/۳۵	۶/۴۵۱	۳/۷۵۴
۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۶/۲۵	۳/۶۵۹
۲	۰/۱	۰/۵	۰/۶	۱۵/۶۸۶	۸/۸۸۹
۲	۰/۱	۰/۵	۰/۶۵	۱۵/۵۳۴	۸/۸۱۷
۲	۰/۱۵	۰/۵	۰/۶	۱۵/۵۳۴	۸/۸۱۵
۲	۰/۱۵	۰/۵	۰/۶۵	۱۵/۳۱۱	۸/۷۰۹
۲	۰/۲	۰/۵۵	۰/۵۷	۱۴/۴۴	۸/۲۶۷
۲	۰/۲	۰/۵۵	۰/۵۸	۱۴/۳۹	۸/۲۴۱
۳	۰/۱	۱	۱/۲	۱۷/۶۷۴	۱۰/۴۱۳
۳	۰/۱	۱	۱/۳	۱۷/۴۷۶	۱۰/۳۳۵
۳	۰/۱۵	۱/۲	۱/۲۵	۱۴/۹۰۷	۹/۰۵۴
۳	۰/۱۵	۱/۲	۱/۳	۱۴/۸۱۵	۹/۰۱
۳	۰/۲	۱/۲	۱/۲۳	۱۴/۹۲۵	۹/۰۶۳
۳	۰/۲	۱/۲	۱/۲۵	۱۴/۸۷۶	۹/۰۳۹



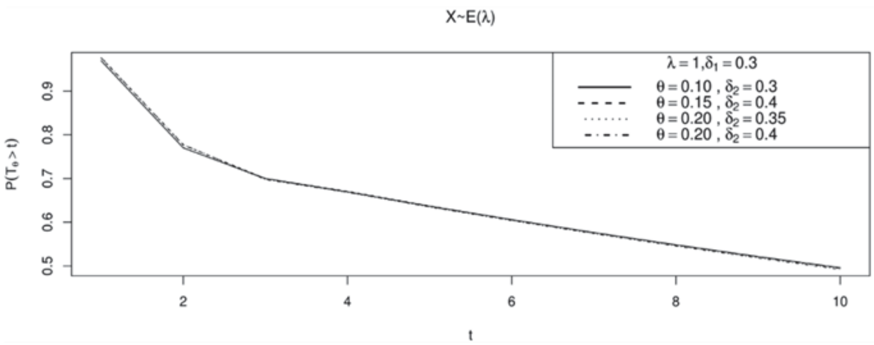
شکل (۱): عملکرد تابع بقاء سیستم در توزیع یکنواخت به ازای $\alpha=۲$ ، $\delta_{۱}=۰/۳$، $\delta_{۲}=۰/۳۵,۰/۴$ و $\theta=۰/۱,۰/۱۵,۰/۲$



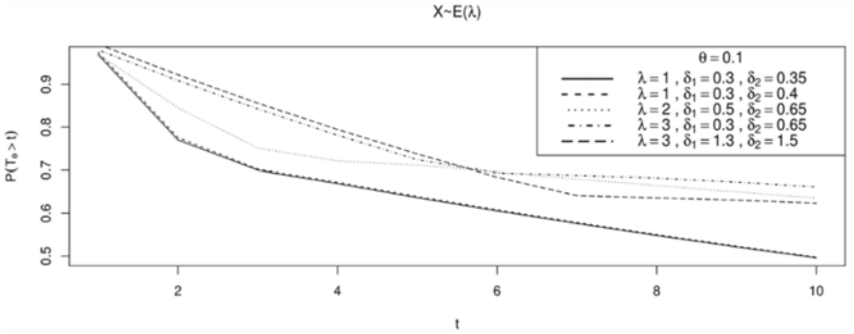
شکل (۲): عملکرد تابع بقاء سیستم در توزیع یکنواخت به ازای $\alpha = ۲,۴,۶$، $\delta_1 = ۰/۳,۰/۵,۱,۱/۳$، $\delta_2 = ۰/۳۵,۰/۴,۰/۶۵,۱/۲,۱/۵$ و $\theta = ۰/۱$



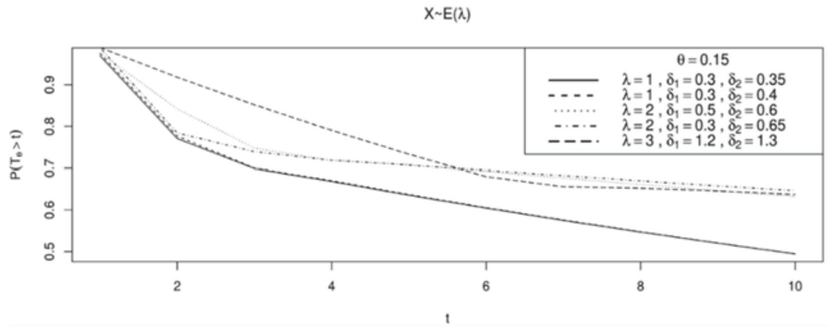
شکل (۳): عملکرد تابع بقاء سیستم در توزیع یکنواخت به ازای $\alpha = ۲,۴,۶$، $\delta_1 = ۰/۳,۰/۵,۱/۲$، $\delta_2 = ۰/۳۵,۰/۴,۰/۶,۰/۶۵,۱/۳$ و $\theta = ۰/۱۵$



شکل (۴): عملکرد تابع بقاء سیستم در توزیع نمایی به ازای $\lambda = ۱$، $\delta_1 = ۰/۳$، $\delta_2 = ۰/۳,۰/۳۵,۰/۴$ و $\theta = ۰/۱,۰/۱۵,۰/۲$



شکل (۵): عملکرد تابع بقاء سیستم در توزیع نمایی به ازای $\theta = ۰/۱$، $\delta_1 = ۰/۳,۰/۵,۱,۱/۳$، $\delta_2 = ۰/۳۵,۰/۴,۰/۶۵,۱/۲,۱/۵$ و $\lambda = ۱,۲,۳$



شکل (۶): عملکرد تابع بقاء سیستم در توزیع نمایی به ازای $\theta = ۰/۱۵$، $\delta_1 = ۰/۳,۰/۵,۱/۲$، $\delta_2 = ۰/۳۵,۰/۴,۰/۶,۰/۶۵,۱/۳$ و $\lambda = ۱,۲,۳$

تقدیر و تشکر

از سر دبیر و داوران محترم مجله که با ارائه پیشنهادها و نظرات ارزشمندشان موجب ارائه بهتر مقاله شدند و همچنین از آقای امین روشنی، دانشجوی دکتری آمار دانشگاه رازی که شبیه سازی مقاله را انجام دادند، سپاسگزاری و قدردانی می شود.

منابع

[1] Li, Z.H. (1984). Some distributions related to Poisson processes and their application in solving the problem of traffic jam. *J. Lanzhou Univ. Nat. Sci.*, **20**, 127–136.

[2] Sumita, U. and Shanthikumar, J.G. (1985). A class of correlated cumulative shock models. *Ann. Appl. Probab.,* **17**, 347–366.

[3] Aven, T. and Gaarder, S. (1987). Optimal replacement in a shock model: Discrete-time, *J. Appl. Probab.*, **24**, 281–287.

[4] Gut, A. (1990). Cumulative shock models. *Ann. Appl. Probab.,* **22**, 504–507.

[5] Mallor, F. and Omey, E. (2001). Shocks, runs and random sums. *J. Appl. Probab.,* **38**, 438–448.

[6] Wang, G.J. and Zhang, Y.L. (2001). δ-shock model and its optimal replacement policy. *J. Southeast Univ.,* **31**, 121–124.

[7] Li, Z.H. and Kong, X.B. (2007). Life behavior of δ-shock model. *Statist. Probab. Lett.*, **77**, 577–587.

[8] Li, Z.H. and Zhao, P. (2007). Reliability analysis on the δ-shock model of complex systems. *IEEE Trans. Reliab.*, **56**, 340–348.

[9] Finkelstein, M. and Cha, J. H. (2013). *Stochastic Modeling for Reliability, Shocks, Burn-in and Heterogeneous Populations*. London, U.K.: Springer-Verlag.

[10] Eryilmaz,S. and Bayromoglu, K. (2014). Life behavior of δ-shock models for uniformly distributed inter-arrival times, *Stat. Papers,* **55**, 841-852.

[11] Parvardeh, A. and Balakrishnan, N. (2015). On mixed δ-shock models, *Statist. Probab. Lett.*, **102**, 51-60.

A Generalization of δ - Shock Model

Mohammad Hossein Poursaeed

Department of Statistics, Lorestan University, Khoramabad, Iran

Abstract

Suppose that a system is exposed to a sequence of shocks that occur randomly over time, and δ_1 and δ_2 are two critical levels such that $0 < \delta_1 < \delta_2$. The system fails with a probability θ, when the time between two successive shocks is between $[\delta_1, \delta_2]$ and the system fails as soon as the time between successive shocks is less than δ_1. Such a model can be considered as a generalization of the ordinary delta shock model, in which the distribution of the time between two successive shocks is arbitrary, and the system exhibits probabilistic behavior when encounters some inter arrivals. In this paper, the survival function, Laplace transform and two first moments of the system are given for general inter arrival distribution and then, the generalization of the problem is also pointed.

Keywords: δ -Shock model, Inter arrival distribution, Survival function.

Mathematics Subject Classification (2010): 62N05, 90B25.