وجود و یکتایی جواب‌های متناوب مجانبی در مدل شکار- شکارچی دوری چهار گونه‌ای

محمدحسین رحمانی‌دوست[1]، فرزانه مطهری‌نسب

گروه ریاضی، دانشگاه نیشابور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۰/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۸/۸

چکیده: در دهه‌های گذشته خواص دینامیکی در مدل‌های شکار- شکارچی در حوزه اکولوژی ریاضی به‌طور ویژه بررسی شده است. به‌علاوه پایداری و کران‌داری جواب در مدل‌های جمعیتی دوره‌ای، تأخیری و غیره موردمطالعه قرارگرفته است. در این مقاله یک مدل غیرخطی شکار- شکارچی از نوع پاسخ عملکردی سیگمویدی مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته است. در حقیقت یک مدل شکار- شکارچی دوری چهارگونه‌ای تجزیه‌وتحلیل شده و شرایط کافی برای پایداری و کران‌داری جواب‌های دستگاه معادلات شکار- شکارچی ارائه‌شده است. در این خصوص از نظریه نامساوی‌های دیفرانسیلی کمک گرفته‌شده و درنهایت با ساختن تابع لیاپانوف مناسب وجود و یکتایی جواب متناوب مجانبی سراسری که پایداری مجانبی باشد، اثبات شده است.

واژه‌های کلیدی: شکار- شکارچی، پاسخ عملکردی، سیگموییدی، تابع لیاپانوف، پایداری.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۳۴K۲۸، ۳۷B۵۵.

۱- مقدمه

مسئله شکار- شکارچی مسئله قدیمی است که به دستگاه معادلات لوکتا- ولترا مشهور است و سابقه آن به اوایل دهه سوم قرن بیستم می‌رسد. این مسئله توجه دانشمندان و محققان زیادی را به خود جلب کرده است. تحقیق‌های فراوانی در این خصوص انجام‌شده و کتاب‌ها و مقاله‌های زیادی به رشته تحریر آمده است که به‌عنوان‌مثال می‌توان به [۱ الی ۴] مراجعه کرد. رابطه دینامیکی بین گونه‌های جمعیتی به‌عنوان یک موضوع برجسته در علوم اکولوژی، بیولوژی

۱ - آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: mh.rahmanidoust@neyshbur.ac.ir

(زیست‌شناسی) و ریاضی سابقه داشته و دارد. تا حدی که رشته‌ی بین‌رشته‌ای "ریاضیات زیستی " به وجود آمده است. در حقیقت قرن گذشته قرن "ریاضی و فیزیک " بود، درحالی‌که قرن حاضر قرن "ریاضی و زیست " است. بدین دلیل است که محققان زیادی در سراسر دنیا علاقه‌مند شده‌اند که در این حوزه تحقیق کنند. در یک نگاه اولیه این مسائل ممکن است ساده ظاهر شوند، ولی در حقیقت مسائل غیرخطی خیلی پیچیده‌اند و مبارز می‌طلبند.

نوعی از دستگاه معادلات غیرخطی شکار- شکارچی سه گونه‌ای دوری در [۵] بررسی‌شده است. یان و چن بقاء دستگاه معادلات شکار-شکارچی چندگونه‌ای رقابتی با پاسخ تابعی را بررسی کرده‌اند [۶]. وجود جواب‌های تقریباً " متناوب در [۷] بررسی شده است. برای درک بیشتر مفاهیمی از قبیل پایداری مجانبی، کران‌داری، متناوب و غیره و همچنین مرجع‌های نسبتاً " کاملی در ریاضی زیستی و ریاضی اکولوژی می‌توان به کتاب‌های معادلات دیفرانسیل و ریاضیات زیستی از جمله [۸ الی ۱۳] مراجعه کرد.

در این تحقیق مدل غیرخطی شکار- شکارچی سه گونه‌ای دوری به چهارگونه‌ای تعمیم‌یافته و سپس تجزیه‌وتحلیل شده است. مطلب قابل‌توجه این است که در این تعمیم همان نتیجه مدل قبلی حاصل‌شده است. بدین منظور، ابتدا دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_1(t)[r_1(t)-a_1(t)x_1(t)-\dfrac{d_1(t)x_1(t)x_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)} \\ \qquad +\dfrac{k_4(t)d_4(t)x_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}] \\ x_2'(t)=x_2(t)[r_2(t)-a_2(t)x_2(t)-\dfrac{d_2(t)x_2(t)x_3(t)}{c_2(t)+b_2(t)x_2(t)+x_2^2(t)} \\ \qquad +\dfrac{k_1(t)d_1(t)x_1^2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}] \\ x_3'(t)=x_3(t)[r_3(t)-a_3(t)x_3(t)-\dfrac{d_3(t)x_3(t)x_4(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)} \\ \qquad +\dfrac{k_2(t)d_2(t)x_2^2(t)}{c_2(t)+b_2(t)x_2(t)+x_2^2(t)}] \\ x_4'(t)=x_4(t)[r_4(t)-a_4(t)x_4(t)-\dfrac{d_4(t)x_4(t)x_1(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)} \\ \qquad +\dfrac{k_3(t)d_3(t)x_3^2(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)}] \end{cases} \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که

۱. $x_{۱}(t)$ چگالی جمعیت گونه اول به‌عنوان شکارچی گونه چهارم و شکار گونه دوم؛

۲. $x_{۲}(t)$ چگالی جمعیت گونه دوم به‌عنوان شکارچی گونه اول و شکار گونه سوم؛

۳. $x_{۳}(t)$ چگالی جمعیت گونه سوم به‌عنوان شکارچی گونه دوم و شکار گونه چهارم؛

۴. $x_{۴}(t)$ چگالی جمعیت گونه چهارم به‌عنوان شکارچی گونه سوم و شکار گونه اول

در نظر گرفته‌شده‌اند.

مقادیر $x_i(۰)=\varnothing_i(۰)$ وقتی $i=۱,۲,۳,۴$ به‌عنوان شرط اولیه دستگاه (۱) مثبت فرض می‌شوند. ضرایب $a_i(t)$، $b_i(t)$، $c_i(t)$، $d_i(t)$، $r_i(t)$ و $k_i(t)$ در فرض ۶ به‌طور کامل معرفی شده‌اند. در این مدل چگالی وابسته و پاسخ عملکردی سیگمویدی است.

۲- تعاریف و فرض‌های موردنیاز

ابتدا چند تعریف لازم و سپس فرض‌های موردنیاز ارائه خواهند شد.

۳- بحث و نتایج اصلی

۳-۱ پایداری

حال چند لم که موردنیاز قضیه‌های اصلی‌اند، ارائه‌می‌شوند.

لم ۱۲ [۷]: الف) اگر $a>۰$، $b>۰$، $x^{\cdot}\geq x(b-ax)$ و $t\geq۰$، آنگاه با شرط اولیه $x(۰)>۰$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\liminf_{t\to\infty} x(t)\geq\frac{b}{a}.$$

ب) اگر $a>۰$، $b>۰$، $x^{\cdot}\leq x(b-ax)$ و $t\geq۰$، آنگاه با شرط اولیه $x(۰)>۰$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\limsup_{t\to\infty} x(t)\leq\frac{b}{a}\ .$$

لم ۱۳: مجموعه $\left\{\left(x_{۱}(t),x_{۲}(t),x_{۳}(t),x_{۴}(t)\right)\middle| x_i\rangle۰\ ,\forall i=۱,۲,۳,۴\right\}$ برای دستگاه (۱) پایای مثبت است.

اثبات: جواب دستگاه (۱) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1(t)=x_1(0)exp\int_0^t\left[r_1(s)-a_1(s)x_1(s)-\dfrac{d_1(s)x_1(s)x_2(s)}{c_1(s)+b_1(s)x_1(s)+x_1^2(s)}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{k_4(s)d_4(s)x_4^2(s)}{c_4(s)+b_4(s)x_4(s)+x_4^2(s)}\right] \\ x_2(t)=x_2(0)exp\int_0^t\left[r_2(s)-a_2(s)x_2(s)-\dfrac{d_2(s)x_2(s)x_3(s)}{c_2(s)+b_2(s)x_2(s)+x_2^2(s)}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{k_1(s)d_1(s)x_1^2(s)}{c_1(s)+b_1(s)x_1(s)+x_1^2(s)}\right] \\ x_3(t)=x_3(0)exp\int_0^t\left[r_3(s)-a_3(s)x_3(s)-\dfrac{d_3(s)x_3(s)x_4(s)}{c_3(s)+b_3(s)x_3(s)+x_3^2(s)}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{k_2(s)d_2(s)x_2^2(s)}{c_2(s)+b_2(s)x_2(s)+x_2^2(s)}\right] \\ x_4(t)=x_4(0)exp\int_0^t\left[r_4(s)-a_4(s)x_4(s)-\dfrac{d_4(s)x_4(s)x_1(s)}{c_4(s)+b_4(s)x_4(s)+x_4^2(s)}\right. \\ \qquad\left.+\dfrac{k_3(s)d_3(s)x_3^2(s)}{c_3(s)+b_3(s)x_3(s)+x_3^2(s)}\right] \end{cases} \qquad (2)$$

از مثبت بودن مقادیر اولیه $x_i(0)=\varnothing_i(0)$, $i=1,2,3,4$ و با توجه به خاصیت تابع‌نمایی نتیجه می‌شود سمت راست هرکدام از معادلات دستگاه (۲) مثبت است. بنابراین مجموعه

$$\left\{\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t)\right)\middle|x_i\rangle 0,\forall i=1,2,3,4\right\}$$

برای دستگاه (۱) پایای مثبت است.

قضیه ۱۴: اگر فرض‌های ۶، ۷، ۸ و ۹ برقرار باشند، آنگاه دستگاه (۱) پایدار است. بعلاوه مجموعه

$$\left\{\left(x_1,x_2 x_3,x_4\right)|\, x_i\in R_+,m_i\le x_i\le M_i\ \ ,i=1,2,3,4\right\}$$

برای دستگاه (۱) نهایتاً کران‌دار است.

اثبات: دستگاه (۱) با مقادیر اولیه $\left(x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0)\right)$ دارای جواب مثبت $\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t)\right)$ مار بر نقطه $\left(x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0)\right)$ است. حال

فرض کنید جواب $\left(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)\right)$ یک جواب دلخواه از دستگاه (۱) با شرط اولیه $\left(x_1(0), x_2(0), x_3(0), x_4(0)\right)$ باشد. معادله اول از دستگاه (۱) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt}(t) &= x_1(t)\left[r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - \frac{d_1(t)x_1(t)x_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}\right.\\ &\left.+\frac{k_4(t)d_4(t)x_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}\right]\\ &\le x_1(t)\left[r_1(t)-a_1(t)x_1(t)+k_4(t)d_4(t)\right]\end{aligned}.$$

با استفاده از فرض ۷، نامساوی

$$\frac{dx_1(t)}{dt}(t) \le x_1(t)\left[r_1^U + k_4^U d_4^U - a_1^L x_1(t)\right] \tag{۳}$$

برقرار است. لم ۱۲ و فرض ۸ نتیجه می‌دهند

$$\limsup_{t\to\infty} x_1(t) \le M_1 \tag{۴}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt}(t) &= x_1(t)\left[r_1(t) - a_1(t)x_1(t) - \frac{d_1(t)x_1(t)x_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}\right.\\ &\left.+\frac{k_4(t)d_4(t)x_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}\right]\\ &\ge x_1(t)\left[r_1(t)-a_1(t)x_1(t)-\frac{d_1(t)x_2(t)}{b_1}\right]\\ &\ge x_1(t)\left[r_1^L - a_1^L x_1(t) - \frac{d_1^U(t)(M_2+\varepsilon)}{b_1^L}\right]\end{aligned}$$

که ε هر مقداری مثبت دلخواه می‌تواند باشد. لذا نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}(t) \ge x_1(t)\left[r_1^L - a_1^U x_1(t) - \frac{d_1^U(t)(M_2+\varepsilon)}{b_1^L}\right] \tag{۵}$$

حال اگر ε به سمت صفر میل کند نتیجه می‌شود

$$\frac{dx_1(t)}{dt}(t) \ge x_1(t)\left[r_1^L - a_1^U x_1(t) - \frac{d_1^U(t) M_2}{b_1^L}\right] \quad (6)$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_1(t) \ge m_1 \quad (7)$$

لذا T_1 مثبتی وجود دارد که برای هر t بزرگ‌تر از T_1 نامساوی زیر برقرار است:

$$x_1(t) \le M_1 + \varepsilon \quad (8)$$

به روند مشابهی که از بیان جزییات صرف‌نظر می‌شود، از معادله دوم دستگاه (۱) نتیجه می‌شود

$$\limsup_{t\to\infty} x_2(t) \le M_2 \quad (9)$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_2(t) \ge m_2 \quad (10)$$

در نتیجه T_2 مثبتی وجود دارد که برای هر t بزرگ‌تر از T_2 نامساوی

$$x_2(t) \le M_2 + \varepsilon \quad (11)$$

برقرار است. به‌طور مشابه از معادله سوم دستگاه (۱) نتیجه می‌شود

$$\limsup_{t\to\infty} x_3(t) \le M_3 \quad (12)$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_3(t) \ge m_3. \quad (13)$$

لذا مقدار مثبتی مانند T_3 وجود دارد که برای هر t بزرگ‌تر از T_3 نامساوی

$$x_3(t) \le M_3 + \varepsilon \quad (14)$$

برقراراست. به‌طور مشابه از معادله چهارم دستگاه (۱) نتیجه می‌شود:

$$\limsup_{t\to\infty} x_4(t) \le M_4 \quad (15)$$

$$\liminf_{t\to\infty} x_4(t) \ge m_4. \quad (16)$$

لذا مقدار مثبتی مانند T_4 وجود دارد که برای هر t بزرگ‌تر از T_4 نامساوی برقراراست

$$x_4(t) \le M_4 + \varepsilon \quad (17)$$

برقراراست. با در نظر گرفتن نامساوی‌های ۴، ۷، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۳، ۱۵ و ۱۶ دیده می‌شود که شرایط پایداری در تعریف (۴) برقراراست، بنابراین دستگاه (۱) پایداراست. همچنین نامساوی‌های ۸، ۱۱، ۱۴ و ۱۷ نتیجه می‌دهد که شرایط نهایتاً کران‌داری در تعریف (۵) برقراراست. در نتیجه مجموعه زیر برای دستگاه (۱) نهایتاً کران‌دار است:

$$.\left\{(x_1, x_2 x_3, x_4) \mid x_i \in R_+, m_i \le x_i \le M_i \;, i = 1,2,3,4\right\}.$$

لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

۳-۲- وجود و یکتایی

در این بخش وجود و یکتایی جواب متناوب مجانبی دستگاه (۱) بررسی می‌شود. با فرض $f \in C\left(\left[-r,0\right],R^{n}\right)$ و $x_{t} \in C$، دستگاه متناوب مجانبی

$$\frac{dx}{dt}=f\left(t,x_{t}\right) \tag{۱۸}$$

را در نظر گرفته و تعریف کنید $\theta \epsilon\left[-r,0\right]$, $x_{t}\left(\theta\right)=x\left(\theta+t\right)$. همچنین برای $x=\left(x_{1},x_{2}x_{3},\dots,x_{n}\right)\in R^{n}$ تعریف کنید: $\left|x\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|x_{i}\right|$. از برهان قضیه (۱۴) نتیجه می‌شود H مثبتی وجود دارد که

$$\left|x\right|\le \eta M_{i}<H . \tag{۱۹}$$

حال برای $\varnothing\in C$ تعریف کنید:

$$\varnothing=\sup_{-r\le\theta\le 0}\left|\varnothing\left(t\right)\right|$$

$$\begin{cases} C_{H}=\left\{\varnothing\in C,\ \varnothing<H\right\} \\ S_{H}=\left\{x\in R^{n},\ \left|x\right|<H\right\} \end{cases}. \tag{۲۰}$$

دستگاه الحاقی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f\left(t,x_{t}\right) \\ \dfrac{dy}{dt}=f\left(t,y_{t}\right). \end{cases} \tag{۲۱}$$

لم ۱۵ [۱۴]: فرض کنید $v\in C\left(R_{+}\times S_{H}\times S_{H},R_{+}\right)$ در شرایط زیر برقرار باشد:

الف) $a\left(\left|x-y\right|\right)\le b\left(\left|x-y\right|\right)$ وقتی‌که $a\left(r\right)$ و $b\left(r\right)$ توابع صعودی پیوسته و مثبت‌اند.

ب) برای ثابت مثبتی مانند L

$$\left|v\left(t,x_{1},y_{1}\right)-v\left(t,x_{2},y_{2}\right)\right|\le L\left(\left|x_{1}-x_{2}\right|+\left|y_{1}-y_{2}\right|\right).$$

پ) تابع غیرصعودی پیوسته‌ای مانند $p\left(s\right)$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر s مثبت $p\left(s\right)>s$ برقرار باشد و

$$p\left(v\left(t,\varnothing\left(0\right),\varnothing\left(0\right)\right)\right)>v\left(t+\theta,\varnothing\left(\theta\right),\varnothing\left(\theta\right)\right)\ ,\ \theta\in\left[-r,0\right].$$

برای ثابت مثبتی مانند δ نتیجه دهد

$$\dot{v}\left(t,\varnothing\left(0\right),\varnothing\left(0\right)\right)\le-\delta v\left(t,\varnothing\left(0\right),\varnothing\left(0\right)\right).$$

به‌علاوه دستگاه (۱۸) جواب $\eta(t)$ دارا باشد که برای t بزرگ‌تر از t_0 نامساوی $\eta \le H$ برقرار باشد. آنگاه دستگاه (۱۸) جواب یکتای متناوب مجانبی دارد که به‌طور یکنواخت پایدار مجانبی است.

قضیه ۱۶: فرض کنید مقادیر θ_1، θ_2، θ_3 و θ_4 تعریف شده در فرض ۱۱ باشند. آنگاه دستگاه (۱) جواب متناوب مجانبی یکتایی دارد که پایدار مجانبی یکنواخت است.

اثبات: جواب دستگاه (۱) نهایتاً " کران‌دار است. حال دستگاه الحاقی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}
x_1'(t)=x_1(t)[r_1(t)-a_1(t)x_1(t)-\dfrac{d_1(t)x_1(t)x_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}+\dfrac{k_4(t)d_4(t)x_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}] \\
x_2'(t)=x_2(t)[r_2(t)-a_2(t)x_2(t)-\dfrac{d_2(t)x_2(t)x_3(t)}{c_2(t)+b_2(t)x_2(t)+x_2^2(t)}+\dfrac{k_1(t)d_1(t)x_1^2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}] \\
x_3'(t)=x_3(t)[r_3(t)-a_3(t)x_3(t)-\dfrac{d_3(t)x_3(t)x_4(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)}+\dfrac{k_2(t)d_2(t)x_2^2(t)}{c_2(t)+b_2(t)x_2(t)+x_2^2(t)}] \\
x_4'(t)=x_4(t)[r_4(t)-a_4(t)x_4(t)-\dfrac{d_4(t)x_4(t)x_1(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}+\dfrac{k_3(t)d_3(t)x_3^2(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)}] \\
u_1'(t)=u_1(t)[r_1(t)-a_1(t)u_1(t)-\dfrac{d_1(t)u_1(t)u_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)u_1(t)+u_1^2(t)}+\dfrac{k_4(t)d_4(t)u_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)u_4(t)+x_4^2(t)}] \\
u_2'(t)=u_2(t)[r_2(t)-a_2(t)u_2(t)-\dfrac{d_2(t)u_2(t)u_3(t)}{c_2(t)+b_2(t)u_2(t)+u_2^2(t)}+\dfrac{k_1(t)d_1(t)u_1^2(t)}{c_1(t)+b_1(t)u_1(t)+u_1^2(t)}] \\
u_3'(t)=u_3(t)[r_3(t)-a_3(t)u_3(t)-\dfrac{d_3(t)u_3(t)u_4(t)}{c_3(t)+b_3(t)u_3(t)+u_3^2(t)}+\dfrac{k_2(t)d_2(t)u_2^2(t)}{c_2(t)+b_2(t)u_2(t)+u_2^2(t)}] \\
u_4'(t)=u_4(t)[r_4(t)-a_4(t)x_4(t)-\dfrac{d_4(t)x_4(t)x_1(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}+\dfrac{k_3(t)d_3(t)x_3^2(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)}]
\end{cases}$$

(۲۲)

که دارای جواب زیر است:

$$X(t)=\left(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t)\right)$$
$$U(t)=\left(u_1(t),u_2(t),u_3(t),u_4(t)\right).$$

فرض کنید

$$\begin{cases} x_i^*(t)=lnx_i(t) \\ u_i^*(t)=lnu_i(t) \end{cases} \quad i=1,2,3,4 \tag{۲۳}$$

حال تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{4}\left|x_i^*-u_i^*\right|. \tag{۲۴}$$

با در نظر گرفتن

$$a(r)=b(r)=\sum_{i=1}^{4}\left|x_i^*-u_i^*\right| \tag{۲۵}$$

و استفاده از نامساوی

$$\left||a|-|b|\right|\leq|a-b| \tag{۲۶}$$

نتیجه می‌شود شرایط الف و ب در لم ۱۵ برقراراست. در نتیجه

$$D^+V(t)=\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{x_i'(t)}{x_i(t)}-\frac{u_i'(t)}{u_i(t)}\right)\times sign\left(x_i(t)-u_i(t)\right). \tag{۲۷}$$

از روابط (۲۲) و (۲۷) نامساوی طولانی زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
D^+V(t)\leq{}&-a_1^L\left|x_1(t)-u_1(t)\right|\\
&+\left[\frac{d_1(t)x_1(t)x_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}-\frac{d_1(t)u_1(t)u_2(t)}{c_1(t)+b_1(t)u_1(t)+u_1^2(t)}\right]\\
&+\left[\frac{k_4(t)d_4(t)x_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}-\frac{k_4(t)d_4(t)u_4^2(t)}{c_4(t)+b_4(t)u_4(t)+u_4^2(t)}\right]\\
&-a_2^L\left|x_2(t)-u_2(t)\right|+\left[\frac{d_2(t)x_2(t)x_3(t)}{c_2(t)+b_2(t)x_2(t)+x_2^2(t)}-\frac{d_2(t)u_2(t)u_3(t)}{c_2(t)+b_2(t)u_2(t)+u_2^2(t)}\right]\\
&+\left[\frac{k_1(t)d_1(t)x_1^2(t)}{c_1(t)+b_1(t)x_1(t)+x_1^2(t)}-\frac{k_1(t)d_1(t)u_1^2(t)}{c_1(t)+b_1(t)u_1(t)+u_1^2(t)}\right]\\
&-a_3^L\left|x_3(t)-u_3(t)\right|+\left[\frac{d_3(t)x_3(t)x_4(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)}-\frac{d_3(t)u_3(t)u_4(t)}{c_3(t)+b_3(t)u_3(t)+u_3^2(t)}\right]\\
&+\left[\frac{k_2(t)d_2(t)x_2^2(t)}{c_2(t)+b_2(t)x_2(t)+x_2^2(t)}-\frac{k_2(t)d_2(t)u_2^2(t)}{c_2(t)+b_2(t)u_2(t)+u_2^2(t)}\right]\\
&-a_4^L\left|x_4(t)-u_4(t)\right|+\left[\frac{d_4(t)x_4(t)x_1(t)}{c_4(t)+b_4(t)x_4(t)+x_4^2(t)}-\frac{d_4(t)u_4(t)u_1(t)}{c_4(t)+b_4(t)u_4(t)+u_4^2(t)}\right]\\
&+\left[\frac{k_3(t)d_3(t)x_3^2(t)}{c_3(t)+b_3(t)x_3(t)+x_3^2(t)}-\frac{k_3(t)d_3(t)u_3^2(t)}{c_3(t)+b_3(t)u_3(t)+u_3^2(t)}\right]
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
D^{+}V(t) \le & \left[-a_1^L + \frac{c_1^M d_1^M M_2 + d_1^M M_1^2 M_2}{\left(c_1^L + b_1^L m_1 + m_1^2\right)^2}\right] \times \left[x_1(t) - u_1(t)\right] \\
& + \left[\frac{c_1^M d_1^M M_1 + d_1^M b_1^M M_1^2 + d_1^M M_1^3}{\left(c_1^L + b_1^L m_1 + m_1^2\right)^2}\right] \times \left[x_2(t) - u_2(t]\right) \\
& + \left[-a_2^L + \frac{c_2^M d_2^M M_3 + d_2^M M_2^2 M_3}{\left(c_2^L + b_2^L m_2 + m_2^2\right)^2}\right] \times \left[x_2(t) - u_2(t)\right] \\
& + \left[\frac{c_2^M d_2^M M_2 + d_2^M b_2^M M_2^2 + d_2^M M_2^3}{\left(c_2^L + b_2^L m_2 + m_2^2\right)^2}\right] \times \left[x_3(t) - u_3(t)\right] \\
& + \left[-a_3^L + \frac{c_3^M d_3^M M_4 + d_3^M M_3^2 M_4}{\left(c_3^L + b_3^L m_3 + m_3^2\right)^2}\right] \times \left[x_3(t) - u_3(t)\right] \\
& + \left[\frac{c_3^M d_3^M M_3 + d_3^M b_3^M M_3^2 + d_3^M M_3^3}{\left(c_3^L + b_3^L m_3 + m_3^2\right)^2}\right] \times \left[x_4(t) - u_4(t)\right] \\
& + \left[-a_4^L + \frac{c_4^M d_4^M M_1 + d_4^M M_4^2 M_1}{\left(c_3^L + b_3^L m_3 + m_3^2\right)^2}\right] \times \left[x_4(t) - u_4(t)\right] \\
& + \left[-a_4^L + \frac{c_4^M d_4^M M_1 + d_4^M M_4^2 M_1}{\left(c_3^L + b_3^L m_3 + m_3^2\right)^2}\right] \times \left[x_4(t) - u_4(t)\right] \\
& + \left[\frac{c_4^M d_4^M M_4 + d_4^M b_4^M M_4^2 + d_4^M M_4^3}{\left(c_4^L + b_4^L m_4 + m_4^2\right)^2}\right] \times \left[x_1(t) - u_1(t)\right]
\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

توجه کنید برای $i = 1,2,3,4$ و $\eta_i(t)$ بین $x_i(t)$ و $u_i(t)$ تساوی‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\left|x_i(t) - u_i(t)\right| &= \left|\exp\left(x_i^*(t)\right) - \exp\left(u_i^*(t)\right)\right| \\
&= \left|\exp\left(\eta_i(t)\right)\right| \left|x_i^*(t) - u_i^*(t)\right|.
\end{aligned} \qquad (۳۰)$$

با کمی دقت نامساوی‌های زیر حاصل می‌شود:

$$m_i \left|x_i^*(t) - u_i^*(t)\right| \le \left|x_i(t) - u_i(t)\right| \le M_i \left|x_i^*(t) - u_i^*(t)\right|. \qquad (۳۱)$$

از روابط (۲۹) و (۳۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
D^{+}V(t) \le & \left[-a_1^L+\frac{c_1^M d_1^M M_2+d_1^M M_1^2 M_2}{\left(c_1^L+b_1^L m_1+m_1^2\right)^2}\right]\times m_1\left[x_1^*(t)-u_1^*(t)\right] \\
& +\left[\frac{c_1^M d_1^M M_1+d_1^M b_1^M M_1^2+d_1^M M_1^3}{\left(c_1^L+b_1^L m_1+m_1^2\right)^2}\right]\times M_2[x_2^*(t)-u_2^*(t) \\
& +\left[-a_2^L+\frac{c_2^M d_2^M M_3+d_2^M M_2^2 M_3}{\left(c_2^L+b_2^L m_2+m_2^2\right)^2}\right]\times m_2\left[x_2^*(t)-u_2^*(t)\right] \\
& +\left[\frac{c_2^M d_2^M M_2+d_2^M b_2^M M_2^2+d_2^M M_2^3}{\left(c_2^L+b_2^L m_2+m_2^2\right)^2}\right]\times M_3[x_3^*(t)-u_3^*(t) \\
& +\left[-a_3^L+\frac{c_3^M d_3^M M_4+d_3^M M_3^2 M_4}{\left(c_3^L+b_3^L m_3+m_3^2\right)^2}\right]\times m_3\left[x_3^*(t)-u_3^*(t)\right] \\
& +\left[\frac{c_3^M d_3^M M_3+d_3^M b_3^M M_3^2+d_3^M M_3^3}{\left(c_3^L+b_3^L m_3+m_3^2\right)^2}\right]\times M_4[x_4^*(t)-u_4^*(t) \\
& +\left[-a_4^L+\frac{c_4^M d_4^M M_1+d_4^M M_4^2 M_1}{\left(c_4^L+b_4^L m_4+m_4^2\right)^2}\right]\times m_4\left[x_4^*(t)-u_4^*(t)\right] \\
& +\left[\frac{c_4^M d_4^M M_4+d_4^M b_4^M M_4^2+d_4^M M_4^3}{\left(c_4^L+b_4^L m_4+m_4^2\right)^2}\right]\times M_1\left[x_1^*(t)-u_1^*(t)\right]
\end{aligned}$$

که با جایگزینی مقادیر θ_1، θ_2، θ_3 و θ_4 معرفی شده در فرض ۱۱ عبارت حاصل‌شده‌ی اخیر برابراست با

$$\begin{aligned}
&-[\theta_1\left|x_1^*(t)-u_1^*(t)\right|+\theta_2\left|x_2^*(t)-u_2^*(t)\right| \\
&\quad+\theta_3\left|x_3^*(t)-u_3^*(t)\right|+\theta_4\left|x_4^*(t)-u_4^*(t)\right|]
\end{aligned}$$

که نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$D^{+}V(t) \le -[\theta_1 |x_1^*(t)-u_1^*(t)| + \theta_2 |x_2^*(t)-u_2^*(t)| + \theta_3 |x_3^*(t)-u_3^*(t)| + \theta_4 |x_4^*(t)-u_4^*(t)|]. \quad (۳۲)$$

رابطه (۳۰) با انتخاب $\delta=\min(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ نامساوی

$$D^{+}V(t) \le -\delta(t) \quad (۳۳)$$

را نتیجه می‌دهد. نامساوی (۳۳) بیان می‌کند که شرط پ لم (۱۵) برقرار است. همانگونه که قبلا بیان شد، از روابط (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) شرایط الف و ب لم (۱۵) برقرار است. لذا شرایط لم (۱۵) برقرار است که نتیجه زیر حاصل می‌شود:

دستگاه (۱) جواب یکتای متناوب مجانبی دارد که به‌طور یکنواخت پایدار مجانبی است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

۴- شبیه‌سازی عددی

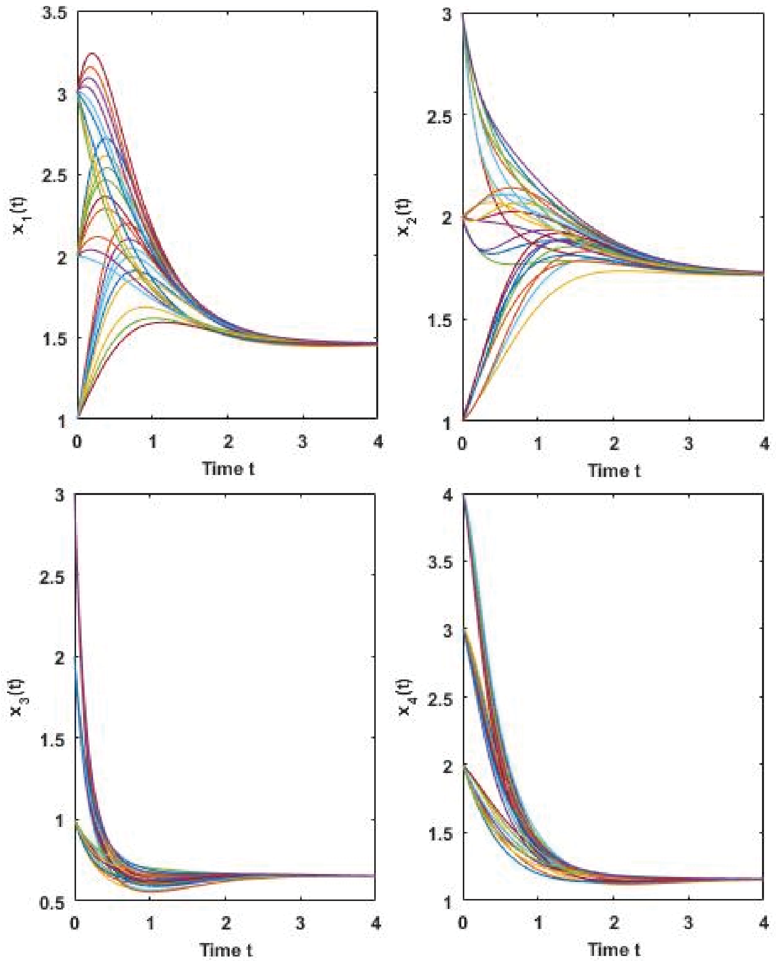
در این بخش، با هدف تأیید صحت نتایج به دست آمده در لم‌ها و قضایای پیشین، نتایج را شبیه‌سازی می‌کنیم. این شبیه‌سازی را توسط نرم‌افزار متلب ۲۰۱۶ انجام داده‌ایم. برای این منظور، پارامترهای مسئله را در دو حالت بررسی می‌نماییم. ابتدا در نظر بگیرید:

$$a_1=۱, a_2=۱, a_3=۱, a_4=۱, b_1=۱, b_2=۶۶, b_3=۲, b_4=۳,$$
$$c_1=۲, c_2=۶, c_3=۳, c_4=۴, d_1=۱, d_2=۵, d_3=۶, d_4=۶,$$
$$r_1=۱, r_2=۱, r_3=۱, r_4=۱, k_1=۲, k_2=۵, k_3=۱, k_4=۳,$$

با استفاده از فرض‌های ۸، ۹ و ۱۱ داریم:

$$m_1=۴, m_2\approx ۲/۹۷, m_3=۲۲, m_4\approx ۵/۶۷,$$
$$M_1=۷, M_2=۳, M_3=۲۶, M_4=۷,$$
$$\theta_1\approx ۰/۱۶۴۶, \theta_2\approx ۰/۹۷۰۳, \theta_3\approx -۱۲۷۶/۱, \theta_4\approx ۲/۸۲۰۷.$$

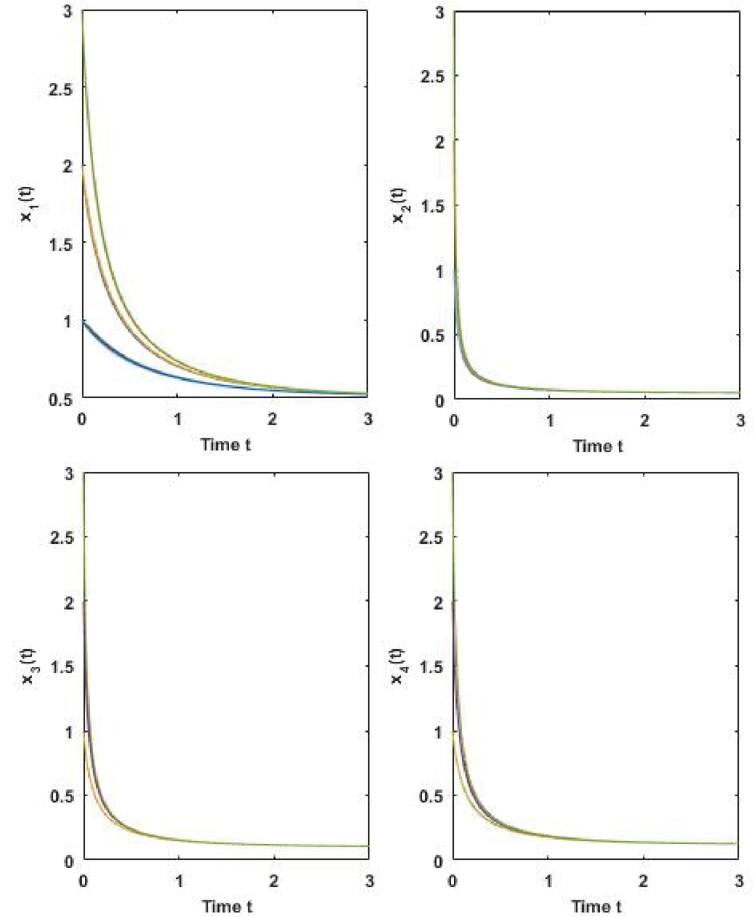
برای این مقادیر، فرض (۶) برقرار است ولی فرض (۱۰) و نامنفی بودن مقادیر θ_i در فرض (۱۱) برقرار نیستند. بنابر لم ۱۳، به ازای مقادیر اولیه مختلف و نامنفی، همگی جواب‌ها پایای مثبت هستند. این مطلب در شکل (۱) به‌وضوح قابل مشاهده است. همچنین با توجه به برقراری شرایط (۶) تا (۹)، قضیه ۱۴ بیان می‌کند که جواب‌ها پایدارند که در شکل (۱) نیز تمامی جواب‌ها به‌صورت پایدار به نقطه تعادل دستگاه (۱)، یعنی $x_1^*=۱/۴۷$، $x_2^*=۱/۷۳$، $x_3^*=۰/۶۵$، $x_4^*=۱/۱۶$ میل می‌کنند.



شکل (۱): نمودارهای $x_{۱}(t)$ تا $x_{۴}(t)$ در حالت اول، به ازای مقادیر اولیه مختلف

اکنون حالت دوم را بررسی می‌کنیم که در آن، مقادیر پارامترهای مسئله را به‌صورت زیر در نظر گرفته‌ایم:

$$a_{۱}=۲, a_{۲}=۲۵, a_{۳}=۱۰, a_{۴}=۱, b_{۱}=۶, b_{۲}=۳۰, b_{۳}=۳, b_{۴}=۱۱,$$
$$c_{۱}=۱, c_{۲}=۲, c_{۳}=۲, c_{۴}=۱, d_{۱}=۲, d_{۲}=۳, d_{۳}=۱, d_{۴}=۲,$$
$$r_{۱}=۱, r_{۲}=۱, r_{۳}=۱, r_{۴}=۱, k_{۱}=۲, k_{۲}=۵, k_{۳}=۱, k_{۴}=۲,$$

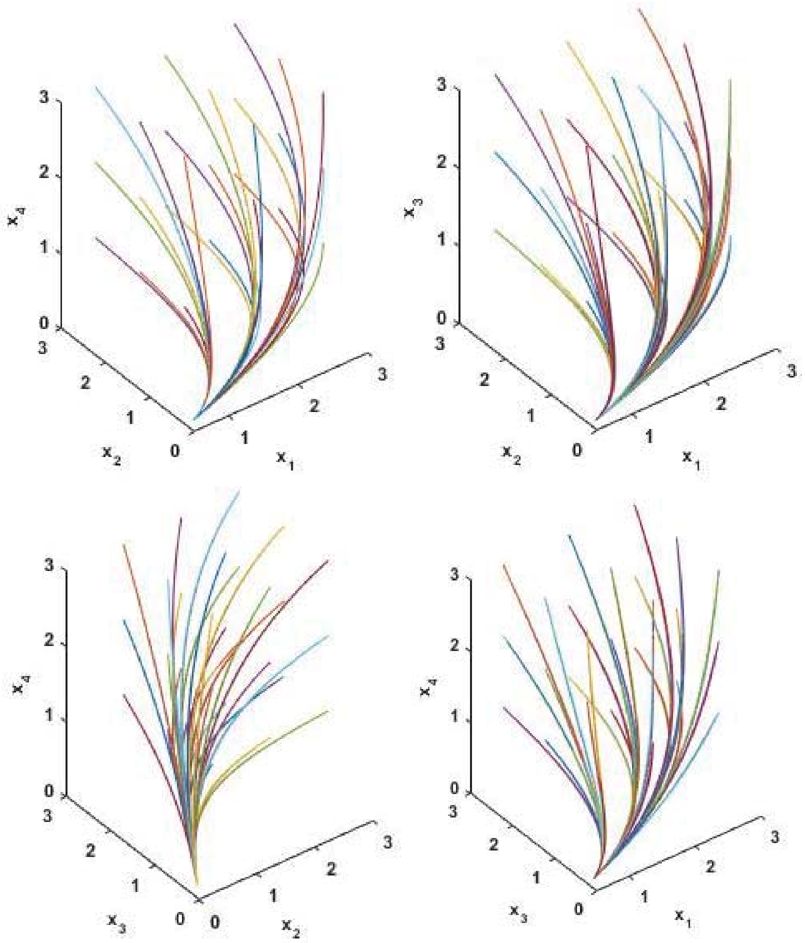


شکل (۲): نمودارهای $x_{۱}(t)$ تا $x_{۴}(t)$ در حالت دوم، به ازای مقادیر اولیه مختلف

با استفاده از فرض (۸)، (۹) و (۱۱) داریم:

$$m_{۱} \approx ۰/۵۳۳۳, m_{۲} \approx ۰/۰۴۶۴, m_{۳} \approx ۰/۱۰۸۳, m_{۴} \approx ۰/۱۸۱۸,$$
$$M_{۱} = ۲/۵۰, M_{۲} = ۰/۲۰, M_{۳} = ۱/۶۰, M_{۴} = ۰/۲۵,$$
$$\theta_{۱} \approx ۰/۴۷۱۷, \theta_{۲} \approx ۰/۴۵۰۶, \theta_{۳} \approx ۰/۴۰۷۲, \theta_{۴} \approx ۰/۵۹۲۰$$

توجه داریم که برای این مقادیر، تمام فرض‌های (۶) تا (۱۱) برقرار هستند؛ بنابراین همانند حالت اول، لم ۱۳ و قضیه ۱۴ برقرارند که در شکل (۲) مشخص است.



شکل (۳): نمودار صفحه فاز در حالت دوم به ازای مقادیر اولیه مختلف

جواب‌ها به‌صورت پایدار به نقطه تعادل زیر همگرا هستند:

$$x_{۱}^{*}=۰/۱۲, x_{۲}^{*}=۰/۱۱, x_{۳}^{*}=۰/۰۵, x_{۴}^{*}=۰/۵۳,$$

علاوه بر آن، برای بررسی پایداری دستگاه (۱)، جواب دستگاه را به ازای مقادیر اولیه متفاوت در چهار صفحه فاز در شکل (۳) رسم کرده‌ایم. همان‌طور که از شکل پیدا است، به‌سرعت جواب‌ها پایدار می‌شوند. همچنین، این پایداری از نوع مجانبی است که به‌وضوح در شکل (۲) و (۳) مشخص است.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مدل غیرخطی شکار- شکارچی از نوع پاسخ عملکردی سیگمویدی دوری چهارگونه‌ایی مورد تجزیه‌وتحلیل قرارگرفته است. بعلاوه شرایط کافی برای پایداری و کران‌داری جواب‌های دستگاه معادلات شکار- شکارچی ارائه شده است. در این خصوص از نظریه نامساوی-های دیفرانسیلی کمک گرفته شده و در نهایت با ساختن تابع لیاپانوف مناسب، اثبات وجود و یکتایی جواب متناوب مجانبی سراسری که پایداری مجانبی باشد، ارائه شده است. در حقیقت در این مدل هرگونه در عین حال که شکارچی گونه قبلی بوده، شکار گونه بعدی است. در ادامه، نتایج را به‌صورت عددی با نرم‌افزار متلب شبیه‌سازی نمودیم. شبیه‌سازی‌ها، به‌خوبی، صحت قضایای بیان شده را تأیید می‌نمایند. در آخر سؤال زیر مطرح می‌شود:

آیا نتایج به دست آمده برای مدل دوری پنج گونه‌ای یا دارای تعداد گونه‌های بیشتر قابل‌تعمیم است؟ در حالت کلی اگر که n یک عدد طبیعی باشد، آیا نتیجه‌های حاصل‌شده برای n گونه برقراراست؟

منابع

[1] Rahmani Doust, M.H. and Gholizade, S. (2014). An analysis of the modified Lotka-Volterra predator-prey equations, *Gen. Math. Notes*, **25**, 2, 1-5.

[2] Rahmani Doust, M.H. and Gholizade, S. (2014). The lotka- Volterra predator-prey equations, *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, **3**(1), 227-231.

[3] Rahmani Doust, M. H. (2015). The efficiency of harvest factor; Lotka-Volterra predator-prey model, *Caspian Journal of Mathematical Sciences*, **4**(1), 51-59.

[4] Li Y. K., and Ye, Y. (2013). Multiple positive almost periodic solutions to an impulsive non-autonomous Lotka-Volterra predator-prey system with harvesting terms, common. *Non-linear sci. Number. Simul.* **18**, 3190-3201.

[5] XU, C. and Zhang, Q. (2014) Permanence and asymptotically periodic solution for a cyclic predator-prey model with sigmoidal type functional response, *Wseas transactions on Systems,* **13**, 668-678.

[6] Yang, Y. and Chen, W.C. (2006). Uniformly strong persistence of a nonlinear asymptotically periodic multispecies competition predator-prey system with general functional response, *Appl. Math. Comput.* **183**, 423-426.

[7] Yuan, R., (1992). Existence of almost periodic solutions of functional differential equations of neutral type, *J. Math. Anal. Appl.* **165**, 524-538.

[8] Murray, J.D. (2002). *Mathematical biology* (Vol. 1: An Introduction). Springer, New York.

[9] Murray, J.D. (2003). *Mathematical biology* (Vol. 2: Spatial models and biomedical applications). Springer, New York.

[10] Cornin, J. (2008). *Ordinary differential equations.* Third Edition, Chapman & Hall/CRC.New York.

[11] Perco, L. (2001). *Differential equations and dynamical systems*. Springer, New York.

[12] Miller, R.K. and Michel A.N. (1982). *Ordinary differential equations,* Academic press, New York.

[۱۳] رحمانی دوست، محمدحسین، (۱۳۹۲). *معادلات دیفرانسیل و اکولوژی* جلد اول، انتشارات نوروزی، گرگان. دانشگاه نیشابور.

[14] Montes F. de Oca, and Vivas, M. (2006). Extinction in a two dimensional Lotka-Volterra system with infinite delay. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **7**, 1042-1047.

Existence and Uniqueness of Asymptotic Periodic Solution in the Cyclic Four Species Predator- Prey Model

Mohammad Hossain Rahmani Doust, Farzaneh Motahari Nasab

Department of Mathematics, University of Neyshabur, Neyshabur, Iran

Abstract

In the past decades, the dynamical properties in the predator-prey models of the mathematical ecology have been studied. Moreover, the stability and boundedness of the solution for population models such as cyclic, delayed and etc. have been studied. In the present paper, a nonlinear cyclic predator-prey system with sigmoidal type functional response is analyzed. Indeed, a model of four species predator-prey system has been investigated and the sufficient conditions for stability and boundedness of the solutions of predator-prey system have been presented. For this purpose, the differential inequality theory is employed and finally, by constructing a suitable Lyapanov function the existence and uniqueness of asymptotically periodic solution which is globally asymptotically stable are proved.

Keywords: Predator-prey, Functional response, Sigmoidal, Lyapanov function, Stability.

Mathematics Subject Classification (2010): 37B55, 34K28.