

یک الگوریتم بهینه‌سازی ماتریسی عملگری جدید برای حل معادله‌ی انتشار و انتقال غیرخطی کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی

حسین حسینی* و اسکندر نراقی‌راد**

*گروه ریاضی، دانشگاه شهرکرد

**گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۹/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۸/۸

چکیده: در این مقاله، یک الگوریتم بهینه‌سازی جدید و مؤثر برای حل معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی با استفاده از مفهوم مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر از نوع کاپوتو ارائه می‌دهیم. برای به دست آوردن جواب، ابتدا رده‌ای از چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته را معرفی، سپس ماتریس‌های عملگری وابسته به آن‌ها ساخته می‌شوند. در روش بهینه‌سازی ارائه‌شده، جواب مسئله‌ی موردبررسی برحسب چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته با ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل‌کننده‌ی نامعلوم توسعه داده می‌شود. مهم‌ترین فایده‌ی این روش تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی به یک سیستم از معادلات جبری غیرخطی است. در ادامه، ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل‌کننده به‌طور بهینه با مینیمم‌سازی خطای جواب تقریبی به دست خواهند آمد. تحلیل همگرایی روش ارائه‌شده با به دست آوردن قضیه‌ای جدید در خصوص توابع دومتغیره تضمین می‌شود. در پایان، نتایج عددی به‌دست‌آمده نشان خواهند داد که الگوریتم ارائه‌شده برای حل معادله‌ی ذکرشده مؤثر و از میزان دقت بسیار بالایی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی، ماتریس‌های عملگری، الگوریتم بهینه‌سازی، چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته، پارامترهای کنترل‌کننده.

رده‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۳۵Q۹۰، ۳۵R۱۱، ۷۴G۱۵.

یکی از مهم‌ترین شاخه‌های ریاضیات، حساب و انتگرال کسری مرتبه‌ی متغیر است که در رشته‌های فیزیک و فنی-مهندسی دارای کاربردهای فراوان است. به‌عنوان مثال، می‌توان به کاربرد مشتقات کسری مرتبه‌ی متغیر در مدل‌سازی نوسانگرهای خطی و غیرخطی، پردازش تصویر، مسائل کنترل بهینه، فرآیندهای انتشار و سیستم‌های فیزیکی پیچیده، مطرح‌شده در مراجع [۱]-[۷] اشاره کرد. پژوهشگران زیادی در خصوص حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری مرتبه‌ی متغیر روش‌ها و الگوریتم‌های متعددی ارائه نموده‌اند. چن [۸] روش‌های عددی برای حل معادله‌ی انتشار مرتبه‌ی متغیر دوبعدی ارائه نموده است. بهراوی و زکی [۹] روشی طیفی و دقیق برای حل معادلات کابل غیرخطی کسری مرتبه‌ی متغیر یک‌بعدی و دوبعدی را موردبررسی قرار داده‌اند. شن و همکارانش [۱۰] معادله‌ی انتشار کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی را مورد پژوهش قرار داده، روشی عددی برای حل این معادله ارائه، پایداری و همگرایی آن را به دست آورده‌اند. یانگ و ماچادو [۱۱] یک ماتریس عملگر کسری از مرتبه‌ی متغیر جدید برای حل معادله‌ی انتشار به دست آورده و خاصیت‌های جدید آن را برحسب تبدیلات لاپلاس و فوریه مورد تجزیه‌وتحلیل قرار دادند. دهاقین و حسنی [۱۲] رده‌ی جدیدی از توابع پایه‌ای تحت عنوان چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته برای حل معادله‌ی غیرخطی انتشار موج کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی معرفی نمودند. لی و وائو [۱۳] روش هسته‌ی دوباره تولید شونده را برای مسائل مقدار مرزی تابعی کسری مرتبه‌ی متغیر ارائه نمودند. چن و همکارانش [۱۴] روش‌های عددی با میزان دقت بالا برای معادله‌ی زیرانتشار غیرعادی مرتبه‌ی متغیر به دست آورده‌اند. در سال‌های اخیر، روش‌های متعدد دیگری برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری مرتبه‌ی متغیر ارائه گردیده است [۱۵-۲۳].

معادلات انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر در زمینه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌عنوان مثال، این معادلات در شبیه‌سازی ذخیره‌ی نفت، پراکنش مواد شیمیایی در رآکتورها، انتقال جرم و انرژی مواد و تولید جهانی آب‌وهوا کاربردهای فراوان دارند. اخیراً، روش‌های متعددی برای به دست آوردن جواب معادلات انتشار و انتقال مورد استفاده قرار گرفته‌اند. ژو و سو [۲۴] روش مرتب‌سازی موجک‌های چیبیشف از نوع سوم را برای حل معادلات انتشار و انتقال کسری زمانی با ضرایب متغیر ارائه نمودند. بهروزی‌فر و سازمند [۲۵] یک جواب تقریبی بر اساس چندجمله‌ای‌های ژاکوبی برای حل معادله‌ی انتشار و انتقال کسری زمانی به دست آوردند. چن و دنگ [۲۶] روشی عددی از مرتبه‌ی دوم برای حل معادله‌ی انتشار و انتقال کسری دوبعدی معرفی نمودند. لی و همکارانش [۲۷] روشی عددی برای مشتقات کاپوتو و معادلات انتشار و انتقال مورد مطالعه قرار دادند. ونگ [۲۸] روش تفاضل متناهی را برای معادلات انتشار و انتقال موج کسری زمانی با ضرایب متغیر موردبررسی قرار داد. همچنین می‌توان روش‌های ارائه‌شده در [۲۹-۳۳] را برای حل این‌گونه معادلات معرفی نمود.

معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی یک معادله با مشتقات جزئی کسری مرتبه‌ی متغیر است که از معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری زمانی با قرار دادن مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر به جای مشتق کسری به دست می‌آید و به صورت

$$u_t(x, t) + {}^c D_t^{\alpha(x, t)} u(x, t) + u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) + g(u(x, t)) = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad (1)$$

تعریف می‌شود، که دارای شرایط اولیه و مرزی به صورت

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ u(0, t) &= h_1(t), \quad u(1, t) = h_2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

است. همچنین در آن $g(u(x, t))$ یک عملگر غیرخطی، $0 < \alpha(x, t) \leq 1$ ، $u_0(x)$ ، $f(x, t)$ ، $h_1(t)$ و $h_2(t)$ توابع داده شده و ${}^c D_t^{\alpha(x, t)} u(x, t)$ مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی از نوع کاپوتو است.

در این مقاله، ابتدا جواب نامعلوم مسئله‌ی مورد بررسی را برحسب چند جمله‌ای‌های تعمیم یافته با ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل کننده توسعه می‌دهیم. سپس ماتریس‌های عملگری را برای چند جمله‌ای‌های تعمیم یافته و مشتقات آن‌ها به دست می‌آوریم. در ادامه، تابع باقیمانده و نرم مربعی آن برای تبدیل مسئله‌ی مورد مطالعه به حالت بهینه‌سازی به کار گرفته شده و ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل کننده به طور بهینه با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ به دست آورده می‌شوند.

این مقاله به صورت زیر بخش بندی می‌شود. در بخش ۲، مقدمات لازم برای حساب کسری مرتبه‌ی متغیر، خاصیت‌هایی از چند جمله‌ای‌های تعمیم یافته، ماتریس‌های عملگری وابسته به آن‌ها، تابع تقریب جواب و قضیه‌ی جدید همگرایی برای توابع دو متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرند. در بخش ۳، روش بهینه‌سازی پیشنهاد شده برای حل معادله‌ی (۱) ارائه می‌گردد. بخش ۴ شامل مثال‌های عددی است که توسط روش ارائه شده حل می‌شوند. در بخش ۵، یک نتیجه گیری کلی در رابطه با مسئله‌ی مورد مطالعه، بیان خواهد شد.

۲- مفاهیم و مقدمات

در این بخش، تعاریف و پیش‌نیازهای لازم برای به دست آوردن جواب تقریبی معادله‌ی (۱) را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱-۲ تعاریف حساب کسری مرتبه‌ی متغیر

تعریف ۱: مشتق کسری کاپوتو از مرتبه‌ی ϑ که $n-1 < \vartheta \leq n$ برای تابع $u(t)$ به صورت

$${}^c D_t^\vartheta u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\vartheta)} \int_0^t (t-\xi)^{n-\vartheta-1} u^{(n)}(\xi) d\xi, \quad (3)$$

تعریف می‌شود [۲۹،۳۴]، که $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است.

تعریف ۲: مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر کاپوتو از مرتبه‌ی $0 < \alpha(x,t) \leq 1$ برای تابع $u(x,t)$ به صورت

$${}^c D_t^{\alpha(x,t)} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x,t))} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha(x,t)} \frac{\partial u(x,\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad t > 0. \quad (4)$$

تعریف می‌شود [۹،۱۲]. برای مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر از نوع کاپوتو رابطه‌ی

$${}^c D_t^{\alpha(x,t)} t^m = \begin{cases} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha(x,t)+1)} t^{m-\alpha(x,t)}, & n \leq m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases} \quad (5)$$

برقرار است، که در آن $n-1 < \alpha(x,t) \leq n$.

۲-۲ ماتریس‌های عملگری وابسته به چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته

در این قسمت ابتدا دو رده‌ی مهم از چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته را معرفی و یک‌روند کلی برای به دست آوردن ماتریس‌های عملگری وابسته به آن‌ها را ارائه می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} x^{i-1}, & i = 1, 2, \\ x^{i-1+k_{i-1}}, & i = 3, 4, \dots, m_1 + 1, \end{cases} \quad (6)$$

و

$$\psi_j(t) = \begin{cases} t^{j-1}, & j = 1, \\ t^{j-1+s_{j-1}}, & j = 2, 3, \dots, m_2 + 1, \end{cases} \quad (7)$$

که در آن k_i و s_j پارامترهای کنترل‌کننده و بردارهای (m_1+1) و (m_2+1) -بعدی $\Phi_{m_1}(x)$ و $\Psi_{m_2}(t)$ به ترتیب به صورت

$$\Phi_{m_1}(x) = [\varphi_1(x) \varphi_2(x) \dots \varphi_{m_1+1}(x)]^T, \quad (8)$$

$$\Psi_{m_r}(t) = [\psi_1(t) \psi_2(t) \dots \psi_{m_r+1}(t)]^T. \quad (9)$$

داده می‌شوند. مشتق کاپوتو از مرتبه‌ی $0 < \alpha(x,t) \leq 1$ برای $\psi_j(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^c D_t^{\alpha(x,t)} \psi_j(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(j+s_{j-1})}{\Gamma(j-\alpha(x,t)+s_{j-1})} t^{j-1-\alpha(x,t)+s_{j-1}}, & j=1,2,\dots,m_r, \\ 0, & j=0, \end{cases}$$

همچنین فرض کنید مشتق کاپوتو از مرتبه‌ی $0 < \alpha(x,t) \leq 1$ برای $\Psi_{m_r}(t)$ به صورت

$${}^c D_t^{\alpha(x,t)} \Psi_{m_r}(t) = \mathcal{D}_t^{(\alpha(x,t))} \Psi_{m_r}(t), \quad (10)$$

است، که در آن $\mathcal{D}_t^{(\alpha(x,t))}$ ماتریس عملگری مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر $(m_r+1) \times (m_r+1)$ -بعدی و به صورت

$$\mathcal{D}_t^{(\alpha(x,t))} = t^{-\alpha(x,t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma(r+s_1)}{\Gamma(r-\alpha(x,t)+s_1)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(m_r+1+s_{m_r})}{\Gamma(m_r+1-\alpha(x,t)+s_{m_r})} \end{pmatrix}.$$

داده می‌شود. مشتق مرتبه‌ی اول برای تابع $\psi_j(t)$ به صورت زیر است:

$$\frac{d\psi_j(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & j=0, \\ (j+s_j) t^{j-1+s_j}, & j=1,2,\dots,m_r. \end{cases}$$

همچنین فرض کنید مشتق مرتبه‌ی اول $\Psi_{m_r}(t)$ به صورت

$$\frac{d\Psi_{m_r}(t)}{dt} = \mathcal{D}_t^{(1)} \Psi_{m_r}(t), \quad (11)$$

است، که $\mathcal{D}_t^{(1)}$ ماتریس عملگری مشتق معمولی با ابعاد $(m_r+1) \times (m_r+1)$ بوده و به صورت

$$D_t^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1+s_1}{t} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m_\nu + s_{m_\nu}}{t} \end{pmatrix}.$$

است. فرض کنید $\varphi_i(x)$ تعریف‌شده در معادله‌ی (۶) باشد، آنگاه:

$$\frac{d\varphi_i(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 1, & i = 1, \\ (i+k_i)x^{i-1+k_i}, & i = 2, 3, \dots, m_1. \end{cases}$$

9

$$\frac{d^\nu \varphi_i(x)}{dx^\nu} = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \\ (i+k_i)(i-1+k_i)x^{i-\nu+k_i}, & i = 2, 3, \dots, m_1. \end{cases}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸) مشتقات مراتب اول و دوم برای بردار $\Phi_{m_1}(x)$ به‌صورت

$$\frac{d\Phi_{m_1}(x)}{dx} = D_x^{(1)}\Phi_{m_1}(x), \quad \frac{d^\nu \Phi_{m_1}(x)}{dx^\nu} = D_x^{(\nu)}\Phi_{m_1}(x), \quad (12)$$

بیان می‌شود، که ماتریس‌های $D_x^{(\nu)}$ و $D_x^{(1)}$ از ابعاد $(m_1+1) \times (m_1+1)$ بوده و به‌صورت زیر می‌باشند:

$$D_x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu+k_\nu}{x} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{m_1+k_{m_1}}{x} \end{pmatrix}, \quad D_x^{(\nu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(\nu+k_\nu)(1+k_\nu)}{x^\nu} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(m_1+k_{m_1})(m_1-1+k_{m_1})}{x^\nu} \end{pmatrix}.$$

۲-۳ تقریب تابع

اگر $X = L^1[0,1] \times [0,1]$ و $Y = \langle x^{\beta_i} t^{\gamma_j}; 0 \leq i \leq m_1, 0 \leq j \leq m_2 \rangle$ یک فضای برداری با بعد متناهی از X ($\dim Y \leq (m_1 + 1)(m_2 + 1) < \infty$) است؛ بنابراین هر $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t) \in X$ دارای بهترین نقطه‌ی تقریب در Y مانند $u_* = u_*(x, t)$ است. همچنین، به ازای هر $\hat{u} \in Y$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\|\tilde{u} - u_*\|_r \leq \|\tilde{u} - \hat{u}\|_r.$$

با توجه به اینکه $u_* \in Y$ ، ضرایب منحصر به فردی مانند $u_{ij} \in \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که

$$u_*(x, t) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} u_{ij} x^{\beta_i} t^{\gamma_j} = \Phi_{m_1}(x)^T U \Psi_{m_2}(t).$$

قضیه ۱: فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار، Y_1 و Y_2 دو زیر فضای برداری با بعد متناهی از X به طوری که $Y_1 \subseteq Y_2$. اگر $x \in X$ ، آنگاه $\text{dist}(x, Y_2) \leq \text{dist}(x, Y_1)$ که در آن

$$\text{dist}(x, Y_1) = \inf \{ \|x - y\|_r : y \in Y_1 \}.$$

برهان: بنا به قضیه‌ی ۱-۱، ۱-۶ از مرجع [۳۵]، x دارای بهترین نقاط تقریب، به ترتیب $y_1 \in Y_1$ و $y_2 \in Y_2$ است؛ بنابراین $\|x - y_1\|_r = \text{dist}(x, Y_1)$ ، $\|x - y_2\|_r = \text{dist}(x, Y_2)$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, Y_2) &= \|x - y_2\|_r = \inf \{ \|x - y\|_r ; y \in Y_2 \} \\ &\leq \inf \{ \|x - y\|_r ; y \in Y_1 \} = \|x - y_1\|_r = \text{dist}(x, Y_1). \end{aligned}$$

۲-۴ تحلیل همگرایی

ابتدا اتحاد زیر که در میدان اعداد حقیقی دارای کاربرد فراوان است را بیان می‌کنیم.

نکته: فرض کنید a_1, a_2, \dots, a_k اعداد حقیقی دلخواه باشند. آنگاه:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2) + 2(a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_k) \\ &\quad + 2(a_2 a_3 + a_2 a_4 + \dots + a_2 a_k) + 2(a_{k-2} a_k + a_{k-1} a_k) + 2(a_{k-1} a_k). \end{aligned}$$

قضیه‌ی زیر درباره توابع دومتغیره جدیدترین بوده و برای اولین بار در این مقاله به اثبات می‌رسد.

قضیه ۲: فرض کنید $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طوری که $f \in C^{m_1+m_2+1}([0,1] \times [0,1])$ باشد. اگر $X = L^1[0,1] \times [0,1]$ ، Y در مفروضات بخش ۲-۳ و $\Phi_{m_1}(x)^T U \Psi_{m_2}(t)$ بهترین نقطه‌ی تقریب f خارج Y باشد، آنگاه کران خطای تقریب به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\|f - \Phi_{m_1}^T U \Psi_{m_2}\|_r \leq \frac{M(m_1 + m_2 + 1)}{k!(m_1 + m_2 + 1 - k)!}, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + 1\},$$

که در آن

$$M := \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{m_1 + m_2 + 1}}{\partial s^{m_1 + m_2 + 1 - i} \partial t^i} f(s, t) \right| : s, t \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, m_1 + m_2 + 1 \right\}.$$

برهان: فرض کنید

$$f(s, t) = p(s, t) + \frac{1}{(m_1 + m_2 + 1)!} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 + m_2 + 1} f(\lambda_s, \lambda_t), \quad \lambda_s \in (0, 1),$$

$$p(s, t) = \sum_{i=0}^{m_1 + m_2} \frac{1}{i!} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^i f(0, 0)$$

که از طرفی داریم

$$|f(s, t) - p(s, t)| = \left| \frac{1}{(m_1 + m_2 + 1)!} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 + m_2 + 1} f(\lambda_s, \lambda_t) \right|, \quad \lambda_s \in (0, 1).$$

از آنجایی که $\Phi_{m_1}(x)^T U \Psi_{m_2}(t)$ بهترین تقریب f است، بنابراین

$$\|f - \Phi_{m_1}^T U \Psi_{m_2}\|_r \leq \|f - p\|_r$$

و با استفاده از بسط $\left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 + m_2 + 1}$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 + m_2 + 1} f(\lambda_s, \lambda_t) &= \\ &= s^{m_1 + m_2 + 1} \frac{\partial^{m_1 + m_2 + 1}}{\partial s^{m_1 + m_2 + 1}} f(\lambda_s, \lambda_t) + s^{m_1 + m_2} t \binom{m_1 + m_2 + 1}{1} \frac{\partial^{m_1 + m_2 + 1}}{\partial s^{m_1 + m_2} \partial t} f(\lambda_s, \lambda_t) \\ &+ \dots + s t^{m_1 + m_2} \binom{m_1 + m_2 + 1}{m_1 + m_2} \frac{\partial^{m_1 + m_2 + 1}}{\partial s \partial t^{m_1 + m_2}} f(\lambda_s, \lambda_t) + t^{m_1 + m_2 + 1} \frac{\partial^{m_1 + m_2 + 1}}{\partial t^{m_1 + m_2 + 1}} f(\lambda_s, \lambda_t). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه

$$\binom{m_1 + m_2 + 1}{i} = \binom{m_1 + m_2 + 1}{m_1 + m_2 + 1 - i}, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 + m_2 + 1,$$

بنابراین $k \in \{0, 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + 1\}$ وجود دارد به طوری که

$$\max \left\{ \binom{m_1 + m_2 + 1}{i} : i = 0, 1, \dots, m_1 + m_2 + 1 \right\} = \binom{m_1 + m_2 + 1}{k} = \frac{(m_1 + m_2 + 1)!}{k!(m_1 + m_2 + 1 - k)!}.$$

علاوه بر این، فرض می‌کنیم

$$M := \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{m_1+m_r+1}}{\partial s^{m_1+m_r+1-i} \partial t^i} f(s, t) \right| : s, t \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, m_1 + m_r + 1 \right\}.$$

به‌منظور پیدا کردن یک کران بالا، ابتدا ساده‌سازی زیر را انجام می‌دهیم

$$\int_0^1 \int_0^1 s^{\nu(m_1+m_r+1-i)} t^{\nu i} ds dt = \frac{1}{(\nu i + 1)(\nu m_1 + \nu m_r + \nu - \nu i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 + m_r + 1,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 s^{\nu m_1 + \nu m_r + 1 - i} t^{i+1} ds dt = \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r + \nu - i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 + m_r,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 s^{\nu(m_1 + \nu m_r - 1 - i)} t^{i+\nu} ds dt = \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r - i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 + m_r - 1,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 s^{\nu m_1 + \nu m_r - \nu - i} t^{i+\Delta} ds dt = \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r - \nu - i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 + m_r - \nu,$$

با ادامه‌ی این روند به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 \int_0^1 s^{i+\nu} t^{\nu m_1 + \nu m_r - i} ds dt = \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r + 1 - i)}, \quad i = 0, 1,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 s^{i+1} t^{\nu m_1 + \nu m_r - i+1} ds dt = \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r + \nu - i)}, \quad i = 0.$$

در نتیجه با بکار بردن تساوی‌های فوق، داریم

$$\begin{aligned} \|f - p\|_{\nu} &= \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{1}{(m_1 + m_r + 1)!} \left(s \frac{\partial}{\partial s} + t \frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+m_r+1} f(\lambda_s s, \lambda_t t) \right|^{\nu} ds dt \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leq \frac{(m_1 + m_r + 1)!}{k!(m_1 + m_r + 1 - k)!} \times \frac{M}{(m_1 + m_r + 1)!} \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{i=0}^{m_1+m_r+1} s^{m_1+m_r+1-i} t^i \right|^{\nu} ds dt \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ &= \rho \left[\sum_{i=0}^{m_1+m_r+1} \frac{1}{(\nu i + 1)(\nu m_1 + \nu m_r + \nu - \nu i)} + \sum_{i=0}^{m_1+m_r} \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r + \nu - i)} \right. \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m_1+m_r-1} \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r - i)} + \sum_{i=0}^{m_1+m_r-\nu} \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r - \nu - i)} \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{(i + \nu)(\nu m_1 + \nu m_r - i + 1)} + \frac{1}{\nu(m_1 + m_r + 1)} \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leq \rho \left[(m_1 + m_r + \nu) + (m_1 + m_r + 1) + (m_1 + m_r) + \dots + \nu + 1 \right]^{\frac{1}{\nu}} \\ &\leq \rho \left[(m_1 + m_r + \nu) \right]^{\frac{1}{\nu}} = \rho(m_1 + m_r + \nu), \end{aligned}$$

که $\rho = \frac{M}{k!(m_1 + m_r + 1 - k)!}$ و این اثبات را تمام می‌کند.

۳- روش پیشنهادی برای حل معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی

در این بخش ماتریس عملگری مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر به کمک روش ضرایب لاگرانژ برای حل معادله‌ی (۱) با شرایط اولیه و مرزی (۲) به کار برده می‌شود. ابتدا $u(x,t)$ با استفاده از توابع چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x,t) \approx \Phi_{m_1}(x)^T U \Psi_{m_r}(t), \quad (13)$$

که $U = [u_{ij}]_{(m_1+1) \times (m_r+1)}$ ماتریس ضرایب آزاد است. با استفاده از روابط (۱۰) - (۱۳) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} {}^c D_t^{\alpha(x,t)} u(x,t) &\approx \Phi_{m_1}(x)^T U \mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)} \Psi_{m_r}(t), \\ u_t(x,t) &\approx \Phi_{m_1}(x)^T U \mathcal{D}_t^{(1)} \Psi_{m_r}(t), \\ u_x(x,t) &\approx \Phi_{m_1}(x)^T (\mathcal{D}_x^{(1)})^T U \Psi_{m_r}(t), \\ u_{xx}(x,t) &\approx \Phi_{m_1}(x)^T (\mathcal{D}_x^{(r)})^T U \Psi_{m_r}(t), \\ \Lambda_1(x) &= \Phi_{m_1}(x)^T U \Psi_{m_r}(0) - u_0(x) \approx 0, \\ \Lambda_r(t) &= \Phi_{m_1}(0)^T U \Psi_{m_r}(t) - h_1(t) \approx 0, \\ \Lambda_r(t) &= \Phi_{m_1}(1)^T U \Psi_{m_r}(t) - h_r(t) \approx 0. \end{aligned} \quad (14)$$

از روابط (۱۳) و (۱۴) تابع باقیمانده‌ی $\mathcal{R}(x,t)$ برای معادله‌ی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1}(x)^T \left[U \mathcal{D}_t^{(1)} + U \mathcal{D}_t^{\alpha(x,t)} + (\mathcal{D}_x^{(1)})^T U - (\mathcal{D}_x^{(r)})^T U \right] \Psi_{m_r}(t) \\ + g(u(x,t)) - f(x,t) = \mathcal{R}(x,t) \approx 0. \end{aligned} \quad (15)$$

برای به دست آوردن جواب تقریبی معادله‌ی (۱)، مقادیر بهینه‌ای برای ماتریس U و پارامترهای کنترل‌کننده‌ی k_i و s_j می‌یابیم. برای این منظور نرم دو از تابع باقیمانده را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathcal{M}(U; k_r, k_r, \dots, k_{m_1}; s_1, s_r, \dots, s_{m_r}) = \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{R}^\tau(x, t) dx dt. \quad (16)$$

اکنون مسئله‌ی

$$\min. \mathcal{J}[U; k_r, k_r, \dots, k_{m_1}; s_1, s_r, \dots, s_{m_r}] = \mathcal{M}(U; k_r, k_r, \dots, k_{m_1}; s_1, s_r, \dots, s_{m_r}), \quad (17)$$

را با توجه به شرایط

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \left(\frac{i-1}{m_1} \right) &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, m_1, \\ \Lambda_r \left(\frac{j-1}{m_r} \right) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_r + 1, \\ \Lambda_r \left(\frac{j-1}{m_r} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

حل می‌کنیم. برای حل مسئله‌ی مینیمم‌سازی فوق، فرض کنید:

$$\mathcal{J}^*[U; k_r, k_r, \dots, k_{m_1}; s_1, s_r, \dots, s_{m_r}; \lambda] = \mathcal{J}[U; k_r, k_r, \dots, k_{m_1}; s_1, s_r, \dots, s_{m_r}] + \lambda \Lambda, \quad (19)$$

که در آن $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1 + 2m_r + 1}]$ ضرایب نامعلوم لاگرانژ و Λ_i برای $i = 1, 2, 3$ شرایط داده‌شده در رابطه‌ی (18) هستند. شرایط لازم برای به دست آوردن مقادیر بهینه عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial U} = 0, & \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial k_i} = 0, & i = 2, 3, \dots, m_1, \\ \frac{\partial \mathcal{J}^*}{\partial s_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, m_r, \end{cases} \quad (20)$$

که با استفاده از نرم‌افزارهای متلب و میپل، دستگاه غیرخطی از معادلات فوق را حل کرده و مقادیر مجهول به دست می‌آیند و در نهایت با جایگذاری این مقادیر در رابطه (13)، جواب تقریبی مسئله‌ی (1) به دست می‌آید. الگوریتم روش بهینه‌سازی پیشنهادی به صورت زیر بیان می‌شود:

الگوریتم:

- ورودی: $m_1, m_2, m_3, \alpha(x, t) < 1, \circ, u(x), h_1(t), h_2(t), f(x, t)$.
- خروجی: جواب تقریبی برابر است با: $u(x, t) = \Phi_{m_1}(x)^T U \Psi_{m_2}(t)$.
- ۱: توابع پایه‌ای $\varphi_1(x)$ و $\psi_j(t)$ با استفاده از معادلات (۶) و (۷) تعریف می‌شوند.
- ۲: بردارهای چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته‌ی $\Phi_{m_1}(x)$ و $\Psi_{m_2}(t)$ با استفاده از معادلات (۸) و (۹) ساخته می‌شوند.
- ۳: ماتریس ضرایب $U = [u_{ij}]_{(m_1+1) \times (m_2+1)}$ را در نظر می‌گیریم.
- ۴: ماتریس‌های عملگری $D_t^{(\alpha(x,t))}, D_t^{(1)}, D_x^{(1)}, D_x^{(\nu)}$ با استفاده از روابط (۱۰) - (۱۲) محاسبه می‌شوند.
- ۵: توابع $\Lambda_1(x)$ و $\Lambda_j(t)$ برای $j = 2, 3$ با استفاده از رابطه‌ی (۱۴) به دست می‌آیند.
- ۶: تابع باقیمانده $\mathcal{R}(x, t)$ را با استفاده از رابطه‌ی (۱۵) به دست می‌آوریم.
- ۷: نرم مربعی $\mathcal{R}(x, t)$ را با استفاده از رابطه‌ی (۱۶) به دست می‌آوریم.
- ۸: تابع هدف $\mathcal{J}[U; k_r, k_p, \dots, k_m; s_1, s_r, \dots, s_m]$ را با استفاده از رابطه‌ی (۱۷) به دست می‌آوریم.
- ۹: تابع هدف $\mathcal{J}^*[U; k_r, k_p, \dots, k_m; s_1, s_r, \dots, s_m; \lambda]$ را با توجه به شرایط (۱۸) مینیمم می‌کنیم.
- ۱۰: سیستم غیرخطی از معادلات را با استفاده از رابطه‌ی (۲۰) حل می‌کنیم.

۴ - مثال‌های عددی

در این بخش با ارائه مثال‌های عددی کارایی روش ارائه‌شده را نشان داده و برای بررسی دقت و مؤثر بودن این روش، ماکسیمم قدر مطلق خطای حاصل را برای هر مثال با مقادیر مختلف m_1 و m_2 به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$|e(x_i, t_i)| = \left| \Phi_{m_1}(x_i)^T U \Psi_{m_2}(t_i) - u(x_i, t_i) \right|, \quad (x_i, t_i) \in [0, 1] \times (0, 1].$$

محاسبات را با استفاده از نرم‌افزار میپل با ۲۰ رقم اعشار انجام می‌دهیم.

مثال ۱: معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی

$$u_t(x, t) + {}^c D_t^{\alpha(x,t)} u(x, t) + u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) + u^\nu(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, 1], \quad (21)$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t^\nu,$$

$$f(x,t) = \left(\frac{2}{\Gamma(3-\alpha(x,t))} t^{2-\alpha(x,t)} + 2t \right) x^\tau + 3t^\tau x^\tau - 6t^\tau x + (t^\tau x^\tau)^\tau,$$

و دارای جواب تحلیلی $u(x,t) = t^\tau x^\tau$ است را در نظر بگیرید. این معادله را با روش پیشنهادی با $\alpha(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(x+t)}{1.0} \right)$ و $\alpha(x,t) = 1 - 0.4(x^\tau + t^\tau)$ ، $m_\tau = 2$ ، $m_1 = 3$ می‌کنیم. جواب تقریبی بر اساس رابطه‌ی (۱۳) به صورت $u(x,t) \approx \Phi_\tau(x)^T U \Psi_\tau(t)$ نمایش داده می‌شود. ماکسیمم خطای مطلق در بعضی از نقاط $(x,t) \in [0,1] \times [0,1]$ برای $\alpha(x,t)$ های مختلف در جدول (۱) محاسبه شده است.

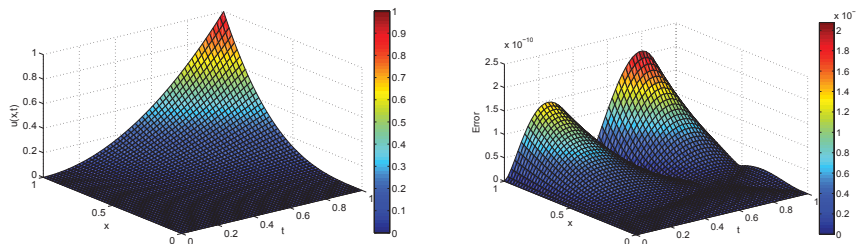
جدول (۱): خطاهای مطلق حاصل از روش پیشنهادی برای مثال ۱

$\alpha(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(x+t)}{1.0} \right)$	$\alpha(x,t) = 1 - 0.4(x^\tau + t^\tau)$	(x, t)
3/1074E-13	5/3636E-13	(0/1,0/1)
3/7420E-13	3/5164E-12	(0/2,0/2)
3/2995E-12	9/1445E-12	(0/3,0/3)
1/1460E-11	1/5020E-11	(0/4,0/4)
1/7205E-11	1/6796E-11	(0/5,0/5)
6/6083E-12	1/0002E-11	(0/6,0/6)
3/3033E-11	6/9803E-12	(0/7,0/7)
9/5908E-11	2/8851E-11	(0/8,0/8)
1/3026E-10	3/8306E-11	(0/9,0/9)

نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و نمودار خطای مطلق (سمت راست) با $\alpha(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(x+t)}{1.0} \right)$ در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. با استفاده از روش استفاده شده در بخش ۳، خطای باقیمانده، ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل کننده برای این مسئله با $\alpha(x,t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(x+t)}{1.0} \right)$ به صورت زیر است:

$$R = 1/933238E-19, s_1 = 1, s_\tau = 0/649972, k_\tau = 1, k_\tau = 0/707835, u_{11} = 0, u_{12} = 0, u_{13} = 0, u_{21} = 0, u_{22} = 0, u_{23} = 0, u_{31} = 0, u_{32} = 1, u_{33} = 0, u_{41} = 0, u_{42} = 0, u_{43} = 0.$$

شایان ذکر است که نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی مقاله‌ی حاضر با توجه به جدول (۱) و شکل (۱) دقیق بوده و خطاهای مطلق، ناچیز است.



شکل (۱): نمودارهای جواب تقریبی (سمت چپ) و خطای مطلق (سمت راست) با $m_1 = 3, m_2 = 2$ و

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sin(x+t)}{1.0} \right)$$

مثال ۲: معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی

$$u_t(x, t) + {}^c D_t^{\alpha(x,t)} u(x, t) + u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) + u^\tau(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, 1], \quad (22)$$

با شرایط اولیه و مرزی و تابع $f(x, t)$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t^{\frac{\tau}{2}},$$

$$f(x, t) = \left(\frac{\Gamma(\frac{5}{2}) t^{\frac{\tau}{2} - \alpha(x,t)}}{\Gamma(\frac{5}{2} - \alpha(x,t))} + \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \right) x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} t^{\frac{\tau}{2}} x^{\frac{\tau}{2}} - \frac{15}{4} t^{\frac{\tau}{2}} x^{\frac{1}{2}} + (t^{\frac{\tau}{2}} x^{\frac{5}{2}})^{\tau},$$

که دارای جواب تحلیلی $u(x, t) = t^{\frac{\tau}{2}} x^{\frac{5}{2}}$ است. این معادله را با روش پیشنهادی با $m_1 = 4$,

$m_2 = 2$ ، $\alpha(x, t) = \frac{1 + \cos(xt)}{3.0}$ و $\alpha(x, t) = \frac{1 - (xt)^{\tau}}{1.0}$ حل می‌کنیم. ماکسیمم خطای

مطلق در بعضی از نقاط $(x, t) \in [0, 1] \times (0, 1]$ در جدول (۲) محاسبه شده است.

نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و نمودار خطای مطلق (سمت راست) با $\alpha(x, t) = \frac{1 - (xt)^{\tau}}{1.0}$

در شکل (۲) نشان داده شده‌اند. خطای باقیمانده، ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل کننده با

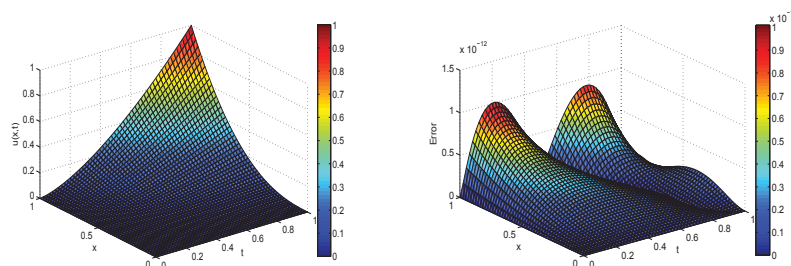
$$\alpha(x, t) = \frac{1 - (xt)^{\tau}}{1.0}$$

به صورت زیر است:

$R = 1/264737E-20$, $s_x = 0/5$, $s_r = 0/597238$, $k_r = 0/5$, $k_r = 1/018289$,
 $k_r = 0/018289$, $u_{11} = 0$, $u_{1r} = 0$, $u_{1r} = 0$, $u_{r1} = 0$, $u_{rr} = 0$, $u_{rr} = 0$, $u_{r1} = 0$, $u_{rr} = 1$, $u_{rr} = 0$,
 $u_{r1} = 0$, $u_{r2} = 0/018379$, $u_{r2} = -0/015630$, $u_{\delta 1} = 0$, $u_{\delta 2} = -0/018379$, $u_{\delta 2} = 0/015630$.

جدول (۲): خطاهای مطلق حاصل از روش پیشنهادی برای مثال ۲

$\alpha(x, t) = \frac{1+\cos(xt)}{30}$	$\alpha(x, t) = \frac{1-(xt)^2}{10}$	(x, t)
$2/5857E-14$	$1/1864E-14$	(0/1, 0/1)
$1/0588E-13$	$6/8795E-14$	(0/2, 0/2)
$1/8708E-13$	$1/6873E-13$	(0/3, 0/3)
$2/0981E-13$	$2/6304E-13$	(0/4, 0/4)
$1/4275E-13$	$2/7808E-13$	(0/5, 0/5)
$1/2369E-14$	$1/5731E-13$	(0/6, 0/6)
$2/2507E-13$	$9/1328E-14$	(0/7, 0/7)
$4/2688E-13$	$3/5891E-13$	(0/8, 0/8)
$4/6572E-13$	$4/2648E-13$	(0/9, 0/9)



شکل (۲): نمودارهای جواب تقریبی (سمت چپ) و خطای مطلق (سمت راست) با $m_r = 2$, $m_1 = 4$ و

$$\alpha(x, t) = \frac{1-(xt)^2}{10}$$

توجه کنید که نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی مقاله‌ی حاضر بسیار دقیق بوده و با به کارگیری تعداد کمی از جملات توابع پایه‌ای، یک تقریب خوب برای جواب دقیق مسئله به دست می‌آید.

مثال ۳: معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی

$$u_t(x, t) + {}^c D_t^{\alpha(x, t)} u(x, t) + u_x(x, t) - u_{xx}(x, t) + u^{\frac{\gamma}{2}}(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times (0, 1], \quad (23)$$

با شرایط اولیه و مرزی و تابع $f(x, t)$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(x, 0) = 0, \\ u(0, t) = t^\gamma, \quad u(1, t) = t^\gamma e,$$

$$f(x, t) = \left(\frac{6t^{\gamma-\alpha(x, t)}}{\Gamma(\gamma-\alpha(x, t))} + 3t^\gamma \right) e^x + (t^\gamma e^x)^{\frac{\gamma}{2}},$$

که دارای جواب تحلیلی $u(x, t) = t^\gamma e^x$ است. این معادله را با روش پیشنهاد شده با $m_1 = 4$,

$$\alpha(x, t) = \frac{5 - (xt)^\gamma}{\gamma} \quad \text{و} \quad \alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^\gamma(xt)}{3}, \quad m_\gamma = 3$$

جدول (3): خطاهای مطلق حاصل از روش پیشنهادی برای مثال 3

$\alpha(x, t) = \frac{5 - (xt)^\gamma}{\gamma}$	$\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^\gamma(xt)}{3}$	(x, t)
4/3565E-07	8/3650E-08	(0/1, 0/1)
1/7121E-06	3/0202E-07	(0/2, 0/2)
3/3239E-06	1/0208E-06	(0/3, 0/3)
4/4408E-06	2/6061E-06	(0/4, 0/4)
4/2530E-06	4/6697E-06	(0/5, 0/5)
2/2507E-06	5/8270E-06	(0/6, 0/6)
9/8292E-07	4/6550E-06	(0/7, 0/7)
2/7231E-06	1/7313E-06	(0/8, 0/8)
2/5098E-07	3/8414E-07	(0/9, 0/9)

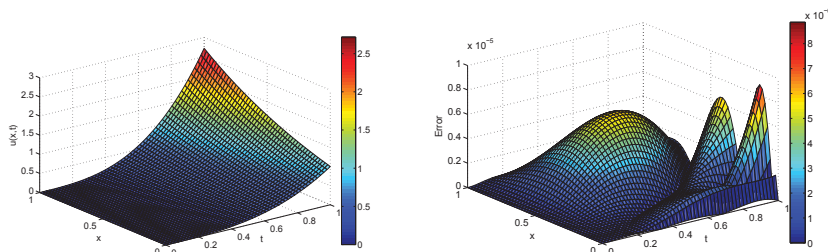
ماکسیمم خطای مطلق در بعضی از نقاط $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ برای $\alpha(x, t)$ های مختلف در جدول (3) محاسبه شده است. نمودار جواب تقریبی (سمت چپ) و نمودار خطای مطلق (سمت

راست) با $\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^\gamma(xt)}{3}$ در شکل (3) نشان داده شده‌اند. با استفاده از روش

استفاده شده در بخش 3، خطای باقیمانده، ضرایب آزاد و پارامترهای کنترل کننده برای این مسئله

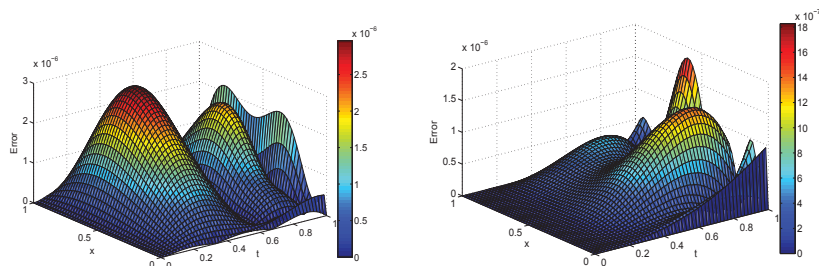
با $\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^\gamma(xt)}{3}$ به صورت زیر است:

$R = 4/7 \times 10^{-8}$, $S_1 = 2/3 \times 10^{-8}$, $S_r = 0/991595$, $S_r = 0/322980$, $k_r = -0/019459$,
 $k_r = -0/053259$, $k_r = 0/608507$, $u_{11} = 0$, $u_{1r} = 0/208232$, $u_{1r} = 0/795764$, $u_{1r} = -0/003996$,
 $u_{r1} = 0$, $u_{r2} = 0/192094$, $u_{r2} = 0/807317$, $u_{r2} = 0/000160$, $u_{r1} = 0$, $u_{r2} = 0/786844$,
 $u_{r2} = 0/406105$, $u_{r2} = -0/007727$, $u_{r1} = 0$, $u_{r2} = 0/036274$, $u_{r2} = 0/157503$, $u_{r2} = 0/010697$,
 $u_{\Delta 1} = 0$, $u_{\Delta r} = 0/050746$, $u_{\Delta r} = -0/003580$, $u_{\Delta r} = -0/009996$.



شکل (۳): نمودارهای جواب تقریبی (سمت چپ) و خطای مطلق (سمت راست) با $m_r = 3$ ، $m_1 = 4$

$$\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^2(xt)}{3_0} \text{ و}$$



شکل (۴): نمودارهای خطای مطلق با $m_r = 4$ ، $m_1 = 5$ و $\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^2(xt)}{3_0}$ (سمت چپ) و

$$\alpha(x, t) = \frac{5 - (xt)^4}{\gamma} \text{ (سمت راست).}$$

اکنون این مسئله را با روش پیشنهادشده با $m_r = 4$ ، $m_1 = 5$ و $\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^2(xt)}{3_0}$

$\alpha(x, t) = \frac{3 - \sin^2(xt)}{3_0}$ با $\alpha(x, t) = \frac{5 - (xt)^4}{\gamma}$ حل می‌کنیم. نمودارهای خطاهای مطلق با

سمت چپ) و $\alpha(x, t) = \frac{\delta - (xt)^\gamma}{\gamma}$ (سمت راست) در شکل (۴) نشان داده شده است. از جدول (۳) و نمودارهای رسم شده در شکل‌های (۳) و (۴) به وضوح دیده می‌شود که روش پیشنهادی روشی مؤثر برای حل این مسئله است. شایان ذکر است که با افزایش m_1 و m_2 و در نظر گرفتن قضیه‌ی ۲، دقت بهتر می‌شود.

۵- جمع‌بندی

در این مقاله یک روش بهینه‌سازی بر اساس رده‌ای از توابع پایه‌ای منسوب به چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته برای حل معادله‌ی غیرخطی انتشار و انتقال کسری مرتبه‌ی متغیر زمانی ارائه شده است. در این روش ماتریس عملگری مشتق کسری مرتبه‌ی متغیر نقش اساسی را بازی کرده است. همچنین نشان داده شده است که تعداد کمی از جملات چندجمله‌ای‌های تعمیم‌یافته برای به دست آوردن نتایج مطلوب، موردنیاز است. بر اساس نتایج عددی به دست آمده، به وضوح دیده می‌شود که روش ارائه شده برای حل معادله‌ی مذکور مؤثر است.

منابع

- [1] Ciombra, C. F. M. (2013). Mechanics with variable-order differential operators, *Ann. Phys.*, **12** (11-12), 692-703.
- [2] Pedro, H. T. C., Kobayashi, M. H., Pereira, J. M. C. and Coimbra, C. F. M. (2008). Variable order modeling of diffusive-convective effects on the oscillatory flow past a sphere, *J. Vib. Control*, **14**, 1569-1672.
- [3] Ramirez, L. E. S. and Coimbra, C. F. M. (2011). On the variable order dynamics of the nonlinear wake caused by a sedimenting particle, *Physica D*, **240**, 1111-1118.
- [4] Shyu, J. J., Pei, S. C. and Chan, C. H. (2009). An iterative method for the design of variable fractional-order FIR differentiators, *Signal Process.*, **89**, 320-327.
- [5] Sun, H. G., Chen, W. and Chen, Y. Q. (2009). Variable-order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling, *Phys. A*, **388**, 4586-4592.
- [6] Zahra, W. K. and Hikal, M. M. (2017). Nonstandard finite difference method for solving variable order fractional control problems, *J. Vib. Control*, **23** (6), 948-958.
- [7] Ramirez, L. E. S. and Coimbra, C. F. M. (2007). Variable order constitutive relation for viscoelasticity, *Ann. Phys.*, **16**, 543-552.

- [8] Chen, C. M. (2013). Numerical methods for solving a two-dimensional variable-order modified diffusion equation. *Appl. Math. Comput.*, **225**, 62-78.
- [9] Bhrawy, A. H. and Zaky, M. A. (2016). Numerical simulation for two-dimensional variable-order fractional nonlinear cable equation, *Nonlinear Dyn.*, **80** (1), 101-116.
- [10] Shen, S., Liu, F., Chen, J., Turner, I. and Anh, V. (2012). Numerical techniques for the variable order time fractional diffusion equation, *Appl. Math. Comput.*, **218**, 10861-10870.
- [11] Yang, X. J. and Tenreiro Machado, J. A. (2017). A new fractional operator of variable order: application in the description of anomalous diffusion equation, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **481**, 276-283.
- [12] Dahaghin, M. Sh. and Hassani, H. (2017). An optimization method based on the generalized polynomials for nonlinear variable-order time fractional diffusion-wave equation, *Nonlinear Dyn.*, **88** (3), 1587-1598.
- [13] Li, X. Y. and Wu, B. (2015). A numerical technique for variable fractional functional boundary value problems, *Appl. Math. Lett.*, **43**, 108-113.
- [14] Chen, C. M., Liu, F., Anh, V. and Turner, I. (2010). Numerical schemes with high spatial accuracy for a variable-order anomalous subdiffusion equation, *SIAM J. Sci. Comput.*, **32** (4), 1740-1760.
- [15] Bhrawy, A. H. and Zaky, M. A. (2017). An improved collocation method for multi-dimensional space-time variable-order fractional Schrödinger equations, *Appl. Numer. Math.*, **11**, 197-218.
- [16] Zhang, H., Liu, F., Phanikumar, M, S. and Meerschaert, M. M. (2013). A novel numerical method for the time variable fractional order mobile-immobile advection-dispersion model, *Comput. Math. Appl.*, **66**, 693-701.
- [17] Chen, S., Liu, F. and Burrage, K. (2014). Numerical simulation of a new two-dimensional variable-order fractional percolation equation in non-homogeneous porous media, *Comput. Math. Appl.*, **68** (12), 2133-2141.
- [18] Chen, Y. M., Wei, Y. Q., Liu, D. Y., Boutat, D. and Chen, X. K. (2016). Variable-order fractional numerical differentiation for noisy signals by wavelet denoising, *J. Comput. Phys.*, **311**, 338-347.
- [19] Zhao, X., Sun, Z. Z. and Karniadakis, G. E. (2015). Second-order approximations for variable order fractional derivatives: Algorithms and applications, *J. Comput. Phys.*, **293**, 184-200.

- [20] Li, X. Y. and Wu, B. (2015). A numerical technique for variable fractional functional boundary value problems, *Appl. Math. Lett.*, **43**, 108-113.
- [21] Jia, Y. T., Xu, M. Q. and Lin, Y. Z. (2017). A numerical solution for variable order fractional differential equation, *Appl. Math. Lett.*, **64**, 125-130.
- [22] Atangana, A. (2015). On the stability and convergence of the time-fractional variable order telegraph equation, *J. Comput. Phys.*, **293**, 104-114.
- [23] Chen, C. M. (2013). Numerical methods for solving a two-dimensional variable-order modified diffusion equation, *Appl. Math. Comput.*, **225**, 62-78.
- [24] Zhou, F. and Xu, X. (2016). The third kind Chebyshev wavelet collocation method for solving the time-fractional convection diffusion equations with variable coefficients, *Appl. Math. Comput.*, **280**, 11-29.
- [25] Behroozifar, M. and Sazmand, A. (2017). An approximate solution based on Jacobi polynomials for time-fractional convection-diffusion equation, *Appl. Math. Comput.* **296**, 1-17.
- [26] Chen, M. H. and Deng, W. H. (2014). A second-order numerical method for two-dimensional two-sided space fractional convection diffusion equation, *Appl. Math. Model.* **38 (13)**, 3244-3259.
- [27] Li, H. F., Cao, J. X. and Li, C. P. (2016). High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection-diffusion equations (III), *J. Comput. Appl. Math.*, **299**, 159-175.
- [28] Wang, Y. M. (2015). A compact finite difference method for a class of time fractional convection-diffusion-wave equations with variable coefficients, *Numer. Algor.*, **70**, 635-651.
- [29] Dahaghin, M. Sh. and Hassani, H. (2017). A new optimization method for a class of time fractional convection-diffusion-wave equations with variable coefficients, *Eur. Phys. J. Plus*, **132**: 130, DOI 10.1140/epjp/i2017-11407-y.
- [30] Shen, S., Liu, F., Anh, V., Turner, I. and Chen, J. (2013). A characteristic difference method for the variable-order fractional advection-diffusion equation, *J. Appl. Math. Comput.*, **42**, 371-386.
- [31] Wang, J., Liu, T., Li, H., Liu, Y. and He, S. (2017). Second-order approximation scheme combined with H^1 -Galerkin MFE method for nonlinear time fractional convection-diffusion convection-diffusion equation, *Comput. Math. Appl.*, **73 (6)**, 1182-1196.

- [32] Liu, T. (2018). A wavelet multiscale method for the inverse problem of a nonlinear convection-diffusion equation, *J. Comput. Appl. Math.*, **330**, 165-176.
- [33] Srinivasan, S., Poggie, J. and Zhang, X. (2018). A positivity-preserving high order discontinuous Galerkin scheme for convection-diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, **366**, 120-143.
- [34] Ezz-Eldien, S. S., Doha, Bhrawy, A. H., El-Kalaawy, A. A. and Tenreiro Machado, J. A. (2018). A new operational approach for solving fractional variational problems depending on indefinite integrals, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, **57**, 246-263.
- [35] Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons. Inc.

A New Optimization Operational Matrix Algorithm for Solving Nonlinear Variable-Order Time Fractional Convection-Diffusion Equation

Hossein Hassani* and Eskandar Naraghirad**

*Department of Mathematics, Shahrekord University, Shahrekord, Iran.

**Department of Mathematics, Yasouj University, Yasouj, Iran.

Abstract

In this paper, a new and effective optimization algorithm is proposed for solving the nonlinear time fractional convection-diffusion equation with the concept of variable-order fractional derivative in the Caputo sense. For finding the solution, we first introduce the generalized polynomials (GPs) and construct the variable-order operational matrices. In the proposed optimization technique, the solution of the problem under consideration is expanded in terms of GPs with unknown free coefficients and control parameters. The main advantage of the presented method is to convert the variable-order fractional partial differential equation to a system of nonlinear algebraic equations. Also, we obtain the free coefficients and control parameters optimally by minimizing the error of the approximate solution. Finally, the numerical examples confirm the high accuracy and efficiency of the proposed method in solving the problem under study.

Keywords: Nonlinear variable-order time fractional convection-diffusion equation, Operational matrices, Optimization algorithm, Generalized polynomials (GPs), Control parameters.

Mathematics Subject Classification (2010): 35Q90, 35R11, 74G15.