

درباره‌ی مدول‌های α -شبه کرول

مریم داودیان^۱

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۴/۷ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۰/۵

چکیده: در این مقاله مفهوم مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی را معرفی و مطالعه می‌کنیم. با استفاده از این مفهوم برخی نتایج اصلی مدول‌های α -تقریباً آرتینی را به مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی تعمیم می‌دهیم. نشان می‌دهیم اگر یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی باشد، دارای بعد تام کوچک‌تر یا مساوی α است. همچنین مفهوم مدول‌های α -شبه کرول، که در حقیقت دوگان مفهوم مدول‌های α -شبه کوتاه و هم‌زمان تعمیم مدول‌های α -کرول هستند، را معرفی و مطالعه می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم هر مدول α -تقریباً آرتینی (به‌طور مشابه، α -کرول) یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α -شبه کرول) است، اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. نشان می‌دهیم اگر M یک مدول α -شبه کرول باشد، آنگاه M بعد تام دارد و بعد تام M ، α و $\alpha + 1$ است.

واژه‌های کلیدی: بعد کرول، مدول‌های α -شبه کرول، مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی، مدول‌های α -کرول، مدول‌های α -شبه کوتاه.

رده‌بندی موضوعی (۲۰۱۰): ۱۶P۲۰، ۱۶P۴۰.

۱- مقدمه

مدول M را آرتینی می‌گوییم، هرگاه در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های خود صدق کند. بعد کرول که اندازه‌ی انحراف از آرتینی بودن را نشان می‌دهد برای اولین بار توسط جی-رنتسلا و گابریل [۱] برای اعداد طبیعی تعریف شده و [۲] توسط جی-کراس به اعداد طبیعی تعمیم داده شده است. بعد کرول R -مدول M با نماد $k - \dim M$ نشان داده می‌شود. دوگان این بعد که اندازه‌ی انحراف از نوتری بودن را نشان می‌دهد، نخستین بار توسط لمونیه [۳] معرفی

۱- آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: m.davoudian@scu.ac.ir

شد. سپس چمپلس [۴] به مطالعه‌ی دوگان بعد کرول پرداخت و آن را N - بعد نامید. کرمزاده در [۵] به مطالعه‌ی این بعد پرداخت و آن را بعد نوتری نامید. این بعد [۵—۱۸] بعد نوتری نامیده شده است. برخی نویسندگان این بعد را دوگان بعد کرول نامیده‌اند، [۱۹—۲۲]. بعد نوتری R -مدول M را با نماد $n - \dim M$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که R -مدول M تام است، هرگاه در شرط زنجیر نزولی روی زیرمدول‌های متناهی مولد صدق کند. نویسنده در [۲۳ و ۲۴] به معرفی و بررسی بعد تام و دوگان بعد تام پرداخته است. مجموعه‌ی همه‌ی زیرمدول‌های متناهی مولد M را با نماد $F(M)$ نشان می‌دهیم، این مجموعه با رابطه‌ی شمول یک مجموعه جزئا مرتب است. بعد تام (به‌طور مشابه، دوگان بعد تام) R -مدول M که با نماد $p - \dim M$ (به‌طور مشابه، $dp - \dim M$) نشان داده می‌شود، انحراف مجموعه‌ی جزئا مرتب $F(M)$ از آرتینی بودن (به‌طور مشابه، از نوتری بودن)، تعریف می‌شود. اگر α یک عدد ترتیبی باشد، R -مدول M ، α -بحرانی نامیده می‌شود، اگر $k - \dim M = \alpha$ و به‌ازای هر زیرمدول نا صفر N از M داشته باشیم، $k - \dim \frac{M}{N} < \alpha$. R -مدول M بحرانی نامیده می‌شود، اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α یک مدول α -بحرانی باشد. هین [۲۵] مدول‌های تقریباً آرتینی را بررسی کرد. هم‌چنین بیلهان و اسمیت [۲۶] مدول‌های تقریباً نوتری و مدول‌های کوتاه را مطالعه کردند. یادآوری می‌کنیم که مدول M کوتاه نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر زیرمدول N از M ، داشته باشیم N یا $\frac{M}{N}$ نوتری باشد. هم‌چنین مدول M تقریباً نوتری نامیده می‌شود، هرگاه هر زیرمدول سره‌ی N از M ، نوتری باشد. سپس داودیان و همکاران [۲۷] مدول‌های α -تقریباً نوتری و مدول‌های α -کوتاه را بررسی کردند. یادآوری می‌کنیم که مدول M یک مدول α -تقریباً نوتری نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر زیرمدول سره‌ی N از M داشته باشیم $n - \dim N < \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. مدول M را α -کوتاه می‌نامیم، هرگاه به‌ازای هر زیرمدول N از M داشته باشیم $n - \dim N \leq \alpha$ و یا $n - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. هم‌چنین داودیان و همکاران [۲۸] مدول‌های α -تقریباً آرتینی و مدول‌های α -کرول، که درواقع به ترتیب دوگان مدول‌های α -تقریباً نوتری و مدول‌های α -کوتاه و تعمیم مدول‌های تقریباً آرتینی هستند، را مطالعه کردند. سپس داودیان [۲۹] مدول‌های α -تقریباً شبه نوتری و مدول‌های α -شبه کوتاه را معرفی و بررسی کرد. یادآوری می‌کنیم که مدول M یک مدول α -تقریباً شبه نوتری نامیده می‌شود، هرگاه برای هر زیرمدول سره‌ی متناهی مولد N از M داشته باشیم $dp - \dim N < \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. مدول M را α -شبه کوتاه می‌نامیم، هرگاه به

ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داشته باشیم $dp - \dim N \leq \alpha$ یا $dp - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

در بخش دو این مقاله به بیان حقایق مفیدی درباره‌ی بعد تام می‌پردازیم. در بخش سه، مدول‌های α -شبه کرول و مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی، که به ترتیب دوگان مدول‌های α -شبه کوتاه و مدول‌های α -تقریباً شبه نوتری و هم‌زمان تعمیم مدول‌های α -کرول و مدول‌های α -تقریباً آرتینی هستند، [۲۸ و ۲۹]، را بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که R -مدول M یک مدول α -تقریباً آرتینی نامیده می‌شود، اگر برای هر زیرمدول نا صفر N از M داشته باشیم $k - \dim \frac{M}{N} < \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد، [۲۸]. R -مدول M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی نامیده می‌شود، اگر برای هر زیرمدول نا صفر متناهی مولد N از M داشته باشیم $p - \dim \frac{M}{N} < \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. هم‌چنین یادآوری می‌کنیم که R -مدول M یک مدول α -کرول نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر زیرمدول N از M داشته باشیم $k - \dim N \leq \alpha$ و یا $k - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. R -مدول M یک مدول α -شبه کرول نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داشته باشیم $p - \dim N \leq \alpha$ و یا $p - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد. برخی ویژگی‌های اصلی مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α -شبه کرول را بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم هر مدول α -تقریباً آرتینی (به‌طور مشابه، α -کرول) یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α -شبه کرول) است، اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. نشان می‌دهیم اگر M یک مدول α -شبه کرول (به‌طور مشابه، α -تقریباً شبه آرتینی باشد)، آنگاه M بعد تام دارد و $p - \dim M = \alpha$ و یا $p - \dim M = \alpha + 1$ (به‌طور مشابه، $p - \dim M \leq \alpha$). سرانجام در بخش آخر برخی نتایج مدول‌های تقریباً α -شبه کرول و مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی را بررسی می‌کنیم.

در ادامه یادآور می‌شویم که چنانچه A (به‌طور مشابه، A') مجموعه‌ی همه‌ی R -مدول‌هایی باشد که به‌ازای یک عدد ترتیبی α ، یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α -تقریباً آرتینی) هستند، و B (به‌طور مشابه، B') مجموعه‌ی همه‌ی مدول‌هایی باشد که به‌ازای یک عدد ترتیبی α ، یک مدول α -شبه کرول (به‌طور مشابه، α -کرول) هستند، ارتباط بین مفاهیم گفته شده را می‌توان به کمک نمودار زیر بیان کرد.

$$\begin{array}{ccc} A & \leftarrow & A' \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ B & \leftarrow & B' \end{array}$$

در سراسر این مقاله R یک حلقه‌ی شرکت‌پذیر و یک‌دار و M یک R -مدول راست یکانی است. نماد $N \subseteq M$ (به‌طور مشابه، $N \subset M$) به معنای N زیرمدول M است (به‌طور مشابه، N زیرمدول سره‌ی M است) می‌باشد. در پایان تأکید می‌کنیم که نتایج بخش‌های سه و چهار جدید بوده و دوگان نتایج مرجع [۲۹] و هم‌چنین تعمیم نتایج مرجع [۲۸] می‌باشند. برای آشنایی با کلیه مفاهیم و نتایجی که در اینجا بیان نشده‌اند به [۲۳، ۳۰ و ۳۱] مراجعه شود.

۲- بعد تام

در این بخش برخی نتایج مفید درباره‌ی بعد تام را یادآوری می‌کنیم [۲۳].

تعریف ۱: فرض کنیم M یک R -مدول باشد. بعد تام M که با $p - \dim M$ نشان داده می‌شود، یک عدد ترتیبی است و به‌صورت استقرایی زیر تعریف می‌شود:

گوییم $p - \dim M = -1$ اگر $M = 0$. برای عدد ترتیبی α داریم $p - \dim M = \alpha$ اگر $p - \dim M < \alpha$ ، و زنجیر نامتناهی $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots$ از زیرمدول‌های متناهی مولد M وجود نداشته باشد که برای هر $i \geq 1$ داشته باشیم $p - \dim \frac{M_i}{M_{i+1}} < \alpha$. به‌عبارت دیگر اگر $p - \dim M = \alpha$ و به‌ازای هر $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots$ از زیرمدول‌های متناهی مولد M عدد صحیح n وجود داشته باشد به‌طوری‌که، به‌ازای هر $i \geq n$ داشته باشیم $p - \dim \frac{M_i}{M_{i+1}} < \alpha$. اثبات نتایج زیر مشابه نتایج متناظرشان درباره‌ی بعد کرول است [۲۳].

لم ۱: فرض کنیم R -مدول M بعد تام داشته باشد. در این صورت هر زیرمدول A از M ، بعد تام دارد و $p - \dim A \leq p - \dim M$.

لم ۲: فرض کنیم هر زیرمدول متناهی مولد سره‌ی A از M دارای بعد تام باشد. در این صورت M دارای بعد تام است و $p - \dim = \sup \{ p - \dim A : A \subset M \text{ is f.g.} \}$.

لم ۳: فرض کنیم به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد نا صفر A از M ، M/A دارای بعد تام باشد. در این صورت M بعد تام دارد و $p - \dim M \leq \left\{ p - \dim \frac{M}{A} : 0 \neq A \subseteq M \right\} + 1$.

لم ۴: فرض کنیم M یک R -مدول باشد. اگر به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد A از M ، A و یا M/A بعد تام داشته باشند؛ آنگاه M بعد تام دارد.

اکنون نتیجه‌ی زیر را از [۲۳، ۱-۶] بیان می‌کنیم.

لم ۵: اگر R -مدول M دارای بعد تام باشد، به‌ازای هر زیرمدول A در M ، مدول M/A دارای بعد تام است و $p - \dim M/A \leq p - \dim M$.

در ادامه تعریف زیر را از مرجع [۲۳] بیان می‌کنیم.

تعریف ۲: R -مدول M ، α -بحرانی تام نامیده می‌شود، اگر $p - \dim M = \alpha$ و به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد نا صفر A از M داشته باشیم $p - \dim M/A < \alpha$. R مدول M بحرانی تام است اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی، α -بحرانی تام باشد.

گزاره ۱: فرض کنیم M یک R -مدول و $A \subseteq M$ و $A \neq \emptyset$ زیرمدولی در M باشد که دارای بعد کرول است. آنگاه $p - \dim M = \sup \{k - \dim A, p - \dim M/A\}$ ، اگر هر طرف تساوی وجود داشته باشد.

در پایان، نتیجه‌ی زیر را از [۲۳، قضیه‌ی ۴-۳-۵] بیان می‌کنیم.

قضیه ۱: فرض کنیم R -مدول M دارای بعد کرول باشد، آنگاه M دارای بعد تام است و $p - \dim M = k - \dim M$.

۳- مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α -شبه کرول

در این بخش مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α -شبه کرول را بررسی می‌کنیم. برخی از مفاهیم اصلی مدول‌های α -تقریباً آرتینی (به‌طور مشابه، مدول‌های α -کرول) را به مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، α -شبه کرول) تعمیم می‌دهیم.

ابتدا تعریف مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی را بیان می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم، مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی تعمیمی از مدول‌های α -تقریباً آرتینی هستند، [۲۸].

تعریف ۳: R -مدول M ، α -تقریباً شبه آرتینی نامیده می‌شود، اگر به‌ازای هر زیرمدول نا صفر و متناهی مولد مانند N از M ، داشته باشیم $p - \dim M/A < \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

مفهوم بالا در حقیقت دوگان مدول‌های α -تقریباً شبه نوتری [۲۹، تعریف ۲-۱] است. به روشنی دیده می‌شود که هر مدول \circ -تقریباً شبه آرتینی، ساده است و در نتیجه \circ -بحرانی است. اگر $\alpha = 1$ ، آنگاه M تام و یا ۱-بحرانی تام است. یادآوری می‌کنیم که مفهوم α -تقریباً شبه آرتینی تعمیمی از مفهوم α -تقریباً آرتینی است.

نتیجه ۱: اگر M یک مدول α -تقریباً آرتینی باشد؛ آنگاه M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ ، یک مدول β -تقریباً شبه آرتینی است.

بنا بر نتیجه‌ی قبل و قضیه‌ی ۱، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۲: گیریم M یک مدول α -تقریباً آرتینی باشد. آنگاه M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی است.

اثبات: بنا بر نتیجه‌ی قبل به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ ، M یک مدول β -تقریباً شبه آرتینی است. گیریم N زیرمدول نا صفری از M باشد، بنابراین N زیرمدول نا صفر متناهی مولدی مانند

N' دارد. از آنجا که M یک مدول β -تقریباً شبه آرتینی است، داریم $p - \dim \frac{M}{N'} \leq \beta$. از طرفی بنا بر [۲۸، لم ۲-۳]، M دارای بعد کرول است. بنابراین $\frac{M}{N'}$ دارای بعد کرول است [۱۱].

بنابر قضیه‌ی ۱، داریم $p - \dim \frac{M}{N'} \leq \beta$ ، $k - \dim \frac{M}{N'} = p - \dim \frac{M}{N'} \leq \beta$ در نتیجه $k - \dim \frac{M}{N'} \leq \beta$. پس به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \beta$ ، M یک مدول γ -تقریباً آرتینی است. این نشان می‌دهد که $\alpha \leq \beta$. بنابراین $\alpha = \beta$ و حکم برقرار است.

ملاحظه ۱: اگر M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی باشد. آنگاه هر زیرمدول و هر تصویر هم‌ریخت M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ ، یک مدول β -تقریباً شبه آرتینی است.

در ادامه نتایج مفید زیر را که در واقع دوگان نتایج مشابه در [۲۹، لم‌های ۲-۲، ۳-۲ و ۴-۲] هستند، بیان می‌کنیم.

لم ۶: اگر M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه M بعد تام دارد و $p - \dim M \leq \alpha$ ؛ به‌ویژه $p - \dim M = \alpha$ اگر و تنها اگر M ، α -بحرانی تام باشد.

اثبات. به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داریم $p - \dim \frac{M}{N} < \alpha$. بنا بر [۲۳، لم ۴-۱]، داریم $p - \dim M \leq \alpha$. اکنون قسمت آخر حکم بدیهی است.

لم ۷: فرض کنیم M یک R -مدول است و $p - \dim M = \alpha$. اگر M α -بحرانی تام باشد، آنگاه α -تقریباً شبه آرتینی است. در غیر این صورت M یک مدول $\alpha + 1$ -تقریباً شبه آرتینی است.

اثبات: فرض کنیم M یک مدول α بحرانی تام باشد، در این صورت به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داریم $p - \dim \frac{M}{N} < \alpha$. لذا به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ ، M یک مدول β -تقریباً شبه آرتینی است. اگر $\beta < \alpha$ ، آنگاه بنا بر لم قبل داریم $p - \dim M \leq \beta$ و این در تناقض با فرض $p - \dim M = \alpha$ است. اگر M بحرانی تام نباشد، زیرمدول متناهی مولدی مانند N از M وجود دارد، به‌طوری که $p - \dim \frac{M}{N} = \alpha$. لذا M به‌ازای $\gamma \geq \alpha + 1$ ، یک مدول γ -تقریباً شبه آرتینی است. از طرفی بنا بر [۲۳، لم ۴-۱-۶] به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد N از M داریم $p - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha < \alpha + 1$. لذا M یک مدول $\alpha + 1$ -تقریباً شبه آرتینی است.

عدد ترتیبی α را تالی می‌نامیم هرگاه $\alpha = \beta + 1$ ، که β یک عدد ترتیبی است. عدد ترتیبی α حدی است اگر عدد ترتیبی تالی نباشد.

لم ۸: اگر M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه M یا α -بحرانی تام است و یا $p - \dim M + 1 = \alpha$. به‌ویژه اگر α یک عدد ترتیبی حدی و M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه M یک مدول α -بحرانی تام است.

اثبات: بنا بر لم ۶، M بعد تام دارد و $p - \dim M \leq \alpha$. اگر $p - \dim M = \alpha$ ، آنگاه بنا بر لم ۶ داریم M بحرانی تام است. فرض کنیم $p - \dim M < \alpha$ ، آنگاه بنا بر لم ۷ داریم $\alpha = \beta + 1$ و حکم برقرار است.

اکنون نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲: فرض کنیم M یک مدول $\beta + 1$ -تقریباً شبه آرتینی باشد، آنگاه $p - \dim M = \beta$ یا $p - \dim M = \beta + 1$.

گزاره ۴: R -مدول M بعد تام دارد اگر و تنها اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α ، یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی باشد.

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس قضیه‌ی ۲، در حالت کلی درست نیست.

مثال ۱: فرض کنیم $\{M_i\}_{i \in I}$ یک مجموعه‌ی نامتناهی از R -مدول‌هایی باشد که آرتینی و یا نوتری هستند. آنگاه مجموع مستقیم خارجی $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ بعد تام دارد، [۲۴، یادآوری ۲-۲]

[۴]. بنابراین به ازای یک عدد ترتیبی α ، M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی است، اما به ازای هیچ عدد ترتیبی γ ، مدول γ -تقریباً آرتینی نیست، به گزاره‌ی ۲ و [۲۸، لم ۲-۳] مراجعه شود. به ویژه اگر \mathbb{Z} حلقه‌ی اعداد صحیح و I یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد. می‌دانیم $\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$ مدول $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ دارای بعد کرول است و $k - \dim \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} = 1$. بنابراین $\bigoplus_{i \in I} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty})$ به ازای یک عدد ترتیبی α ، یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی است؛ اما به ازای هیچ عدد ترتیبی γ ، مدول γ -تقریباً شبه آرتینی نیست.

زیرمدول L از مدول M را اساسی می‌نامیم، هرگاه به ازای هر زیرمدول نا صفر N از M داشته باشیم $N \cap L \neq 0$.

گزاره‌ی ۳: گیریم M یک R -مدول باشد. اگر M زیرمدول بحرانی مانند N داشته باشد به طوری که N در M اساسی باشد و $p - \dim \frac{M}{N} < k - \dim N$ ، آنگاه M بحرانی تام است.

اثبات: اگر $M = N$ روشن است که M بحرانی تام است، [۲۳، نتیجه‌ی ۲-۲۱]. فرض کنیم $M \neq N$. آنگاه $k - \dim N = \sup \left\{ k - \dim N, p - \dim \frac{M}{N} \right\} = p - \dim M$ ، به گزاره‌ی ۱ مراجعه شود. فرض کنیم زیرمدول نا صفر و متناهی مولد L از M وجود داشته باشد به طوری که $p - \dim \frac{M}{L} = p - \dim M$ و به تناقض می‌رسیم. می‌دانیم

$$p - \dim \frac{M}{L} = p - \dim \frac{M/N \cap L}{L/N \cap L}.$$

بنابراین $p - \dim \frac{M}{L \cap N} \geq p - \dim \frac{M}{L} = p - \dim M$ به لم ۵ مراجعه شود. این نشان می‌دهد $p - \dim M = k - \dim N = p - \dim \frac{M}{L \cap N}$ (یادآوری، N زیرمدول اساسی M است و بنابراین $L \cap N \subseteq L$ و $0 \neq L \cap N$). بنابراین $p - \dim \frac{M}{L \cap N} = k - \dim N > p - \dim \frac{M}{N}$ چون N بحرانی است، داریم $p - \dim \frac{M}{L \cap N} = k - \dim N > k - \dim \frac{N}{N \cap L}$. بنابراین گزاره‌ی ۱، داریم $p - \dim \frac{M}{L \cap N} = \sup \left\{ p - \dim \frac{M}{N}, k - \dim \frac{N}{N \cap L} \right\} = p - \dim \frac{M}{N}$ و این تناقض است.

این بخش را با تعریف زیر که در حقیقت دوگان مدول‌های α -شبه کوتاه است ادامه می‌دهیم، [۲۹]. تلاش می‌کنیم که نتایج مرتبط با آنچه در مرجع [۲۹] آمده است را بیان کنیم.

تعریف ۴: R -مدول M را α -شبه کرول گوییم، اگر برای هر زیرمدول متناهی مولد N از M ، داشته باشیم $p - \dim N \leq \alpha$ یا $p - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$ و کوچک‌ترین عدد ترتیبی با این ویژگی باشد.

ملاحظه ۲: فرض کنیم M یک مدول α -کرول باشد. آن‌گاه به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β -شبه کرول است.

از ملاحظه‌ی قبل و قضیه‌ی ۱ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

قضیه ۳: گیریم M یک مدول α -کرول باشد. آنگاه M یک مدول α -شبه کرول است.

اثبات: بنابر ملاحظه‌ی قبل، به‌وضوح M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β -شبه کرول است. حال فرض کنیم N زیرمدول نا صفری از M باشد. بنابراین N دارای زیرمدول متناهی مولد نا صفری مانند N' است. چون M ، β -شبه کرول است، داریم $p - \dim N' \leq \alpha$ یا $p - \dim \frac{M}{N'} \leq \alpha$. بنابر قضیه‌ی ۱ و [۲۳] داریم $k - \dim N' \leq \alpha$ یا $k - \dim \frac{M}{N'} \leq \alpha$. اگر زیرمدول متناهی مولدی از M مانند N' وجود داشته باشد به‌طوری که $k - \dim \frac{M}{N'} \leq \beta$ ، آنگاه $k - \dim \frac{M}{N} \leq \beta$ ، [۲۳]. در غیر این صورت به‌ازای هر زیرمدول متناهی مولد مانند N' از N داریم $p - \dim N' \leq \beta$ و بنابر لم ۲ داریم $p - \dim N \leq \beta$. پس $k - \dim N \leq \beta$ ، به قضیه‌ی ۱ و [۲۳] مراجعه شود. بنابراین M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \beta$ یک مدول γ -کرول است. بنابراین $\alpha \leq \beta$ و در نتیجه $\alpha = \beta$ و حکم برقرار است.

مثال زیر نشان می‌دهد عکس قضیه‌ی ۳ در حالت کلی درست نیست.

مثال ۲: فرض کنیم $\{M_i\}_{i \in I}$ یک خانواده‌ی نامتناهی از R -مدول‌های آرتینی باشد. آنگاه $M = \sum_{i \in I} M_i$ یک مدول \circ -شبه کرول است ولی به‌ازای هیچ عدد ترتیبی α ، مدول α -کرول نیست. به‌ویژه اگر \mathbb{Z} حلقه‌ی اعداد صحیح و I یک مجموعه‌ی نامتناهی دلخواه باشد. می‌دانیم \mathbb{Z} -مدول \mathbb{Z}_{p^∞} آرتینی است. بنابراین $\sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک مدول \circ -شبه کرول است، ولی به‌ازای هیچ عدد ترتیبی α ، مدول α -کرول نیست.

ملاحظه ۳: اگر $p - \dim M = \alpha$ ، آنگاه M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β -تقریباً شبه کرول است.

نتیجه ۳: گیریم M یک مدول α -شبه کرول باشد. آنگاه M دارای بعد تام است و

$$p - \dim M \geq \alpha.$$

از ملاحظه‌ی ۳ و نتیجه‌ی ۳، گزاره‌ی زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۴: R -مدول M بعد تام دارد اگر و تنها اگر به‌ازای یک عدد ترتیبی α ، یک مدول α شبه کرول باشد.

گزاره ۵: اگر M یک مدول α -شبه کرول باشد، آنگاه $p - \dim M = \alpha$ یا

$$p - \dim M = \alpha + 1.$$

اثبات: بنابر نتیجه‌ی ۳ داریم $p - \dim M \geq \alpha$. اگر $p - \dim M \neq \alpha$ ، آنگاه $p - \dim M \geq \alpha + 1$. حال فرض کنیم $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \dots$ یک زنجیر نزولی از زیرمدول‌های متناهی مولد M باشد. اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد به‌طوری که

$$p - \dim M_k \leq \alpha, \quad \text{آنگاه به‌ازای هر } i \geq k \text{ داریم}$$

$$p - \dim \frac{M_i}{M_{i+1}} \leq p - \dim M_i \leq p - \dim M_k \leq \alpha$$

صورت، به‌ازای هر i داریم $p - \dim \frac{M}{M_{i+1}} \leq \alpha$ (یادآوری M یک مدول α -شبه کرول است)

و در نتیجه به‌ازای هر i داریم $p - \dim \frac{M_i}{M_{i+1}} \leq \alpha$. بنابراین در هر حالت عدد صحیح k وجود

دارد، به‌طوری که $p - \dim \frac{M_i}{M_{i+1}} \leq \alpha$ به‌ازای هر $i \geq k$. این نشان می‌دهد

$$p - \dim M \leq \alpha + 1 \quad \text{و لذا } p - \dim M = \alpha + 1.$$

ملاحظه ۴: اگر M یک مدول α -شبه کرول باشد، آنگاه هر زیرمدول و هر مدول خارج قسمتی M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β -شبه کرول است.

با توجه به گزاره‌ی ۵، نتیجه‌ی زیر بدیهی است.

ملاحظه ۵: اگر M یک R -مدول شبه کرول باشد، آنگاه α -تقریباً شبه آرتینی است، به‌طوری که $\beta \leq \alpha \leq \beta + 1$. ادعا می‌کنیم همه‌ی حالت‌ها در این نامساوی رخ می‌دهند. برای نشان دادن این مطلب، یادآوری می‌کنیم که هر مدول (-1) -بحرانی تام، \circ -شبه کرول است، در حالی که (-1) -تقریباً شبه آرتینی می‌باشد و هر مدول α -بحرانی تام، چنانچه α عدد ترتیبی حدی باشد، یک مدول α -شبه کرول و همچنین مدول α -تقریباً شبه آرتینی است. در پایان یادآور می‌شویم که مدول 2 -تقریباً شبه آرتینی وجود دارد که \circ -شبه کرول است، مثال ۴ را ببینید.

ملاحظه ۶: R-مدول M ، (۱-) شبه کرول است اگر و تنها اگر ساده باشد. بنابراین هر مدول (۱-) شبه کرول، یک مدول \circ -آتمی و \circ -بحرانی است (یادآوری؛ R مدول M را α -آتمی می‌نامیم، اگر $n - \dim M = \alpha$ و به‌ازای هر زیرمدول سره‌ی N از M داشته باشیم $n - \dim N < \alpha$).

گزاره ۶: فرض کنیم M یک R-مدول باشد و $p - \dim M = \alpha$ ، که α یک عدد ترتیبی حدی است. آنگاه M یک مدول α -شبه کرول است.

اثبات. می‌دانیم M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ یک مدول β -شبه کرول است. اگر $\beta < \alpha$ ، بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $\alpha < \beta + 1 \leq p - \dim M$ و این تناقض است. پس M یک مدول α -شبه کرول است.

گزاره ۷: گیریم M یک R-مدول باشد و $p - \dim M = \alpha = \beta + 1$. آنگاه M یک مدول β -شبه کرول و یا α -شبه کرول است.

اثبات: می‌دانیم به‌ازای عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$ ، M یک مدول γ -شبه کرول است. اگر $\gamma < \beta$ ، آنگاه بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $\beta + 1 < \gamma + 1 \leq p - \dim M$ و این تناقض است. درباره‌ی مدول‌های بحرانی تام حکم زیر برقرار است.

گزاره ۸: فرض کنیم M یک R-مدول α -بحرانی تام باشد، که $\alpha = \beta + 1$. آنگاه M یک مدول β -شبه کرول است.

اثبات: گیریم $N \subset M$ یک زیرمدول متناهی مولد M باشد. در این حالت داریم $p - \dim \frac{M}{N} < \alpha$. در نتیجه $p - \dim \frac{M}{N} \leq \beta$. این نشان می‌دهد که به‌ازای عدد ترتیبی $\beta' \leq \beta$ ، M یک مدول β' -شبه کرول است. اگر $\beta' < \beta$ ، آنگاه $\beta' + 1 \leq \beta < \alpha$. اما در این صورت بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $\alpha < \beta' + 1 \leq p - \dim M$ و این تناقض است. بنابراین $\beta' = \beta$ و حکم برقرار است.

حقیقت زیر که نتیجه‌ی بدیهی حکم قبل است، نشان می‌دهد که عکس گزاره‌ی ۶ در حالت کلی درست نیست.

ملاحظه ۷: گیریم M یک R-مدول $\alpha + 1$ -بحرانی تام باشد، که α عدد ترتیبی حدی است. آنگاه M یک مدول α -شبه کرول است.

گزاره ۹: فرض کنیم M یک R -مدول باشد، به طوری که $p - \dim M = \alpha + 1$. آنگاه M یک R -مدول α -شبه کرول است، یا M دارای زیرمدول متناهی مولد مانند N است به طوری که

$$p - \dim \frac{M}{N} = p - \dim N = \alpha + 1.$$

اثبات: بنابر گزاره ۷، M یک R -مدول α -شبه کرول و یا $\alpha + 1$ -شبه کرول است. فرض کنیم M α -شبه کرول نباشد، در نتیجه M دارای زیرمدول متناهی مولدی مانند N است، به طوری که $p - \dim N \geq \alpha + 1$ و $p - \dim \frac{M}{N} \geq \alpha + 1$. این نشان می‌دهد که

$$p - \dim N = \alpha + 1 \text{ و } p - \dim \frac{M}{N} = \alpha + 1 \text{ و حکم برقرار است.}$$

گزاره ۱۰: گیریم R -مدول نا صفر M ، α -شبه کرول باشد. در این صورت یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha + 1$ وجود دارد که M ، β -تقریباً شبه آرتینی است؛ و یا M دارای زیرمدول متناهی مولدی مانند N است به طوری که $p - \dim N \leq \alpha$.

اثبات: فرض کنیم M به‌ازای هیچ β ، $\beta \leq \alpha + 1$ ، β -تقریباً شبه آرتینی نباشد. بنابراین M دارای زیرمدول متناهی مولد مانند N است به طوری که $p - \dim \frac{M}{N} \not\leq \alpha$. چون M یک مدول α -شبه کرول است داریم $p - \dim N \leq \alpha$ و حکم برقرار است.

سرانجام این بخش را با ذکر مثال‌هایی از مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی (به‌طور مشابه، مدول‌های α -شبه کرول) به پایان می‌بریم. ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر R -مدول نوتری M دارای بعد کرول α باشد، آنگاه به‌ازای هر $\beta \leq \alpha$ مدول M دارای زیرمدول‌های β -بحرانی است، به نکته‌ی بعد از [۱۱، گزاره ۱-۱۱] مراجعه شود. از طرفی می‌دانیم هر مدول β -بحرانی، یک مدول β -بحرانی تام است، [۱۸، نتیجه‌ی ۲-۶]. در نتیجه M را یک مدول نوتری در نظر می‌گیریم، به طوری که $k - \dim M = \alpha$ و به‌ازای هر $\beta \leq \alpha$ ، N را زیرمدول β -بحرانی تام M در نظر می‌گیریم. آنگاه بنابر لم ۷، N یک زیرمدول β -تقریباً شبه آرتینی است. در اینجا یادآوری می‌کنیم که اگر α عدد ترتیبی حدی باشد، تنها زیرمدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی همان مدول‌های α -بحرانی تام هستند، از این‌رو برای دیدن مثالی از یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی که α -بحرانی تام نباشد، عدد ترتیبی α باید غیر حدی باشد. بنابراین فرض کنیم M یک مدول باشد که بحرانی تام نیست و $k - \dim M = \beta$ به طوری که $\alpha = \beta + 1$ ، [۸، مثال ۱-۱]. اکنون بدیهی است که M یک مدول α -تقریباً شبه آرتینی است و بحرانی تام نیست. برای دیدن مثال‌هایی از مدول‌های α -شبه کرول، به‌طور مشابه می‌توانیم از این حقیقت که مدول نوتری M با بعد کرول α وجود دارد و به‌ازای هر $\beta \leq \alpha$ ، M دارای زیرمدول β -بحرانی

تام است، استفاده کنیم و به کمک گزاره‌های ۶، ۷، ۸ مثال‌های مختلفی از مدول‌های α -شبه کرول بسازیم.

۴- خواص مدول‌های α -شبه کرول و α -تقریباً شبه آرتینی

در این بخش برخی خواص مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی و مدول‌های α -شبه کرول روی حلقه‌ی دلخواه R را بررسی می‌کنیم.

لم ۹: فرض کنیم R یک حلقه و M یک مدول باشد. اگر M دارای زیرمدولی مانند K باشد به گونه‌ای که $\frac{M}{K}$ ، α -شبه کرول و $k - \dim K \leq \alpha$ باشد، آنگاه M یک مدول α -شبه کرول است.

اثبات: گیریم N یک زیرمدول متناهی مولد M باشد، آنگاه $k - \dim N \cap K \leq \alpha$ ، مرجع [۲۳] را ببینید. اگر $p - \dim \frac{N}{N \cap K} \leq \alpha$ ، آنگاه بنابر گزاره ۱، داریم $p - \dim N \leq \alpha$. حال فرض کنیم $p - \dim \frac{N}{N \cap K} > \alpha$. چون $\frac{N+K}{K}$ یک زیرمدول متناهی مولد از مدول α -شبه کرول $\frac{M}{K}$ است و $p - \dim \frac{N}{N \cap K} = p - \dim \frac{N+K}{K} > \alpha$ بنابراین داریم

$$p - \dim \frac{M/K}{N+K/K} = p - \dim \frac{M}{N+K} \leq \alpha.$$

اما $k - \dim \frac{N+K}{N} = k - \dim \frac{K}{N \cap K} \leq k - \dim K \leq \alpha$ ، مرجع [۲۳] را ببینید. در نتیجه $p - \dim \frac{M}{N} = \sup \left\{ k - \dim \frac{N+K}{N}, p - \dim \frac{M}{N+K} \right\} \leq \alpha$ می‌دهد که به‌ازای یک عدد ترتیبی $\beta \leq \alpha$ ، یک مدول β -شبه کرول است. از طرفی $\frac{M}{K}$ یک مدول α -شبه کرول است، لذا از ملاحظه ۴ نتیجه می‌شود $\alpha \leq \beta$ و حکم برقرار است.

نتیجه ۴: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. اگر $M = M_1 \oplus M_2$ به گونه‌ای که M_1 یک مدول α -شبه کرول و $k - \dim M_2 \leq \alpha$ ؛ آنگاه M یک مدول α -شبه کرول است.

مثال ۳: می‌دانیم \mathbb{Z}_{p^∞} یک مدول آرتینی و \mathbb{Z} -مدول \mathbb{Z} یک مدول \circ -شبه کرول است. بنابر نتیجه‌ی قبل $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}$ یک مدول \circ -شبه کرول است. روشن است که $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}$ آرتینی نیست.

در ادامه نتایج مفید زیر به‌دست می‌آیند.

گزاره ۱۱: گیریم R یک حلقه و M یک مدول نا صفر و α -شبه کرول است که بحرانی تام نیست. آنگاه M شامل زیرمدول متناهی مولد نا صفری مانند L است، به‌طوری که $p - \dim L \leq \alpha$.

اثبات: چون M بحرانی تام نیست، یک زیرمدول متناهی مولد $L \subset M$ وجود دارد به‌طوری که $p - \dim \frac{M}{L} = p - \dim M$. بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p - \dim M = \alpha$ یا $p - \dim M = \alpha + 1$. اگر $p - \dim M = \alpha$ واضح است که $p - \dim L \leq \alpha$. بنابراین فرض کنیم $p - \dim \frac{M}{L} = p - \dim M = \alpha + 1$ در نتیجه $p - \dim L \leq \alpha$ و حکم برقرار است.

گزاره ۱۲: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. اگر M زیرمدول نا صفری مانند N داشته باشد، به‌طوری که N یک مدول α -کرول، $\frac{M}{N}$ یک مدول β -شبه کرول و $\mu = \{\alpha, \beta\}$ باشد؛ آنگاه M یک مدول γ -شبه کرول است به‌گونه‌ای که $\mu \leq \gamma \leq \mu + 1$.

اثبات. چون N یک مدول α -کرول است، داریم $k - \dim N = \alpha$ یا $k - \dim N = \alpha + 1$ ، [۲۸، گزاره‌ی ۳-۸] را ببینید. به‌طور مشابه چون $\frac{M}{N}$ یک مدول β -شبه کرول است، بنابر گزاره‌ی ۵ داریم $p - \dim \frac{M}{N} = \beta$ یا $p - \dim \frac{M}{N} = \beta + 1$. بنابر لم ۵، M بعد تام دارد و $p - \dim M = \sup \left\{ k - \dim N, p - \dim \frac{M}{N} \right\}$. در نتیجه $\mu \leq p - \dim M \leq \mu + 1$. اما بنا بر ملاحظه‌ی ۳ عدد ترتیبی γ وجود دارد به‌طوری که M یک مدول γ -شبه کرول است. با توجه به گزاره‌ی ۵ داریم $\gamma \leq p - \dim M \leq \gamma + 1$. این نشان می‌دهد که $\gamma = \mu$ و یا $\gamma = \mu + 1$ (توجه؛ همواره داریم $\mu \leq \gamma$) و حکم برقرار است.

با استفاده از لم ۸، نتیجه‌ی زیر که مشابه گزاره‌ی قبل در مورد مدول‌ها α -تقریباً شبه آرتینی است، حاصل می‌شود.

گزاره ۱۳: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R -مدول باشد. اگر N زیرمدولی از M باشد، به طوری که N یک مدول α -تقریباً آرتینی و $\frac{M}{N}$ یک مدول β -تقریباً شبه آرتینی و $\mu = \sup\{\alpha, \beta\}$ باشد؛ آنگاه M یک مدول γ -تقریباً شبه آرتینی است به طوری که $\mu \leq \gamma \leq \mu + 1$.

نتیجه ۵: فرض کنیم R یک حلقه است. اگر M_1 یک R -مدول α_1 -شبه کرول (به طور مشابه، α_1 -تقریباً شبه آرتینی) و M_2 یک R -مدول α_2 -کرول (به طور مشابه، α_2 -تقریباً آرتینی) و $M = M_1 \oplus M_2$ باشد؛ آنگاه M به ازای یک عدد ترتیبی $\mu = \sup\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ، $\alpha \leq \mu \leq \alpha + 1$ یک مدول μ -شبه کرول (μ -تقریباً شبه آرتینی) است.

مثال زیر نشان می‌دهد که در نتیجه‌ی قبل همه‌ی حالت‌ها برای μ ممکن است رخ دهد.

مثال ۴: اگر $M_1 = M_2 = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ ، آنگاه M_1 و M_2 به عنوان \mathbb{Z} -مدول \circ -شبه کرول و هم‌چنین \circ -کرول (به طور مشابه، 1 -تقریباً آرتینی و هم‌چنین 1 -تقریباً شبه آرتینی) هستند و $M_1 \oplus M_2$ نیز یک مدول \circ -شبه کرول (به طور مشابه، 1 -تقریباً شبه آرتینی) است. گیریم $M_1 = M_2 = \mathbb{Z}$ در این حالت \mathbb{Z} -مدول \mathbb{Z} یک مدول \circ -شبه کرول و هم‌چنین \circ -کرول (به طور مشابه، 1 -تقریباً شبه آرتینی و هم‌چنین 1 -تقریباً آرتینی) است ولی $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ یک مدول 1 -شبه کرول (به طور مشابه، 2 -تقریباً آرتینی است). سرانجام $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک \mathbb{Z} -مدول \circ -شبه کرول است در حالی که 2 -تقریباً شبه آرتینی می‌باشد.

قضیه ۴: فرض کنیم M یک R -مدول نا صفر و α یک عدد ترتیبی باشد. گیریم برای هر مدول خارج قسمتی $\frac{M}{N}$ که N زیرمدول متناهی مولدی از M است، عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$ وجود داشته باشد به طوری که $\frac{M}{N}$ یک مدول γ -شبه کرول است. آنگاه عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha + 1$ وجود دارد، به طوری که M یک مدول μ -شبه کرول است.

اثبات: گیریم $N \subsetneq M$ زیرمدول متناهی مولدی از M است. از آنجاکه $\frac{M}{N}$ به ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$ ، یک مدول γ -شبه کرول است، داریم $\alpha + 1 \leq \gamma + 1 \leq \alpha + 1$ ، $p - \dim \frac{M}{N} \leq \gamma + 1 \leq \alpha + 1$ و لذا M به ازای یک عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha + 1$ یک مدول μ -شبه کرول است، لم ۳ را ببینید.

قضیه‌ی زیر دوگان قضیه ۴ است.

قضیه ۵: گیریم α یک عدد ترتیبی و M یک R -مدول باشد، به طوری که هر زیرمدول سره‌ی متناهی مولد N از M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$ یک مدول γ -شبه کرول است. اگر $\alpha = -1$ ، آنگاه M به‌ازای $\gamma \leq 0$ یک مدول γ -شبه کرول است. در غیر این صورت M به‌ازای $\gamma \leq \alpha$ ، یک مدول γ -شبه کرول است. به‌علاوه $p - \dim M \leq \alpha + 1$.

اثبات: اگر $\alpha = -1$ ، آنگاه هر زیرمدول نا صفر از M ، ماکسیمال و ساده است، در نتیجه M به‌ازای $\gamma \leq 0$ یک مدول γ -شبه کرول است و $p - \dim M = 0$. حال فرض کنیم $\alpha \geq 0$ ؛ اگر $N \subset M$ یک زیرمدول نا صفر متناهی مولد M باشد، بنا بر فرض N به‌ازای یک عدد ترتیبی $\gamma \leq \alpha$ یک مدول γ -شبه کرول است. بنا بر گزاره‌ی ۵ داریم $p - \dim N \leq \gamma + 1 \leq \alpha + 1$. اما بنا بر لم ۲ داریم $\{p - \dim N : N \subset M, N \text{ is f.g.}\} = p - \dim M$. این نشان می‌دهد که $p - \dim M \leq \alpha + 1$. اگر $p - \dim M \leq \alpha$ ، آنگاه روشن است که M به‌ازای یک عدد ترتیبی $\mu \leq \alpha$ یک مدول μ -شبه کرول است. حال فرض کنیم $p - \dim M = \alpha + 1$ ؛ اگر $N \subset M$ ، $N \neq 0$ یک زیرمدول متناهی مولد M باشد، نشان می‌دهیم $p - \dim N \leq \alpha$ یا $p - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$. برای این منظور فرض کنیم $p - \dim N = \alpha + 1$ و نشان می‌دهیم $p - \dim \frac{M}{N} \leq \alpha$. حال گیریم $N' \subset M$ ، $N' \neq 0$ ، که N' زیرمدول متناهی مولد M باشد. از آنجایی که N' به‌ازای یک $\gamma \leq \alpha$ یک مدول γ -شبه کرول است و $p - \dim N = \alpha + 1$ ، داریم $p - \dim \frac{N'}{N} \leq \alpha$. اما بنا بر لم ۲، داریم $p - \dim \frac{M}{N} = \sup \left\{ p - \dim \frac{N'}{N} : \frac{N'}{N} \subset \frac{M}{N}, \frac{N'}{N} \text{ is f.g.} \right\} \leq \alpha$.

نتیجه ۶: گیریم M یک R -مدول باشد. اگر هر زیرمدول سره‌ی M یک مدول 0 -شبه کرول باشد، آنگاه M نیز چنین است.

ملاحظه ۸: اگر هر زیرمدول نا صفر سره‌ی R -مدول M یک مدول (-1) -شبه کرول باشد؛ آنگاه هر زیرمدول نا صفر M ، ماکسیمال و مینیمال است، و عکس این مطلب نیز درست است.

مثال ۵: گیریم $M = A \oplus B$ ؛ که A و B ، R -مدول‌های ساده هستند. به‌وضوح M یک مدول 0 -شبه کرول است. می‌دانیم هر زیرمدول سره‌ی نا صفر از M ساده و لذا مدول (-1) -شبه کرول است.

نتیجه‌ی زیر مشابه قضیه‌های ۴ و ۵ درباره‌ی مدول‌های α -تقریباً شبه آرتینی است.

گزاره ۱۴: گیریم M یک R -مدول و α یک عدد ترتیبی است. اگر هر زیرمدول سره‌ی متناهی مولد N از M (به‌طور مشابه، هر مدول خارج قسمتی $\frac{M}{N}$)، که N زیرمدول نا صفر متناهی مولدی از M است) یک مدول γ -تقریباً شبه آرتینی باشد، که $\gamma \leq \alpha$ ؛ آنگاه M یک مدول μ -تقریباً شبه آرتینی است، به‌طوری که $\mu \leq \alpha + 1$ و همچنین داریم $p - \dim M \leq \alpha$ (به‌طور مشابه، به‌طوری که $\mu \leq \alpha + 1$ و همچنین داریم $p - \dim M \leq \alpha + 1$).

منابع

- [1] Gordon, R. and Robson, J.C. (1973). *Krull dimension*, Mem. Amer. Math. Soc., 133.
- [2] Krause, G. (1972). On fully left bounded left Noetherian rings, *J. Algebra*, **23**, 88-99.
- [3] Lemonnier, B. (1972). Deviation des ensembles et groupes totalement ordonnés, *Bull. Sci. Math.*, **96**, 289-303.
- [4] Chambless, L. (1980). N-Dimension and N-critical modules, Application to Artinian modules, *Comm. Algebra*, **8**, 1561-1592.
- [5] Karamzadeh, O.A.S. (1974). Noetherian-dimension, Ph.D. thesis, Exeter University, England, UK.
- [6] Karamzadeh, O.A.S. and Motamedi, M. (1994). On α -DICC modules, *Comm. Algebra*, **22**, 1933-1944.
- [7] Karamzadeh, O.A.S. and Sajedinejad, A.R. (2001). Atomic modules, *Comm. Algebra*, **29**, 2757-2773.
- [8] Karamzadeh, O.A.S. and Sajedinejad, A.R. (2002). On the Loewy length and the Noetherian dimension of Artinian modules, *Comm. Algebra*, **30**, 1077-1084.
- [9] Kirby, D. (1990). Dimension and length for Artinian modules, *Quart. J. Math. Oxford*, **41**, 419-429.
- [10] Hashemi, J., Karamzadeh, O.A.S. and Shirali, N. (2009). Rings over which the Krull dimension and the Noetherian dimension of all modules coincide, *Comm. Algebra*, **37**, 650-662.
- [11] Karamzadeh, O.A.S. and Shirali, N. (2004). On the countability of Noetherian dimension of Modules, *Comm. Algebra*, **32**, 4073-4083.
- [12] Davoudian, M. (2018). Modules with chain condition on non-finitely generated submodules, *Mediterr. J. Math.*, **15**, 1-12.

- [13] Davoudian, M. (2016). Dimension of non-finitely generated submodules, *Vietnam J. Math.*, **44**, 817-827.
- [14] Davoudian, M. (2017). Modules satisfying double chain condition on non-finitely generated submodules have Krull dimension, *Turk. J. Math.*, **41**, 1570-1578.
- [15] Davoudian, M. and Ghayour, O. (2017). The length of Artinian modules with countable Noetherian dimension, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **43**, 1621-1628.
- [16] Davoudian, M. (2017). On α -quasi short modules, *Int. Electron. J. Algebra*, **21**, 91-102.
- [17] Davoudian, M. and Shirali, N. (2016). On α -tall modules, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **41**, 1739-1747.
- [18] Davoudian, M. (2015). *Perfect dimension*, The 46th Annual Iranian Mathematics Conference, Yazd University, Yazd, Iran.
- [19] Albu, T. and Vámos, P. (1998). Global Krull dimension and Global dual Krull dimension of valuation Rings, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, **201**, 37-54.
- [20] Albu, T. and Smith, P.F. (1999). Dual Krull dimension and duality, *Rocky Mountain J. Math.*, **29**, 1153-1164.
- [21] Albu, T. and Smith, P.F. (1996). Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (I), *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **120**, 87-101.
- [22] Albu, T. and Smith, P.F. (1997). Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (II), *Comm. Algebra*, **25**, 1111-1128.
- [23] Davoudian, M. (2012). On perfect dimension of modules, Ph. D. thesis, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran.
- [24] Davoudian, M. and Karamzadeh, O.A.S. (2016). Artinian serial modules over commutative (or left Noetherian) rings are at most one step away from being Noetherian, *Comm. Algebra*, **44**, 3907-3917.
- [25] Hein, J. (1979). Almost Artinian modules, *Math. Scand.*, **45**, 198-204.
- [26] Bilhan, G. and Smith P.F. (2006). Short modules and almost Noetherian modules, *Math. Scand.*, **98**, 12-18.
- [27] Davoudian, M., Karamzadeh O.A.S. and Shirali N. (2014). On α -short modules, *Math. Scand.*, **114** (1), 26-37.
- [28] Davoudian, M., Halali, A. and Shirali, N. (2016). On α -almost Artinian modules, *Open Math.* **14**, 404-413.

- [29] Davoudian, M. On α -semi short modules, *Journal of Algebraic system*, to appear.
- [30] Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1992). *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag.
- [31] McConnell, J.C. and Robson, J.C. (1987). *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York.

On α -semi Krull Modules

Maryam Davoudian

Department of Mathematics, Shahid Chamran University of
Ahvaz, Ahvaz, Iran**Abstract**

In this article we introduce and study the concept of α -almost semi Artinian modules. Using this concept we extend some of the basic results of α -almost Artinian modules to α -almost semi Artinian modules. Moreover we introduce and study the concept of α -semi Krull modules. We show that if M is an α -semi Krull module, then the perfect dimension of M is either α or $\alpha + 1$.

Keywords: Krull dimension, α -semi Krull module, α -almost Noetherian module, Noetherian dimension, α -short module.

Mathematics Subject Classification (2010): 16P20, 16P40.